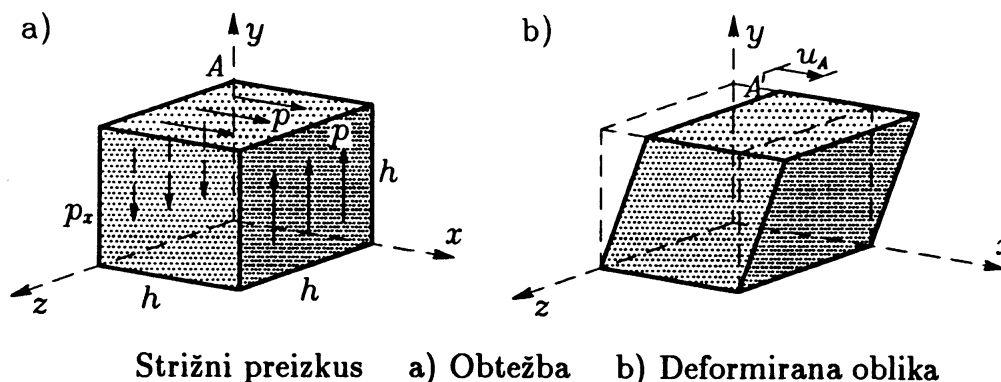


8. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

(linearizirana elastičnost)

NALOGA 1: Eden izmed preizkusov za določanje mehanskih lastnosti materialov je **strižni preizkus**, s katerim določimo strižni modul G . Vzorec v obliki kocke podpremo in obremenimo tako, da je od nič različna le ena od strižnih deformacij (na primer ε_{xy}). Drugi dve strižni deformaciji in vse normalne komponente tenzorja deformacij v koordinatnem sistemu x, y, z so enake nič. Shemo preizkusa prikazujemo na sliki. Pri strižnem preizkusu običajno obtežimo samo vodoravni ploskvi, navpičnih pa ne. Pri taki obtežbi pride do neenakomerne porazdelitve napetosti po preizkušancu, zato v tem računskem primeru predpostavimo še obtežbo v dveh navpičnih ploskvah. Spodnja ploskev kocke je nepomično podprta s togo podlago. Zgornjo ploskev in dve stranski ploskvi kocke obremenimo z enakomerno porazdeljeno obtežbo p . Merimo velikost pomika u_A na vrhu kvadra. Preizkusi kažejo, da deformirana oblika kvadra približno ustreza paralelepipedu, prikazanem na sliki.



Določi strižni modul G v primerih.

- Opravimo eno meritev in dobimo
 $h = 0.1 \text{ m}$, $u_A = 0.0006 \text{ m}$, $p = 500 \text{ MPa}$.
- Opravimo več meritev in dobimo
 $h_1 = 0.10 \text{ m}$, $u_{A1} = 0.00060 \text{ m}$, $p_1 = 500 \text{ MPa}$,
 $h_2 = 0.10 \text{ m}$, $u_{A2} = 0.00050 \text{ m}$, $p_2 = 400 \text{ MPa}$,
 $h_3 = 0.15 \text{ m}$, $u_{A3} = 0.00085 \text{ m}$, $p_3 = 500 \text{ MPa}$,
 $h_4 = 0.15 \text{ m}$, $u_{A4} = 0.00080 \text{ m}$, $p_4 = 450 \text{ MPa}$.

Rešitev:

a) $G = 83\,333 \text{ MPa}$.

b) $G = \bar{G} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 G_i = 83\,986 \text{ MPa}$.

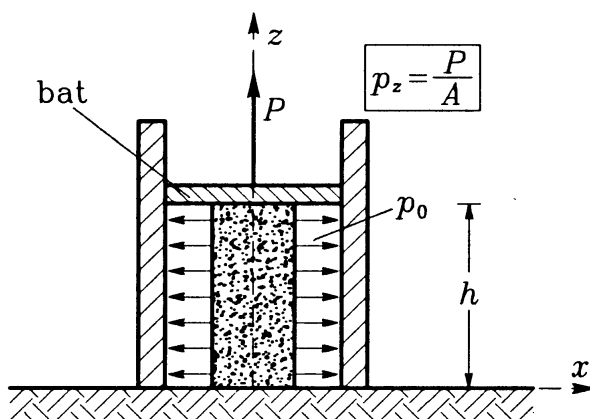
Rešitev, dobljena po metodi najmanjših kvadratov, se ujema s povprečno vrednostjo.

NALOGA 2: S **triosnim preizkusom** lahko hkrati določimo vrednosti elastičnega modula in Poissonovega količnika materiala. Pri triosnem preizkusu vzpostavimo tako napetostno stanje, kjer sta v dveh smereh normalni napetosti enaki, normalna napetost v tretji smeri pa

je različna. Pri izbranem napetostnem stanju lahko merimo spremembo dolžine v smeri z in spremembo prostornine ΔV . Vzorec ima prečni prerez s ploščino A in višino h . Napetostno stanje določata obtežbi p_z in p_o (slika). Predpostavimo, da je napetostno stanje približno konstantno po celotni prostornini vzorca.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p_o, \quad \sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Ob predpostavki, da so strižne napetosti enake nič, smo privzeli, da je trenje med vzorcem in podlago ter vzorcem in batom zanemarljivo majhno. Pri preizkusih je pogosto težko zagotoviti majhno trenje, v teh primerih se moramo zavedati, da so gornje enačbe le približek dejanskega stanja.



Triosni preizkus

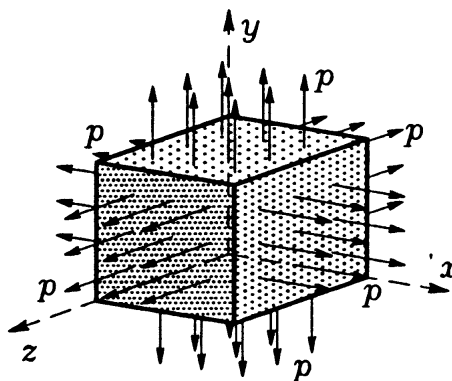
Določi elastični modul E in Poissonov količnik ν v sledečih primerih.

- Opravimo eno meritev in dobimo
 $p_z = -20 \text{ kN/cm}^2$, $p_o = -10 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_{zz} = -0.00073$, $\varepsilon_V = -0.00092$.
- Opravimo več meritev in dobimo
 $p_{z1} = -5 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o1} = -2.5 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_{zz,1} = -0.000170$, $\varepsilon_{V1} = -0.00028$,
 $p_{z2} = -10 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o2} = -5.0 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_{zz,2} = -0.000375$, $\varepsilon_{V2} = -0.00060$,
 $p_{z3} = -15 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o3} = -7.5 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_{zz,3} = -0.000600$, $\varepsilon_{V3} = -0.00080$,
 $p_{z4} = -20 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o4} = -10.0 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_{zz,4} = -0.000730$, $\varepsilon_{V4} = -0.00092$.

Rešitev:

- $E = 200\,000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.27$.
- $E = 197\,910 \text{ MPa}$, $\nu = 0.251$ (rešitev, dobljena po metodi najmanjših kvadratov).
 $\bar{E} = 214\,930 \text{ MPa}$, $\bar{\nu} = 0.209$ (povprečni vrednosti).
 Bolj natančna je prva rešitev, dobljena po metodi najmanjših kvadratov.

NALOGA 3: S **hidrostatičnim preizkusom** lahko določimo vrednost kompresijskega modula K . Telo v obliki kocke obtežimo s hidrostatičnim pritiskom (slika). Napetostno stanje v delcu telesa je hidrostatični pritisk, če so normalne komponente napetostnega tenzorja medsebojno enake, strižne komponente pa so enake nič:



Hidrostatsični preizkus

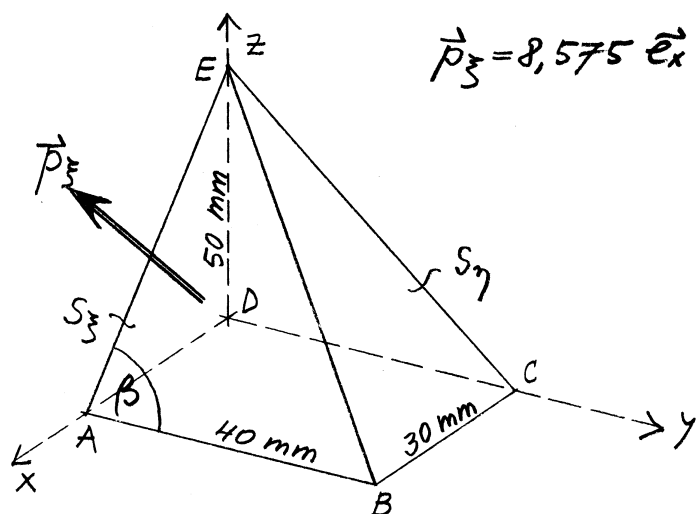
Določi kompresijski modul K in v sledečih primerih.

- Opravimo eno meritev in dobimo
 $p = -20 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00092$.
- Opravimo več meritev in dobimo
 $p = -5 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00023$,
 $p = -10 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00048$,
 $p = -15 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00070$,
 $p = -20 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00092$,

Rešitev:

- $K = \frac{p}{\varepsilon_V} = 21739 \text{ MPa}$,
- $K = \bar{K} = 21435 \text{ MPa}$ (povprečna vrednost).

NALOGA 4: Mejna ploskev S_μ (BCE) prikazanega elementa telesa je neobtežena, na mejno ploskev S_ξ (ABE) pa deluje enakomerna zvezna obtežba \vec{p}_ξ . V ploskvi ADE ni normalnih napetosti. Določi spremembo prvega kota β



$$\vec{p}_\xi = 8,575 \vec{e}_x + 17,150 \vec{e}_y - 21,437 \vec{e}_z$$

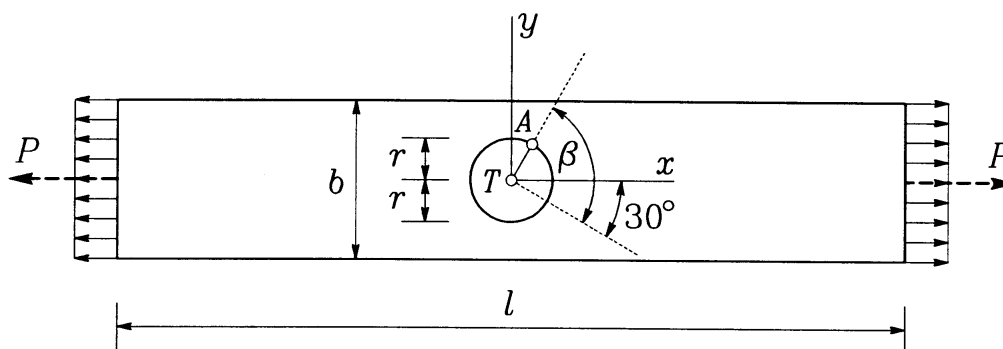
$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,2$$

Rešitev: $\Delta\beta \approx -1.23 \cdot 10^{-4}$.

NALOGA 5: V sredini ravnega kovinskega traku z dolžino $l = 100$ cm, širino $b = 10$ cm in debelino $d = 1$ mm narišemo krog s polmerom $r = 2$ cm. Ožja konca traku enakomerno obtežimo s silo $P = 42$ kN. Pri tem se dolžina traku poveča za 2 mm, širina pa se zmanjša za 0.06 mm. Narisani krog se spremeni v pravilno elipso. Določi:

- elastični modul E in koeficient prečne kontrakcije ν uporabljene kovine ter spremembo debeline traku,
- velikosti polosi dobljene elipse,
- spmembo pravega kota β
- č) novo dolžino polmera \overline{TA} .

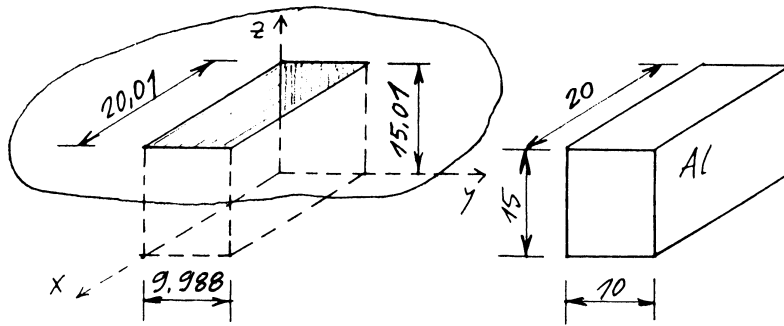


Rešitev:

- elastični modul $E = 21\,000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, koeficient prečne kontrakcije $\nu = 0.3$, sprememba debeline traku $\Delta d = -6 \cdot 10^{-5}$ cm.
- velikosti polosi dobljene elipse sta $a' = 2.0040$ cm in $b' = 1.9988$ cm.
- spmemba pravega kota $\Delta\beta = 0.13^\circ$.
- č) nova dolžina polmera $\overline{TA}' = 2.0001$ cm.

NALOGA 6: V absolutno togi podlagi je narejena pravokotna prizmatična luknja dimenzij 20.01 cm \times 9.988 cm \times 15.01 cm. V luknjo želimo vstaviti aluminijast kvader dimenzij 20 cm \times 10 cm \times 15 cm.

- Za koliko moramo spremeniti temperaturo kvadra, da ga lahko vstavimo v odprtino? Kolikšne so tedaj dimenzije kvadra?
- Določi napetosti v kvadru in njegove dimenzije, ko se njegova temperatura spet izenači s temperaturo okolice!
- Za koliko moramo sedaj spremeniti temperaturo kvadra, da v tlorisnem pogledu popolnoma zapolni odprtino? Kolikšne so tedaj napetosti v kvadru in njegova višina?



$$E = 7200 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.34$$

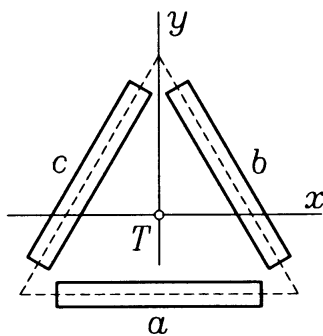
$$\alpha_T = 2.4 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

Rešitev:

- a) Temperaturo kvadra moramo spremeniti za $\Delta T^a = -50 \text{ K}$.
Nove dimenzije kvadra so $l_x^a = 19.976 \text{ cm}$, $l_z^a = 14.982 \text{ cm}$.
- b) Napetosti v kvadru so $\sigma_{xx}^b = \sigma_{zz}^b = 0$, $\sigma_{yy}^b = -8.64 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.
Njegove dimenzije so $l_x^b = 20.008 \text{ cm}$, $l_z^b = 15.006 \text{ cm}$.
- c) Sedaj moramo spremeniti temperaturo kvadra za $\Delta T^c = 2.9 \text{ K}$.
Napetosti v kvadru so $\sigma_{xx}^c = \sigma_{zz}^c = 0$, $\sigma_{yy}^c = -9.14 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.
Njegova višina znaša $l_z^c = 15.007 \text{ cm}$.

NALOGA 7: Na enakostranični Δ -rozeti, sestavljeni iz treh enakih merilnih lističev (strain gauge), so bile v točki T na površini tanke stojine jeklenega polnostenskega nosilca izmerjene specifične spremembe dolžin v treh smereh kot kaže slika. V smeri pravokotno na svojo ravnino stojina ni obtežena ali podprta in ostane ravna tudi pa deformaciji.

- a) Določi komponente tenzorja majhnih deformacij v točki T glede na koordinatni sistem (x, y, z) . Za koliko se spremeni začetna debelina stojine $\delta = 8 \text{ mm}$ v točki T ?
- b) Določi ravnine in velikosti glavnih normalnih in glavnih strižnih napetosti.



$$\varepsilon_a = 2.0 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_b = 1.5 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_c = 1.0 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta = 0.8 \text{ cm}$$

$$E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.3.$$

Rešitev:

- a) Tenzor majhnih deformacij v točki T glede na koordinatni sistem (x, y, z) je enak

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -0.2887 & 0 \\ -0.2887 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2857 \end{bmatrix}.$$

Začetna debelina stojine se spremeni za $\Delta\delta = -1.0286 \cdot 10^{-4}$ cm.

Tenzor napetosti v točki T je enak

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5.308 & -0.466 & 0 \\ -0.466 & 3.692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 5.432 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{22} = 3.567 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{33} = \sigma_{zz} = 0$.

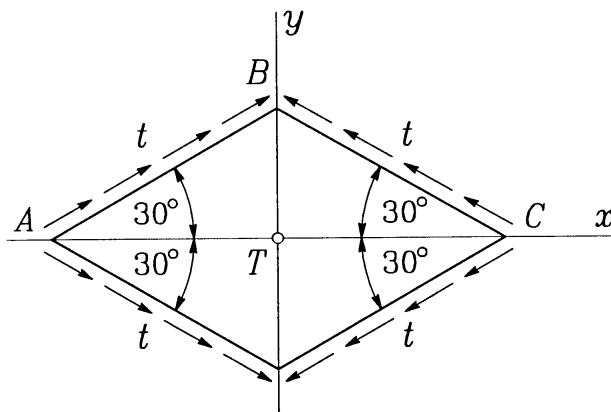
Smeri glavnih normalnih napetosti so:

$$\mathbf{e}_1 = 0.966 \mathbf{e}_x - 0.259 \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_2 = 0.259 \mathbf{e}_x + 0.966 \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z.$$

Ekstremna strižna napetost znaša $\tau_{\text{ext}} = 2.716 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$. Normale ravnin ekstremnih strižnih napetosti so $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_3)$.

NALOGA 8: Na robove tanke stene, v kateri vlada homogeno ravninsko napetostno stanje ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$), deluje le enakomerna tangencialna zvezna obtežba kot kaže slika.

- Dokaži, da v simetrijskih ravninah $x = 0$ in $y = 0$ ni strižnih napetosti.
- Določi komponente tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij v bazi $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.
- Določi specifično spremembo dolžine robu AB .



$$E_j = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$t = 50\sqrt{3} \text{ MPa}$$

Rešitev:

a) Pokažemo, da je $\sigma_{xy} = 0$.

b) Tenzor napetosti je

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -150 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}].$$

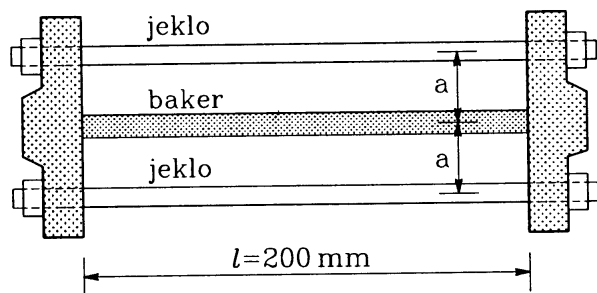
Tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} -78.57 & 0 & 0 \\ 0 & 45.24 & 0 \\ 0 & 0 & 14.29 \end{bmatrix}.$$

c) Specifična sprememba dolžine robu AB je $-47.62 \cdot 10^{-5}$.

NALOGA 9: Med dva toga odlitka, ki sta spojena z dvema jeklenima vijakoma premen 10 mm in dolžine 200 mm, moramo vstaviti bakreno palico s prečnim prerezom $A = 600 \text{ mm}^2$ in dolžino 200.2 mm.

- Za koliko moramo ohladiti bakreno palico, da jo je mogoče vstaviti med odlitka? (Temperatura jeklenih vijakov se pri tem ne spremeni.)
- Določi razdaljo med odlitkoma ter napetosti v jeklenih vijakih in bakrenem vložku, ko se temperatura bakrene palice spet izenači s temperaturo okolja in jeklenih vijakov!



$$E_j = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\alpha_j = 1.2 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

$$E_b = 1.0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\alpha_b = 1.7 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

Rešitev:

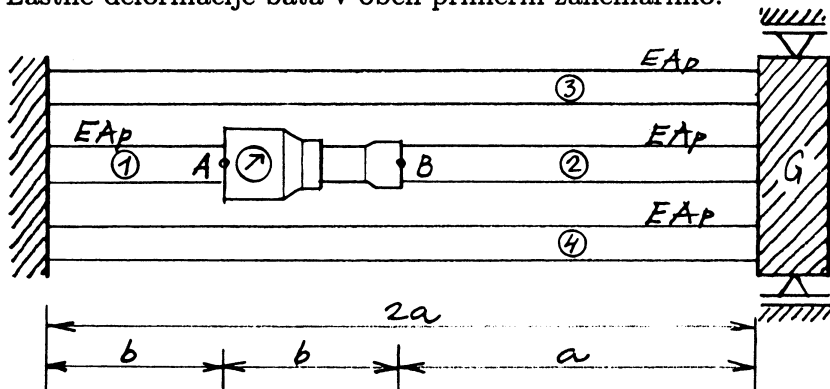
- Bakreno palico moramo ohladiti za $\Delta T_b = -58.8 \text{ K}$.
- Razdalja med odlitkoma znaša 200.129 mm.
Napetosti v jeklenih vijakih sta $\sigma_j = 135.37 \text{ MPa}$.
Napetost v bakrenem vložku znaša $\sigma_b = -35.46 \text{ MPa}$.

NALOGA 10:

Med palici 1 in 2 vstavimo bat hidravlične naprave. V začetku med batom in palicama ni napetosti.

- Določi potrebno silo v batu, pri kateri se razdalja med točkama A in B poveča za $\delta = 2 \text{ mm}$! Kolikšne so tedaj napetosti v palicah?
- Določi potrebno silo v batu, pri kateri se razdalja med točkama A in B ne spremeni, če palici 1 in 2 segrejemo za $\Delta T = 60 \text{ K}$, palici 3 in 4 pa obdržita začetno temperaturo! Določi premik toge vezne grede G!

Lastne deformacije bata v obeh primerih zanemarimo.



$$E = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$\alpha_T = 1.25 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

$$a = 2 \text{ m}$$

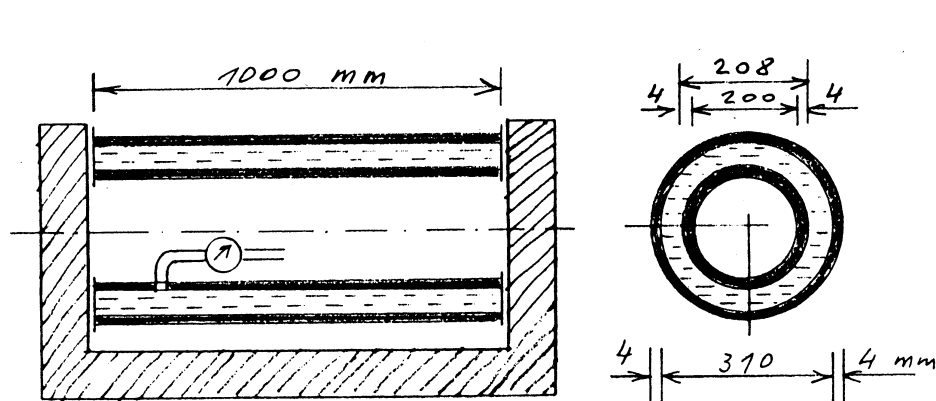
$$b = 1 \text{ m}$$

$$A_p = 10 \text{ cm}^2$$

Rešitev: Glej pisni izpit 2. 10. 1997 (2 naloga).

NALOGA 11:

V vmesni prostor med dvema bakrenima cevema z debelino stene $\delta = 4$ mm načrpano nestisljivo hladilno tekočino. Koliko tekočine porabimo, da znaša hidrostatični tlak $p = 6$ MPa? Kolikšne so edaj normalne napetosti v tangencialni smeri v obeh ceveh? (Tesnila ob nepodajnih priključnih ploščah omogočajo neovirano deformiranje cevi. Vzdolžne normalne napetosti so zanemarljive.)

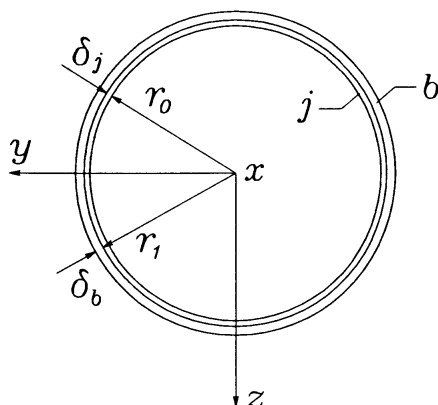


$$E = 100\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

Rešitev: Glej pisni izpit 24. 3. 2003 (2 naloga).

NALOGA 12: Podvodni cevovod je sestavljen iz jeklene notranje in varovalne bakrene zunanje cevi, ki se tesno, vendar brez napetosti prilegata med seboj (skica). Konstrukcijska izvedba cevovoda je takšna, da so vzdolžne normalne napetosti v pravokotnem prečnem prerezu cevi zanemarljivo majhne.



$$r_0 = 50 \text{ cm}$$

$$\delta_j = 1 \text{ cm}$$

$$\delta_b = 1.5 \text{ cm}$$

$$E_j = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu_j = 0.30$$

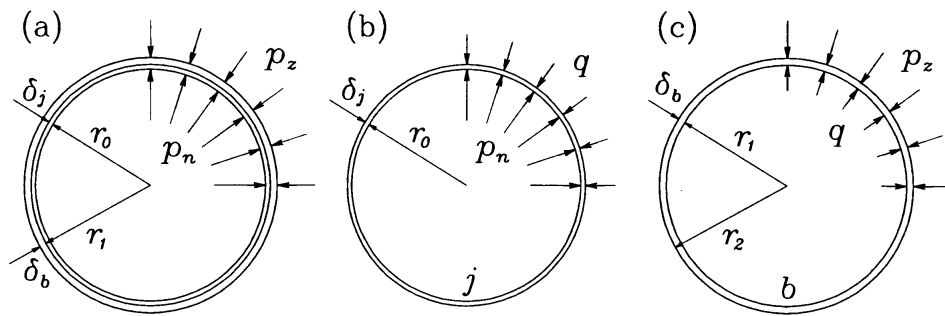
$$E_b = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu_b = 0.34$$

Določi normalne napetosti v tangencialni smeri v obeh ceveh v naslednjih primerih:

- pri tlačnem preizkusu cevovoda na kopnem z notranjim hidrostatičnim tlakom velikosti 5.5 MPa,
- pri praznem cevovodu v globini 50 m pod vodo,
- med obratovanjem cevovoda z notranjim tlakom 1.4 MPa v globini 50 m pod vodo!

Rešitev: Namig: Prereži konstrukcijo na dva dela in vpliv odstranjenega dela nadomesti z obtežbo q na sliki.

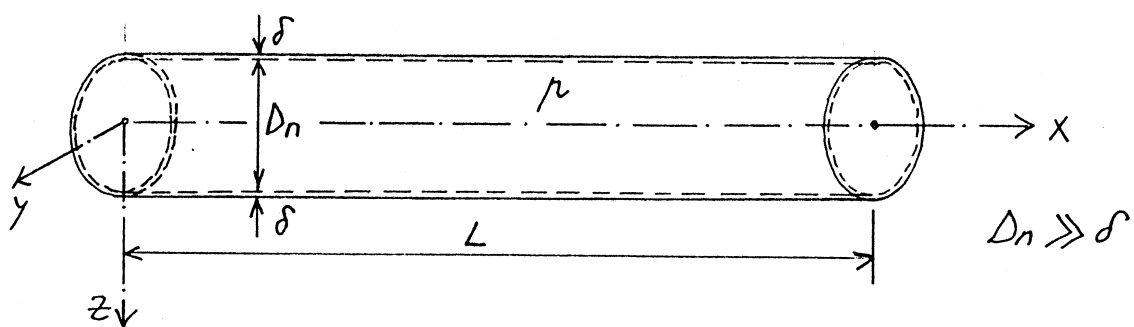


a) $q = 2.304 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^j = 157.518 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^b = 78.321 \text{ MPa}$,

b) $q = 0.293 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^j = -14.952 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^b = -7.532 \text{ MPa}$,

c) $q = 0.880 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^j = 25.143 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^b = 12.405 \text{ MPa}$.

NALOGA 13: Pojasni zakaj hrenovka vedno poči podolgem. (Obravnavaj poenostavljen primer valjaste tankostenske posode z enakomernim notranjim pritiskom.)

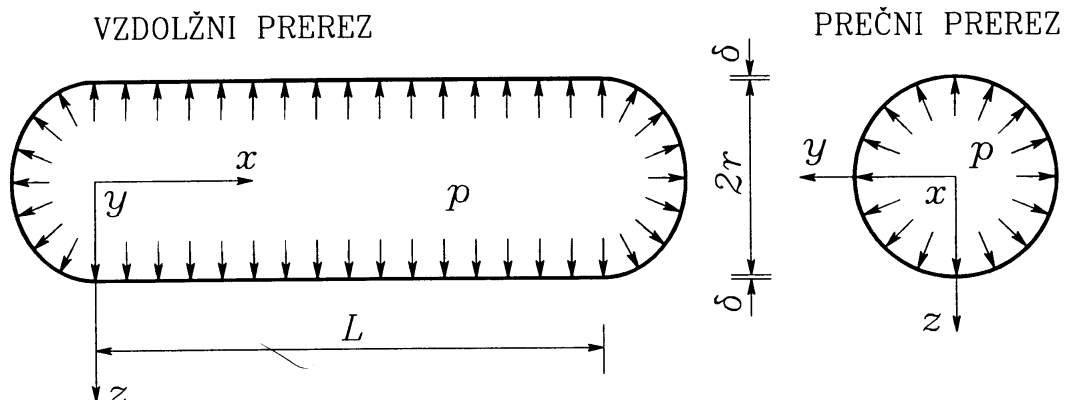


Rešitev:

$$\sigma_{xx} = \frac{p D_n}{4 \delta}, \quad \sigma_{ss} = \frac{p D_n}{2 \delta} \quad (\text{kotelna formula}).$$

Ker je $\sigma_{ss} = 2 \sigma_{xx}$, hrenovka poči podolgem.

NALOGA 14: Določi napetosti in deformacije v tankostenski krožno valjasti posodi z rotacijskima kalotama pri hidrostatičnem notranjem tlaku p (glej sliko). Lastno težo posode in vsebine lahko zanemarimo.



Rešitev: Najprej velja $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Od tu sledi $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

Krajši račun da $\sigma_{xx} = p \frac{r^2}{\delta(2r+\delta)} \approx p \frac{r}{2\delta}$. Z uporabo kotelne formule dobimo $\sigma_{ss} = p \frac{r}{\delta}$.

Z uporabo konstitucijskih enačb dobimo:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{p}{E} \left(\frac{r}{2\delta} + \nu \left(1 - \frac{r}{\delta} \right) \right) \approx p \frac{r(1-2\nu)}{2\delta E},$$

$$\varepsilon_{ss} = \frac{p}{E} \left(\frac{r}{\delta} + \nu \left(1 - \frac{r}{2\delta} \right) \right) \approx p \frac{r(2-\nu)}{2\delta E},$$

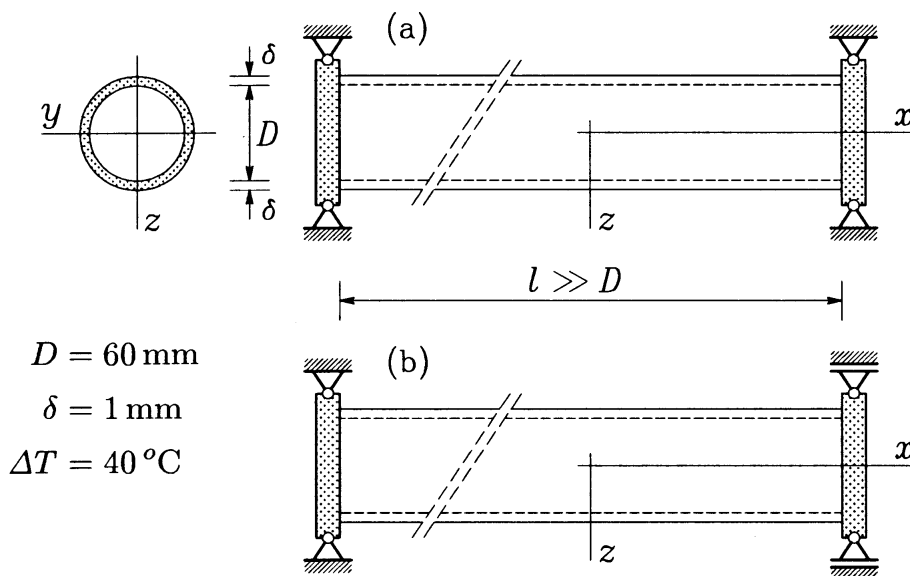
$$\varepsilon_{rr} = -\frac{p}{E} \left(1 + \frac{3r\nu}{2\delta} \right) \approx -p \frac{3r\nu}{2\delta E}.$$

NALOGA 15: Dolgo valjasto aluminijasto jedro je tesno vendar brez napetosti obdano s tanko jekleno cevjo, ki je na koncih zaprta z absolutno togima ploščama. Opisani sestav enakomerno segrejemo za ΔT . Obravnavaj dva primera:

a) razdalja med stičnima ploščama se med segrevanjem ne spremeni (slika a).

b) desna plošča se lahko prosto premika skupaj z valjem in cevjo (slika b).

V obeh primerih določi vzdolžne in prečne normalne napetosti v aluminijastem valju ter normalne vzdolžne in normalne tangencialne napetosti v cevi! Pri tem upoštevaj ugotovitve iz prejšnje naloge! Lastno težo valja in cevi, trenje med valjem in cevjo ter motnje na priključnih cevi na čelni plošči zanemarimo!



$E_j = 22\,000 \text{ kN/cm}^2$	$\nu_j = 0.30$	$\alpha_j = 1.2 \cdot 10^{-5} / \text{K}$
$E_a = 7\,000 \text{ kN/cm}^2$	$\nu_a = 0.34$	$\alpha_a = 2.353 \cdot 10^{-5} / \text{K}$

Rešitev:

a) Jeklena cev:

$$\sigma_{xx}^j = -13.975 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{ss}^j = 11.778 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{rr}^j = -0.393 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Aluminijasti valj:

$$\sigma_{xx}^a = -6.321 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{ss}^a = -0.393 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{zz}^a = -0.393 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

b) Jeklena cev:

$$\sigma_{xx}^j = 12.4435 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{ss}^j = 13.6967 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{rr}^j = -0.4566 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Aluminijasti valj:

$$\sigma_{xx}^a = -0.8434 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{ss}^a = -0.4566 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \sigma_{zz}^a = -0.4566 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$