

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES

8. september 2006

1. V točki T linearno elastičnega - linearno plastičnega telesa vlada **ravninsko napetostno stanje** glede na ravnino z normalo $\vec{e}_b = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$. V ravnini z normalo $\vec{e}_a = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ nastopa samo normalna napetost $\sigma_{aa} = 30$ MPa. Pri tem napetostnem stanju se v točki T v skladu z Misesovem kriterijem pojavijo plastične deformacije.

Izračunaj komponente tenzorja napetosti σ_{ij} v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z) .

Podatki: $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_Y = 240$ MPa.

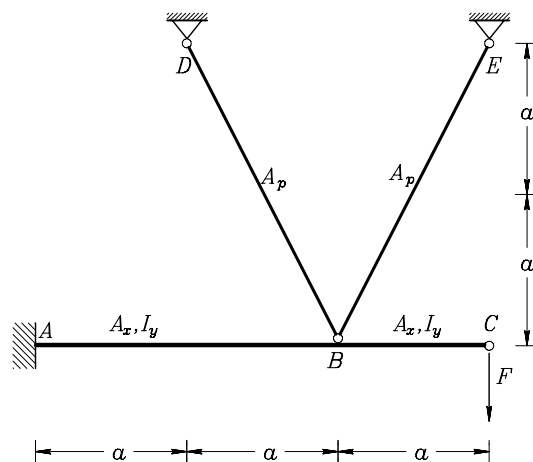
2. Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ϵ_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x in y . Vse točke telesa se premikajo le v ravnini (x,y) . Poznana sta tudi pomik točke $T_0(1,0,0)$, tj. $\vec{u}_{T_0} = 10^{-4} \cdot (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y)$ in zasuk v točke $T_1(1,1,0)$, tj. $\vec{\omega}_{T_1} = -5 \cdot 10^{-5} \vec{e}_z$. Določi tenzor velikih deformacij v točki $T(5,5,0)$. Razdalje in pomiki so v m.

$$[\epsilon_{ij}] = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 2 + 3x^2 + 4x^3 & \frac{1}{2}(3 + 3x^2 + 4x^3 + 3y^2 + 4y^3) & 0 \\ \frac{1}{2}(3 + 3x^2 + 4x^3 + 3y^2 + 4y^3) & 1 + 3y^2 + 4y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podatki: $a = 2$, $b = 5$.

3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z navpično F . Vsi nosilci in palice so iz enakega materiala. Z metodo upogibnice ali uporabo tabel določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil in določi vodoravni pomik točke B .

Podatki: $F = 1$ kN, $a = 2$ m, $A_p = 50$ cm², $A_x = 100$ cm², $I_y = 5000$ cm⁴, $E = 2 \cdot 10^4$ $\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



Točkovanje: 40 % + 30 % + 40 % = 110%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES - Rešitve nalog

8. september 2006

1. Ker v ravnini z normalo \vec{e}_a nastopa samo glavna normalna napetost, je to hkrati tudi ena izmed glavnih ravnin tj. $\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ in $\sigma_{11} = \sigma_{aa}$. Ker je vektor \vec{e}_b normalni vektor ravnine v kateri vlada ravninsko napetostno stanje je $\vec{e}_b = \vec{e}_2$ in $\sigma_{22} = 0$. (Ker je normalna napetost $\sigma_{11} \neq 0$ mora biti vektor \vec{e}_2 pravokoten na \vec{e}_1 . To tudi je). Tretja glavna smer je pravokotna na smeri \vec{e}_1 in \vec{e}_2 torej jo lahko izračunamo z vektorskim produktom obeh normal tj.

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z).$$

Upoštevamo, da je v točki T izpolnjen tudi Misesov pogoj tečenja tj.

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 = 2\sigma_Y^2,$$

$$30^2 + (30 - \sigma_{33})^2 + \sigma_{33}^2 = 2 \cdot 240^2 \implies \begin{cases} \sigma_{33} = -223.6 \text{ MPa} \\ \sigma_{33} = 253.6 \text{ MPa.} \end{cases}$$

Našli smo dve rešitvi in sicer

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -223.6 \end{bmatrix} \text{ MPa,} \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 253.6 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Poznamo tudi transformacijsko matriko $[T]$ tj.

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Z uporabo enačbe

$$[\sigma_{ij}] = [T] \cdot [\sigma_{\alpha\beta}] \cdot [T]^T$$

izračunamo

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -27.3 & -27.3 & 84.5 \\ -27.3 & -27.3 & 84.5 \\ 84.5 & 84.5 & -139.1 \end{bmatrix} \text{ MPa,} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 52.3 & 52.3 & -74.5 \\ 52.3 & 52.3 & -74.5 \\ -74.5 & -74.5 & 179.1 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

2. Z uporabo enačb

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{T_0}^T \nabla \times \vec{e}_x dx + \int_{T_0}^T \nabla \times \vec{e}_y dy + \int_{T_0}^T \nabla \times \vec{e}_z dz,$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \int_{T_0}^T \vec{e}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x dx + \int_{T_0}^T \vec{e}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y dy + \int_{T_0}^T \vec{e}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z dz$$

in robnih pogojev izračunamo pomike (konstanti c_1 in c_2 na sam izračun tenzorjev deformacij ne vplivata)

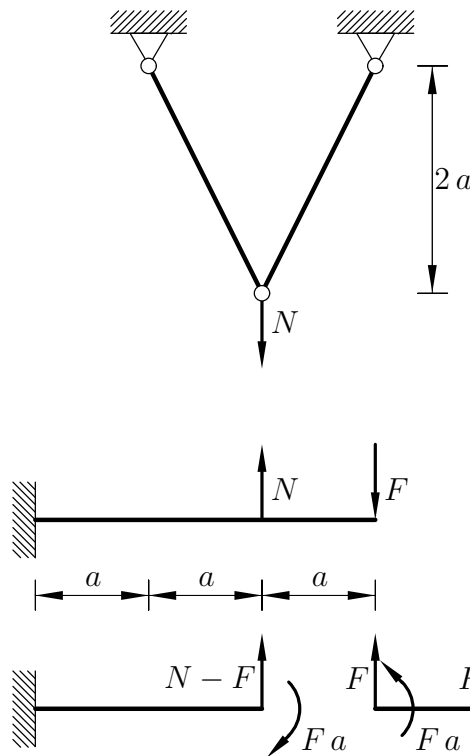
$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y, \\ u_x &= 10^{-4} (c_1 + 2x + x^3 + x^4 + 2y + y^3 + y^4), \\ u_y &= 10^{-4} (c_2 + x + x^3 + x^4 + y + y^3 + y^4)\end{aligned}$$

in potem še komponente tenzorja majhnih in velikih deformacij v točki T

$$[\varepsilon_{ij}(T)] = \begin{bmatrix} 0.0577 & 0.05765 & 0 \\ 0.05765 & 0.05765 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [E_{ij}(T)] = \begin{bmatrix} 0.0610 & 0.06097 & 0 \\ 0.06097 & 0.06092 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Komponente tenzorja velikih deformacij lahko z uporabo deformacijskega gradienta določimo tudi hitreje!

3. Konstrukcijo razrežemo, kot prikazuje spodnja slika. Zakaj je vodoravna sila v vezi B enaka nič?



Z uporabo podajnostnih matrik določimo pomik konzole v točki B

$$w_k(B) = \frac{(F - N)(2a)^3}{3EI_y} + \frac{(Fa)(2a)^2}{2EI_y}$$

Z uporabo metode pomikov določimo tudi navpični pomik prostega krajišča paličja. Oštevilčimo vozlišča paličja D , B in E z 1, 2 in 3. Izračunamo togostni matriki palic 12 in 23 in dobimo

$$\begin{aligned}[k_{12}] &= \frac{EA_p}{5l_p} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \quad -2] = \frac{EA_p}{5l_p} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ [k_{23}] &= \frac{EA_p}{5l_p} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad 2] = \frac{EA_p}{5l_p} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Od tu dobimo togostno matriko paličja

$$[K] = \frac{EA_p}{5a\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Napišemo sistem enačb

$$[K][U] + [F] = [0]$$

tj.

$$\frac{EA_p}{5a\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(1) = 0 \\ u_y(1) = 0 \\ u_x(2) \\ u_y(2) \\ u_x(3) = 0 \\ u_y(3) = 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ 0 \\ -N \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix}.$$

Od tu dobimo

$$w_p(B) = \frac{N5\sqrt{5}a}{8EA_p}.$$

Izenačimo pomika konzole s pomikom paličja in dobimo silo N

$$N = 1.7477 \text{ kN}.$$

Ker se paličje zelo malo povesi, bi **približek** za silo N lahko dobili tudi iz pogoja

$$w_k(B) = 0 \implies N = 1.75 \text{ kN}.$$