8. Vaja: napetosti, napetostni vektor $\vec{t}$ in Cauchyjev napetostni tenzor σ, prvi Piola Kirchhoffov tenzor napetosti $P = J\,\sigma\,F^{-T}$ (PK1), drugi Piola Kirchhoffov tenzor napetosti $S = F^{-1}\,P = F^{-1}\,J\,\sigma\,F^{-T} = S^T$ (PK2), Kirchhoffov tenzor napetosti $\tau = J\,\sigma$, Biotov tenzor napetosti $T_B = R^T\,P$, objektinost tenzorjev, ravnotežni pogoji,

Rado Flajs

---

1. Napetosti

1.1. Osnovni pojmi

- Rezultanta površinske obtežbe

$$d\vec{F} = \vec{t}\,dS \;\rightarrow\; \vec{F} = \int_S \vec{t}\,dS \tag{1}$$

- Napetostni vektor $\vec{t}$ in Cauchyjev napetostni tenzor σ

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{t}(\vec{r}, t, \vec{n}) \\ &= \sum_{i,j} \sigma_{ij}\,(\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i)\,\vec{n} \\ &= \sum_{i,j} \sigma_{ij}\,(\vec{e}_i \cdot \vec{n})\,\vec{e}_j \\ \sigma &= \sum_{i,j} \sigma_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \end{aligned} \tag{2}$$

- Zasuk R - objektivnost tenzorja napetosti (je objektiven)

$$\begin{aligned} \vec{n}^+ &= R\,\vec{n} \rightarrow \vec{n} = R^T\,\vec{n}^+, \\ \vec{t}^+ &= R\,\vec{t} \rightarrow \vec{t} = R^T\,\vec{t}^+, \\ \vec{t} = R^T\,\vec{t}^+ &= \sigma^T\,\vec{n} = \sigma\,\vec{n} = \sigma\,R^T\,\vec{n}^+ \rightarrow \vec{t}^+ = R\,\sigma\,R^T\,\vec{n}^+ = \sigma^+\vec{n}^+. \end{aligned} \tag{3}$$

- Prvi Piola Kirchhoffov tenzor napetosti $P = J\,\sigma\,F^{-T}$ (PK1)

$$d\vec{F} = \vec{t}\,dS = \sigma\,\vec{n}\,dS = \sigma\,J\,F^{-T}\,\vec{n}^0\,dS_0 = P\,\vec{n}^0\,dS_0. \tag{4}$$

Pripadajoči napetostni vektor označimo s $\vec{p}^0 = P\,\vec{n}^0$. Zveza med $\vec{t}$ in $\vec{p}^0$

$$\vec{t} = \frac{dS_0}{dS}\,\vec{p}^0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}^0_1 &= \vec{p}^0(\vec{e}_1) = P\,\vec{e}_1 \\ \vec{p}^0_2 &= \vec{p}^0(\vec{e}_2) = P\,\vec{e}_2 \\ \vec{p}^0_3 &= \vec{p}^0(\vec{e}_3) = P\,\vec{e}_3 \\ \vec{p}^0_i &= \sum_{i=1}^{3} P_{ji}\,\vec{e}_j \end{aligned} \tag{6}$$

Email address: `rado.flajs@fgg.uni-lj.si` (Rado Flajs)

- Drugi Piola Kirchhoffov tenzor napetosti $S = F^{-1} P = F^{-1} J \sigma F^{-T} = S^T$ (PK2)

$$\begin{aligned} S &= F^{-1} P \\ &= F^{-1} J \sigma F^{-T} \\ &= S^T \end{aligned} \tag{7}$$

  Pripadajoči napetostni vektor označimo s $\vec{s^0} = S\,\vec{n}^0$. σ dobimo z obratom

$$\sigma = \frac{1}{J} F\, S\, F^T. \tag{8}$$

- Kirchhoffov tenzor napetosti $\tau = J \sigma$

$$\begin{aligned} \tau &= J \sigma \\ &= F\, S\, F^T \\ &= \tau^T \\ &= P\, F^T. \end{aligned} \tag{9}$$

- Biotov tenzor napetosti $T_B = R^T P$

$$\begin{aligned} T_B &= R^T P \\ &= R^T F\, S \\ R\, T_B &= P \\ d\vec{F} = R\, T_B\, \vec{n^0}\, dS_0 &\rightarrow R^T d\vec{F} = T_B\, \vec{n^0}\, dS_0 = d\,\vec{F}_B \end{aligned} \tag{10}$$

- Tabela tenzorjev napetosti

	σ	P	S	simetrija
σ		$\frac{1}{J} P\, F^T$	$\frac{1}{J} F\, S\, F^T$	$\sigma = \sigma^T$
P	$J \sigma F^{-T}$		$F\, S$	$P \neq P^T$
S	$J F^{-1} \sigma F^{-T}$	$F^{-1} P$		$S = S^T$
τ	$J \sigma$	$P\, F^T$	$F\, S\, F^T$	$\tau = \tau^T$
T_B	$J R^T \sigma F^{-T}$	$R^T P$	$R^T F\, S$	$T_B \neq T_B^T$

- Objektivnost tenzorjev napetosti (vsi so objektivni)

$$\begin{aligned} &\sigma^+ = Q\, \sigma\, Q^T,\ \text{objektiven prostorski,} \\ &P^+ = Q\, P\ \text{objektiven mesani,} \\ &S^+ = S\ \text{objektiven materialni,} \\ &\tau^+ = Q\, \tau\, Q^T,\ \text{objektiven prostorski,} \\ &T_B^+ = T_B\ \text{objektiven materialni,} \end{aligned} \tag{11}$$

1.2. Ravnotežni pogoji

1.2.1. Cauchy

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \vec{b} = \rho \frac{D\, \vec{v}}{D\, t} \tag{12a}$$

ali

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho\, b_i = \rho \frac{D\, v_i}{D\, t} \tag{12b}$$

Robni pogoji:

$$\vec{t} = \sigma\, \vec{n} \tag{12c}$$

1.2.2. PK1

$$\mathrm{div}_0\, P + \rho_0 \vec{b} = \rho_0 \frac{D\,\vec{v}}{D\,t} \tag{13a}$$

ali

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j^0} + \rho_0\, b_i = \rho_0 \frac{D\,v_i}{D\,t} \tag{13b}$$

Momentni pogoj:

$$P\,F^T - F\,P^T = 0 \tag{13c}$$

Od devetih enačb so samo tri neodvisne.

Robni pogoji:

$$\vec{p}^0 = P\,\vec{n}^0. \tag{13d}$$

1.2.3. PK2

$$\mathrm{div}_0\,((I + \nabla\,\vec{u})\,S) + \rho_0 \vec{b} = \rho_0 \frac{D\,\vec{v}}{D\,t} \tag{14a}$$

ali

$$\frac{\partial}{\partial x_k^0}\left(\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0}\right) S_{kj}\right) + \rho_0\, b_i = \rho_0 \frac{D\,v_i}{D\,t} \tag{14b}$$

ali

$$\frac{\partial}{\partial x_k^0}\left(F_{ij}\, S_{kj}\right) + \rho_0\, b_i = \rho_0 \frac{D\,v_i}{D\,t} \tag{14c}$$

Robni pogoji:

$$\vec{p}^0 = F\,S\,\vec{n}^0. \tag{14d}$$

2. Naloga

Napetostno stanje delca je podano s komponentami Cauchyjevega tenzorja napetosti σ_{ij} v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z).

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} t & t & t \\ t & t & t \\ t & t & t \end{bmatrix}$$

Napetost $t = (\mathtt{VS7} + 1)$MPa.
Določi:

a) komponente tenzorja napetosti $\sigma_{\alpha\beta}$ v kartezijskem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ), ki ga dobimo z rotacijo koordinatnega sistema (x, y, z) okrog osi $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2$ za kot $\phi = 30°$,
b) glavne normalne napetosti in normale glavnih ravnin,
c) ekstremne strižne napetosti in normale pripadajočih ravnin,
e) rezultirajočo strižno in normalno napetost v oktaedrski ravnini.

Kakšno napetostno stanje predstavlja matrika $[\sigma_{ij}]$?

3. Naloga

Napetostno stanje v deformiranem kvadru z oglišči $A(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$, $B(x_1 = b, x_2 = 0, x_3 = 0)$, $C(x_1 = b, x_2 = h, x_3 = 0)$, $D(x_1 = 0, x_2 = h, x_3 = 0)$, $A'(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = l)$, $B'(x_1 = b, x_2 = 0, x_3 = l)$, $C'(x_1 = b, x_2 = h, x_3 = l)$, $D'(x_1 = 0, x_2 = h, x_3 = l)$ je določeno s komponentami σ_{ij} Cauchyjevega tenzorja napetosti σ.

$$[\sigma_{ij}] = \alpha \begin{bmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & x_3 \end{bmatrix}.$$

Podatki: $\alpha = (\mathtt{VS8} + 1)\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{m}}$, $b = h = 10$cm, $l = 100$cm .

Določi pripadajočo površinsko obtežbo $\vec{p}$ na stranskih ploskvah kvadra in pripadajočo velikost specifične masne obtežbe b' vektorja $\vec{b} = -b'\,\vec{e}_3$, da bo kvader v ravnotežju.

Kvader prerežemo v točki $T(x_1 = b/2, x_2 = h/2, x_3 = l/2)$ z ravnino z normalo $\vec{e}_n = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3$. Določi rezultanto napetosti v tej ravnini in rezultanto momentov glede na točko T. Določi tudi napetosti vektor $\vec{t}(\vec{e}_n)$ v tej točki ter pripadajočo normalno in rezultirajočo strižno napetost v tej ravnini.

4. Naloga

Telo je obteženo s komponentami vektorja specifične masne obtežbe $b_i = g\,\delta_{i3}, \quad i = 1,2,3$, pri danem težnostnem pospešku g. Napetostno stanje v deformiranem telesu je določeno s komponentami σ_{ij} Cauchyjevega tenzorja napetosti σ.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1\,x_2 & x_2\,x_3 \\ x_1\,x_2 & x_2^2\,x_3 & x_1\,x_2\,x_3 \\ x_2\,x_3 & x_1\,x_2\,x_3 & x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}.$$

Določi polje pospeškov v telesu.

Interpretiraj spreminjanje polja pospeškov v odvisnosti od časa.

Interpretiraj spreminjanje polja pospeškov v odvisnoti od lege delca.

5. Naloga

Pri deformiranju se kvader z oglišči $A(x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, x_3^0 = 0)$, $B(x_1^0 = b, x_2^0 = 0, x_3^0 = 0)$, $C(x_1^0 = b, x_2^0 = h, x_3^0 = 0)$, $D(x_1^0 = 0, x_2^0 = h, x_3^0 = 0)$, $A'(x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, x_3^0 = l)$, $B'(x_1^0 = b, x_2^0 = 0, x_3^0 = l)$, $C'(x_1^0 = b, x_2^0 = h, x_3^0 = l)$, $D'(x_1^0 = 0, x_2^0 = h, x_3^0 = l)$ najprej raztegne v smereh $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$ za $a\%$, skrči v smeri $\vec{e}_3$ za $c\%$ in nazadnje zasuče okrog osi $\vec{e}_3$ za kot 30°.

Po deformiranju je v kvadru prisotno napetostno stanje, določeno s komponentami σ_{ij} Cauchyjevega tenzorja napetosti σ.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podatki: $a = \frac{\mathtt{VS8+1}}{100}$, $c = \frac{\mathtt{VS7+1}}{100}$, $t = 10\mathrm{MPa}$, $b = h = 10\mathrm{cm}$, $l = 20\mathrm{cm}$.

Določi deformacijski gradient F in Jacobijan J.

Določi napetostne tenzorje P, S, τ in T_B.

6. Naloga

Napetostno stanje v deformiranem nosilcu Ω eliptičnega prereza

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} \leq 1, \quad 0 \leq x_1 \leq l\}$$

je določeno s Cauchyjevim tenzorjem napetosti σ

$$\sigma = \frac{2\,M_t}{\pi\,a\,b} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{x_3}{b^2} & \frac{x_2}{a^2} \\ -\frac{x_3}{b^2} & 0 & 0 \\ \frac{x_2}{a^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podatki: $M_t = (\mathtt{VS8} + 1)\mathrm{kNm}$, $a = b = 5\mathrm{cm}$, $l = 100\mathrm{cm}$.

Določi pripadajočo površinsko obtežbo $\vec{p}$ na plašču in na krajnih stranskih ploskvah nosilca in pripadajočo velikost specifične masne obtežbe b' vektorja $\vec{b} = -b'\,\vec{e}_3$, da bo nosilec v ravnotežju.

Določi rezultanto in rezultirajoči moment na robovih $x_1 = 0$ in $x_1 = l$.

Nosilec prerežemo v točki $T(x_1 = \frac{l}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0)$ z ravnino z normalo $\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3$.

Določi rezultanto napetosti v tej ravnini in rezultanto momentov glede na točko T.

Določi tudi napetosti vektor $\vec{t}(\vec{e}_n)$ v tej točki ter pripadajočo normalno in rezultirajočo strižno napetost v tej ravnini.

7. Naloga

Napetostno stanje v delcu deformiranega telesa je določeno s komponentami σ_{ij} in $\sigma_{\alpha\beta}$ Cauchyjevega tenzorja napetosti σ v dveh zavrtenih koordinatnih sistemih (x, y, z) in (ξ, η, ζ).

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} c & c-1 & c-1 \\ c-1 & c & c-1 \\ c-1 & c-1 & c \end{bmatrix} \mathrm{MPa}.$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Podatki: $c = (\mathtt{VS7} + 1)$.
Določi pripadajoči konstanti a in b.
Poišči zvezo med koordinatnima sistemoma (x, y, z) in (ξ, η, ζ) tj. zvezo med baznimi vektorji $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ in $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$, $\vec{e}_\zeta$.