# 5. Vaja: polarni razcep deformacijskega gradienta (prostorski primer), strech (razteg ali skrčitev), glavni raztegi, spektralni razcep deformacijskih tenzorjev, razcep deformacijskega gradienta

Rado Flajs

---

## 1. Naloga

### *1.1. Naloga*

Kocko s stranico 1 najprej zavrtimo okrog osi $\vec{e}_1$ za 90°. Tako deformirano telo nato še raztegnemo v smeri $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ s faktorjem $1 + a$, v smeri $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ pa skrčimo s faktorjem $1 - a$.

Določi:

- materialni opis deformiranja telesa,
- prostorski opis deformiranja telesa,
- deformacijski gradient $F$,
- polarna razcepa $RU$ in $VR$ deformacijskega gradienta $F$ ter pojasni dobljene rezultate.
- Tenzorja $C$ in $B$.
- Tenzorja deformacij $E$ in $e$.
- Glavne raztege $\lambda_i$ in pripadajoče glavne smeri $\vec{m}_i^0$ in $\vec{m}_i$.
- Spektralne razcepe tenzorjev $C$, $B$, $E$, $e$ in $\varepsilon$ .
- Razcep deformacijskega gradienta $F$.

### *1.2. Rešitev*

#### *1.2.1. Grafični prikaz deformiranja telesa*

#### *1.2.2. VR razcep iz slike*

Rotacijo telesa opišemo z rotacijsko matriko $R$, ki bazne vektorje $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ preslika v bazne vektorje $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$ in $-\vec{e}_2$.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

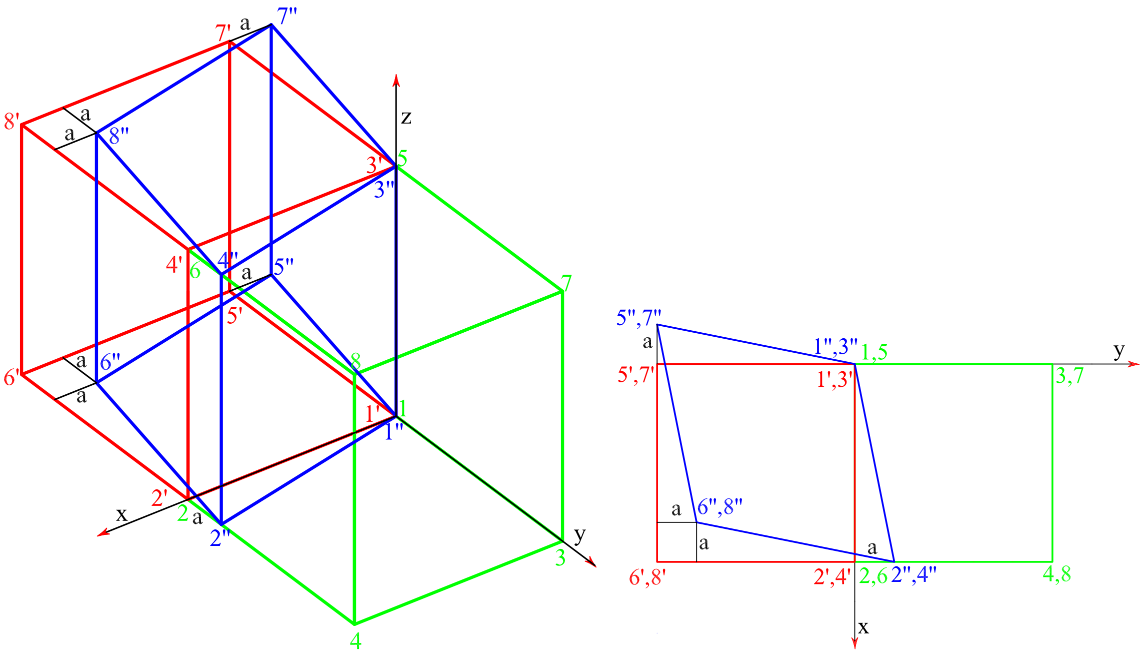
Koordinate delcev po rotaciji dobimo potem po enačbi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Začetno nedeformirano stanje je na sliki 1 označeno z zeleno barvo. Zelena kocka se zavrti za 90° okrog osi $\vec{e}_1$ in po rotaciji preide v rdečo kocko. Po rotaciji kocko raztegnemo v smeri $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ s faktorjem $a$, v diagonalni smeri $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ pa skrčimo z istim faktorjem. Takšno deformiranje lahko opišemo s preslikavo

$$x = x^0 + a\,y^0, \tag{3a}$$
$$y = y^0 + a\,x^0, \tag{3b}$$
$$z = z^0, \tag{3c}$$

*Email address:* rado.flajs@fgg.uni-lj.si (Rado Flajs)




(a) Prostorski prikaz deformiranja

(b) Tlorisni prikaz deformiranja

Slika 1: VR razcep

ali v matrični obliki z enačbo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Mi imamo opravka s kompozicijo preslikav, zato lahko končno stanje dobimo po enačbi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Končno deformirano stanje je na sliki 1 označeno z modro barvo.

*1.2.3. Materialni opis in deformacijski gradient F*

Deformiranje telesa v materialnem opisu predstavimo z enačbo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Iz te enačbe lahko neposredno določimo deformacijski gradient $F$. Dobimo

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

*1.2.4. Računska določitev RU razcepa*

Izračunamo tenzor $C$.

$$C = F^T F = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 0 & -2\,a \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\,a & 0 & 1+a^2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

V nadaljevanju bomo izračunali matrični koren tenzorja $C$. V ta namen določimo lastne vrednosti $\lambda_i$ in lastne vektorje $\vec{x}_i$ tenzorja $C$. Te dobimo iz zahteve, da je determinanta $|C - \lambda_i I|$ enaka nič. Samo v tem primeru ima sistem enačb

$$C\,\vec{x}_i - \lambda_i\,\vec{x}_i = (C - \lambda_i\,I)\,\vec{x}_i = \vec{0}$$

od nič različno rešitev $\vec{x}_i$. V nadaljevanju predstavimo postopek določitve matrike $U$, t.j. matričnega korena matrike $C$ napisano z enčbo $U = \sqrt{C}$, za katerega velja matrična enačba $U\,U = C$. Videli bomo, da je tako izračunani matrični koren tudi simetrična pozitivno definitna matrika za katero velja relacija $U = U^T$ in katera ima vse lastne vrednosti pozitivne.

- Najprej izračunamo lastne vrednosti $\lambda_i$. Dobimo

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-\lambda & 0 & -2\,a \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2\,a & 0 & 1+a^2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,((1+a^2-\lambda)^2-(2\,a)^2) = (1+a^2-\lambda+2\,a)\,(1+a^2-\lambda-2\,a) = 0. \quad (9)$$

  Od tu izračunamo lastne vrednosti $\lambda_1 = (1+a)^2$, $\lambda_3 = (1-a)^2$ in $\lambda_2 = 1$.

- Izračunamo lastne vektorje $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ in $\vec{x}_3$:

  - Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = (1+a)^2$ dobimo kot rešitev sistema enačb:

$$(C-\lambda_1\,I)\,\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -2\,a & 0 & -2\,a \\ 0 & 1-(1+a)^2 & 0 \\ -2\,a & 0 & -2\,a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}. \quad (10)$$

    Iz druge enačbe izluščimo, da je komponenta $x_2$ enaka 0, iz prve in tretje pa da velja $x_1 = -x_3$. Izberemo enotski vektor

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

  - Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_3 = (1-a)^2$ dobimo kot rešitev sistema enačb:

$$(C-\lambda_3\,I)\,\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 2\,a & 0 & -2\,a \\ 0 & 1-(1-a)^2 & 0 \\ -2\,a & 0 & 2\,a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}. \quad (12)$$

    Iz druge enačbe izluščimo, da je komponenta $x_2$ enaka 0, iz prve in tretje pa da velja $x_1 = x_3$. Izberemo enotski vektor

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

  - Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_2 = 1$ dobimo kot rešitev sistema enačb:

$$(C-\lambda_2\,I)\,\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & -2\,a \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\,a & 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}. \quad (14)$$

    Prva in tretja enačba tvorita homogen nesingularen sistem dveh linearnih enačb z dvema neznanka $x_1$ in $x_3$, zato sta obe neznanki enaki nič. Druga enačba $0 = 0$ v ničemer ne omejuje nobene neznanke, je vedno izpolnjena, zato lahko za $x_2$ izberemo poljubno realno število, različno od 0 (vektor $\vec{0}$ po definiciji ni lastni vektor). Izberemo $x_2 = 1$ in dobimo

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

- Enačbe $C\,\vec{x}_1 = \lambda_1\,\vec{x}_1$, $C\,\vec{x}_2 = \lambda_2\,\vec{x}_2$ in $C\,\vec{x}_3 = \lambda_3\,\vec{x}_3$ lahko zapišemo z eno samo matrično enačbo

$$C\,X = X\,\Lambda = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 0 & -2\,a \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\,a & 0 & 1+a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

  Ker je $X$ ortogonalna matrika je $X^{-1} = X^T$ zato lahko gornjo enačbo pomnožimo z desne z $X^T$ in dobimo

$$C = X\,\Lambda\,X^T = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 0 & -2\,a \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\,a & 0 & 1+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

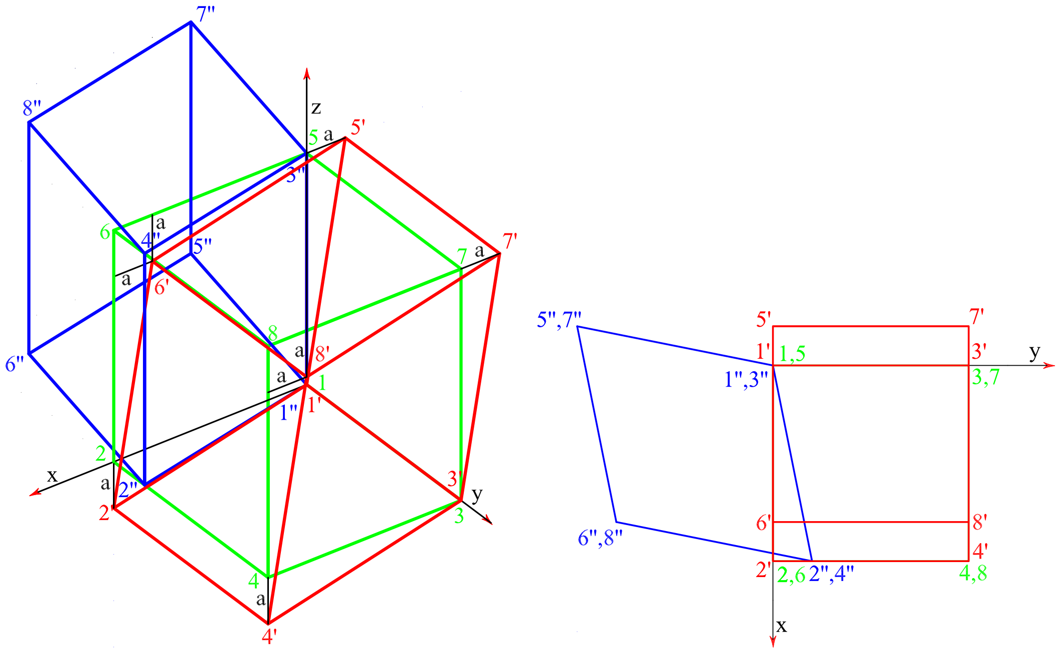
Gornja enačba bo odigrala pomembno vlogo pri izračunu matričnega korena. V ta namen jo prepišimo v obliko

$$C = X\,\Lambda\,X^T = X\,\sqrt{\Lambda}\,\sqrt{\Lambda}\,X^T = X\,\sqrt{\Lambda}\,X^T\,X\,\sqrt{\Lambda}\,X^T = U\,U \tag{18}$$

Pri izpeljavi smo privzeli zvezo $X^T\,X = I$ in koren matrike $\Lambda$ določili s korenenjem posameznih komponent. Iz zapisa potem takoj preberemo matriko $U$. Dobimo

$$U = X\,\sqrt{\Lambda}\,X^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+a) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

### *1.2.5. RU razcep iz slike*




(a) Prostorski prikaz deformiranja (b) Tlorisni prikaz deformiranja

Slika 2: RU razcep

### *1.2.6. Prostorski opis*

Materialne koordinate lahko izrazimo s prostorskimi s pomočjo enačbe

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Z uporabo inverza dobimo prostorski opis deformiranja:

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Določimo inverz deformacijskega gradienta $F^{-1}$

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-a^2} & \dfrac{a}{a^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{a}{1-a^2} & \dfrac{1}{a^2-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

in inverz tenzorja $B$, t.j. $B^{-1}$

$$B^{-1} = F^{-T}\, F^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2+1}{(a^2-1)^2} & -\dfrac{2a}{(a^2-1)^2} & 0 \\ -\dfrac{2a}{(a^2-1)^2} & \dfrac{a^2+1}{(a^2-1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

*1.2.7. Tenzor B*

Tenzor $B$ lahko določimo po enačbi $B = F\, F^T$. Po množenju dobimo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a^2+1 & 2a & 0 \\ 2a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

*1.2.8. Tenzorja deformacij E in e*

Tenzor $E$ dobimo po enačbi $E = \frac{1}{2}(C - I)$. Po krajšem računu dobimo

$$E = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2} & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & \frac{a^2}{2} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Tenzor $e$ dobimo po enačbi $e = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$. Po krajšem računu dobimo

$$e = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2\left(a^2-3\right)}{2\,(a^2-1)^2} & \dfrac{a}{(a^2-1)^2} & 0 \\ \dfrac{a}{(a^2-1)^2} & \dfrac{a^2\left(a^2-3\right)}{2\,(a^2-1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

*1.2.9. Glavni raztegi $\lambda_i$ in pripadajoče glavne smeri $\vec{m}_i^0$ in $\vec{m}_i$*

Glavne raztegi $\lambda_i$ so lastne vednosti matrike $U$, pripadajoče glavne smeri $\vec{m}_i^0$ so lastni vektorji matrike $U$, pripadajoče glavne smeri $\vec{m}_i$ pa lastni vektorji matrike $V$. Po kraših računih dobimo:

$$\lambda_1 = (1+a), \tag{27a}$$
$$\lambda_2 = 1, \tag{27b}$$
$$\lambda_3 = (1-a). \tag{27c}$$

Pripadajoči lastni vektorji $\vec{m}_i^0$ so:

$$\vec{m}_1^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3), \tag{28a}$$
$$\vec{m}_2^0 = \vec{e}_2, \tag{28b}$$
$$\vec{m}_3^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3). \tag{28c}$$

Pripadajoči lastni vektorji $\vec{m}_i$ pa so:

$$\vec{m}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \tag{29a}$$
$$\vec{m}_2 = \vec{e}_3, \tag{29b}$$
$$\vec{m}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2). \tag{29c}$$

*1.2.10. Spektralni razcepi tenzorjev C, B, E, e in $\varepsilon$*

Sedaj ko lastne vrednosti (glavne raztege ali skrčitve) $\lambda_i$ in pripadajoče lastne vektorje $\vec{m}_i^0$ in $\vec{m}_i$ po enačbah (27), (28), (29) poznamo, lahko spektralne razcepe tenzorjev $C$, $B$, $E$, $e$ izračunamo direktno po [1, enačbi (34)]

*Spektralni razcep tenzorja C.*

$$C = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \, (\vec{m}_i^0 \otimes \vec{m}_i^0) = \lambda_1^2 \, (\vec{m}_1^0 \otimes \vec{m}_1^0) + \lambda_2^2 \, (\vec{m}_2^0 \otimes \vec{m}_2^0) + \lambda_3^2 \, (\vec{m}_3^0 \otimes \vec{m}_3^0)$$
$$= (1+a)^2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1-a)^2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{30}$$
$$= (1+a)^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (1-a)^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+1 & 2a & 0 \\ 2a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Spektralni razcep tenzorja B.*

$$B = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \, (\vec{m}_i \otimes \vec{m}_i) = \lambda_1^2 \, (\vec{m}_1 \otimes \vec{m}_1) + \lambda_2^2 \, (\vec{m}_2 \otimes \vec{m}_2) + \lambda_3^2 \, (\vec{m}_3 \otimes \vec{m}_3)$$
$$= (1+a)^2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-a)^2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$
$$= (1+a)^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-a)^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+1 & 2a & 0 \\ 2a & a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Spektralni razcep tenzorja E.*

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i^2 - 1) \, (\vec{m}_i^0 \otimes \vec{m}_i^0) = \frac{\lambda_1^2 - 1}{2} \, (\vec{m}_1^0 \otimes \vec{m}_1^0) + \frac{\lambda_2^2 - 1}{2} \, (\vec{m}_2^0 \otimes \vec{m}_2^0) + \frac{\lambda_3^2 - 1}{2} \, (\vec{m}_3^0 \otimes \vec{m}_3^0)$$
$$= \frac{(1+a)^2 - 1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \frac{1^2 - 1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-a)^2 - 1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{32}$$
$$= \frac{(1+a)^2 - 1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-a)^2 - 1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2} & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & \frac{a^2}{2} \end{bmatrix}.$$

*Spektralni razcep tenzorja e.*

$$e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{(\lambda_i^2 - 1)}{\lambda_i^2} \, (\vec{m}_i \otimes \vec{m}_i) = \frac{(\lambda_1^2 - 1)}{2\,\lambda_1^2} \, (\vec{m}_1 \otimes \vec{m}_1) + \frac{(\lambda_2^2 - 1)}{2\,\lambda_2^2} \, (\vec{m}_2 \otimes \vec{m}_2) + \frac{(\lambda_3^2 - 1)}{2\,\lambda_3^2} \, (\vec{m}_3 \otimes \vec{m}_3)$$
$$= \frac{(1+a)^2 - 1}{2\,(1+a)^2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1^2 - 1}{2\,1^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(1-a)^2 - 1}{2\,(1-a)^2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$
$$= \frac{(1+a)^2 - 1}{2\,(1+a)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(1-a)^2 - 1}{2\,(1-a)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2\left(a^2-3\right)}{2\,(a^2-1)^2} & \frac{a}{(a^2-1)^2} & 0 \\ \frac{a}{(a^2-1)^2} & \frac{a^2\left(a^2-3\right)}{2\,(a^2-1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Spektralni razcep tenzorja U.*

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, (\vec{m}_i^0 \otimes \vec{m}_i^0) = \lambda_1 \, (\vec{m}_1^0 \otimes \vec{m}_1^0) + \lambda_2 \, (\vec{m}_2^0 \otimes \vec{m}_2^0) + \lambda_3 \, (\vec{m}_3^0 \otimes \vec{m}_3^0) \\
&= (1+a) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1-a) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\
&= (1+a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (1-a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Takšen razcep tenzorja $U$ je v celoti ekvivalenten razcepu po enačbi (19), ki ga dobimo z uporabo Matlaba.

*Določitev spektralnega razcepa tenzorja U z uporabo MATLABa ali Octaveja.* Izberemo številčni podatek $a = \frac{1}{5}$ in dobimo:

```
a = 1/5
a =
    0.2000
F = 5;clc
F = 5;
F = [1 0 -a; a 0 -1; 0 1 0]
F =
    1.0000         0   -0.2000
    0.2000         0   -1.0000
         0    1.0000         0
C = F'*F
C =
    1.0400         0   -0.4000
         0    1.0000         0
   -0.4000         0    1.0400
[X,D] = eig(C)
X =
   -0.7071         0   -0.7071
         0    1.0000         0
   -0.7071         0    0.7071
D =
    0.6400         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.4400
X*D*X' - C
ans =
   1.0e-15 *
   -0.2220         0    0.1665
         0         0         0
    0.1665         0   -0.2220
```

*Spektralni razcep tenzorja V.*

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, (\vec{m}_i \otimes \vec{m}_i) = \lambda_1 \, (\vec{m}_1 \otimes \vec{m}_1) + \lambda_2 \, (\vec{m}_2 \otimes \vec{m}_2) + \lambda_3 \, (\vec{m}_3 \otimes \vec{m}_3) \\
&= (1+a) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-a) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= (1+a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

*Spektralni razcep tenzorja $\varepsilon$.* Najprej izračunamo tenzor majhnih deformacij. Po enačbi [1, enačbi (22)] dobimo

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(F + F^T) - I \tag{36}$$

Izračunamo lastne vrednosti (glavne normalne deformacije $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$), pripadajoče lastne vektorje $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ in konstruiramo spektralni razcep v obliki

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}\,(\vec{e}_i' \otimes \vec{e}_i') = \varepsilon_{11}\,(\vec{e}_1' \otimes \vec{e}_1') + \varepsilon_{22}\,(\vec{e}_2' \otimes \vec{e}_2') + \varepsilon_{33}\,(\vec{e}_3' \otimes \vec{e}_3'). \tag{37}$$

*1.2.11. Razcep deformacijskega gradienta F*

Razcep deformacijskega gradienta $F$ izračunamo direktno po [1, enačbi (35)]

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\,(\vec{m}_i \otimes \vec{m}_i^0) = \lambda_1\,(\vec{m}_1 \otimes \vec{m}_1^0) + \lambda_2\,(\vec{m}_2 \otimes \vec{m}_2^0) + \lambda_3\,(\vec{m}_3 \otimes \vec{m}_3^0) \\ &= (1+a)\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1-a) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= (1+a)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1-a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{38}$$

*določitev razcepa deformacijskega gradienta F z uporabo MATLABa ali Octaveja*

Pri enakem številčnem podatku $a = \frac{1}{5}$, kot v prejšnjem računskem primeru, določimo deformacijski gradient $F$ in singularni razcep (singular value decomposition) tega gradienta.

```
a = 1/5
a =
    0.2000
F = [1 0 -a; a 0 -1; 0 1 0]
F =
    1.0000         0   -0.2000
    0.2000         0   -1.0000
         0    1.0000         0
[X,D,Y] = svd(F)
X =
   -0.7071         0   -0.7071
   -0.7071         0    0.7071
         0    1.0000         0
D =
    1.2000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    0.8000
Y =
   -0.7071         0   -0.7071
         0    1.0000         0
    0.7071         0   -0.7071
X*D*Y' - F
ans =
   1.0e-15 *
         0         0   -0.2220
    0.0555         0    0.2220
         0         0         0
C = F'*F
C =
    1.0400         0   -0.4000
         0    1.0000         0
```

```
    -0.4000          0    1.0400
[X,D,Y] = svd(C)
X =
    -0.7071          0    0.7071
          0     1.0000         0
     0.7071          0    0.7071
D =
     1.4400          0         0
          0     1.0000         0
          0          0    0.6400
Y =
    -0.7071          0    0.7071
          0     1.0000         0
     0.7071          0    0.7071
X-Y
ans =
    1.0e-15 *
    -0.3331          0   -0.1110
          0          0         0
    -0.2220          0         0
X*D*Y' - C
ans =
    1.0e-15 *
     0.4441          0   -0.6106
          0          0         0
          0          0    0.2220
```

Po analogiji z enačbo (19) smo dobili spodnji razcep

$$F = X\,D\,Y^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+a) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

matematično enakovreden razcepu (38).

## Literatura


[1] R. Flajs, Nelinearna mehanika deformabilnih teles: Osnovne enačbe (2012).
URL http://km.fgg.uni-lj.si/PREDMETI/Nelinearna mehanika/Nelinearna mehanika.html