

4. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

(tenzor napetosti II)

(strižne napetosti, ravninsko napetostno stanje, Mohrovi krogi)

NALOGA 1: Pokaži, da lahko strižno napetost v oktaederski ravnini τ_o zapišemo z enačbo

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}.$$

NALOGA 2: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}.$$

Določi

- (a) normalno in strižno komponento, ter velikost vektorja napetosti, ki v točki P pripada ravnini z normalo

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \sqrt{2} \mathbf{e}_z),$$

- (b) komponente podanega tenzorja napetosti v desnosučnem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ) , ki ga tvori, dana smer \mathbf{e}_ξ z dvema pravokotnima smerema

$$\mathbf{e}_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_y + e_{\eta z} \mathbf{e}_z \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_\zeta,$$

- (c) velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti,
(č) velikosti in ravnine ekstremnih strižnih napetosti ter pripadajoče normalne napetosti v teh ravninah,
(d) hidrostatični in deviatorični del tenzorja napetosti ter velikosti in smeri glavnih deviatoričnih napetosti,
(e) normalno in strižno napetost v oktaedrski ravnini skozi točko P .

Rešitev:

- (a) $\sigma_\xi = 4.379 \mathbf{e}_x + 4.914 \mathbf{e}_y - 3.328 \mathbf{e}_z$,
 $\sigma_{\xi\xi} = 2.293 \text{ Pa}$, $\sigma_{\xi t} = 7.010 \text{ Pa}$.

- (b) $e_\eta = 0$, $\mathbf{e}_\zeta = \frac{1}{2} (-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \sqrt{2} \mathbf{e}_z)$,

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 2.293 & 0.379 & -7 \\ 0.379 & 0 & 4.621 \\ -7 & 4.621 & 3.707 \end{bmatrix}.$$

(c) $\sigma_{11} = 11.018 \text{ Pa}$, $\sigma_{22} = 1.098 \text{ Pa}$, $\sigma_{33} = -6.116 \text{ Pa}$,
 $\mathbf{e}_1 = 0.879 \mathbf{e}_x + 0.462 \mathbf{e}_z - 0.114 \mathbf{e}_z$.
 $\mathbf{e}_2 = 0.347 \mathbf{e}_x - 0.786 \mathbf{e}_z - 0.512 \mathbf{e}_z$.
 $\mathbf{e}_3 = -0.326 \mathbf{e}_x + 0.411 \mathbf{e}_z - 0.852 \mathbf{e}_z$.

(č) Ekstremne strižne napetosti:

$$\tau_I = \frac{1}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) = 3.607 \text{ Pa},$$

$$\tau_{II} = \frac{1}{2} (\sigma_{33} - \sigma_{11}) = -8.567 \text{ Pa},$$

$$\tau_{III} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = 4.960 \text{ Pa},$$

Pripadajoče normalne napetosti:

$$\sigma_{III} = \frac{1}{2} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) = -2.509 \text{ Pa},$$

$$\sigma_{IIII} = \frac{1}{2} (\sigma_{33} + \sigma_{11}) = 2.451 \text{ Pa},$$

$$\sigma_{IIIII} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 6.058 \text{ Pa},$$

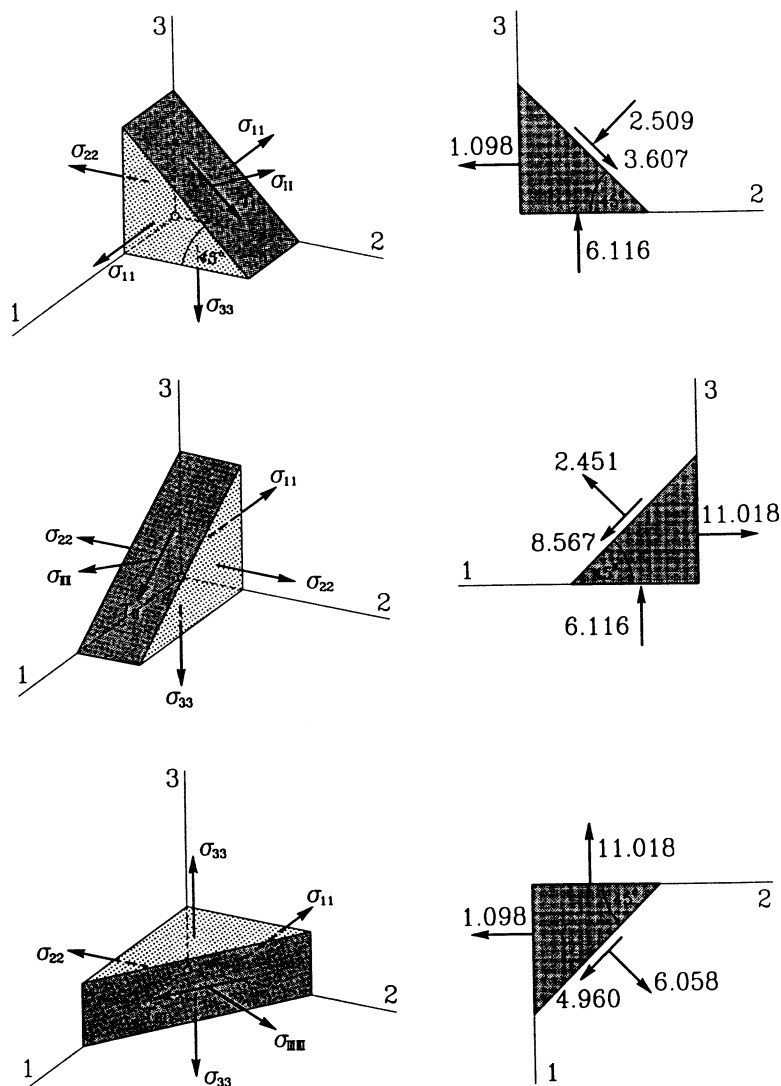
Smeri ravnin z ekstremnimi strižnimi napetostmi:

$$\mathbf{e}_I = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0.014 \mathbf{e}_x - 0.265 \mathbf{e}_z - 0.964 \mathbf{e}_z.$$

$$\mathbf{e}_{II} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1) = 0.391 \mathbf{e}_x + 0.617 \mathbf{e}_z - 0.683 \mathbf{e}_z.$$

$$\mathbf{e}_{III} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 0.867 \mathbf{e}_x - 0.229 \mathbf{e}_z - 0.443 \mathbf{e}_z.$$

Spodnja slika prikazuje prikaz delovanja teh napetosti na elementarnih prizmah "izrezanih" iz telesa v okolici obravnavane točke P.



(d) Hidrostatski del tenzorja napetosti:

$$[\sigma_{ij}^H] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Deviatorični del tenzorja napetosti:

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Glavne deviatorične napetosti: $s_{11} = 9.018 \text{ Pa}$, $s_{22} = -0.902 \text{ Pa}$, $s_{33} = -8.116 \text{ Pa}$.

(e) Normalna oktaedrske ravnine $\mathbf{e}_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

Normalna napetost v oktaedrski ravnini $\sigma_{oo} = 2 \text{ Pa}$.

Strižna napetost v oktaedrski ravnini $\tau_o = \pm 7.024 \text{ Pa}$.

NALOGA 3: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z) .

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} [\text{Pa}].$$

Določi velikost po absolutni vrednosti največje strižne napetosti τ_{\max} in normalo ravnine v kateri deluje.

Rešitev: Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 10 \text{ Pa}$, $\sigma_{22} = 5 \text{ Pa}$, $\sigma_{33} = -15 \text{ Pa}$.

$\tau_{\max} = (\sigma_{33} - \sigma_{11})/2 = -12.5 \text{ Pa}$.

NALOGA 4: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Določi normalo ravnine, v kateri je normalna napetost σ_N enaka $\frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}$, strižna τ_N pa $\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{4}$.

Rešitev: $\mathbf{e}_N = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_y + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{e}_z$.

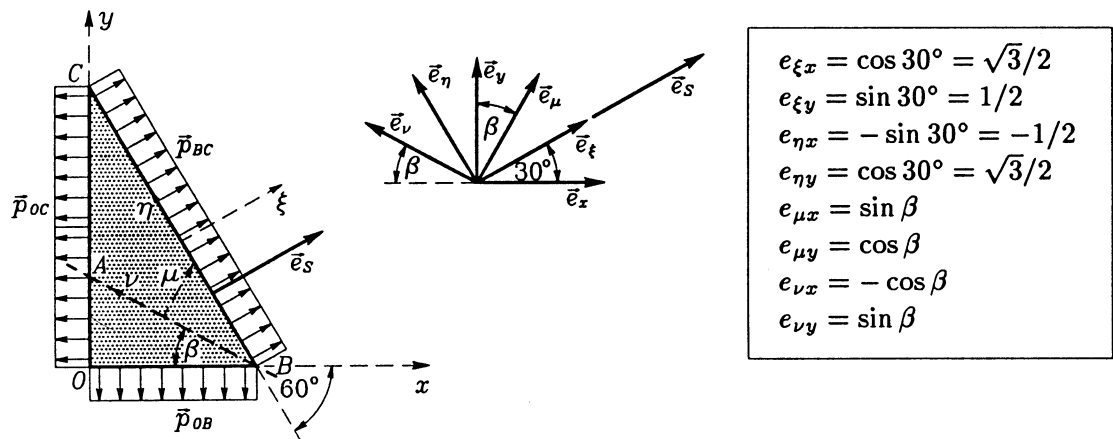
NALOGA 5: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z) .

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ v ravnini z normalo $\mathbf{e}_n = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z)$. Rezultate preveri z Mohrovimi krogi.

Rešitev: $\boldsymbol{\sigma}_n = -\frac{10}{3} \mathbf{e}_x - 10 \mathbf{e}_y - \frac{10}{3} \mathbf{e}_z$.

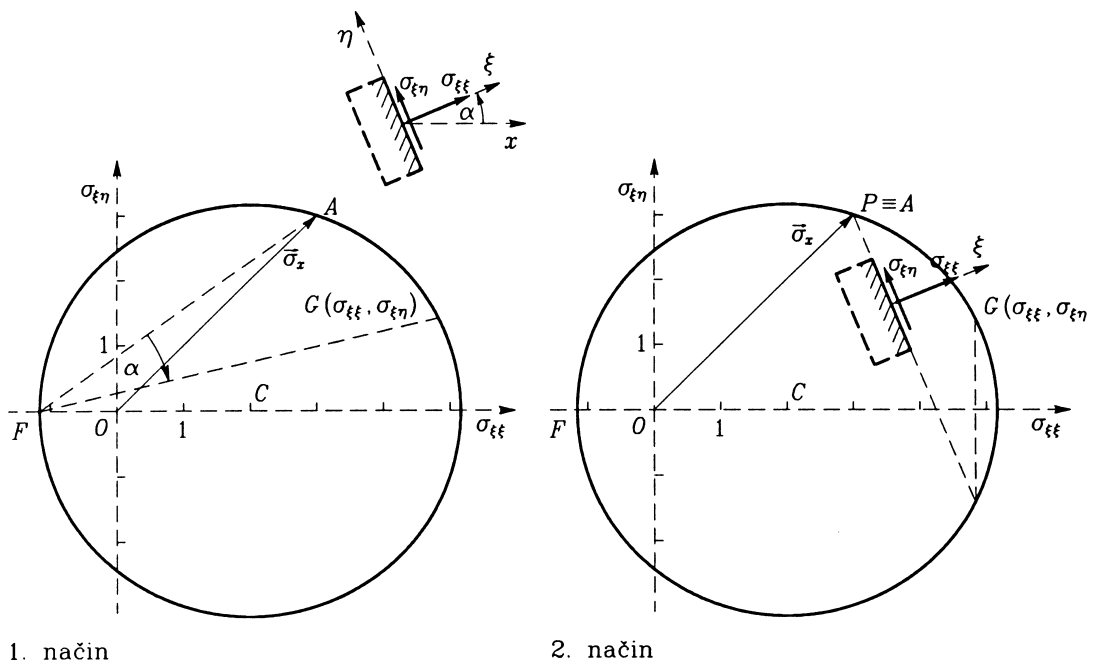
NALOGA 6: Na stranske ploskve tanke trikotne prizme deluje samo normalna enakomerna površinska obtežba. Privzemimo, da so napetosti po celotni prostornini prizme enake. Določimo napetosti v poljubni ravnini AB , ki je glede na negativno os nagnjena za kot β . Normalna obtežba na robu BC z normalo \mathbf{e}_ξ je $p_{BC} = -2 \text{ Pa}$.



Rešitev: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -2 \text{ Pa}$, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{\mu\mu} = -2 \text{ Pa}$, $\sigma_{\mu\nu} = 0$.

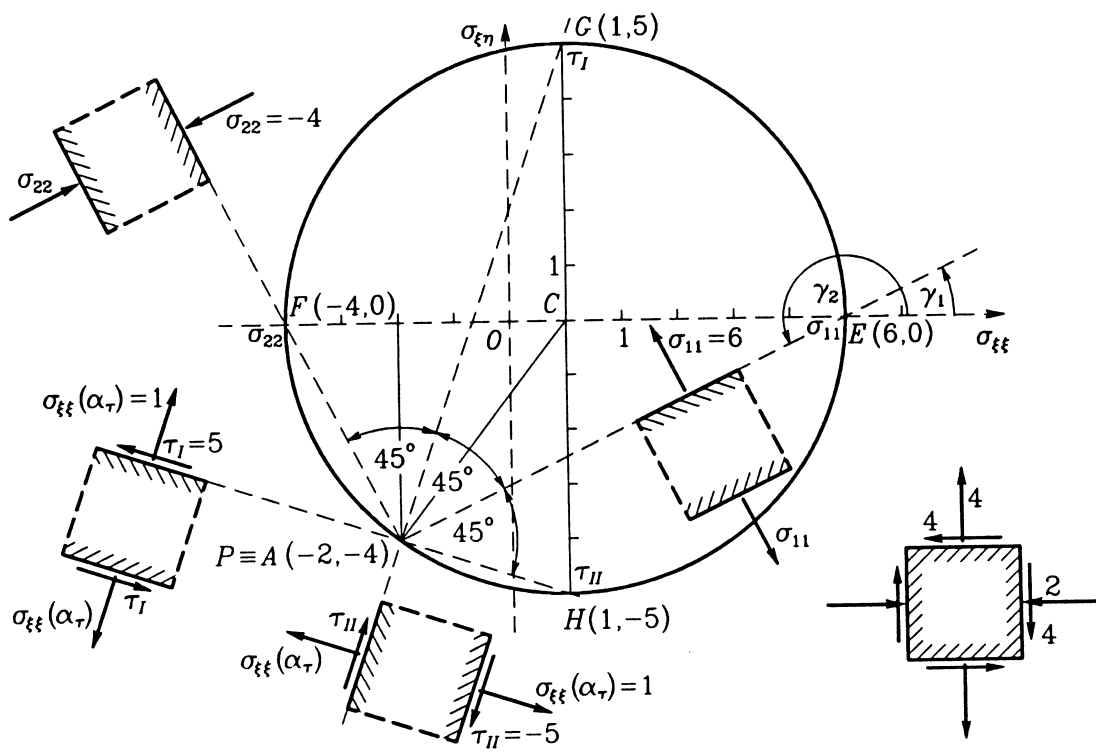
NALOGA 7: Napetostno stanje je podano s komponentami tenzorja napetosti v koordinatnem sistemu x, y : $\sigma_{xx} = 3 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_{yy} = 1 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_{xy} = 3 \text{ N/cm}^2$. Določi napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ in $\sigma_{\xi\eta}$ v ravnini z normalo e_ξ , $\alpha = 22.5^\circ$ z uporabo Mohrovih krogov.

Rešitev:



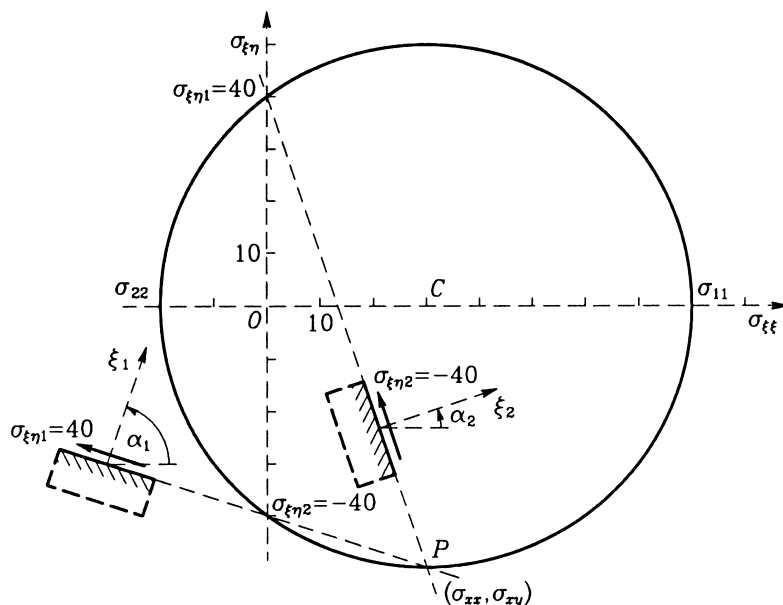
NALOGA 8: Podane so napetosti σ_{xx} , σ_{yy} in σ_{xy} ($\sigma_{xx} = -2 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_{yy} = 4 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_{xy} = -4 \text{ N/cm}^2$). Z Mohrovo krožnico določi velikosti glavnih normalnih napetosti in pripadajoče smeri ravnin. Določi tudi največje strižne napetosti, pripadajoče normalne napetosti ter smeri ravnin za te napetosti. Rezultate prikaži na kvadratih, katerih robovi imajo smeri ravnin za iskane napetosti.

Rešitev:



NALOGA 9: Ravnsko napetostno stanje je podano s komponentami napetostnega tenzorja $[\sigma_{ij}]$ v koordinatnem sistemu x, y : $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 30 \text{ Pa}$, $\sigma_{xy} = -50 \text{ Pa}$. Določi naklon ravnin glede na os x , v kateri delujejo le strižne napetosti $\sigma_{\xi\eta}$, normalne pa so enake nič ($\sigma_{\xi\xi} = 0$). Določi tudi vrednosti teh strižnih napetosti.

Rešitev:



NALOGA 10: Napetostno stanje telesa je podano s tenzorjem napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & Cz & 0 \\ Cz & 0 & -Cx \\ 0 & -Cx & 0 \end{bmatrix} [Pa],$$

kjer je C poljubna konstanta.

(a) Pokaži, da mora volumska obtežba enaka nič, če hočemo zadostiti ravnotežnim enačbam.

- (b) V točki $P(4, -4, 7)$ izračunaj napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_r$, ki pripada ravnini $2x + 2y - z = -7$.
- (c) V točki $P(4, -4, 7)$ izračunaj napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_s$, ki pripada sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 9^2$.
- (d) Izračunaj glavne normalne napetosti, po absolutni vrednosti največjo strižno napetost, in glavne deviatorične napetosti.
- (e) Določi Mohrove kroge, ki ustrezajo napetostnemu stanju v točki P .

Rešitev:

- (b) Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_r = \frac{C}{3} (14 \mathbf{e}_x + 18 \mathbf{e}_y - 8 \mathbf{e}_z)$.
- (c) Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{C}{9} (-28 \mathbf{e}_x + 0 \mathbf{e}_y + 16 \mathbf{e}_z)$.
- (d) Glavne normalne napetosti $\sigma_{11} = \sqrt{65} \text{ Pa}$, $\sigma_{22} = 0 \text{ Pa}$, $\sigma_{33} = -\sqrt{65} \text{ Pa}$.
 Največja strižna napetost $\tau_{\max} = \pm \sqrt{65} \text{ Pa}$.
 Glavne deviatorične napetosti $s_{11} = \sqrt{65} \text{ Pa}$, $s_{22} = 0 \text{ Pa}$, $s_{33} = -\sqrt{65} \text{ Pa}$.