

9. Vaja: PVD

Rado Flajs

1. PVD

1.1. Prostorski opis

$$\vec{f} = \rho (\vec{b} - \dot{\vec{v}}).$$

$$\int_V \sigma : \delta D dV = \int_S \vec{t} \cdot \delta \vec{v} dS + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{v} dV.$$

$$\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_S \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV.$$

$$\delta \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \vec{u}}{\partial \vec{r}} + \left(\frac{\partial \delta \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right)^T \right) = \delta \varepsilon^T.$$

1.2. Materialni opis

$$\int_{V^0} P : \delta \dot{F} dV_0 = \int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{v} dS_0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{v} dV_0.$$

$$\int_{V^0} S : \delta \dot{E} dV^0 = \int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{v} dS^0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{v} dV^0.$$

$$\int_{V^0} F S : \nabla^0 \delta \vec{v} dV^0 = \int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{v} dS^0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{v} dV^0.$$

$$\int_{V^0} P : \nabla^0 \delta \vec{v} dV^0 = \int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{v} dS^0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{v} dV^0.$$

$$\int_{V^0} S : \delta E dV^0 = \int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{u} dS^0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{u} dV^0.$$

$$\delta E = \frac{1}{2} \left(\nabla^0 \delta \vec{u}^T F + F^T \nabla^0 \delta \vec{u} \right).$$

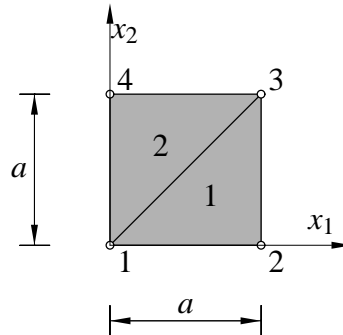
1.3. Linearizacija

Email address: rado.flajs@fgg.uni-lj.si (Rado Flajs)

2. Naloga

2.1. Naloga

V kvadratni steni na sliki vlada ravninsko deformacijsko stanje.



Stena miruje. Lastno težo stene zanemari. V oglišču 1 je stena nepomično vrtljivo podprta. Preprečeni so vodoravni pomiki delcev na robu 14. Nalogo reši z izrekom o virtualnem delu v prostorskem opisu ($\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_S \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV$). Privzemi linearni konstitucijski zakon $\sigma = \lambda \text{tr}(e) I + 2\mu e$. Predpostavi linearen potek dejanskih in virtualnih pomikov po elementih 1 in 2. Konstruiraj sistem nelinearnih enačb za neznane vozliščne pomike u_2, v_2, u_3, v_3 in v_4 ! Obravnavaj dva obtežna primera.

- Stena je na robovih 12 in 34 obtežena z enakomerno specifično površinsko obtežbo velikosti p , ki deluje v smeri zunanjih normal na ta dva robova. Določi napetosti v steni.
- Določi pripadajočo površinsko obtežbo, ki ustreza spodnjim pomikom oglišč:
 $u_2 = u_3 = 0.0002\text{cm}, v_2 = 0, v_3 = v_4 = -0.0001\text{cm}.$

2.2. Podatki

Pri reševanju nalog privzemi sledeče podatke:

$a = 1\text{cm}, E = 200\,000\text{MPa}, \nu = \frac{1}{3}, p = (\sqrt{8} + 1)\text{MPa}.$

2.3. Prvi obtežni primer: postopek

1. Dejanske pomike \vec{u} po končnem elementu 1 izrazimo z linearnimi funkcijami z vozliščnimi pomiki \vec{u}_1, \vec{u}_2 in \vec{u}_3 .

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) \vec{u}_i$$

ali zapisano po komponentah kot

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) u_i, \\ v &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) v_i, \\ w &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) w_i \equiv 0. \end{aligned}$$

Dejanske pomike \vec{u} po končnem elementu 2 pa izrazimo z linearnimi funkcijami z vozliščnimi pomiki \vec{u}_1, \vec{u}_3 in \vec{u}_4 .

2. Virtualne pomike $\delta \vec{u}$ po končnem elementu 1 izrazimo z linearnimi funkcijami z virtualnimi vozliščnimi pomiki $\delta \vec{u}_1, \delta \vec{u}_2$ in $\delta \vec{u}_3$.

$$\delta \vec{u} = \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) \delta \vec{u}_i$$

ali zapisano po komponentah kot

$$\begin{aligned}\delta u &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) \delta u_i, \\ \delta v &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) \delta v_i, \\ \delta w &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1, x_2) \delta w_i \equiv 0.\end{aligned}$$

Virtualne pomike $\delta \vec{u}$ po končnem elementu 2 pa izrazimo z linearnimi funkcijami z virtualnimi vozliščnimi pomiki $\delta \vec{u}_1, \delta \vec{u}_3$ in $\delta \vec{u}_4$.

3. Po enačbi

$$e = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \quad (1a)$$

$$= \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1}) \quad (1b)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - (\nabla \vec{u})^T (\nabla \vec{u})). \quad (1c)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (1d)$$

izračunamo komponente Euler Almansijevega tenzorja e .

4. Po enačbi

$$\delta \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \vec{u}}{\partial \vec{r}} + \left(\frac{\partial \delta \vec{u}}{\partial \vec{r}} \right)^T \right) = \delta \varepsilon^T.$$

izračunamo komponente virtualnega tenzorja majhnih deformacij $\delta \varepsilon$.

5. Z upoštevanjem konstitucijskega zakona

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(e) I + 2\mu e$$

določimo Cauchyev tenzor σ .

6. Izračunamo virtualno delo notranjih sil t.j. integral izraza $\sigma : \delta \varepsilon$. Ker izjemoma poznamo končno deformirano stanje (podatek), poznamo tudi integracijske meje in integral zapišemo preprosto z večkratnim integralom

$$\begin{aligned}\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV &= t \int_{T_1} \sigma : \delta \varepsilon dS + t \int_{T_2} \sigma : \delta \varepsilon dS \\ &= t \int_0^1 \int_0^{x_1} \sigma : \delta \varepsilon dx_2 dx_1 + t \int_0^1 \int_{x_1}^1 \sigma : \delta \varepsilon dx_2 dx_1,\end{aligned}$$

kjer smo s t označili debelino stene.

7. Izračunamo virtualno delo zunanjih sil t.j. integral

$$\int_S \vec{r} \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV$$

8. Upoštevamo izrek o virtualnem delu

$$\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_S \vec{r} \cdot \delta \vec{u} dS + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV$$

in dejstvo, da so virtualni pomiki oglišč poljubni. Z izbiro virtualnih pomikov oglišč

$$\begin{aligned}[\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [1, 0, 0, 0, 0] \rightarrow \text{eq}_1(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 1, 0, 0, 0] \rightarrow \text{eq}_2(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 0, 1, 0, 0] \rightarrow \text{eq}_3(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 0, 0, 1, 0] \rightarrow \text{eq}_4(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 0, 0, 0, 1] \rightarrow \text{eq}_5(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4).\end{aligned}$$

tvorimo sistem nelinearnih enačb $\text{eq}_i, i = 1, \dots, 5$ za neznane vozliščne pomike u_2, v_2, u_3, v_3, v_4 .

9. Z uporabo Mathematice rešimo sistem enačb in določimo neznane vozliščne pomike u_2, v_2, u_3, v_3, v_4 .
 10. Izločimo fizikalno nesmiselne rezultate. Kateri rezultati so fizikalno nesmiselni?
 11. S poznavanjem pomikov lahko po enačbah

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - (\nabla \vec{u})^T (\nabla \vec{u})). \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

in

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(e) I + 2\mu e$$

določimo komponente Euler Almansijevega tenzorja e in Cauchyvega tenzorja σ .

12. Pri računu napetosti smo privzeli podoben konstitucijski zakon kot pri Trdnosti. Ker je obtežba majhna, lahko smiselnost dobljenih rezultatov preverimo tudi po teoriji prvega reda. V splošnem avtorji privzamejo korigiran konstitucijski zakon v obliki

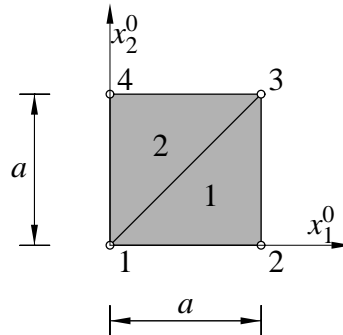
$$\sigma = \frac{\lambda}{J} \operatorname{tr}(e) I + 2\frac{\mu}{J} e.$$

- 2.4. Prvi obtežni primer: rešitev
 2.5. Prvi obtežni primer: rešitev v Mathematici
 2.6. Drugi obtežni primer: postopek
 2.7. Drugi obtežni primer: rešitev
 2.8. Drugi obtežni primer: rešitev v Mathematici

3. Naloga

3.1. Naloga

V kvadratni steni na sliki vlada ravninsko deformacijsko stanje.



Stena miruje. Lastno težo stene zanemari. V oglišču 1 je stena nepomično vrtljivo podprta. Preprečeni so vodoravni pomiki delcev na robu 14. Nalogo reši z izrekom o virtualnem delu v materialnem opisu ($\int_{V^0} S : \delta E dV^0 = \int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{u} dS^0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{u} dV^0$). Privzemi linearni konstitucijski zakon $S = \lambda \text{tr}(E) I + 2\mu E$. Predpostavi linearen potek dejanskih in virtualnih pomikov po elementih 1 in 2. Konstruiraj sistem nelinearnih enačb za neznane vozliščne pomike u_2, v_2, u_3, v_3 in v_4 ! Obravnavaj dva obtežna primera.

- Stena je na robovih 12 in 34 obtežena z enakomerno specifično površinsko obtežbo velikosti p_0 , ki deluje v smeri zunanjih normal na ta dva robova. Določi napetosti v steni.
- Določi pripadajočo površinsko obtežbo, ki ustreza spodnjim pomikom oglišč:
 $u_2 = u_3 = 0.0002\text{cm}, v_2 = 0, v_3 = v_4 = -0.0001\text{cm}.$

3.2. Podatki

Pri reševanju nalog privzemi sledeče podatke:

$$a = 1\text{cm}, E = 200\,000\text{MPa}, \nu = \frac{1}{3}, p_0 = (\text{VS7} + 1)\text{MPa}.$$

3.3. Prvi obtežni primer: postopek

1. Dejanske pomike \vec{u} po končnem elementu 1 izrazimo z linearnimi funkcijami z vozliščnimi pomiki \vec{u}_1, \vec{u}_2 in \vec{u}_3 .

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) \vec{u}_i$$

ali zapisano po komponentah kot

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) u_i, \\ v &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) v_i, \\ w &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) w_i \equiv 0. \end{aligned}$$

Dejanske pomike \vec{u} po končnem elementu 2 pa izrazimo z linearnimi funkcijami z vozliščnimi pomiki \vec{u}_1, \vec{u}_3 in \vec{u}_4 .

2. Virtualne pomike $\delta \vec{u}$ po končnem elementu 1 izrazimo z linearnimi funkcijami z virtualnimi vozliščnimi pomiki $\delta \vec{u}_1, \delta \vec{u}_2$ in $\delta \vec{u}_3$.

$$\delta \vec{u} = \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) \delta \vec{u}_i$$

ali zapisano po komponentah kot

$$\begin{aligned}\delta u &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) \delta u_i, \\ \delta v &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) \delta v_i, \\ \delta w &= \sum_{i=1}^3 N_i(x_1^0, x_2^0) \delta w_i \equiv 0.\end{aligned}$$

Virtualne pomike $\delta \vec{u}$ po končnem elementu 2 pa izrazimo z linearnimi funkcijami z virtualnimi vozliščnimi pomiki $\delta \vec{u}_1, \delta \vec{u}_3$ in $\delta \vec{u}_4$.

3. Po enačbi

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}(C - I) \\ &= \frac{1}{2}(F^T F - I) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla^0 \vec{u} + (\nabla^0 \vec{u})^T + (\nabla^0 \vec{u})^T (\nabla^0 \vec{u})). \\ E_{ij} &= \frac{1}{2}(\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j - \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0}\right).\end{aligned}$$

izračunamo komponente Green Lagrangevega tenzorja E .

4. Po enačbi

$$\delta E = \frac{1}{2}(\nabla^0 \delta \vec{u}^T F + F^T \nabla^0 \delta \vec{u}).$$

izračunamo variacijo Green Lagrangevega tenzorja E t.j. δE .

5. Z upoštevanjem konstitucijskega zakona

$$S = \lambda \operatorname{tr}(E) I + 2\mu E$$

določimo PK2 tenzor S .

6. Izračunamo virtualno delo notranjih sil t.j. integral izraza $S : \delta E$. Ker poznamo začetno nedeformirano stanje (podatek), poznamo tudi integracijske meje in integral zapišemo preprosto z večkratnim integralom

$$\begin{aligned}\int_{V^0} S : \delta E dV^0 &= t^0 \int_{T_1} S : \delta E dS + t^0 \int_{T_2} S : \delta E dS \\ &= t^0 \int_0^1 \int_0^{x_1^0} S : \delta E dx_2^0 dx_1^0 + t^0 \int_0^1 \int_{x_1^0}^1 S : \delta E dx_2^0 dx_1^0,\end{aligned}$$

kjer smo s t^0 označili debelino stene.

7. Izračunamo virtualno delo zunanjih sil t.j. integral

$$\int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{u} dS^0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{u} dV^0.$$

8. Upoštevamo izrek o virtualnem delu

$$\int_{V^0} S : \delta E dV^0 = \int_{S^0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{u} dS^0 + \int_{V^0} \vec{f}^0 \cdot \delta \vec{u} dV^0.$$

in dejstvo, da so virtualni pomiki oglišč poljubni. Z izbiro virtualnih pomikov oglišč

$$\begin{aligned}[\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [1, 0, 0, 0, 0] \longrightarrow \text{eq}_1(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 1, 0, 0, 0] \longrightarrow \text{eq}_2(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 0, 1, 0, 0] \longrightarrow \text{eq}_3(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 0, 0, 1, 0] \longrightarrow \text{eq}_4(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4), \\ [\delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3, \delta v_4] &= [0, 0, 0, 0, 1] \longrightarrow \text{eq}_5(u_2, v_2, u_3, u_4, v_4).\end{aligned}$$

tvorimo sistem nelinearnih enačb $\text{eq}_i, i = 1, \dots, 5$ za neznanne vozliščne pomike u_2, v_2, u_3, v_3, v_4 .

9. Z uporabo Mathematice rešimo sistem enačb in določimo neznane vozliščne pomike u_2, v_2, u_3, v_3, v_4 .
 10. Izločimo fizikalno nesmiselne rezultate. Kateri rezultati so fizikalno nesmiselni?
 11. S poznavanjem pomikov lahko po enačbah

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}(C - I) \\
 &= \frac{1}{2}(F^T F - I) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\nabla^0 \vec{u} + (\nabla^0 \vec{u})^T + (\nabla^0 \vec{u})^T (\nabla^0 \vec{u})\right). \\
 E_{ij} &= \frac{1}{2}(\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j - \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0}\right).
 \end{aligned}$$

in

$$S = \lambda \operatorname{tr}(E) I + 2\mu E$$

določimo komponente Green Lagrangevega tenzorja E in PK2 tenzorja S .

12. Pri računu napetosti smo privzeli podoben konstitucijski zakon kot pri Trdnosti. Ker je obtežba majhna, lahko smiselnost dobljenih rezultatov preverimo tudi po teoriji prvega reda.

- 3.4. Prvi obtežni primer: rešitev
 3.5. Prvi obtežni primer: rešitev v Mathematici
 3.6. Drugi obtežni primer: postopek
 3.7. Drugi obtežni primer: rešitev
 3.8. Drugi obtežni primer: rešitev v Mathematici

4. Naloga

Naloga iz poglavja 2, ko namesto končnega poznamo začetno nedeformirano stanje (podobno kot v nalogi iz poglavja 3).

4.1. Prvi obrežni primer: postopek

Postopek je enak kot v poglavju 2.3, razlikujeta se izračuna obeh integralov v točkah 6 in 7, sistem nelinearnih enačb, postopek reševanja sistema nelinearnih enačb in dobljene rešitve.

6. Z upoštevanjem Nansonove formule

$$dS \vec{n} = dS^0 J F^{-T} \vec{n}^0 = dS^0 J (1 - \nabla u)^T \vec{n}^0$$

prepišemo integral

$$\int_V \sigma : \delta \varepsilon dV$$

v obliko

$$\begin{aligned} \int_V \sigma : \delta \varepsilon dV &= t \int_A \sigma : \delta \varepsilon dA \\ &= t^0 \int_{A^0} \sigma : \delta \varepsilon J (1 - \nabla u)^T dA^0 \end{aligned}$$

Pri opisu gornjega integrala smo privzeli, da se pri ravninskem deformacijskem stanju (RDS) debelina stene ne spremeni in da je $\vec{n} = \vec{n}^0 = \vec{e}_3$.

7. Zapišimo še virtualno delo zunanjih sil na robovih. Z upoštevanjem formule

$$d\vec{l} = d\vec{l}^0 \cdot C d\vec{l}^0$$

prepišemo integral

$$\int_S \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS$$

v obliko

$$\begin{aligned} \int_S \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dS &= t \int_L \vec{t} \cdot \delta \vec{u} ds \\ &= t^0 \int_{L^0} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \sqrt{\vec{n}^0 \cdot C \vec{n}^0} ds^0 \end{aligned}$$

Pri opisu gornjega integrala smo privzeli, da se pri ravninskem deformacijskem stanju (RDS) debelina stene ne spremeni in da je v konkretnem računskem primeru $\vec{n}^0 = \vec{e}_1$. Skratka, najprej po enačbi

$$F^{-1} = I - \nabla \vec{u}$$

določimo inverz deformacijskega gradienta F , nato pa po enačbi

$$C = F^T F$$

tenzor C in končno se gornji integral.