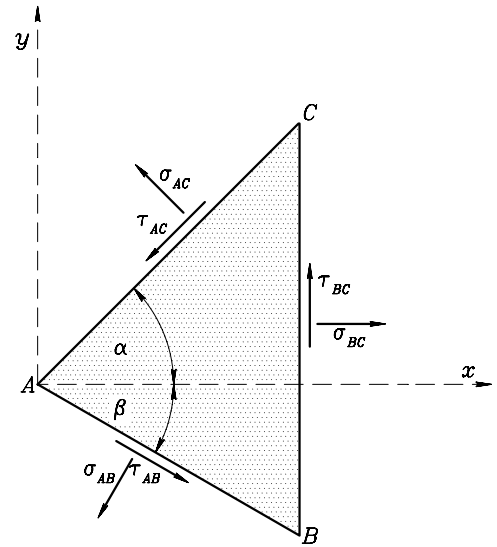


# Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES (skupina A)

3. februar 2005

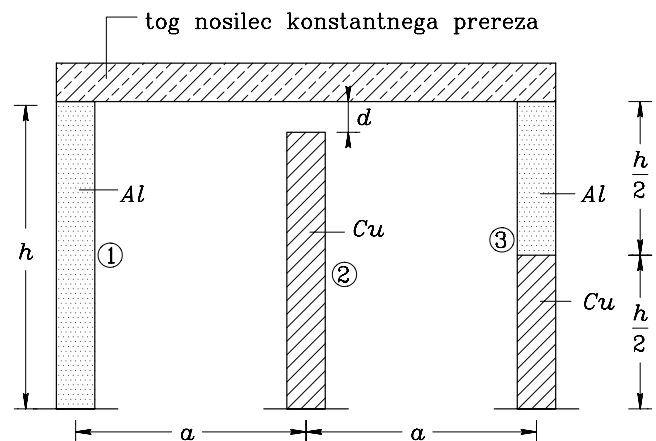
1. Iz stene, konstantne debeline, v kateri vlada homogeno ravninsko napetostno stanje (RNS), izrežemo majhen trikotnik  $ABC$ . Poznamo napetosti  $\sigma_{AB}$ ,  $\tau_{AC}$  in  $\tau_{BC}$ . Izračunaj manjkajoče napetosti  $\tau_{AB}$ ,  $\sigma_{AC}$  in  $\sigma_{BC}$  in komponente tenzorja deformacij v KKS. Izračunaj tudi spremembo ploščine  $\Delta S$  trikotnika  $ABC$ . Lastno težo stene zanemari.

**Podatki:**  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\sigma_{AB} = 1 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{AC} = 1 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{BC} = 1 \text{ MPa}$ ,  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ .



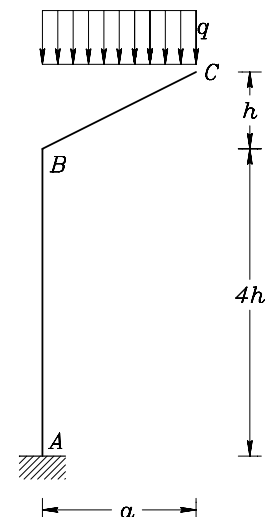
2. Homogen tog nosilec teže  $G$  položimo na tri stebre enakega prečnega prereza  $A_x$ , kot kaže slika. Steber 1 je iz aluminija, steber 2 iz bakra, steber 3 pa iz aluminija in bakra. Izračunaj napetosti v stebrih po deformaciji in skrček desnega stebra.

**Podatki:**  $G = 800 \text{ kN}$ ,  $A_x = 100 \text{ cm}^2$ ,  $E_{Al} = 72\,000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_{Al} = 0.34$ ,  $E_{Cu} = 115\,000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_{Cu} = 0.34$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$ ,  $d = 0.1 \text{ cm}$ .



3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$ . Z metodo upogibnice ali uporabo tabel **obvezno določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil** in določi pomik točke  $C$ .

**Podatki:**  $q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0.5 \text{ m}$ ,  $A_x = 200 \text{ cm}^2$ ,  $I_y = 5000 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ .

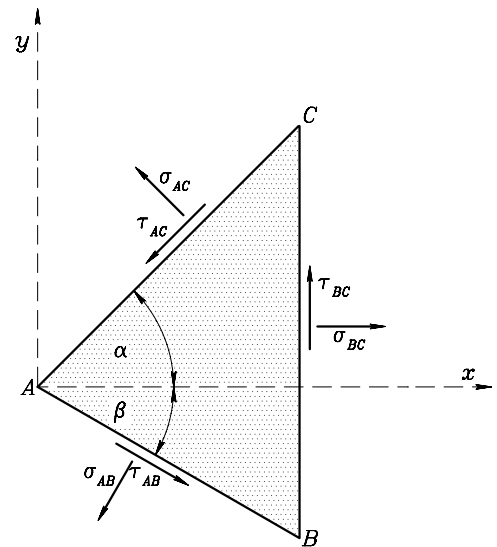


# Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES (skupina B)

3. februar 2005

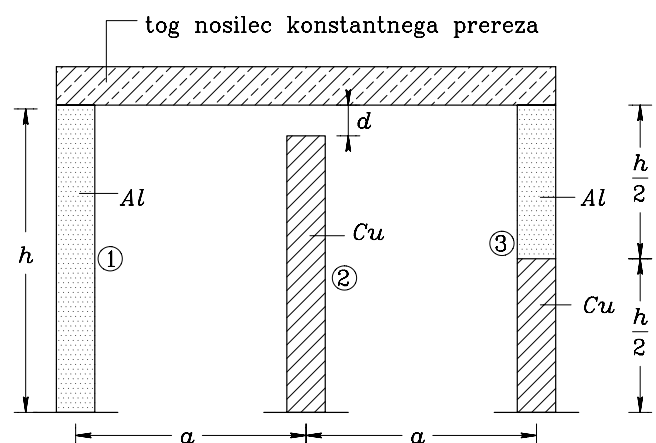
1. Iz stene, konstantne debeline, v kateri vlada homogeno ravninsko napetostno stanje (RNS), izrežemo majhen trikotnik  $ABC$ . Poznamo napetosti  $\tau_{AB}$ ,  $\sigma_{AC}$  in  $\tau_{BC}$ . Izračunaj manjkajoče napetosti  $\sigma_{AB}$ ,  $\tau_{AC}$  in  $\sigma_{BC}$  in komponente tenzorja deformacij v KKS. Izračunaj tudi spremembo ploščine  $\Delta S$  trikotnika  $ABC$ . Lastno težo stene zanemari.

**Podatki:**  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\tau_{AB} = 1 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{AC} = 1 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{BC} = 1 \text{ MPa}$ ,  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ .



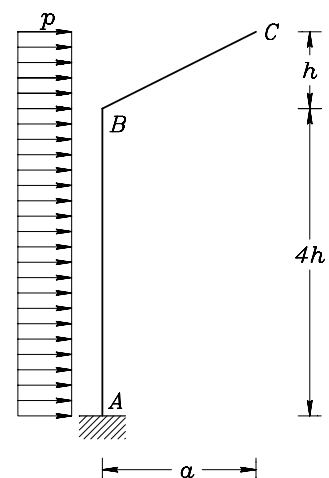
2. Homogen tog nosilec teže  $G$  položimo na tri stebre enakega prečnega prereza  $A_x$ , kot kaže slika. Steber 1 je iz aluminija, steber 2 iz bakra, steber 3 pa iz aluminija in bakra. Izračunaj napetosti v stebrih po deformaciji in skrček desnega stebra.

**Podatki:**  $G = 800 \text{ kN}$ ,  $A_x = 100 \text{ cm}^2$ ,  $E_{Al} = 72\,000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_{Al} = 0.34$ ,  $E_{Cu} = 115\,000 \text{ MPa}$ ,  $\nu_{Cu} = 0.34$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$ ,  $d = 0.1 \text{ cm}$ .



3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $p$ . Z metodo upogibnice ali uporabo tabel **obvezno določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil** in določi pomik točke  $C$ .

**Podatki:**  $p = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0.5 \text{ m}$ ,  $A_x = 200 \text{ cm}^2$ ,  $I_y = 5000 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ .



# Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES (skupina A) namigi

**3. februar 2005**

1. Pri ravninskem napetostnem stanju v našem so od nič različne samo tri komponente tenzorja napetosti tj.  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{yy}$ . Na razpolago imamo pa tudi tri podatke  $\tau_{AC}$ ,  $\sigma_{AB}$  in  $\tau_{BC}$ . Po vseh robovih napišemo ustrezne transformacijske enačbe

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{ij} \sigma_{ij} e_{\alpha i} e_{\beta j}.$$

rob AB:  $\sigma_{AB} = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{xx} e_{\alpha x}^2 + 2\sigma_{xy} e_{\alpha x} e_{\alpha y} + \sigma_{yy} e_{\alpha y}^2,$

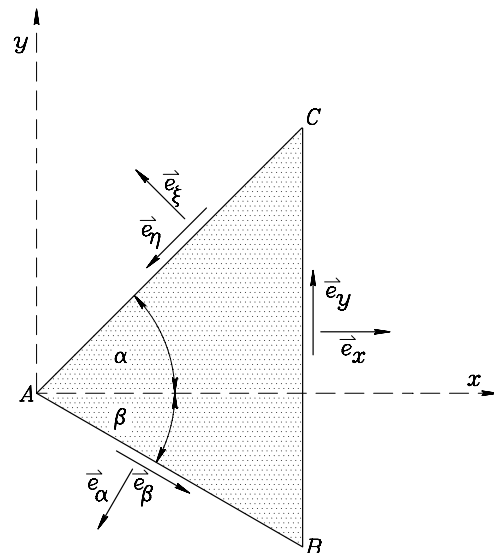
rob AC:  $\tau_{AC} = \sigma_{\xi\eta} = \sigma_{xx} e_{\xi x} e_{\eta x} + \sigma_{xy} e_{\xi x} e_{\eta y} + \sigma_{xy} e_{\xi y} e_{\eta x} + \sigma_{yy} e_{\xi y} e_{\eta y},$

rob BC:  $\tau_{BC} = \sigma_{xy}.$

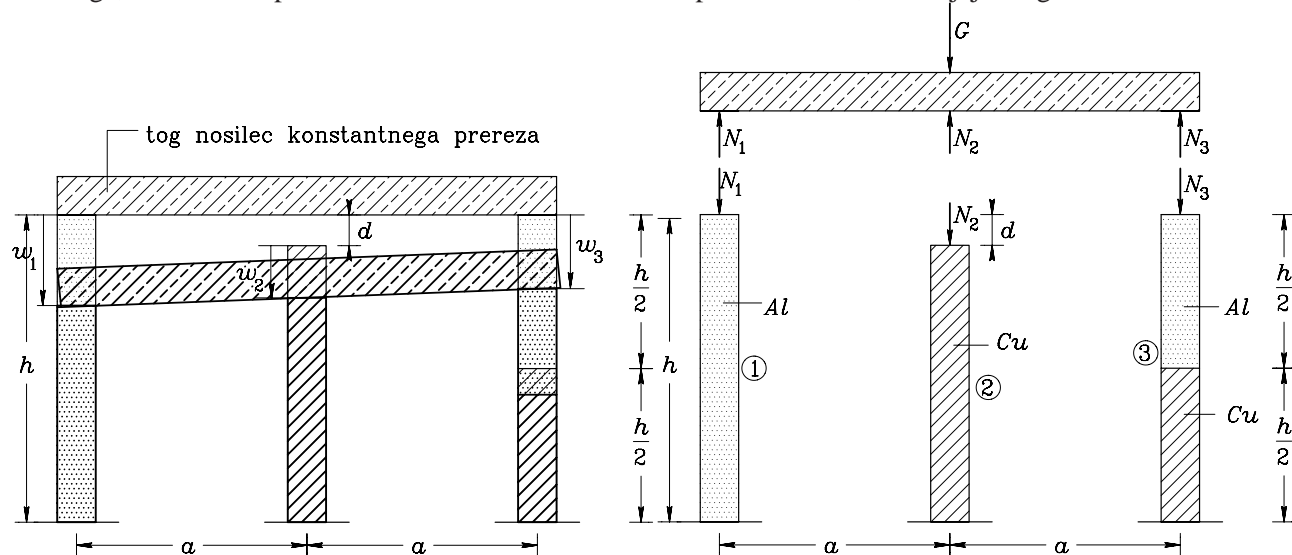
Iz gornjih treh enačb izračunamo tri neznane napetosti  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{yy}$ . Komponente tenzorja deformacij dobimo iz konstitucijskih enačb

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1^{\sigma} \delta_{ij}.$$

Spremembo ploščine lahko določimo na dva načina. Označimo s  $S$  ploščino trikotnika  $ABC$ . Lahko izračunamo novo ploščino  $S'$  in spremembo  $\Delta S$  dobimo po enačbi  $\Delta S = S' - S$ . Lahko pa najprej izračunamo specifično spremembo ploščine  $\frac{\Delta S}{S}$ . To podaja izraz  $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ . Torej  $\Delta S$  izračunamo enostavneje po enačbi  $\Delta S = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) S$ .



2. Premislamo, kako se konstrukcija deformira. Ker je desni stebler nekoliko bolj tog od levega se bo greda premaknila navzdol in zasukala kot prikazuje slika. Z odebeljeno črto na levi sliki je prikazana deformirana lega, s tanko črto pa nedeformirana. Na desni sliki so prikazane sile, ki delujejo na gredo in stebre.



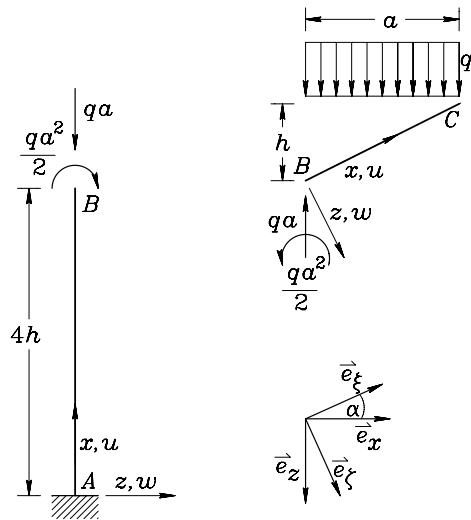
Napišemo 2 ravnotežni enačbi za gredo in 3 enačbe, ki povezujejo osne sile s skrčki stebrov. Skrček desnega stebra dobimo npr. z enačbo  $w_3 = w_3^{Al} + w_3^{Cu} = \frac{N_3 \frac{h}{2}}{E_{Al} A x} + \frac{N_3 \frac{h}{2}}{E_{Cu} A x}$ . Upoštevamo da je greda toga, zato lahko pomike  $w_1$ ,  $w_2$  in  $w_3$  povežemo z enačbo (glej levo sliko)

$$w_2 + d = \frac{w_1 + w_3}{2}.$$

Iz 6 enačb izračunamo neznane sile  $N_1$ ,  $N_2$  in  $N_3$  ter pomike  $w_1$ ,  $w_2$  in  $w_3$ .

3. Konstrukcija (konzola) je statično določena, zato lahko notranje sile določimo z znanjem statike. Mi bomo posvetili več pozornosti določitvi pomika točke  $C$ . Tu lahko postopamo na več načinov. Opišimo osnovni način reševanja.

Konstrukcijo razrežemo kot prikazuje spodnja slika na nosilca  $AB$  in  $BC$ . Vplive odstranjenih delov nadomestimo s silami. V vsakem nosilcu uvedemo lokalna koordinatna sistema  $x, z$ .



Pomik in zasuk prostega krajišča  $B$  konzole  $AB$  lahko določimo direktno z uporabo tabel.

Pomike nosilca  $BC$  določimo po sledečem postopku: Najprej določimo diagrame notranjih sil  $N_x$  in  $M_y$ . Potem integriramo diferencialni enačbi  $w'' = \frac{-M_y}{EI_y}$  in  $u' = \frac{N_x}{EA_x}$ . Integracijske konstante določimo tako, da izenačimo pomike in zasuke nosilcev  $AB$  in  $BC$  v točki  $B$ . Konkretno (glej sliko)

$$\begin{aligned}\vec{u}_1(B) &= -u_1(B)\vec{e}_z + w_1(B)\vec{e}_x = \vec{u}_2(B) = u_2(B)\vec{e}_\xi + w_2(B)\vec{e}_\zeta, \\ \vec{\omega}_1(B) &= \omega_{1y}(B)\vec{e}_y = \vec{\omega}_2(B) = \omega_{2y}(B)\vec{e}_y.\end{aligned}$$

Vektorja  $\vec{e}_\xi$  in  $\vec{e}_\zeta$  izrazimo z vektorjema  $\vec{e}_x$  in  $\vec{e}_z$ . Dobimo  $\vec{e}_\xi = \cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z$  in  $\vec{e}_\zeta = \sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z$ . Te izraze upoštevamo v gornjih enačbah in tako dobimo zvezo med  $u_1(B)$  in  $w_1(B)$  ter  $u_2(B)$  in  $w_2(B)$ . Ko poznamo integracijske konstante, poznamo pomik v vsaki točki nosilca  $BC$  in s tem tudi pomik v točki  $C$ . Tega potem dobimo iz enačbe  $\vec{u}(C) = u_2(C)\vec{e}_\xi + w_2(C)\vec{e}_\zeta$ .

**Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES (skupina A) rešitve**  
**3. februar 2005**

1. Napetosti so:  $\sigma_{BC} = 1.6340 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{AC} = -0.366 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{AB} = -1.366 \text{ MPa}$ ,  
 $\sigma_{xx} = 1.6340 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{xy} = 1 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{yy} = -0.366 \text{ MPa}$ .  
 $\Delta S = 4.4378 \cdot 10^{-6} S$ , kjer je  $S$  ploščina trikotnika  $ABC$ .
  
2. Osne sile v stebrih so:  $N_1 = 315.41 \text{ kN}$ ,  $N_2 = 169.18 \text{ kN}$  in  $N_3 = 315.41 \text{ kN}$ .  
Skrčki stebrov so:  $w_1 = 0.175 \text{ cm}$ ,  $w_3 = 0.142 \text{ cm}$ ,  $w_2 = \frac{w_1 + w_3}{2} - d$ .
  
3. Pomik točke  $C$  znaša  $\vec{u}(C) = 0.0978 \text{ cm} \vec{e}_x + 0.0523 \text{ cm} \vec{e}_z$ .