

3 VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

tenzor napetosti I

Naloga 7

Naloga 7

Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) z bazo $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$. Privzemi sledeče zveze med baznimi vektorji: $\mathbf{e}_\xi = -\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_x$ in $\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_z$.

Naloga 7

Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) z bazo $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$.

Privzemi sledeče zveze med baznimi vektorji: $\mathbf{e}_\xi = -\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_x$ in $\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_z$.

Fizikalno gledano, lahko novo bazo dobim z rotacijo stare okrog osi \mathbf{e}_z za kot -90° .

Tenzor napetosti v običajni bazi $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} .$$

Tenzor napetosti v običajni bazi $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{xy} \mathbf{e}_y + \sigma_{xz} \mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \sigma_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{yz} \mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zx} \mathbf{e}_x + \sigma_{zy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z.$$

Tenzor napetosti v običajni bazi $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{xy} \mathbf{e}_y + \sigma_{xz} \mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \sigma_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{yz} \mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zx} \mathbf{e}_x + \sigma_{zy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z.$$

Fizikalni pomen od nič različnih komponent je razviden iz slike 1.

Tenzor napetosti v običajni bazi $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{xy} \mathbf{e}_y + \sigma_{xz} \mathbf{e}_z,$$

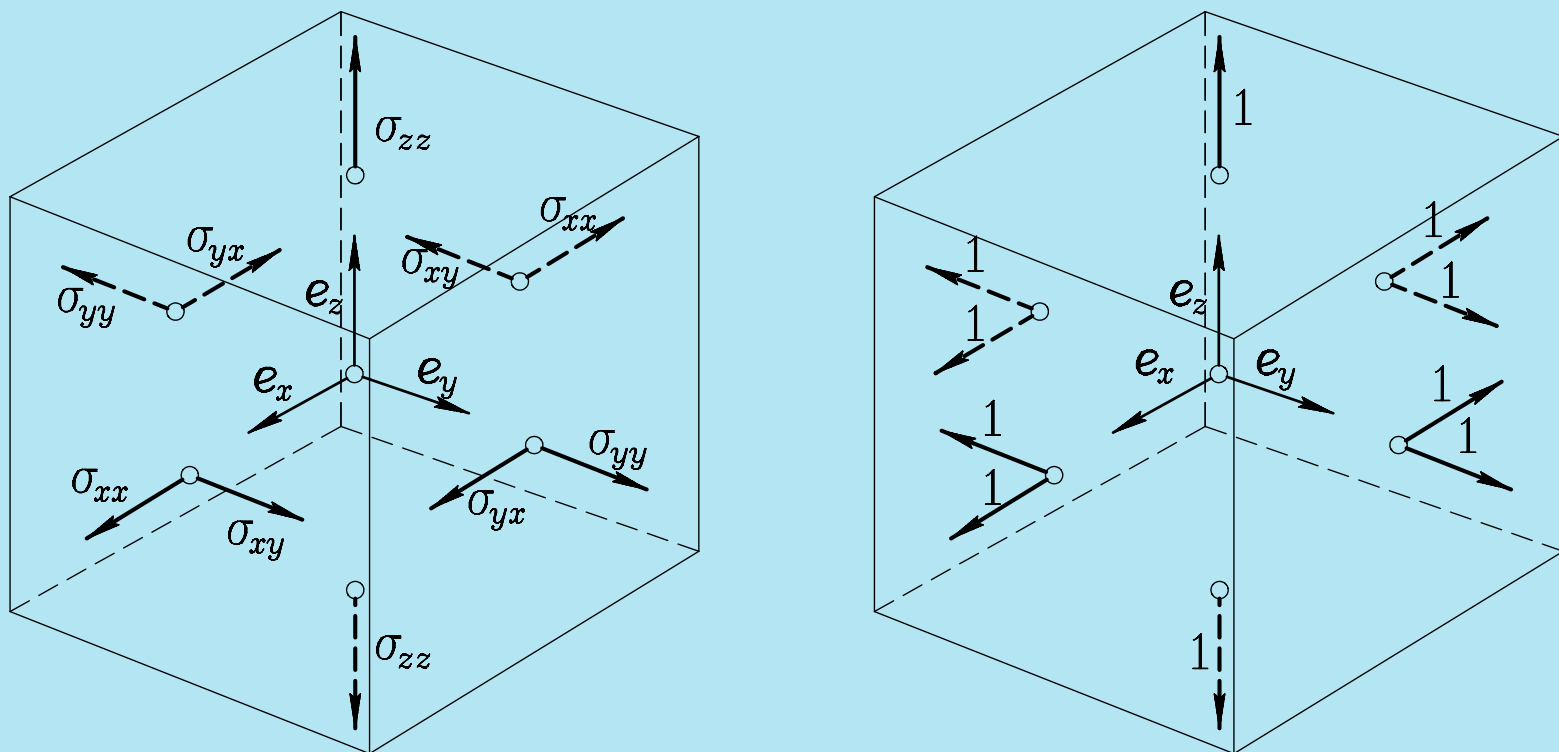
$$\boldsymbol{\sigma}_y = \sigma_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{yz} \mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \sigma_{zx} \mathbf{e}_x + \sigma_{zy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z.$$

Fizikalni pomen od nič različnih komponent je razviden iz slike 1.

Prikazane napetosti dejanko pripadajo točki v središču kocke, na elementarni kocki smo jih narisali le zaradi preglednosti.

Fizikalni pomen od nič različnih komponent tenzorja napetosti v bazi $\{e_x, e_y, e_z\}$. Leva slika prikazuje smeri delovanja komponent tenzorja napetosti v izbrani bazi, desna pa dejansko napetostno stanje.



Slika 1

Tenzor napetosti v novi bazi $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} .$$

Tenzor napetosti v novi bazi $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = \sigma_{\xi\xi} \mathbf{e}_\xi + \sigma_{\xi\eta} \mathbf{e}_\eta + \sigma_{\xi\zeta} \mathbf{e}_\zeta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\eta = \sigma_{\eta\xi} \mathbf{e}_\xi + \sigma_{\eta\eta} \mathbf{e}_\eta + \sigma_{\eta\zeta} \mathbf{e}_\zeta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta = \sigma_{\zeta\xi} \mathbf{e}_\xi + \sigma_{\zeta\eta} \mathbf{e}_\eta + \sigma_{\zeta\zeta} \mathbf{e}_\zeta.$$

Tenzor napetosti v novi bazi $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

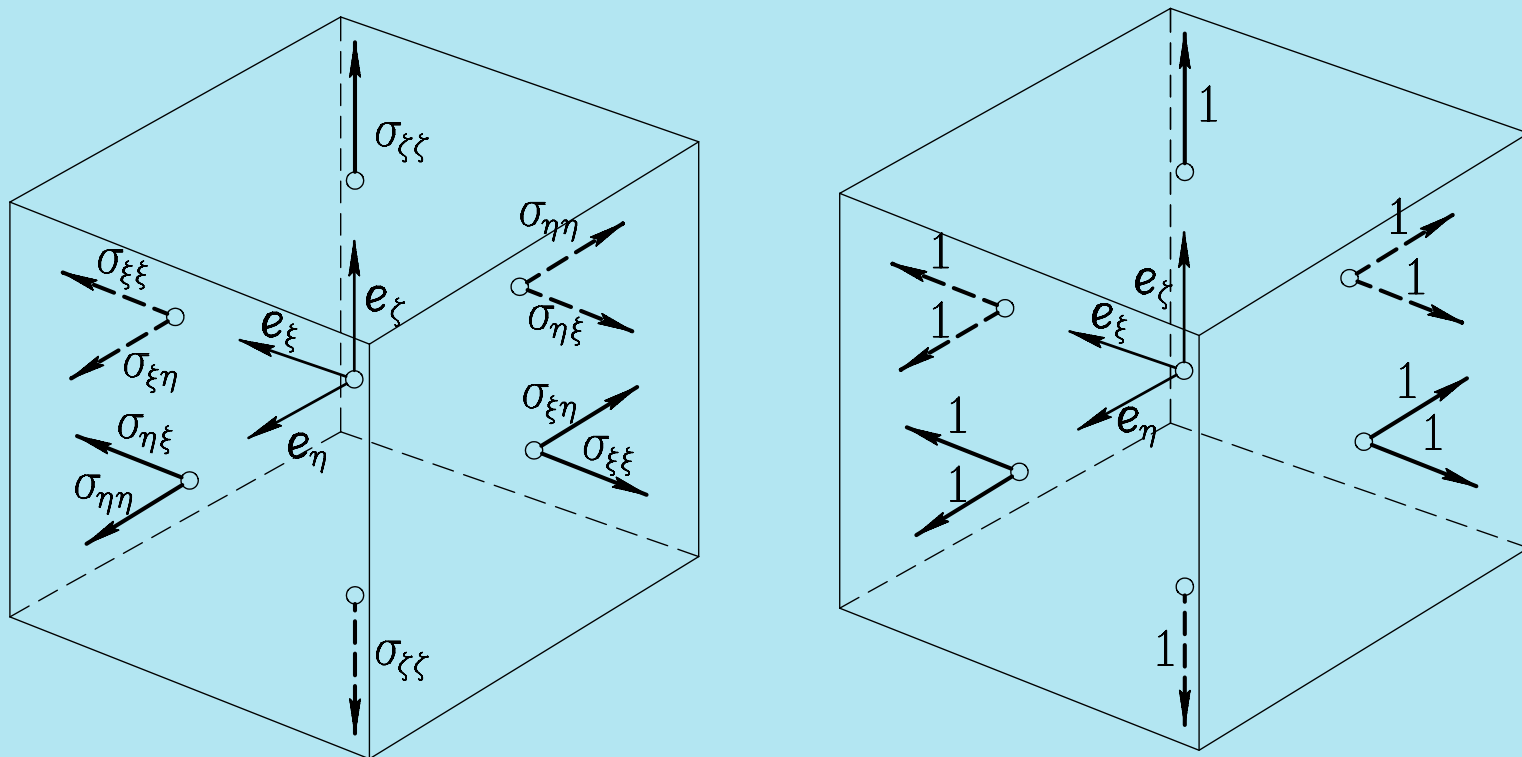
$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = \sigma_{\xi\xi} \mathbf{e}_\xi + \sigma_{\xi\eta} \mathbf{e}_\eta + \sigma_{\xi\zeta} \mathbf{e}_\zeta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\eta = \sigma_{\eta\xi} \mathbf{e}_\xi + \sigma_{\eta\eta} \mathbf{e}_\eta + \sigma_{\eta\zeta} \mathbf{e}_\zeta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta = \sigma_{\zeta\xi} \mathbf{e}_\xi + \sigma_{\zeta\eta} \mathbf{e}_\eta + \sigma_{\zeta\zeta} \mathbf{e}_\zeta.$$

Fizikalni pomen od nič različnih komponent je tako razviden iz slike 2.

Fizikalni pomen od nič različnih komponent tenzorja napetosti v bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$. Leva slika prikazuje smeri delovanja komponent tenzorja napetosti v izbrani bazi, desna pa dejansko napetostno stanje.



Slika 2

Iz slike 2 lahko s primerjavo leve in desne kocke preberemo komponente tenzorja napetosti v novi bazi.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$$

Iz slike 2 lahko s primerjavo leve in desne kocke preberemo komponente tenzorja napetosti v novi bazi.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Iz slike 2 lahko s primerjavo leve in desne kocke preberemo komponente tenzorja napetosti v novi bazi.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje potem zapišemo z enačbami

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = 1 \mathbf{e}_\xi + 1 \mathbf{e}_\eta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\eta = 1 \mathbf{e}_\xi + 1 \mathbf{e}_\eta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta = 1 \mathbf{e}_\zeta.$$

Iz slike 2 lahko s primerjavo leve in desne kocke preberemo komponente tenzorja napetosti v novi bazi.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje potem zapišemo z enačbami

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = 1 \mathbf{e}_\xi + 1 \mathbf{e}_\eta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\eta = 1 \mathbf{e}_\xi + 1 \mathbf{e}_\eta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta = 1 \mathbf{e}_\zeta.$$

Zaradi enostavnih zvez med baznimi vektorji, smo lahko rezultat preprosto prebrali iz slike 2.

Iz slike 2 lahko s primerjavo leve in desne kocke preberemo komponente tenzorja napetosti v novi bazi.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje potem zapišemo z enačbami

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi = 1 \mathbf{e}_\xi + 1 \mathbf{e}_\eta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\eta = 1 \mathbf{e}_\xi + 1 \mathbf{e}_\eta,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\zeta = 1 \mathbf{e}_\zeta.$$

Zaradi enostavnih zvez med baznimi vektorji, smo lahko rezultat preprosto prebrali iz slike 2.

V nadaljevanju bomo do istega rezultata prišli še z izračunom.

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$
$$e_{\xi y} = e_{y\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = -1,$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$e_{\xi y} = e_{y\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = -1,$$

$$e_{\xi z} = e_{z\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$e_{\xi y} = e_{y\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = -1,$$

$$e_{\xi z} = e_{z\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$e_{\eta x} = e_{x\eta} = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1,$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$e_{\xi y} = e_{y\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = -1,$$

$$e_{\xi z} = e_{z\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$e_{\eta x} = e_{x\eta} = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1,$$

$$e_{\eta y} = e_{y\eta} = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0,$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$e_{\xi y} = e_{y\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = -1,$$

$$e_{\xi z} = e_{z\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$e_{\eta x} = e_{x\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1,$$

$$e_{\eta y} = e_{y\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0,$$

$$e_{\eta z} = e_{z\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$e_{\xi y} = e_{y\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = -1,$$

$$e_{\xi z} = e_{z\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$e_{\eta x} = e_{x\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1,$$

$$e_{\eta y} = e_{y\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0,$$

$$e_{\eta z} = e_{z\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$e_{\zeta x} = e_{x\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo koeficiente

$$e_{\xi x} = e_{x\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$e_{\xi y} = e_{y\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = -1,$$

$$e_{\xi z} = e_{z\xi} = \mathbf{e}_{\xi} \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$e_{\eta x} = e_{x\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1,$$

$$e_{\eta y} = e_{y\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0,$$

$$e_{\eta z} = e_{z\eta} = \mathbf{e}_{\eta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$e_{\zeta x} = e_{x\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$e_{\zeta y} = e_{y\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y = 0,$$

$$e_{\zeta z} = e_{z\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1.$$

$$e_{\zeta z} = e_{z\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

$$e_{\zeta z} = e_{z\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$e_{\zeta z} = e_{z\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{\zeta} = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \end{aligned}$$

$$e_{\zeta z} = e_{z\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{\zeta} = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} = 1,\end{aligned}$$

$$e_{\zeta z} = e_{z\zeta} = \mathbf{e}_{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{\zeta} = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\eta} &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\eta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\eta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\eta x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + 2e_{\eta x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + 2e_{\eta y} e_{\eta z} \sigma_{yz} =\end{aligned}$$

$$e_{\zeta z} = e_z \zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} = 1, \\ \sigma_{\eta\eta} &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\eta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\eta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\eta x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + 2e_{\eta x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + 2e_{\eta y} e_{\eta z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} = 1,\end{aligned}$$

$$e_{\zeta z} = e_z \zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\eta} &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\eta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\eta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\eta x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + 2e_{\eta x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + 2e_{\eta y} e_{\eta z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta\zeta} &= e_{\zeta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\zeta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\zeta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\zeta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + 2e_{\zeta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + 2e_{\zeta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} =\end{aligned}$$

$$e_{\zeta z} = e_z \zeta = \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1.$$

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\eta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\eta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\eta x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + 2e_{\eta x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + 2e_{\eta y} e_{\eta z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta\zeta} &= e_{\zeta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\zeta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\zeta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\zeta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + 2e_{\zeta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + 2e_{\zeta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\zeta z}^2 \sigma_{zz} = 1. \end{aligned}$$

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} = & e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ & + e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ & + e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} =\end{aligned}$$

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} = \\ &= e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} = 1,\end{aligned}$$

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} = \\ &= e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\zeta} &= e_{\xi x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} =\end{aligned}$$

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} = \\ &= e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\zeta} &= e_{\xi x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = \\ &= 0,\end{aligned}$$

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} = \\ &= e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\zeta} &= e_{\xi x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\zeta} &= e_{\eta x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\eta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\eta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\eta y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\eta y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\eta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\eta z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\eta z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\eta z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} =\end{aligned}$$

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} = \\ &= e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\zeta} &= e_{\xi x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\zeta} &= e_{\eta x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\eta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\eta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\eta y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\eta y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\eta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\eta z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\eta z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\eta z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Upoštevamo simetrijo tenzorja in dobljene rezultate povežemo v končni rezultat

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$$

Upoštevamo simetrijo tenzorja in dobljene rezultate povežemo v končni rezultat

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi na drug način.

Do istega rezultata lahko pridemo tudi na drug način.

Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\xi} & \mathbf{e}_{\eta} & \mathbf{e}_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi na drug način.

Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\xi} & \mathbf{e}_{\eta} & \mathbf{e}_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo dogovor o seštevanju in enačbe (1) prepíšemo v obliko

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T],$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi na drug način.

Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\xi} & \mathbf{e}_{\eta} & \mathbf{e}_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo dogovor o seštevanju in enačbe (1) prepišemo v obliko

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T],$$

Kratek izračun da

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T] =$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi na drug način.

Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\xi} & \mathbf{e}_{\eta} & \mathbf{e}_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo dogovor o seštevanju in enačbe (1) prepíšemo v obliko

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T],$$

Kratek izračun da

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi na drug način.

Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\xi} & \mathbf{e}_{\eta} & \mathbf{e}_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo dogovor o seštevanju in enačbe (1) prepišemo v obliko

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T],$$

Kratek izračun da

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naloga 9

Naloga 9

Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) v bazi $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Naloga 9

Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) v bazi $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokaži, da obstaja takšna baza $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$ v kateri lahko tenzor predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Naloga 9

Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) v bazi $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokaži, da obstaja takšna baza $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$ v kateri lahko tenzor predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Pod imenom *rotacijska matrika* označimo matriko $[T]$ reda 3×3 z determinanto 1, za katero velja $[T]^T [T] = [I]$.

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Pod imenom *rotacijska matrika* označimo matriko $[T]$ reda 3×3 z determinanto 1, za katero velja $[T]^T [T] = [I]$.

Zakaj izmed vseh transformacijskih matrik iščemo ravno rotacijsko matriko?

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Pod imenom *rotacijska matrika* označimo matriko $[T]$ reda 3×3 z determinanto 1, za katero velja $[T]^T [T] = [I]$.

Zakaj izmed vseh transformacijskih matrik iščemo ravno rotacijsko matriko? Zato, ker ta podaja operator rotacije (v izbrani bazi, pogosto v stari bazi), ki staro bazo preprosto zarotira v novo bazo.

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Pod imenom *rotacijska matrika* označimo matriko $[T]$ reda 3×3 z determinanto 1, za katero velja $[T]^T [T] = [I]$.

Zakaj izmed vseh transformacijskih matrik iščemo ravno rotacijsko matriko? Zato, ker ta podaja operator rotacije (v izbrani bazi, pogosto v stari bazi), ki staro bazo preprosto zarotira v novo bazo. Ali takšna matrika obstaja?

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Pod imenom *rotacijska matrika* označimo matriko $[T]$ reda 3×3 z determinanto 1, za katero velja $[T]^T [T] = [I]$.

Zakaj izmed vseh transformacijskih matrik iščemo ravno rotacijsko matriko? Zato, ker ta podaja operator rotacije (v izbrani bazi, pogosto v stari bazi), ki staro bazo preprosto zarotira v novo bazo. Ali takšna matrika obstaja? Ne vedno.

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Pod imenom *rotacijska matrika* označimo matriko $[T]$ reda 3×3 z determinanto 1, za katero velja $[T]^T [T] = [I]$.

Zakaj izmed vseh transformacijskih matrik iščemo ravno rotacijsko matriko? Zato, ker ta podaja operator rotacije (v izbrani bazi, pogosto v stari bazi), ki staro bazo preprosto zarotira v novo bazo. Ali takšna matrika obstaja? Ne vedno. Velja pa.

Najdi transformacijsko rotacijsko matriko $[T]$, ki zadošča enačbama

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Pod imenom *rotacijska matrika* označimo matriko $[T]$ reda 3×3 z determinanto 1, za katero velja $[T]^T [T] = [I]$.

Zakaj izmed vseh transformacijskih matrik iščemo ravno rotacijsko matriko? Zato, ker ta podaja operator rotacije (v izbrani bazi, pogosto v stari bazi), ki staro bazo preprosto zarotira v novo bazo. Ali takšna matrika obstaja? Ne vedno. Velja pa.

V neprazni množici transformacijskih matrik, ki zadoščajo gornji enačbi, lahko vedno najdemo tudi rotacijsko matriko.

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

$$I_1^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 3,$$

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

$$I_1^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 2,$$

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

$$I_1^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 0.$$

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

$$I_1^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 0.$$

Ker so invariante obeh matrik enake, takšna rotacijska matrika $[T]$ obstaja.

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

$$I_1^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 0.$$

Ker so invariante obeh matrik enake, takšna rotacijska matrika $[T]$ obstaja. Karakteristična polinoma obeh matrik se seveda ujemata.

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

$$I_1^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 0.$$

Ker so invariante obeh matrik enake, takšna rotacijska matrika $[T]$ obstaja. Karakteristična polinoma obeh matrik se seveda ujemata.

$$p_{[\sigma_{ij}]}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda,$$

Izračunamo invariante obeh matrik in dobimo

$$I_1^{[\sigma_{ij}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{ij}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{ij}]} = 0,$$

$$I_1^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 3,$$

$$I_2^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 2,$$

$$I_3^{[\sigma_{\alpha\beta}]} = 0.$$

Ker so invariante obeh matrik enake, takšna rotacijska matrika $[T]$ obstaja. Karakteristična polinoma obeh matrik se seveda ujemata.

$$p_{[\sigma_{ij}]}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda,$$

$$p_{[\sigma_{\alpha\beta}]}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$.

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$.
Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma:

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$.
Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in
 $\lambda_3 = 2$.

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$. Lastne vektorje izračunamo iz enačb

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1, \quad (2a)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \quad (2b)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{u}_3. \quad (2c)$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$. Lastne vektorje izračunamo iz enačb

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1, \quad (2a)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \quad (2b)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{u}_3. \quad (2c)$$

Lastne vektorje načeloma lahko množimo s poljubim od nič različim realnim številom, vendar jih pred nadaljnjim izračunom raje normiramo.

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$. Lastne vektorje izračunamo iz enačb

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1, \quad (2a)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \quad (2b)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{u}_3. \quad (2c)$$

Lastne vektorje načeloma lahko množimo s poljubim od nič različim realnim številom, vendar jih pred nadaljnjim izračunom raje normiramo.

Po normiranju dobimo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$. Lastne vektorje izračunamo iz enačb

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1, \quad (2a)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \quad (2b)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{u}_3. \quad (2c)$$

Lastne vektorje načeloma lahko množimo s poljubim od nič različim realnim številom, vendar jih pred nadaljnjim izračunom raje normiramo.

Po normiranju dobimo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{ij}]$. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$. Lastne vektorje izračunamo iz enačb

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1, \quad (2a)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \quad (2b)$$

$$[\sigma_{ij}] \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{u}_3. \quad (2c)$$

Lastne vektorje načeloma lahko množimo s poljubnim od nič različnim realnim številom, vendar jih pred nadaljnjim izračunom raje normiramo.

Po normiranju dobimo

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z uvedbo matrik

$$[U] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]$$

Z uvedbo matrik

$$[U] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Z uvedbo matrik

$$[U] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enačbe (2a)–(2c) zapišemo z eno samo matrično enačbo

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enačbe (2a)–(2c) zapišemo z eno samo matrično enačbo

$$[\sigma_{ij}] [U] = [U] [D]. \quad (3)$$

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enačbe (2a)–(2c) zapišemo z eno samo matrično enačbo

$$[\sigma_{ij}] [U] = [U] [D]. \quad (3)$$

Ker so lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, paroma ortogonalni, je matrika $[U]$ ortogonalna (zanjo velja $[U]^T [U] = [I]$).

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enačbe (2a)–(2c) zapišemo z eno samo matrično enačbo

$$[\sigma_{ij}] [U] = [U] [D]. \quad (3)$$

Ker so lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, paroma ortogonalni, je matrika $[U]$ ortogonalna (zanjo velja $[U]^T [U] = [I]$). Izračunamo še determinanto matrike $[U]$.

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enačbe (2a)–(2c) zapišemo z eno samo matrično enačbo

$$[\sigma_{ij}] [U] = [U] [D]. \quad (3)$$

Ker so lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, paroma ortogonalni, je matrika $[U]$ ortogonalna (zanjo velja $[U]^T [U] = [I]$). Izračunamo še determinanto matrike $[U]$. Ker je ta enaka -1 , matrika ni rotacijska.

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enačbe (2a)–(2c) zapišemo z eno samo matrično enačbo

$$[\sigma_{ij}] [U] = [U] [D]. \quad (3)$$

Ker so lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, paroma ortogonalni, je matrika $[U]$ ortogonalna (zanjo velja $[U]^T [U] = [I]$). Izračunamo še determinanto matrike $[U]$. Ker je ta enaka -1 , matrika ni rotacijska. Zadnji stolpec (ali zadnji lastni vektor) pomnožimo z -1 , da dobimo rotacijsko matriko

$$[U] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z uvedbo matrik

$$[U] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enačbe (2a)–(2c) zapišemo z eno samo matrično enačbo

$$[\sigma_{ij}] [U] = [U] [D]. \quad (3)$$

Ker so lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, paroma ortogonalni, je matrika $[U]$ ortogonalna (zanjo velja $[U]^T [U] = [I]$). Izračunamo še determinanto matrike $[U]$. Ker je ta enaka -1 , matrika ni rotacijska. Zadnji stolpec (ali zadnji lastni vektor) pomnožimo z -1 , da dobimo rotacijsko matriko

$$[U] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$.

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$.
Podobno kot v prvem primeru, nalogo zapišemo z enačbo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] [V] = [V] [D] \quad (5)$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$.
Podobno kot v prvem primeru, nalogo zapišemo z enačbo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] [V] = [V] [D] \quad (5)$$

in dobimo

$$[V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$. Podobno kot v prvem primeru, nalogo zapišemo z enačbo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] [V] = [V] [D] \quad (5)$$

in dobimo

$$[V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$. Podobno kot v prvem primeru, nalogo zapišemo z enačbo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] [V] = [V] [D] \quad (5)$$

in dobimo

$$[V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrika $[V]$ je, podobno kot matrika $[U]$, tudi ortogonalna.

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$. Podobno kot v prvem primeru, nalogo zapišemo z enačbo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] [V] = [V] [D] \quad (5)$$

in dobimo

$$[V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrika $[V]$ je, podobno kot matrika $[U]$, tudi ortogonalna. Izračunamo še determinanto matrike $[V]$.

Izračunamo pripadajoče lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $[\sigma_{\alpha\beta}]$. Podobno kot v prvem primeru, nalogo zapišemo z enačbo

$$[\sigma_{\alpha\beta}] [V] = [V] [D] \quad (5)$$

in dobimo

$$[V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrika $[V]$ je, podobno kot matrika $[U]$, tudi ortogonalna. Izračunamo še determinanto matrike $[V]$. Ker je ta enaka $+1$, je matrika tudi rotacijska.

Zvezo med matrikama $[\sigma_{\alpha\beta}]$ in $[\sigma_{ij}]$ dobimo iz enačb (3) in (5).

Zvezo med matrikama $[\sigma_{\alpha\beta}]$ in $[\sigma_{ij}]$ dobimo iz enačb (3) in (5). Najprej iz enačbe (3) izrazimo matriko $[D]$, nato to matriko vnesemo v enačbo (5). Po množenju enačbe (5) z leve z matriko $[V]^{-1} = [V]^T$ dobimo

$$\begin{aligned} [\sigma_{\alpha\beta}] &= [V] [D] [V]^T \\ &= [V] [U]^T [\sigma_{ij}] [U] [V]^T \end{aligned}$$

Zvezo med matrikama $[\sigma_{\alpha\beta}]$ in $[\sigma_{ij}]$ dobimo iz enačb (3) in (5). Najprej iz enačbe (3) izrazimo matriko $[D]$, nato to matriko vnesemo v enačbo (5). Po množenju enačbe (5) z leve z matriko $[V]^{-1} = [V]^T$ dobimo

$$\begin{aligned}[\sigma_{\alpha\beta}] &= [V][D][V]^T \\ &= [V][U]^T[\sigma_{ij}][U][V]^T \\ &= [T]^T[\sigma_{ij}][T].\end{aligned}$$

Zvezo med matrikama $[\sigma_{\alpha\beta}]$ in $[\sigma_{ij}]$ dobimo iz enačb (3) in (5). Najprej iz enačbe (3) izrazimo matriko $[D]$, nato to matriko vnesemo v enačbo (5). Po množenju enačbe (5) z leve z matriko $[V]^{-1} = [V]^T$ dobimo

$$\begin{aligned}[\sigma_{\alpha\beta}] &= [V] [D] [V]^T \\ &= [V] [U]^T [\sigma_{ij}] [U] [V]^T \\ &= [T]^T [\sigma_{ij}] [T].\end{aligned}$$

Opazimo, da matriko $[T]$ lahko zapišemo z enačbo

$$[T] = [U] [V]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Zvezo med matrikama $[\sigma_{\alpha\beta}]$ in $[\sigma_{ij}]$ dobimo iz enačb (3) in (5). Najprej iz enačbe (3) izrazimo matriko $[D]$, nato to matriko vnesemo v enačbo (5). Po množenju enačbe (5) z leve z matriko $[V]^{-1} = [V]^T$ dobimo

$$\begin{aligned}[\sigma_{\alpha\beta}] &= [V] [D] [V]^T \\ &= [V] [U]^T [\sigma_{ij}] [U] [V]^T \\ &= [T]^T [\sigma_{ij}] [T].\end{aligned}$$

Opazimo, da matriko $[T]$ lahko zapišemo z enačbo

$$[T] = [U] [V]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ker sta bili matriki $[U]$ in $[V]$ rotacijski, je tudi matrika $[T]$ rotacijska.

Zvezo med matrikama $[\sigma_{\alpha\beta}]$ in $[\sigma_{ij}]$ dobimo iz enačb (3) in (5). Najprej iz enačbe (3) izrazimo matriko $[D]$, nato to matriko vnesemo v enačbo (5). Po množenju enačbe (5) z leve z matriko $[V]^{-1} = [V]^T$ dobimo

$$\begin{aligned} [\sigma_{\alpha\beta}] &= [V] [D] [V]^T \\ &= [V] [U]^T [\sigma_{ij}] [U] [V]^T \\ &= [T]^T [\sigma_{ij}] [T]. \end{aligned}$$

Opazimo, da matriko $[T]$ lahko zapišemo z enačbo

$$[T] = [U] [V]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ker sta bili matriki $[U]$ in $[V]$ rotacijski, je tudi matrika $[T]$ rotacijska. Iz matrike $[T]$ po stolpcih preberemo $e_\xi = e_x$, $e_\eta = -e_y$, $e_\zeta = -e_z$.

Namesto matrike $[V]$ lahko izberemo tudi matriko

$$[V] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Namesto matrike $[V]$ lahko izberemo tudi matriko

$$[V] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika $[T]$ se potem glasi

$$[T] = [U] [V]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Namesto matrike $[V]$ lahko izberemo tudi matriko

$$[V] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika $[T]$ se potem glasi

$$[T] = [U] [V]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Iz matrike $[T]$ po stolpcih preberemo $e_\xi = -e_y$, $e_\eta = e_x$, $e_\zeta = e_z$.

Namesto matrike $[V]$ lahko izberemo tudi matriko

$$[V] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

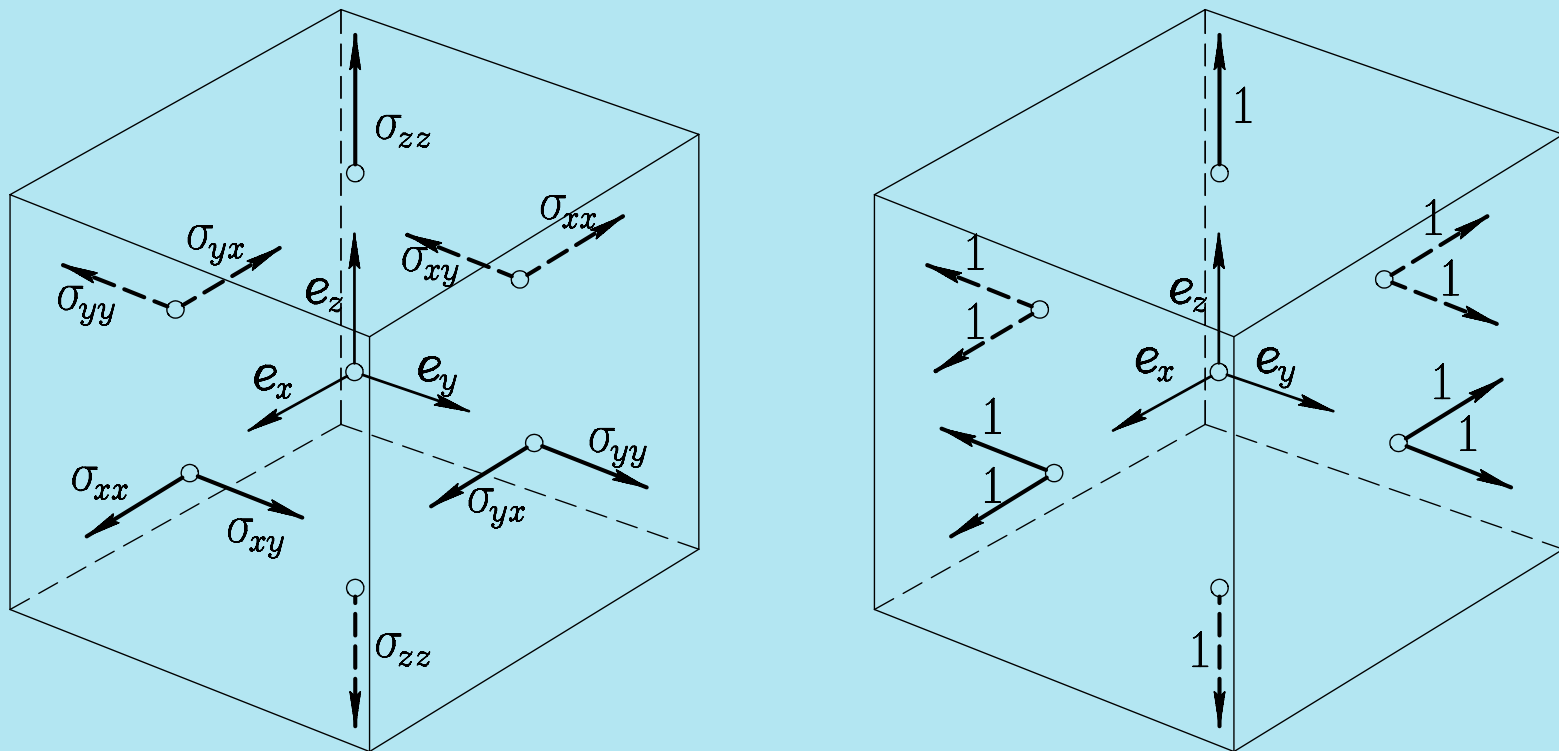
Matrika $[T]$ se potem glasi

$$[T] = [U] [V]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Iz matrike $[T]$ po stolpcih preberemo $e_\xi = -e_y$, $e_\eta = e_x$, $e_\zeta = e_z$. Vidimo, da obstaja več transformacijskih rotacijskih matrik $[T]$, ki zadoščajo enačbi

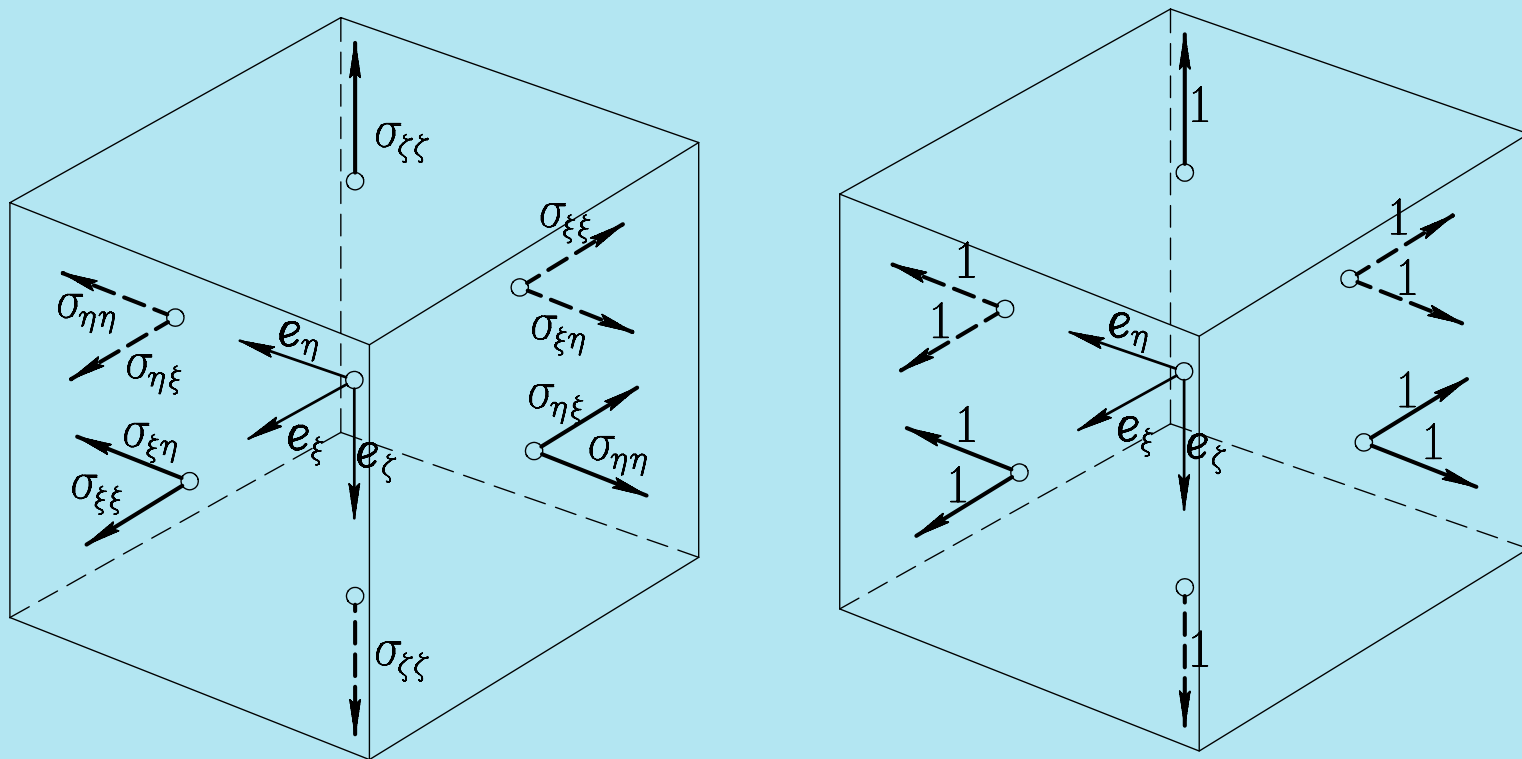
$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T].$$

Prikaz neničnih komponent napetostnega tenzorja v bazi $\{e_x, e_y, e_z\}$.



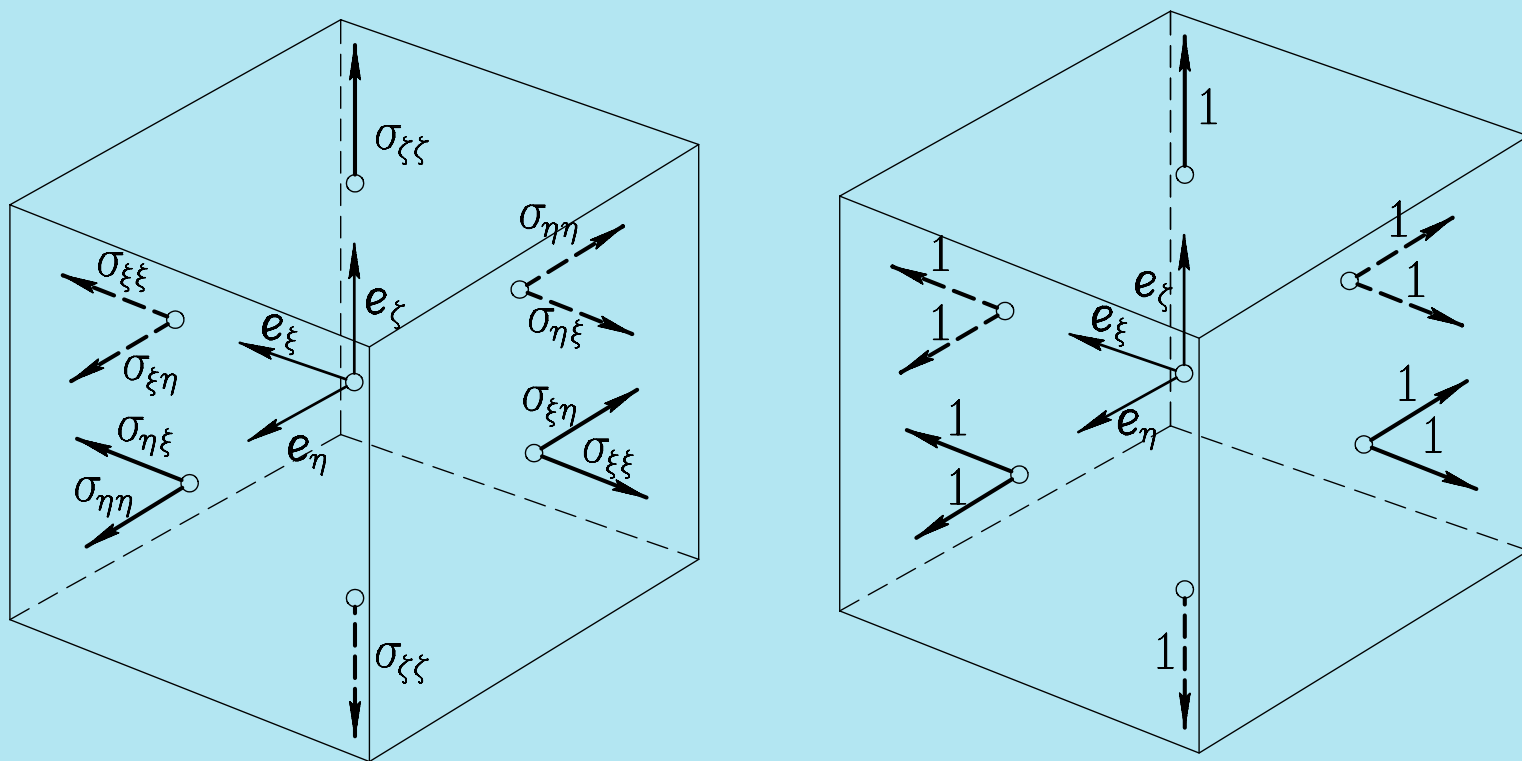
Slika 3

Prikaz neničnih komponent napetostnega tenzorja v bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$, dobljeni z rotacijo baze $\{e_x, e_y, e_z\}$ (podane z rotacijsko matriko v enačbi (6)) okrog osi $e_x = e_\xi$ za kot 180° .



Slika 4

Prikaz neničnih komponent napetostnega tenzorja v bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$, dobljeni z rotacijo baze $\{e_x, e_y, e_z\}$ (podane z rotacijsko matriko v enačbi (7)) okrog osi $e_z = e_\zeta$ za kot -90° .



Slika 5