7. Vaja: rotacije, os rotacije $\vec{e}_\varphi \equiv \vec{e}_\theta$, kot rotacije $\varphi(t) \equiv \theta(t)$, vektor rotacije $\vec{\varphi} \equiv \vec{\theta}$, rotacijska matrika R, materialni odvod $\dot{R}$ rotacijske matrike R, hitrost $\vec{v}$, pospešek $\vec{a}$, kotna hitrost $\vec{\omega}$, kotni pospešek $\dot{\vec{\omega}}$, matrika Ω, materialni odvod $\dot{\Omega}$ matrike Ω

Rado Flajs

---

1. Naloga

1.1. Naloga

Deformabilno telo zavrtimo okrog osi $\vec{e}_\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ za kot $\varphi(t) = t$ (kot s linearno spreminja s časom). Določi:

a) vektor rotacije $\vec{\varphi}$,

b) rotacijsko matriko R,

c) iz rotacijske matrike izlušči kot rotacije $\theta(t)$,

d) iz rotacijske matrike izlušči os rotacije $\vec{e}_\theta$,

e) materialni odvod $\dot{R}$ rotacijske matrike R,

f) kotno hitrost $\vec{\omega}$,

g) kotni pospešek $\dot{\vec{\omega}}$,

h) matriko Ω,

i) materialni odvod $\dot{\Omega}$ matrike Ω

Obravnavamo delec D z materialnimi koordinatami $(x_1^0 = 1, x_2^0 = 0, x_3^0 = 0)$. Določi:

a) novo lego delca $\vec{r}$ v poljubnem času t

b) hitrost delca $\vec{v}$ v poljubnem času t

c) pospešek delca $\vec{a}$ v poljubnem času t

1.2. Rešitev

1.2.1. Vektor rotacije $\vec{\varphi}$

Vektor rotacije dobimo kot produkt enotskega vektorja v smeri rotacije in kota zasuka.

$$\vec{\varphi} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)\,. \tag{1}$$

Email address: `rado.flajs@fgg.uni-lj.si` (Rado Flajs)

1.2.2. Rotacijska matrika R

Rotacijsko matriko R dobimo iz Rodriguesove enačbe

$$\begin{aligned} \vec{r} &= R\,\vec{r^0} \\ &= \vec{r^0} + \sin(\varphi)\,\vec{e}_\varphi \times \vec{r^0} + (1-\cos(\varphi))\,\vec{e}_\varphi \times (\vec{e}_\varphi \times \vec{r^0}) \\ &= \vec{r^0} + \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\,\vec{\varphi} \times \vec{r^0} + \frac{(1-\cos(\varphi))}{\varphi^2}\,\vec{\varphi} \times (\vec{\varphi} \times \vec{r^0}) \end{aligned} \tag{2}$$

lahko na dva načina

$$\begin{aligned} R &= I + \sin(\varphi)\,N + (1-\cos(\varphi))\,N\,N, \\ R &= I + \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\,H + \frac{(1-\cos(\varphi))}{\varphi^2}\,H\,H, \end{aligned} \tag{3}$$

kjer sta N in H antisimetrični matriki, sestavljeni iz komponent vektorjev $\vec{e}_\varphi = e_{\varphi 1}\vec{e}_1 + e_{\varphi 2}\vec{e}_2 + e_{\varphi 3}\vec{e}_3$ in $\vec{\varphi} = \varphi_1\vec{e}_1 + \varphi_2\vec{e}_2 + \varphi_3\vec{e}_3$

$$\begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} 0 & -e_{\varphi 3} & e_{\varphi 2} \\ e_{\varphi 3} & 0 & -e_{\varphi 1} \\ -e_{\varphi 2} & e_{\varphi 1} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ H &= \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

Določimo še produkta $N\,N$ in $H\,H$,

$$\begin{aligned} N\,N &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \\ H\,H &= \frac{\varphi(t)^2}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

seštejemo in dobimo

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-\cos(\varphi))}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

1.2.3. Kot rotacije $\theta(t)$

Kot rotacije θ določimo po enačbi

$$\cos(\theta) = \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2} = \frac{3 - 2\,(1-\cos(\varphi)) - 1}{2} = \cos(\varphi), \tag{7}$$

Od tu po krajšem razmisleku povzamemo (potrebujemo še $\sin(\theta)$), da je

$$\theta = \varphi. \tag{8}$$

1.2.4. Os rotacije $\vec{e}_\theta$

Os rotacije lahko določimo vsaj na dva načina:

- Os rotacije $\vec{e}_\theta \equiv \vec{n} = n_1\,\vec{e}_1 + n_2\,\vec{e}_2 + n_3\,\vec{e}_3$ določimo po enačbi

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\,\sin(\theta)} \begin{bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\,\sin(\theta)}\,\frac{2\,\sin(\varphi)}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

  Od tu povzamemo os rotacije

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi. \tag{10}$$

- Os rotacije podaja lastni vektor rotacijske matrike R, ki pripada lastni vrednosti 1. Neposredno lahko preverimo veljavnost enačbe

$$R \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

  od koder zaključimo, da je os rotacije določena z lastnim vektorjem $\vec{e}_\varphi$.

1.2.5. Materialni odvod $\dot{R}$ rotacijske matrike R
Upoštevamo podatek, da je $\varphi(t) = t$, odvajamo matriko R v enačbi (6) po času in dobimo

$$\dot{R} = \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sin(t)}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

1.2.6. Matrika Ω
Hitrost poljubnega delca lahko dobimo preko materialnega odvoda po času

$$\vec{v} = \frac{D\,\vec{r}}{D\,t} = \dot{R}\,\vec{r^0} = \dot{R}\,R^{-1}\,\vec{r} = \dot{R}\,R^T\,\vec{r} = \Omega\,\vec{r}. \tag{13}$$

Skratka, hitrost delca lahko izrazimo v prostorskem opisu preko matrike $\Omega = \dot{R}\,R^T$. V ta namen potrebujemo transponirano matriko R^T. Iz enačbe (6) določimo

$$\begin{aligned} R^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-\cos(\varphi))}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin(-\varphi)}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(1-\cos(-\varphi))}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= R^{-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Izračunamo produkt $\dot{R}\,R^T$ poenostavimo izraz in dobimo

$$\Omega = \dot{R}\,R^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

1.2.7. Kotna hitrost $\vec{\omega}$
Kotno hitrost $\vec{\omega}$ dobimo iz enakosti

$$\Omega\,\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{16}$$

Krajši račun vrne

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3). \tag{17}$$

Določi smer in velikost vektorja kotne hitrosti. Fizikalno pojasni dobljena rezultata.

1.2.8. Kotni pospešek $\dot{\vec{\omega}}$
Kotni pospešek $\dot{\vec{\omega}}$ dobimo iz materialnega odvoda kotne hitrosti

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{D\,\vec{\omega}}{D\,t} = \vec{0}. \tag{18}$$

1.2.9. Materialni odvod $\dot{\Omega}$ matrike Ω
Materialni odvod $\dot{\Omega}$ matrike Ω je

$$\dot{\Omega} = \frac{D\,\Omega}{D\,t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

1.2.10. Nova lega delca D v poljubnem času $\vec{r}$
Novo lego delca D v poljubnem času dobimo po enačbi (2)

$$\vec{r} = \frac{1}{3}\Big((1 + 2\cos(t))\,\vec{e}_1 + (1 - \cos(t) + \sqrt{3}\,\sin(t))\,\vec{e}_2 + (1 - \cos(t) - \sqrt{3}\,\sin(t))\,\vec{e}_3\Big). \tag{20}$$

1.2.11. Hitrost delca D v poljubnem času $\vec{v}$

Hitrost delca D v poljubnem času dobimo direktno z odvajanjem enačbe (20) ali s pomočjo enačbe (13). Po obeh postopkih dobimo enak rezultat, hitrost

$$\vec{v} = \frac{1}{3}\left((-2\sin(t))\,\vec{e}_1 + (\sin(t) + \sqrt{3}\,\cos(t))\,\vec{e}_2 + (\sin(t) - \sqrt{3}\,\cos(t))\,\vec{e}_3\right). \tag{21}$$

Določi smer vektorja hitrosti. Fizikalno pojasni dobljeni rezultat.

1.2.12. Pospešek delca D v poljubnem času $\vec{a}$

Pospešek delca D v poljubnem času dobimo direktno z odvajanjem enačbe (21) ali s pomočjo enačbe

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{22}$$

Po obeh postopkih dobimo enak rezultat, pospešek

$$\vec{a} = \frac{1}{3}\left((-2\cos(t))\,\vec{e}_1 + (\cos(t) - \sqrt{3}\,\sin(t))\,\vec{e}_2 + (\cos(t) + \sqrt{3}\,\sin(t))\,\vec{e}_3\right). \tag{23}$$

Določi smer vektorja pospeška. Fizikalno pojasni dobljeni rezultat.