2. Vaja: deformacijski gradient, polarni razcep

Rado Flajs

1. Naloga: Določitev polarnega razcepa deformacijskega gradienta [1, str. 52–54]

1. Naloga [1, str. 52–54]

1.1. Naloga

Polje pomikov deformabilnega telesa je podano v materialnem koordinatnem sistemu z enačbami

$$\begin{aligned} u(x_1^0, x_2^0) &= \left(\sqrt{3} - 1\right) x_1^0 + x_2^0, \\ v(x_1^0, x_2^0) &= x_2^0, \\ w(x_1^0, x_2^0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Določi deformacijski gradient in polarna razcepa deformacijskega gradienta. Fizikalno pojasni dobljene rezultate.

1.2. Rešitev

1.2.1. Deformacijski gradient

Polje pomikov deformabilnega telesa je podano v materialnem koordinatnem sistemu z enačbami

$$\begin{aligned} u(x_1^0, x_2^0) &= \left(\sqrt{3} - 1\right) x_1^0 + x_2^0, \\ v(x_1^0, x_2^0) &= x_2^0, \\ w(x_1^0, x_2^0) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Z uporabo zvez $x_1 = x_1^0 + u$, $x_2 = x_2^0 + v$ in $x_3 = x_3^0 + w$, izrazimo prostorske koordinate z materialnimi koordinatami in dobimo

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{3}\, x_1^0 + x_2^0, \\ x_2 &= 2\, x_2^0, \\ x_3 &= x_3^0. \end{aligned} \tag{3}$$

Po [2, enačbi (5)]

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2^0} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_3^0} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_2^0} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_3^0} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2^0} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_3^0} \end{bmatrix} \tag{4}$$

izračunamo deformacijski gradient in dobimo

$$F = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Email address: `rado.flajs@fgg.uni-lj.si` (Rado Flajs)

1.2.2. RU razcep

Najprej določimo polarni razcep $F = R\,U$. Tu R predstavlja rotacijo U pa raztezanje ali krčenje telesa v neki smeri.

- Najprej določimo matriko $C = F^T\,F$ in dobimo

$$C = F^T\,F = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

- Nato določimo matriko U kot matrični koren matrike C. To je takšna matrika za katero velja zveza $C = U\,U$. Krajši račun vrne

$$U = \sqrt{C} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 0 \\ 3-\sqrt{3} & 1+3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

- Končno dobimo z uporabo enačbe $F = R\,U$ še rotacijsko matriko R.

$$U^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1+3\sqrt{3} & \sqrt{3}-3 & 0 \\ \sqrt{3}-3 & 3+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$R = F\,U^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 0 \\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

1.2.3. VR razcep

Nato določimo polarni razcep $F = V\,R$. Tu R predstavlja rotacijo V pa raztezanje ali krčenje telesa v neki smeri.

- Najprej določimo matriko $B = F\,F^T$ in dobimo

$$B = F\,F^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

- Nato določimo matriko V kot matrični koren matrike B. To je takšna matrika za katero velja zveza $B = V\,V$. Krajši račun vrne

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 0 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

- Z uporabo enačbe $F = V\,R$ dobimo še rotacijsko matriko R.

$$R = V^{-1}\,F = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 0 \\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

1.2.4. Rešitev v Matlabu

Zaradi dodatnih komentarjev v nadaljevanju so vse vrstice v programu oštevilčene.

```
3 F = [sqrt(3) 1 0; 0 2 0; 0 0 1]
4 F =
5     1.7321    1.0000         0
6          0    2.0000         0
7          0         0    1.0000
8 C = F'*F
```

```
C =
    3.0000    1.7321         0
    1.7321    5.0000         0
         0         0    1.0000
U = sqrtm(C)
U =
    1.6730    0.4483         0
    0.4483    2.1907         0
         0         0    1.0000
R = F*inv(U)
R =
    0.9659    0.2588         0
   -0.2588    0.9659         0
         0         0    1.0000
B = F*F'
B =
    4.0000    2.0000         0
    2.0000    4.0000         0
         0         0    1.0000
V = sqrtm(B)
V =
    1.9319    0.5176         0
    0.5176    1.9319         0
         0         0    1.0000
R = inv(V)*F
R =
    0.9659    0.2588         0
   -0.2588    0.9659         0
         0         0    1.0000
[R,D] = eig(C)
R =
         0   -0.8660    0.5000
         0    0.5000    0.8660
    1.0000         0         0
D =
    1.0000         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    6.0000
R = inv(V)*F
R =
    0.9659    0.2588         0
   -0.2588    0.9659         0
         0         0    1.0000
[LV,LAM] = eig(C)
LV =
         0   -0.8660    0.5000
         0    0.5000    0.8660
    1.0000         0         0
LAM =
    1.0000         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    6.0000
U = LV*sqrt(LAM)*LV'
U =
    1.6730    0.4483         0
    0.4483    2.1907         0
         0         0    1.0000
[cosd(-15) -sind(-15) 0; sind(-15) cosd(15) 0; 0 0 1]
```

```
ans =
     0.9659    0.2588         0
    -0.2588    0.9659         0
          0         0    1.0000
R
R =
     0.9659    0.2588         0
    -0.2588    0.9659         0
          0         0    1.0000
V
V =
     1.9319    0.5176         0
     0.5176    1.9319         0
          0         0    1.0000
U
U =
     1.6730    0.4483         0
     0.4483    2.1907         0
          0         0    1.0000
[LV,LAM] = eig(U)
LV =
          0   -0.8660    0.5000
          0    0.5000    0.8660
     1.0000         0         0
LAM =
     1.0000         0         0
          0    1.4142         0
          0         0    2.4495
[LV,LAM] = eig(V)
LV =
          0   -0.7071    0.7071
          0    0.7071    0.7071
     1.0000         0         0
LAM =
     1.0000         0         0
          0    1.4142         0
          0         0    2.4495
```

1.2.5. Rešitev v Mathematici

F = {{Sqrt[3], 1, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 1}};

F//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c = Transpose[F].F;

c//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
U = MatrixPower[c, 1/2]//FullSimplify;
U//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)} & \frac{1}{2}\sqrt{6-3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{6-3\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
R = F.Inverse[U]//FullSimplify;
R//MatrixForm
phi = −15/180Pi;
R − {{Cos[phi], −Sin[phi], 0}, {Sin[phi], Cos[phi], 0}, {0, 0, 1}}//FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} & 0 \\ \frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

```
B = F.Transpose[F];
B//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
V = MatrixPower[B, 1/2]//FullSimplify;
V//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{3}} & \sqrt{2-\sqrt{3}} & 0 \\ \sqrt{2-\sqrt{3}} & \sqrt{2+\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
R = Inverse[V].F//FullSimplify;
R//MatrixForm
phi = −15/180Pi;
R − {{Cos[phi], −Sin[phi], 0}, {Sin[phi], Cos[phi], 0}, {0, 0, 1}}//FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} & 0 \\ \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) & \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

```
{Uu, Du, Vu} = SingularValueDecomposition[U]//FullSimplify;
```

Uu//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

{Uu, Du, Vu} = SingularValueDecomposition[*V*]//FullSimplify;

Uu//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.6. Grafični prikaz polarnega razcepa z razlago
Grafični prikaz deformiranja.

Lastne vrednosti in lastni vektorji preslikave U.

Lastne vrednosti in lastni vektorji preslikave V.

Fizikalni pomen RU razcepa – razlaga dobljenih rezultatov.

(a) Error in the energy norm for meshes (a)

(b) Error in the energy norm for meshes (b)

Slika 1: Error in the energy norm.

Fizikalni pomen VR razcepa – razlaga dobljenih rezultatov.

1.2.7. Grafični prikaz polarnega razcepa – film
Fizikalni pomen RU in VR razcepov je najbolj razviden iz filmov [3] in [4].

Film o RU razcepu.

Film o VR razcepu.

Fizikalni pomen RU razcepa – razlaga dobljenih rezultatov.

Fizikalni pomen VR razcepa – razlaga dobljenih rezultatov.

Literatura

[1] J. Marsden, T. Hughes, Mathematical foundations of elasticity, Dover Publications, Inc., New York, 1983.

[2] R. Flajs, Nelinearna mehanika deformabilnih teles: Osnovne enačbe (2012).
URL `http://km.fgg.uni-lj.si/PREDMETI/Nelinearna mehanika/Nelinearna mehanika.html`

[3] R. Flajs, Ru razcep deformacijskega gradienta - film (2012).
URL `http://km.fgg.uni-lj.si/PREDMETI/Nelinearna mehanika/Nelinearna mehanika.html`

[4] R. Flajs, Vr razcep deformacijskega gradienta - film (2012).
URL `http://km.fgg.uni-lj.si/PREDMETI/Nelinearna mehanika/Nelinearna mehanika.html`