RAČUNANJE POMIKOV STATIČNO DOLOČENIH KONSTRUKCIJ PO METODI SIL

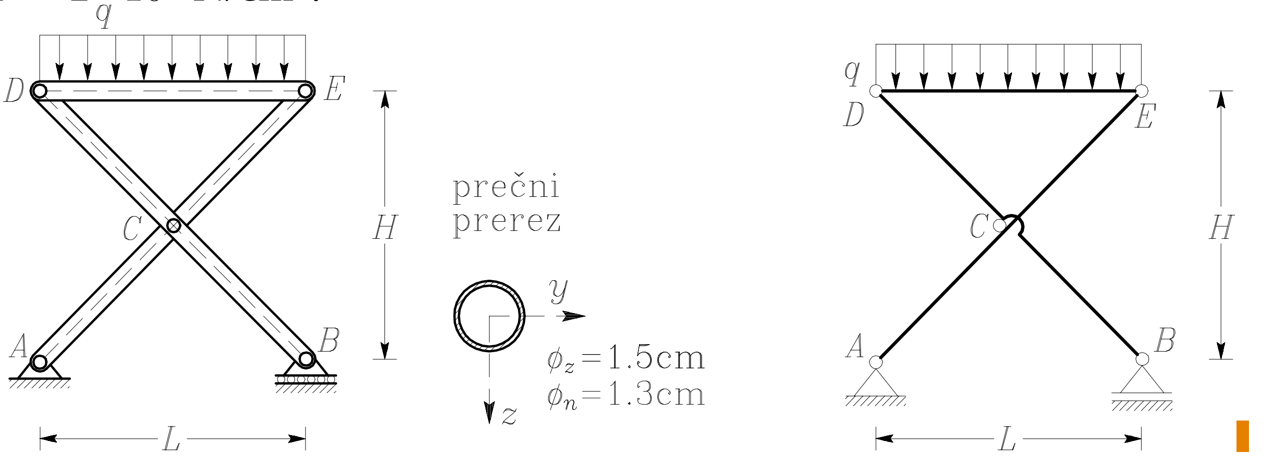
Marjan Stanek, Goran Turk in Rado Flajs
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Univerza v Ljubljani

http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/TRDNOST

Primer 5.9

1. Naloga

Podatki: $q = 1$ N/cm., $L = H = 1$ m, $\phi_z = 1.5$ cm, $\phi_n = 1.3$ cm. $E = 2 \cdot 10^7$ N/cm^2.



Izračunajmo navpični pomik v točki E!

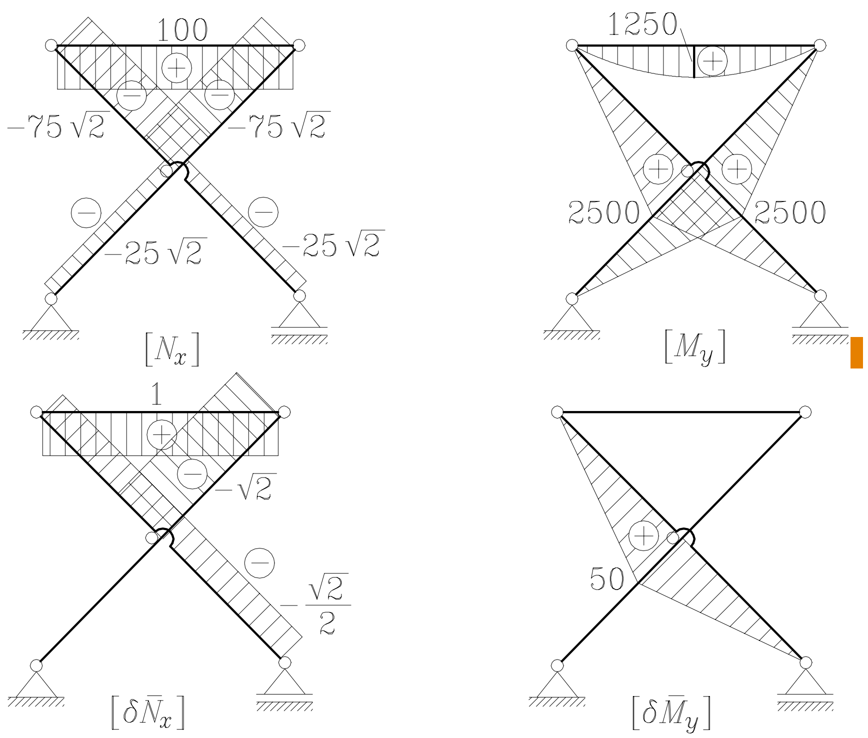
2. Postopek

$$A_x = \frac{\phi_z^2 - \phi_n^2}{4}\,\pi = 0.4398\ \text{cm}^2, \qquad I_y = \frac{\phi_z^4 - \phi_n^4}{64}\,\pi = 0.1083\ \text{cm}^4.$$

Za določitev navpičnega pomika v točki E v to točko postavimo navpično virtualno silo $\delta F_z = 1$.

Navpični pomik v točki E določimo z enačbo:

$$w_E = \sum_{\text{el}} \int_{Li} \left(\frac{N_x\, \delta \bar{N}_x}{E\, A_x} + \frac{M_y\, \delta \bar{M}_y}{E\, I_y} \right) dx = w_{E,A_x} + w_{E,M_y}$$



$$w_{E,Ax} = \frac{1}{E\,A_x}\left(1 \cdot 100 \cdot 100 + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$$
$$\left. +25 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right) = 0.0031\ \mathrm{cm}$$

$$w_{E,My} = \frac{1}{E\,I_y}\left(\frac{2500 \cdot 50 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 \cdot 2\right) = 2.7203\ \mathrm{cm}$$

3. Rezultat

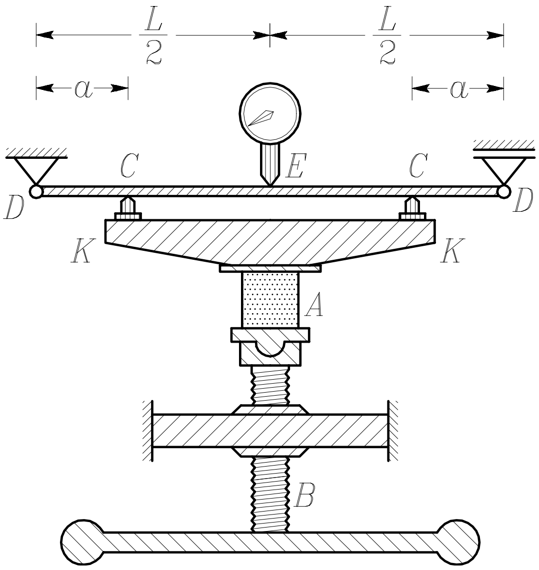
$$w_E = w_{E,Ax} + w_{E,Ey} = 0.0031\ \mathrm{cm} + 2.7203\ \mathrm{cm} = 2.7234\ \mathrm{cm}$$

4. Zaključek

Relativni vpliv osnih sil na pomik v točki E znaša le 0.12 % od skupnega pomika. Pomik v točki E se zgodi skoraj izključno zaradi upogiba nosilcev, medtem ko je vpliv osnih deformacij zanemarljiv. Zato pri računu pomikov velikokrat vpliv osnih sil zanemarimo.

Primer 5.11

1. Naloga



S prikazano napravo merimo silo F, ki se preko vijaka B prenaša na preizkušanec A. Silo merimo z velikostjo pomika jeklenega nosilca D–D v točki E. Sila se na nosilec D–D prenaša preko togega nosilca K–K.

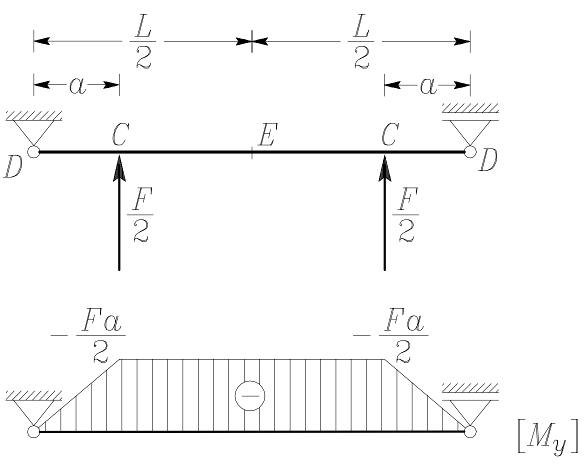
Določimo razdaljo a od podpore D do prijemališča sile K na nosilec D–D, da bo pri sili $F = 5$ kN upogib nosilca v točki E enak 1 mm? Nosilec D–D ima širino 6 cm, višino 4 cm, dolžino 1 m, modul elastičnosti materiala pa je 20000 kN/cm^2.

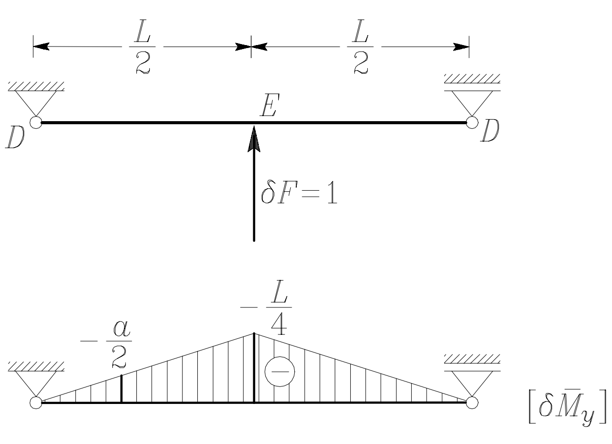
2. Postopek

Pomik w_T na sredini nosilca D–D določimo z enačbo

$$w_T = \int\limits_0^L \frac{M_y\,\delta \bar{M}_y}{E\,I_y}\,dx.$$

Diagram M_y v nosilcu D–D zaradi sil $F/2$ in $\delta F = 1$:





Za obravnavani primer dobimo:

$$E\,I_y\,w_T = 2\,\frac{F\,a}{2}\frac{a}{2}\frac{2}{3}\frac{a}{2} + 2\,\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{2}-a\right)\frac{F\,a}{2} = -\frac{F\,a^3}{12} + \frac{F\,L^2\,a}{16}.$$

Iz zadnje enačbe moramo določiti a, zato jo preoblikujemo takole:

$$a^3 - \frac{3}{4}\,L^2\,a + \frac{12}{F}\,E\,I_y\,w_T = 0.$$

Vztrajnostni moment pravokotnega prečnega prereza nosilca D–D je

$$I_y = \frac{6\cdot 4^3}{12} = 32\ \text{cm}^4.$$

Ob upoštevanju podatkov dobimo

$$a^3 - \frac{3}{4}\,100^2\,a + \frac{12}{5}\,2\cdot 10^4\cdot 32\cdot 0.1 = 0 \qquad \to \qquad a^3 - 7500\,a + 153600 = 0.$$

3. Rezultat

To nelinearno enačbo rešimo numerično in dobimo $a = 21.8758$ cm.

Računaje ničel polinoma $a^3 - 7500\,a + 153600 = 0$:

MATLAB:

kot ničlo polinoma:

```
x = roots([1 0 -7500 153600]);
        -95.4429
x =      73.5670
         21.8758
```

kot ničlo funkcije:

```
f = inline('a^3 - 7500*a + 153600');
x = fzero(f,25)
x = 21.8758
```

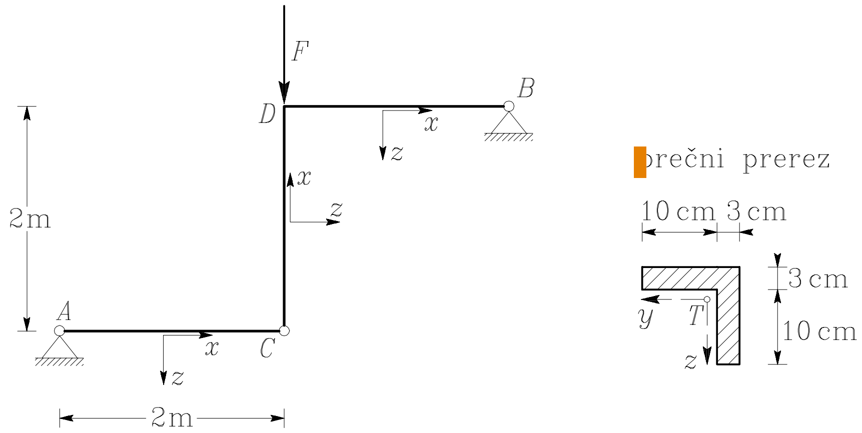
Mathematica:

```
FindRoot[a^3 - 7500a + 153600 == 0,{a,25}];
{a-> 21.8758 }
```

Primer 5.12

1. Naloga

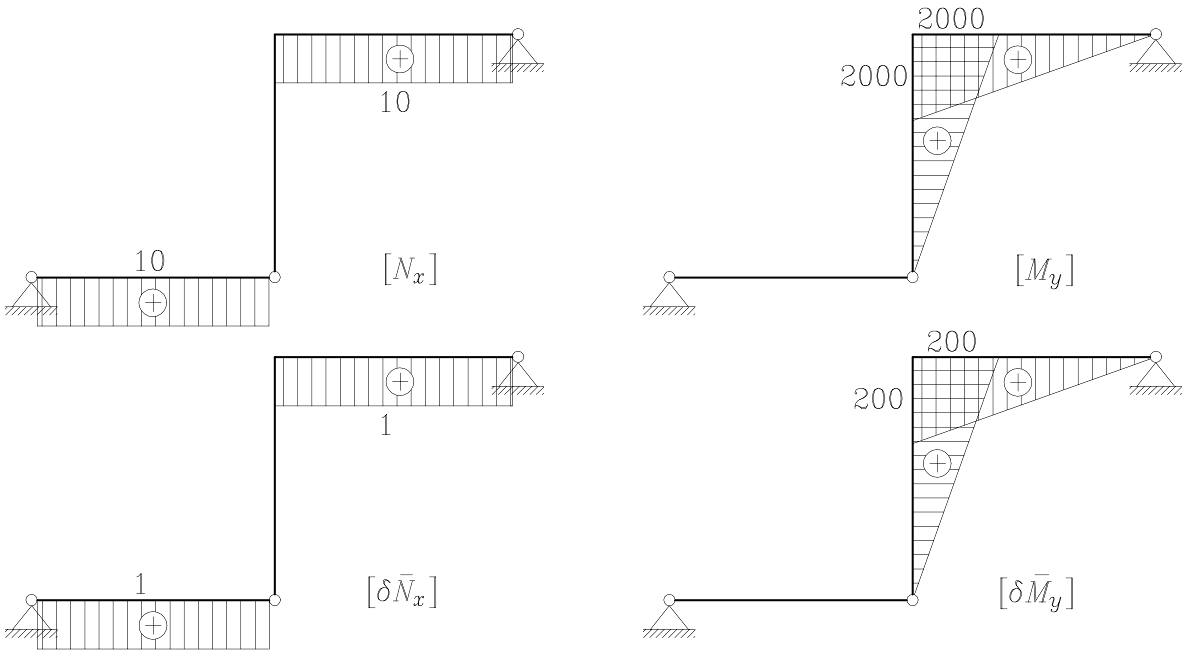
Podatki: $F = 10$ kN, modul elastičnosti materiala je $E = 20000$ kN/cm^2. Upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na deformiranje konstrukcije. Dimenzije konstrukcije so na sliki.



Določimo navpični pomik točke D statično določene konstrukcije na sliki

2. Postopek

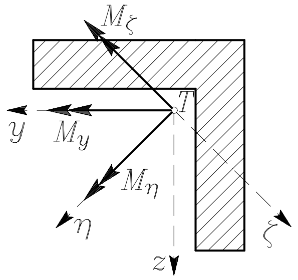
Za izračun pomika v točko D postavimo virtualno silo $\delta F = 1$, ki deluje v enaki smeri, kot sila F.



Enačbo za računanje pomika oziroma zasuka smo izpeljali ob predpostavki, da sta osi y in z **glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza**.

V obravnavanem primeru glavni vztrajnostni osi oklepata z osema y in z kot 45°, saj tudi simetrijska os prereza oklepa z osema y in z kot 45°.

Če želimo nalogo rešiti, moramo izračunati upogibne momente glede na glavni vztrajnostni osi.



V tem primeru izračunamo pomik w_D po enačbi

$$w_D = \int_0^L \left(\frac{N_x\, \delta \bar{N}_x}{E\, A_x} + \frac{M_\eta\, \delta \bar{M}_\eta}{E\, I_\eta} + \frac{M_\zeta\, \delta \bar{M}_\zeta}{E\, I_\zeta} \right) dx.$$

Geometrijske lastnosti prečnega prereza so:

$$A_x = 69 \ \mathrm{cm}^2, \quad I_y = I_z = 995.663 \ \mathrm{cm}^4, \quad I_{yz} = 551.087 \ \mathrm{cm}^4,$$

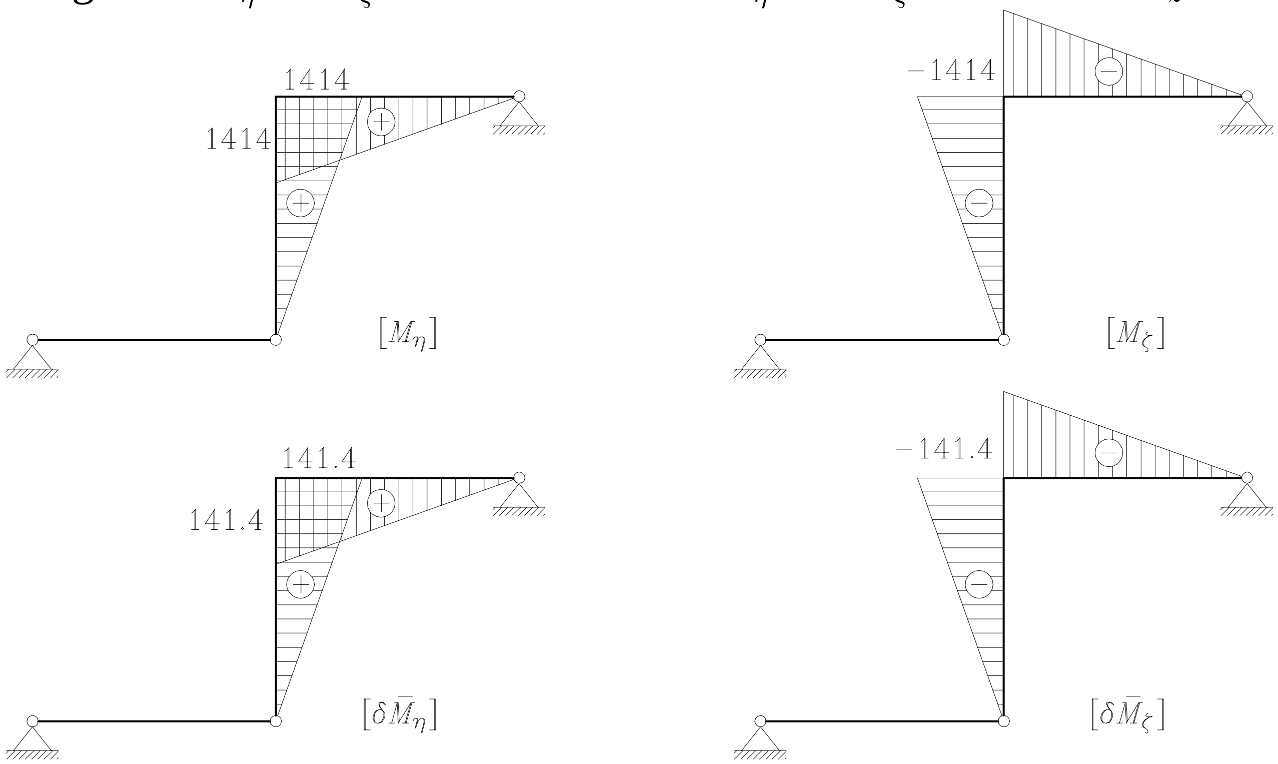
$$2\,\alpha_g = \frac{2\, I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \quad \rightarrow \quad \alpha_g = 45^\circ,$$

$$I_\eta = 1546.750 \ \mathrm{cm}^4, \quad I_\zeta = 444.576 \ \mathrm{cm}^4.$$

Upogibna momenta v točki D glede na osi η in ζ sta:

$$M_\eta = M_y \cos 45^\circ = 1414 \ \mathrm{kNcm}, \quad M_\zeta = -M_y \cos 45^\circ = -1414 \ \mathrm{kNcm}.$$

Diagrama M_η in M_ζ zaradi sile F ter $\delta\bar{M}_\eta$ in $\delta\bar{M}_\zeta$ zaradi sile $\delta F_z = 1$:



3. Rezultat

Pomik w_D je:

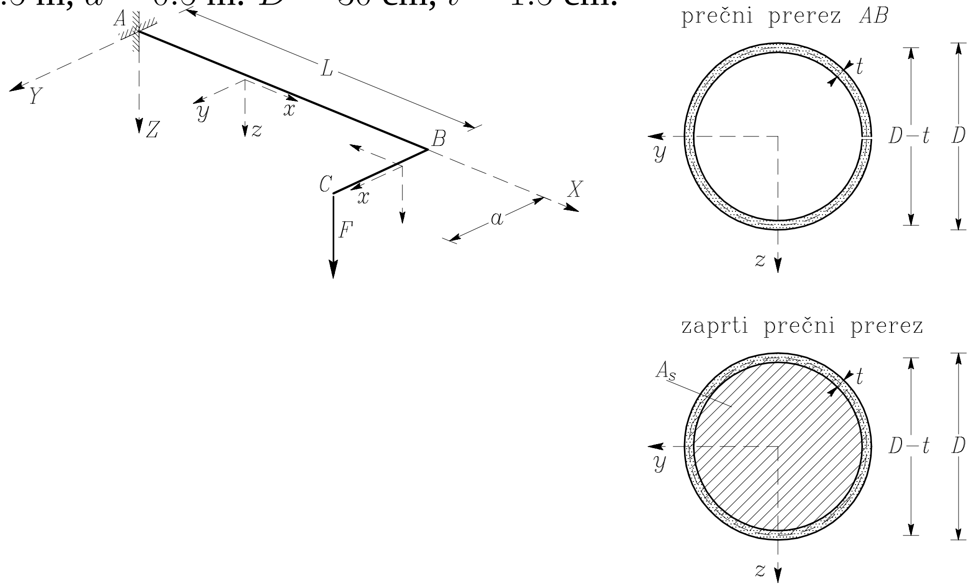
$$
\begin{aligned}
w_D = {} & \frac{1}{E\,A_x}(10 \cdot 200 \cdot 1 \cdot 2)+ \\
& + \frac{1}{E\,I_\eta}\left(\frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2\right) + \\
& + \frac{1}{E\,I_\zeta}\left(\frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2\right) = \\
& = 0.0029 + 0.8620 + 2.9991 = 3.86 \text{ cm.}
\end{aligned}
$$

Tudi v tem primeru je del pomika zaradi osne deformacije zelo majhen v primerjavi z delom zaradi upogiba, saj znaša le 0.075% skupnega pomika.

Primer 5.17

1. Naloga

Konzola je sestavljena iz dveh elementov z odprtim/zaprtim tankostenskim prečnim prerezom. Podatki: $E = 24000$ kN/cm^2, $G = 10000$ kN/cm^2, $I_{y2} = 5000\ \mathrm{cm}^4$, $L = 1.5$ m, $a = 0.5$ m. $D = 30$ cm, $t = 1.5$ cm.



Določimo velikost sile F tako, da bo največja strižna napetost enaka dopustni strižni napetosti $\tau_{\mathrm{dop}} = 10$ kN/cm^2.

Določimo tudi, za koliko se sila F lahko poveča, če stik zavarimo tako, da dobimo elementa z zaprtim tankostenskim prerezom.

Pri tem predpostavimo, da nastane v elementih enakomerna torzija.

Izračunajmo tudi navpični pomik w_C točke C za sili, ki ustrezata odprtemu oziroma zaprtemu prečnemu prerezu.

2. Postopek in rezultati

2..1 Dopustna sila za oprti AB prerez

$2\,r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5$ cm

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3}\,d\zeta = \frac{t^3}{3}\,L_s = \frac{1.5^3}{3}\,2\,\pi\,r = 100.727\ \text{cm}^4.$$

Silo $F_{1,\text{dop}}$ izračunamo iz pogoja $\sigma_{x\zeta,\max} \le \tau_{\text{dop}}$.
Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi $\sigma_{x\zeta,\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{I_x}\,t_{\max}$.

Upoštevamo, da je $|M_x|_{\max} = F_{1,\text{dop}}\,a$ in dobimo $\frac{F_{1,\text{dop}}\,a}{I_x}\,t_{\max} \le \tau_{\text{dop}}$.
Iz zadnje enačbe izračunamo $F_{1,\text{dop}}$:
$F_{1,\text{dop}} \le \frac{\tau_{\text{dop}}\,I_x}{a\,t_{\max}} = \frac{10\cdot 100.727}{50\cdot 1.5} = 13.43\ \text{kN}.$

2..2 Dopustna sila za zaprti AB prerez

$$A_s = \frac{\pi\cdot 28.5^2}{4} = 637.94\ \text{cm}^2.$$

Silo $F_{2,\text{dop}}$ izračunamo iz pogoja $\sigma_{x\zeta,\max} \le \tau_{\text{dop}}$.
Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi $\sigma_{x\zeta,\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{2\,A_s\,t_{\min}}$.
Upoštevamo, da je $|M_x|_{\max} = F_{2,\text{dop}}\,a$ in dobimo

$$\frac{F_{2,\text{dop}}\,a}{2\,A_s\,t_{\min}} \le \tau_{\text{dop}}.$$

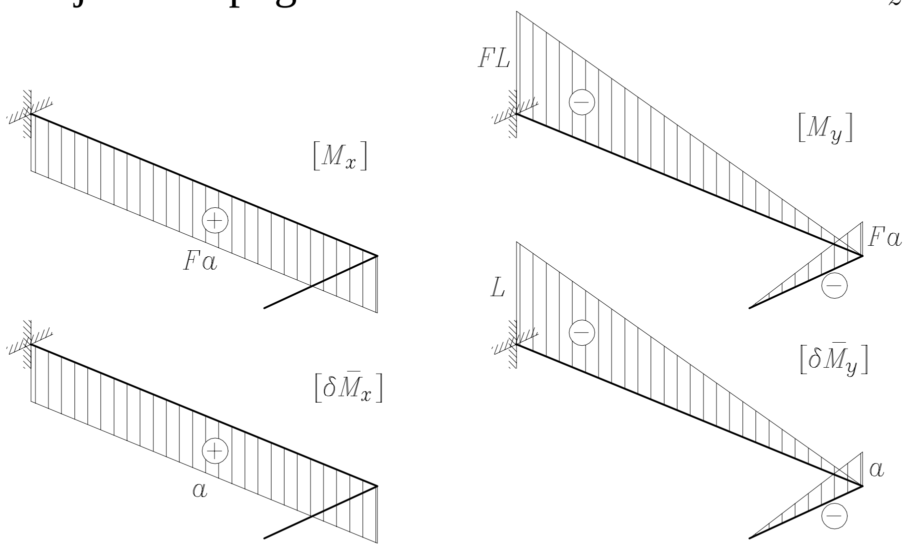
Iz zadnje enačbe izračunamo $F_{2,\text{dop}}$:

$$F_{2,\text{dop}} \le \frac{\tau_{\text{dop}}\,2\,A_s\,t_{\min}}{a} = \frac{10\cdot 2\cdot 637.94\cdot 1.5}{50} = 382.764\ \text{kN}.$$

2..3 Račun pomika točke C

$$w_C = \sum_{\mathrm{el}} \int_0^{L_i} \left(\frac{M_y \, \delta \bar{M}_y}{E \, I_y} + \frac{M_x \, \delta \bar{M}_x}{G \, I_x} \right) dx = w_{C,My} + w_{C,Mx}.$$

Torzijska in upogibna momenta zaradi sil F in $\delta F_z = 1$:



2..4 Račun pomika točke C za nosilec z odprtim prečnim prerezom

($F_{1,\mathrm{dop}} = 13.43$ kN)

$$I_{y1} = \frac{\pi}{64} \left[D^4 - (D - 2\,t)^4 \right] = 13673.73 \ \mathrm{cm}^4.$$

$$w_{C,My} = \frac{1}{E\,I_{y1}} \frac{F_{1,\mathrm{dop}}\,L\,L}{2} \frac{2\,L}{3} + \frac{1}{E\,I_{y2}} \frac{F_{1,\mathrm{dop}}\,a\,a}{2} \frac{2\,a}{3} = 0.0507 \ \mathrm{cm}.$$

$$w_{C,Mx} = \frac{1}{G\,I_x} F_{1,\mathrm{dop}}\,a\,L\,a = 5.0 \ \mathrm{cm}.$$

$$w_C = 0.0507 + 5.0 = 5.0507 \ \mathrm{cm}.$$

Delež pomika zaradi upogiba je veliko manjši od deleža zaradi torzije. Nosilci z odprtim tankostenskim prečnim prerezom slabo prevzamejo torzijsko obtežbo.

2..5 Račun pomika točke C za nosilec z zaprtim prečnim prerezom

($F_{2,\mathrm{dop}} = 382.764$ kN)

$$I_x = \frac{4\,A_s^2}{\dfrac{d\zeta}{t}} = \frac{4 \cdot 637.94^2}{\dfrac{\pi \cdot 28.5}{1.5}} = 27271.92 \;\; \mathrm{cm}^4.$$

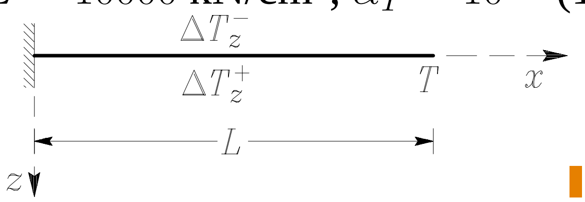
$$w_C = \frac{F_{2,\mathrm{dop}}}{3\,E}\left(\frac{L^3}{I_{y1}} + \frac{a^3}{I_{y2}}\right) + \frac{F_{2,\mathrm{dop}}\,L\,a^2}{G\,I_x} = 1.445 + 0.526 = 1.971 \;\; \mathrm{cm}.$$

Pomik zaradi torzije je manjši od pomika zaradi upogiba. Nosilci z zaprtim tankostenskim prečnim prerezom so primerni za prevzem torzijske obtežbe. Kljub temu, da smo konstrukcijo z odprtim prečnim prerezom obremenili kar z 28.5 krat manjšo silo kot nosilec z zaprtim prerezom, so pomiki pri odprtem prerezu več kot 2.5 krat večji.

Primer 5.19

1. Naloga

Na spodnji strani previsnega linijskega nosilca nastane sprememba temperature $\Delta T_z^+ = 10°\mathrm{C}$, na zgornji strani pa $\Delta T_z^- = 30°\mathrm{C}$.
ΔT_z^+ in ΔT_z^- se vzdolž osi nosilca ne spreminjata.
Podatki: $L = 100$ cm, $h = 10$ cm, $A_x = 10$ cm^2, $I_y = 100$ cm^4, $E = 10000$ kN/cm^2, $\alpha_T = 10^{-5}$ (1/°C).



Izračunajmo pomika u_T in w_T ter zasuk $\omega_T \equiv \omega_{Ty}$ točke T pri $x = L$. Določimo tudi potek notranjih sil!

2. Postopek in rezultati

Ker so notranje sile zaradi resnične obtežbe enake nič, računamo $\delta\bar{W}_n^*$ po enačbi

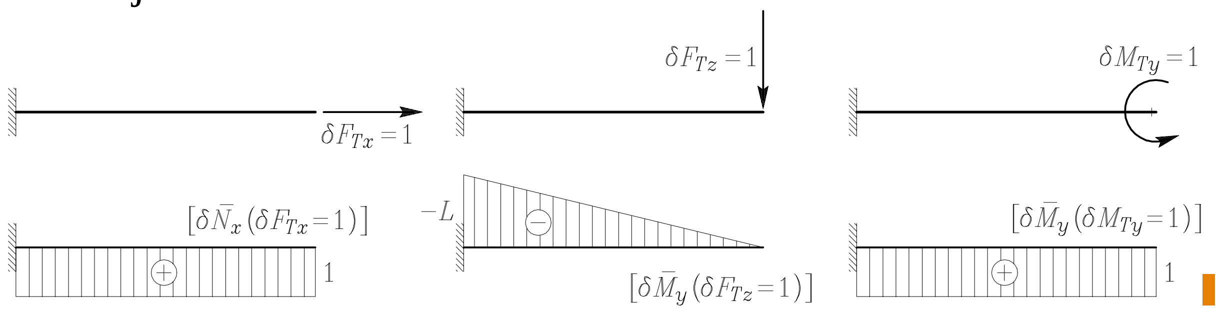
$$\delta\bar{W}_n^*(\Delta T) = \int_0^L \alpha_T\,(\Delta T_x\,\delta\bar{N}_x + \Delta T_z\,\delta\bar{M}_y)\,dx.$$

Za račun pomikov u_T in w_T ter zasuka ω_T moramo izračunati ΔT_x in ΔT_z in notranje sile, za virtualni sili $\delta F_{Tx} = 1$ in $\delta F_{Tz} = 1$ in za virtualni moment $\delta M_{Ty} = 1$

Konstanti ΔT_x in ΔT_z izračunamo po enačbi

$$\Delta T_x = \frac{10+30}{2} = 20\,^\circ\mathrm{C}, \quad \Delta T_z = \frac{10-30}{10} = -2\,^\circ\mathrm{C/cm}.$$

Notranje sile



$$u_{Tx} = u_T = \alpha_T \, \Delta T_x \int\limits_0^L \delta \bar{N}_x \, dx = 0.00001 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 1 = 0.02 \text{ cm.}$$

Vidimo, da ΔT_z ne vpliva na pomik u_T.

$$u_{Tz} = w_T = \alpha_T \, \Delta T_z \int\limits_0^L \delta \bar{M}_y \, dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot \frac{-100 \cdot 100}{2} = 0.1 \text{ cm.}$$

Vidimo, da na w_T ne vpliva sprememba temperature ΔT_x ampak samo ΔT_z.

$$\omega_T = \alpha_T \, \Delta T_z \int\limits_0^L \delta \bar{M}_y \, dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot 100 \cdot 1 = -0.002 \text{rad} = -0.115^\circ.$$

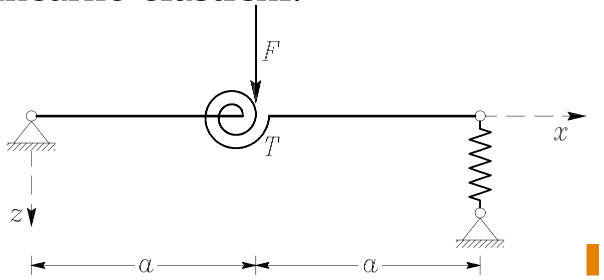
Iz ravnotežnih pogojev za obravnavani primer sledi, da so notranje sile enake nič.

Velja splošno pravilo, da sprememba temperature v **statično določenih konstrukcijah** povzroči deformacije ne pa tudi notranjih sil.

Primer 5.22

1. Naloga

Konstrukcija je sestavljena iz dveh nosilcev in dveh vzmeti. Vzmeti sta linearno elastični.

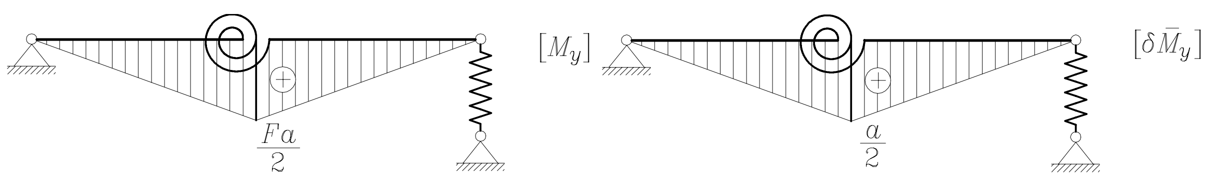


Določimo navpični pomik točke T.

2. Postopek

Ker vpliv prečne sile zanemarimo, je:

$$w_T = \int_0^{2a} \frac{M_y\,\delta\bar{M}_y}{EI_y}dx + \frac{N_v\,\delta\bar{N}_v}{k_x} + \frac{M_v\,\delta\bar{M}_v}{k_\varphi}.$$



Osna sila in upogibni moment v vzmeteh sta: $N_v = -F/2$ in $M_v = F\,a/2$.

Osna sila in upogibni moment v vzmeteh sta: $\delta N_v = -1/2$ in $\delta M_v = a/2$.

Navpični pomik točke T je

$$w_T = \frac{1}{E\,I_y}\frac{F\,a}{2}\frac{a}{2}\frac{2}{3}\frac{a}{2}2 + \frac{F/2}{k_x}\,\frac{1}{2} + \frac{F\,a/2}{k_\varphi}\frac{a}{2}$$

in po preureditvi enačbe dobimo

$$w_T = F\left(\frac{a^3}{6\,E\,I_y} + \frac{1}{4\,k_x} + \frac{a^2}{4\,k_\varphi}\right).$$