1. Vaja: Bilinearni pravokotni končni element, materialni in prostorski opis, deformacijski gradient F, deformirani bazni vektorji

Rado Flajs

- Naloga 1: Bilinearni pravokotni končni element

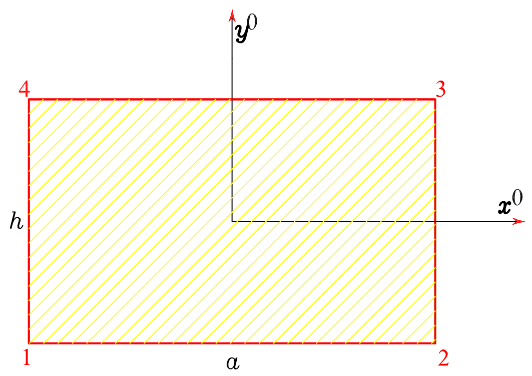
---

1. Naloga

1.1. Bilinearni pravokotni končni element

1.1.1. Opis in grafična predstavitev

Obravnavamo končni element na sliki 1.



Slika 1: Bilinearni pravokotni končni element

V vsakem vozlišču nastopa vektor pomika $\vec{u}$ z dvema od nič različnima komponentama tj. pomikom v vodoravni smeri u in pomikom v navpični smeri v. Pomika sta podana v materialnih koordinatah $x^0 \equiv x_1^0$ in $y^0 \equiv x_2^0$ s predpisom:

$$u_x(x^0, y^0) \equiv u(x^0, y^0) = a_0 + a_1 x^0 + a_2 y^0 + a_3 x^0 y^0, \tag{1a}$$

$$u_y(x^0, y^0) \equiv v(x^0, y^0) = b_0 + b_1 x^0 + b_2 y^0 + b_3 x^0 y^0. \tag{1b}$$

Koeficienti a_0, a_1, a_2, a_3 in b_0, b_1, b_2, b_3 so v splošnem lahko še funkcije časa t. Pomika lahko izrazimo direktno preko vozliščnih pomikov u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3 in v_4, ki so prav tako v splošnem lahko še funkcije časa t.

1.1.2. Določitev pomikov

Izražavo lahko opravimo vsaj na dva načina:

Email address: `rado.flajs@fgg.uni-lj.si` (Rado Flajs)

- Zahtevamo, da so pomikov vozlišč, dobljeni po enačbah (1), enaki predpisanim. Zahtevo lahko zapišemo s sistemoma linearnih enačb

$$u\left(\frac{-a}{2},\frac{-h}{2}\right) = a_0 + a_1\,\frac{(-a)}{2} + a_2\,\frac{(-h)}{2} + a_3\,\frac{(-a)}{2}\,\frac{(-h)}{2} \quad = \quad u_1 \tag{2a}$$

$$u\left(\frac{a}{2},\frac{-h}{2}\right) = a_0 + a_1\,\frac{a}{2} + a_2\,\frac{(-h)}{2} + a_3\,\frac{a}{2}\,\frac{(-h)}{2} \quad = \quad u_2 \tag{2b}$$

$$u\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1\,\frac{a}{2} + a_2\,\frac{h}{2} + a_3\,\frac{a}{2}\,\frac{h}{2} \quad = \quad u_3 \tag{2c}$$

$$u\left(\frac{-a}{2},\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1\,\frac{(-a)}{2} + a_2\,\frac{h}{2} + a_3\,\frac{(-a)}{2}\,\frac{h}{2} \quad = \quad u_4, \tag{2d}$$

$$v\left(\frac{-a}{2},\frac{-h}{2}\right) = b_0 + b_1\,\frac{(-a)}{2} + b_2\,\frac{(-h)}{2} + b_3\,\frac{(-a)}{2}\,\frac{(-h)}{2} \quad = \quad v_1 \tag{3a}$$

$$v\left(\frac{a}{2},\frac{-h}{2}\right) = b_0 + b_1\,\frac{a}{2} + b_2\,\frac{(-h)}{2} + b_3\,\frac{a}{2}\,\frac{(-h)}{2} \quad = \quad v_2 \tag{3b}$$

$$v\left(\frac{a}{2},\frac{h}{2}\right) = b_0 + b_1\,\frac{a}{2} + b_2\,\frac{h}{2} + b_3\,\frac{a}{2}\,\frac{h}{2} \quad = \quad v_3 \tag{3c}$$

$$v\left(\frac{-a}{2},\frac{h}{2}\right) = b_0 + b_1\,\frac{(-a)}{2} + b_2\,\frac{h}{2} + b_3\,\frac{(-a)}{2}\,\frac{h}{2} \quad = \quad v_4, \tag{3d}$$

  iz katerih lahko neposredno določimo koeficiente a_0, a_1, a_2, a_3 in b_0, b_1, b_2, b_3. Po krajšem računu dobimo

$$a_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}, \tag{4a}$$

$$a_1 = \frac{(u_2 + u_3) - (u_1 + u_4)}{2\,a}, \tag{4b}$$

$$a_2 = \frac{(u_3 + u_4) - (u_1 + u_2)}{2\,h}, \tag{4c}$$

$$a_3 = \frac{(u_1 + u_3) - (u_2 + u_4)}{a\,h}. \tag{4d}$$

$$b_0 = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4}, \tag{5a}$$

$$b_1 = \frac{(v_2 + v_3) - (v_1 + v_4)}{2\,a}, \tag{5b}$$

$$b_2 = \frac{(v_3 + v_4) - (v_1 + v_2)}{2\,h}, \tag{5c}$$

$$b_3 = \frac{(v_1 + v_3) - (v_2 + v_4)}{a\,h}. \tag{5d}$$

- Zahtevamo, da so pomikov vozlišč, dobljeni po enačbah (1), enaki predpisanim. Pomika u in v lahko izrazimo z linearno kombinacijo baznih funkcij N_i iz prostora Q_1, ki so v enem vozlišču enaki 1, v preostalih pa 0. Poljubno funkcijo iz prostora Q_1 lahko zapišemo z linearno kombinacijo funkcij $(x^0, y^0) \mapsto 1$, $(x^0, y^0) \mapsto x^0$, $(x^0, y^0) \mapsto y^0$ in $(x^0, y^0) \mapsto x^0\,y^0$. To dvoje nam zagotavlja enako rešitev kot v prvem primeru. To je tudi bolj uveljavljen pristop v metodi končnih elementov.

$$u\left(x^0, y^0\right) = u_1\,N_1(x^0, y^0) + u_2\,N_2(x^0, y^0) + u_3\,N_3(x^0, y^0) + u_4\,N_4(x^0, y^0) \tag{6a}$$

$$= \frac{u_1\,\left(x^0 - \frac{a}{2}\right)\left(y^0 - \frac{h}{2}\right)}{a\,h} - \frac{u_2\,\left(x^0 + \frac{a}{2}\right)\left(y^0 - \frac{h}{2}\right)}{a\,h} + \frac{u_3\,\left(x^0 + \frac{a}{2}\right)\left(y^0 + \frac{h}{2}\right)}{a\,h} - \frac{u_4\,\left(x^0 - \frac{a}{2}\right)\left(y^0 + \frac{h}{2}\right)}{a\,h}. \tag{6b}$$

$$v\left(x^0, y^0\right) = v_1\,N_1(x^0, y^0) + v_2\,N_2(x^0, y^0) + v_3\,N_3(x^0, y^0) + v_4\,N_4(x^0, y^0) \tag{7a}$$

$$= \frac{v_1\,\left(x^0 - \frac{a}{2}\right)\left(y^0 - \frac{h}{2}\right)}{a\,h} - \frac{v_2\,\left(x^0 + \frac{a}{2}\right)\left(y^0 - \frac{h}{2}\right)}{a\,h} + \frac{v_3\,\left(x^0 + \frac{a}{2}\right)\left(y^0 + \frac{h}{2}\right)}{a\,h} - \frac{v_4\,\left(x^0 - \frac{a}{2}\right)\left(y^0 + \frac{h}{2}\right)}{a\,h}. \tag{7b}$$

1.1.3. Deformacijski gradient F

Po enačbah

$$x = x^0 + u(x^0, y^0) = x(x^0, y^0), \tag{8a}$$
$$y = y^0 + v(x^0, y^0) = y(x^0, y^0), \tag{8b}$$

smo prostorske koordinate delca izrazili z materialnimi. Upravičeno se lahko vprašamo kdaj obstaja obrat, oziroma, kdaj lahko materialne koordinate delca izrazimo s prostorskimi. Izrek o inverzni funkciji iz matematične analize nam zagotavlja enoličen obrat v okolici delca, pri katerem je determinanta Jacobijeve preslikave različna od nič. V našem primeru se Jacobijeva preslikava ujema z deformacijskim gradientom F v obravnavanem delcu. Po enačbi [1, (5)] lahko določimo deformacijski gradient F. Dobimo

$$F = \begin{bmatrix} 1 + a_1 + a_3\, y^0 & a_2 + a_3\, x^0 \\ b_1 + b_3\, y^0 & 1 + b_2 + b_3\, x^0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

1.1.4. Determinanta deformacijskega gradienta F

Izračunamo determinanto in dobimo

$$\det F = |F| = (b_3 + a_1\, b_3 - a_3\, b_1)\, x^0 + (a_3 - a_2\, b_3 + a_3\, b_2)\, y^0 + (1 + a_1 + b_2 + a_1\, b_2 - a_2\, b_1). \tag{10}$$

Opazimo, da je determinanta, pri izbranih vozliščnih pomikih, linearna funkcija materialnih koordinat. Pri izbranih vozliščih pomikih so koeficienti a_1, a_2, a_3 in b_1, b_2, b_3 konstante. Skratka, pri izbranih vozliščnih pomikih so potencialna območja singularnosti premice. Zapišimo determinanto še kot funkcijo vozliščnih pomikov.

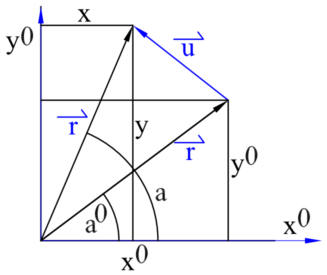
$$\begin{aligned} |F| = {} & \frac{(u_3 - u_4)\,(v_1 - v_2) - (u_1 - u_2)\,(v_3 - v_4) + a\,(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)}{a^2\, h}\, x^0 \\ & + \frac{(u_2 - u_3)\,(v_1 - v_4) - (u_1 - u_4)\,(v_2 - v_3) + h\,(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)}{a^2\, h}\, y^0 \\ & + \frac{(u_1 - u_3)\,(v_2 - v_4) - (u_2 - u_4)\,(v_1 - v_3) + a\,(2\,h - v_1 - v_2 + v_3 + v_4) + h\,(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4)}{2\,a\,h}. \end{aligned} \tag{11}$$

1.1.5. Posebni primeri: translacija

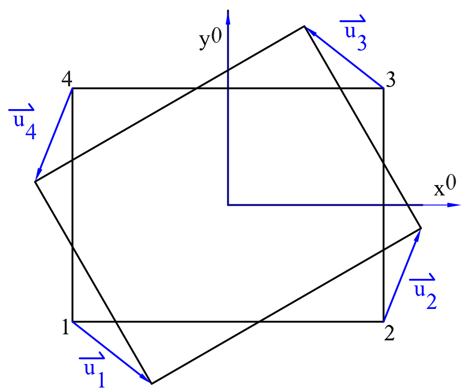
Točen opis translacije. Pomika u in v sta kar konstanti, neodvisni od izbire delca t.j. $u = c_1$ in $v = c_2$

Končni element zna opisati translacijo. Pomiki vseh oglišč so enaki $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = c_1$ in $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = c_2$. Ker je vsota interpolacijskih funkcij N_i v enačbah (6) in (7) enaka ena, sta tako pomika u in v dobljena po teh enačbah enaka c_1 in c_2.

1.1.6. Posebni primeri: rotacija



(a) Rotacija vektorja $\vec{r}$



(b) Rotacija končnega elementa

Slika 2: Rotacija

Točen opis rotacije. Uporabimo sliko 2(a). Zasuk vektorja $\vec{r}$ označimo s kotom φ. Iz slike 2(a) so neposredno razvidne veljavnosti relacij

$$x^0 = r\,\cos(\alpha^0), \tag{12a}$$
$$y^0 = r\,\sin(\alpha^0), \tag{12b}$$
$$x = r\,\cos(\alpha) = r\,\cos(\alpha^0+\varphi) = r\Big(\cos(\varphi)\,\cos(\alpha^0) - \sin(\varphi)\,\sin(\alpha^0)\Big) = \cos(\varphi)\,x^0 - \sin(\varphi)\,y^0 \tag{12c}$$
$$y = r\,\sin(\alpha) = r\,\sin(\alpha^0+\varphi) = r\Big(\sin(\varphi)\,\cos(\alpha^0) + \cos(\varphi)\,\sin(\alpha^0)\Big) = \sin(\varphi)\,x^0 + \cos(\varphi)\,y^0 \tag{12d}$$

Zadnji dve enačbi lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} = F\,\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

kjer smo z F označili deformacijski gradient,

$$F = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Končni element zna opisati rotacijo. Ker zmore končni element opisati natačno poljuben linearni pomik, zmore seveda opisati tudi rotacijo, o čemer se seveda lahko prepričamo še na drug način. Ali imamo pri rotaciji telesa za fiksen kot φ sploh opravka z linearno preslikavo? Seveda, saj je deformacijski gradient pri fiksnem zasuku φ konstanta in dejansko prestavlja rotacijo (matrika F predstavlja transponirano rotacijsko matriko). Iz enačbe (13) lahko izluščimo pomike. Pišemo

$$x = x^0 + u(x^0,y^0) = \cos(\varphi)\,x^0 - \sin(\varphi)\,y^0 \quad\longrightarrow\quad u = (\cos(\varphi)-1)\,x^0 - \sin(\varphi)\,y^0, \tag{15a}$$
$$y = y^0 + v(x^0,y^0) = \sin(\varphi)\,x^0 + \cos(\varphi)\,y^0 \quad\longrightarrow\quad v = \sin(\varphi)\,x^0 + (\cos(\varphi)-1)\,y^0. \tag{15b}$$

Tvorimo vozliščne pomike tako, da le ti zadoščajo gornjima enačbama

$$u_1 = -(\cos(\varphi)-1)\,\frac{a}{2} + \sin(\varphi)\,\frac{h}{2}, \tag{16a}$$
$$u_2 = (\cos(\varphi)-1)\,\frac{a}{2} + \sin(\varphi)\,\frac{h}{2}, \tag{16b}$$
$$u_3 = (\cos(\varphi)-1)\,\frac{a}{2} - \sin(\varphi)\,\frac{h}{2}, \tag{16c}$$
$$u_4 = -(\cos(\varphi)-1)\,\frac{a}{2} - \sin(\varphi)\,\frac{h}{2}, \tag{16d}$$

$$v_1 = -\sin(\varphi)\,\frac{a}{2} - (\cos(\varphi)-1)\,\frac{h}{2}, \tag{17a}$$
$$v_2 = \sin(\varphi)\,\frac{a}{2} - (\cos(\varphi)-1)\,\frac{h}{2}, \tag{17b}$$
$$v_3 = \sin(\varphi)\,\frac{a}{2} + (\cos(\varphi)-1)\,\frac{h}{2}, \tag{17c}$$
$$v_4 = -\sin(\varphi)\,\frac{a}{2} + (\cos(\varphi)-1)\,\frac{h}{2}, \tag{17d}$$

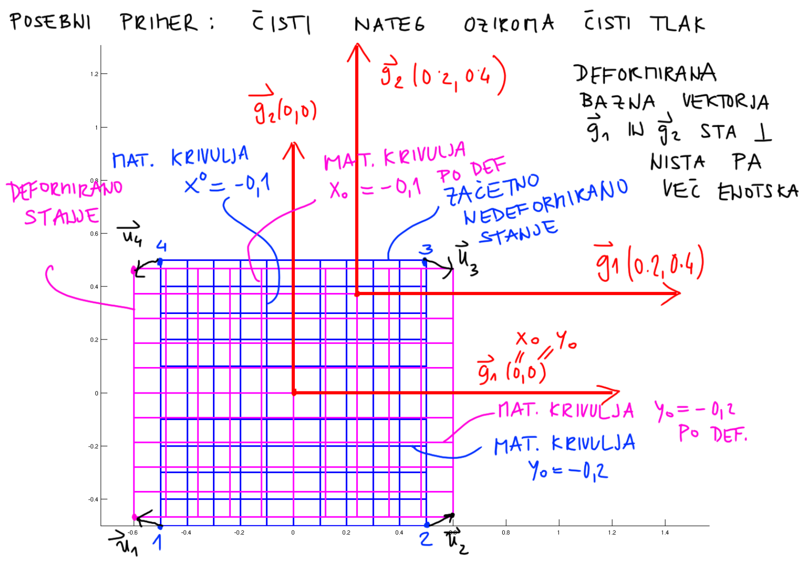
in vstavimo le te v izraza (6) in (7) za pomika u in v

$$u\Big(x^0,y^0\Big) = \frac{u_1\,\Big(x^0-\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0-\frac{h}{2}\Big)}{a\,h} - \frac{u_2\,\Big(x^0+\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0-\frac{h}{2}\Big)}{a\,h} + \frac{u_3\,\Big(x^0+\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0+\frac{h}{2}\Big)}{a\,h} - \frac{u_4\,\Big(x^0-\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0+\frac{h}{2}\Big)}{a\,h}, \tag{18a}$$
$$v\Big(x^0,y^0\Big) = \frac{v_1\,\Big(x^0-\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0-\frac{h}{2}\Big)}{a\,h} - \frac{v_2\,\Big(x^0+\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0-\frac{h}{2}\Big)}{a\,h} + \frac{v_3\,\Big(x^0+\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0+\frac{h}{2}\Big)}{a\,h} - \frac{v_4\,\Big(x^0-\frac{a}{2}\Big)\Big(y^0+\frac{h}{2}\Big)}{a\,h}. \tag{18b}$$

Po krajšanju dobimo

$$u = (\cos(\varphi)-1)\,x^0 - \sin(\varphi)\,y^0, \tag{19a}$$
$$v = \sin(\varphi)\,x^0 + (\cos(\varphi)-1)\,y^0. \tag{19b}$$

Pokazali smo, da zna končni element opisati translacijo in rotacijo.



Slika 3: Čisti nateg ali tlak

1.1.7. Posebni primeri: čisti tlak ali nateg

Privzamemo sledeče zveze med pomiki (glej sliki 1 in 3) $u_1 = u_4$, $u_2 = u_3$, $v_1 = v_2$ in $v_3 = v_4$.
Determinanta F po enačbi (11) se poenostavi v obliko

$$\begin{aligned} |F| &= \frac{(u_1 - u_2)\,(v_1 - v_3)}{a\,h} + \frac{u_2 - u_1}{a} + \frac{v_3 - u_1}{h} + 1 \\ &= \frac{u_1 - u_2}{a}\,\frac{v_1 - v_3}{h} - \frac{u_1 - u_2}{a} - \frac{v_1 - u_3}{h} + 1 \\ &= \left(\frac{u_1 - u_2}{a} - 1\right)\left(\frac{v_1 - v_3}{h} - 1\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Determinanta bo enaka nič v primerih, ko se pravokotnik stisne v navpično daljico ($u_1 = a + u_2$), ali ko se pravokotnik stisne v vodoravno daljico ($v_1 = h + v_3$), kar pa je po zakonu o ohranitvi mase nedopustno.

1.1.8. Posebni primeri: strig

Privzamemo sledeče zveze med pomiki (glej sliki 1 in 4) $u_1 = u_2$, $u_3 = u_4$, $v_1 = v_4$ in $v_2 = v_3$.
Determinanta F po enačbi (11) se poenostavi v obliko

$$\begin{aligned} |F| &= \frac{(u_1 - u_3)\,(v_2 - v_4)}{a\,h} + 1 \\ &= -\frac{(u_3 - u_2)\,(v_3 - v_4)}{a\,h} + 1 \end{aligned} \tag{21}$$

Obravnavajmo končni element kvadratne oblike s stranico a in čisti strig, ko bo $u_3 - u_2 = v_3 - v4$. Determinanta bo enaka nič v primerih, ko bo $u_3 - u_2 = v_3 - v_4 = a$, ali ko se bo se pravokotnik stisnil v diagonalno navpično daljico (glej sliko 5), kar pa je po zakonu o ohranitvi mase nedopustno.

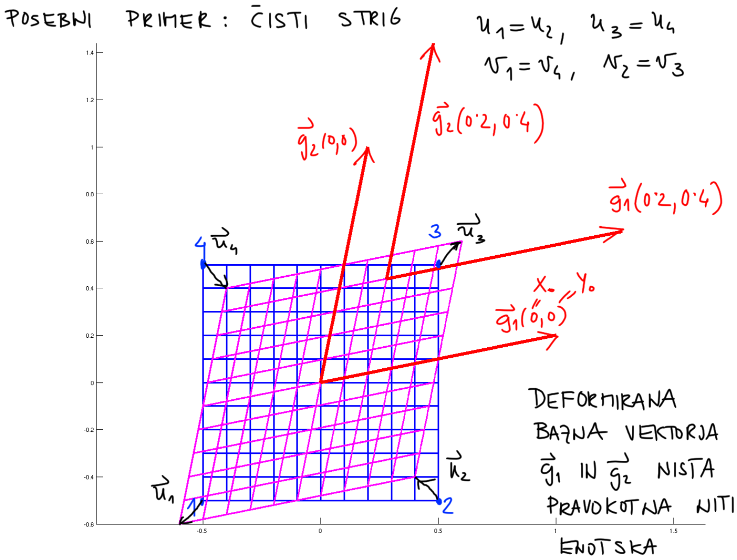
1.1.9. Posebni primeri: (zaradi nastavkov fizikalno možen) singularni primer

Privzamemo sledeče zveze med pomiki (glej sliki 1 in 6) $u_1 = v_1 = 0$, $u_2 = \dfrac{a}{2}$, $v_2 = \dfrac{h}{2}$, $u_3 = v_3 = 0$ in $u_4 = \dfrac{a}{2}$, $v_4 = \dfrac{h}{2}$.
Determinanta F po enačbi (11) se poenostavi v obliko

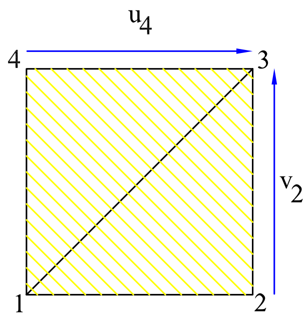
$$|F| = -\frac{x^0}{a} - \frac{y^0}{h} + 1 = 0. \tag{22}$$

Determinanta bo enaka nič v delcu z materialnima koordinatama $x^0 = \dfrac{a}{2}$ in $y^0 = \dfrac{h}{2}$. Določimo še deformacijski gradient v tem delcu. Dobimo

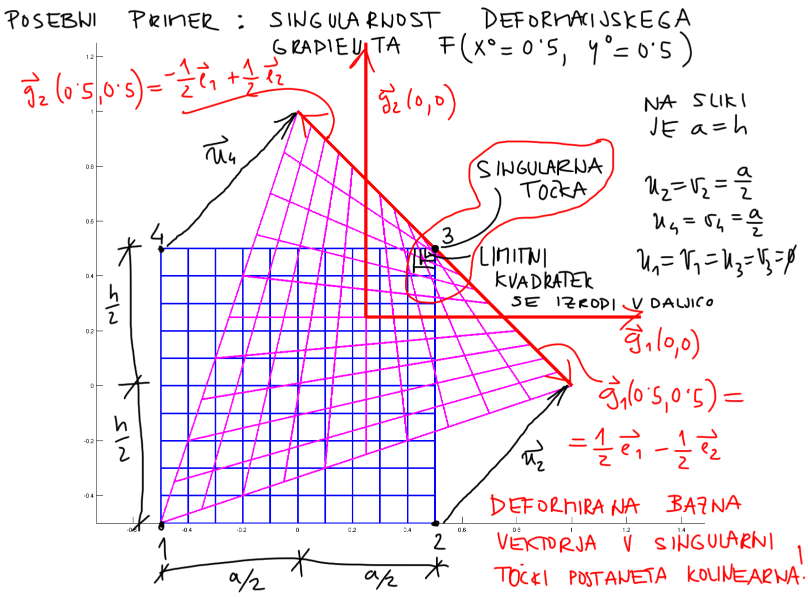
$$F = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{a}{h} \\ \dfrac{h}{a} & 1 \end{bmatrix} \overset{a=h}{=} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$



Slika 4: Strig



Slika 5: Čisti strig (singularni primer)



Slika 6: Singularen deformacijski gradient

Izračunamo deformirane bazne vektorje in dobimo

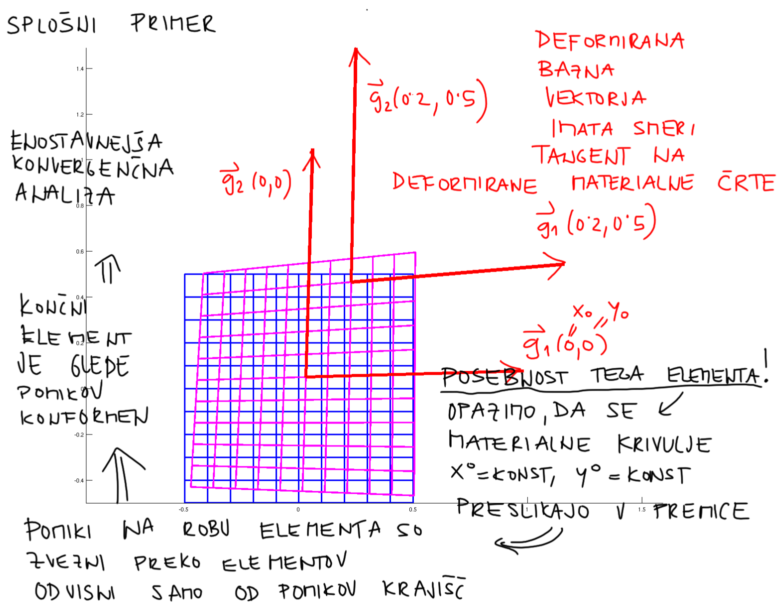
$$\vec{g}_1 = F\,\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\,\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\,\vec{e}_2. \tag{24}$$

in

$$\vec{g}_2 = F\,\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}\,\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\,\vec{e}_2. \tag{25}$$

Opazimo, da sta bazna vektorja vzporedna (stolpca matrike F sta linearno odvisna).

1.1.10. Druge lastnosti končnega elementa



Slika 7: Poljubna velika deformacija

Literatura

[1] R. Flajs, Nelinearna mehanika deformabilnih teles: Osnovne enačbe (2012).
URL `http://km.fgg.uni-lj.si/NelinearnaMehanika/Vaje/`