RAČUNANJE NOTRANJIH SIL IN POMIKOV STATIČNO NEDOLOČENIH KONSTRUKCIJ PO METODI SIL

Marjan Stanek, Goran Turk in Rado Flajs
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Univerza v Ljubljani

http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/TRDNOST

Izvlečki iz teorije

$$
\begin{aligned}
a_{ij} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \Bigg(& \frac{\bar{N}_{xi}\,\bar{N}_{xj}}{E\,A_x} + \frac{\bar{N}_{yi}\,\bar{N}_{yj}}{G\,A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zi}\,\bar{N}_{zj}}{G\,A_z^s} + \\
& + \frac{\bar{M}_{xi}\,\bar{M}_{xj}}{G\,I_x} + \frac{\bar{M}_{yi}\,\bar{M}_{yj}}{E\,I_y} + \frac{\bar{M}_{zi}\,\bar{M}_{zj}}{E\,I_z} \Bigg) dx + \\
& + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vi}^{(r)}\,\bar{N}_{vj}^{(r)}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vi}^{(q)}\,\bar{M}_{vj}^{(q)}}{k_\varphi^{(q)}}, \quad i,j = 1,\ldots,n. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_i = \sum_{\text{el}} \int_0^L \Bigg[& \frac{\bar{N}_{xi}\, N_{xQ}}{E\, A_x} + \frac{\bar{N}_{yi}\, N_{yQ}}{G\, A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zi}\, N_{zQ}}{G\, A_z^s} + \\
& + \frac{\bar{M}_{xi}\, M_{xQ}}{G\, I_x} + \frac{\bar{M}_{yi}\, M_{yQ}}{E\, I_y} + \frac{\bar{M}_{zi}\, M_{zQ}}{E\, I_z} + \\
& + \alpha_T \left(\Delta T_x\, \bar{N}_{xi} - \Delta T_y\, \bar{M}_{zi} + \Delta T_z\, \bar{M}_{yi} \right) \Bigg] dx + \\
& + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vi}^{(r)}\, N_{vQ}^{(r)}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vi}^{(q)}\, M_{vQ}^{(q)}}{k_\varphi^{(q)}}, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j + b_i = u_i, \qquad (i = 1, \ldots, n)
$$

Člen, ki pripada virtualni sili δF_{Ts}, označimo s c_F

$$
\begin{aligned}
c_F = u_{Ts} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \Bigg[& \frac{\bar{N}_{xF}\, N_x^{nk}}{E\, A_x} + \frac{\bar{N}_{yF}\, N_y^{nk}}{G\, A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zF}\, N_z^{nk}}{G\, A_z^s} + \\
& + \frac{\bar{M}_{xF}\, M_x^{nk}}{G\, I_x} + \frac{\bar{M}_{yF}\, M_y^{nk}}{E\, I_y} + \frac{\bar{M}_{zF}\, M_z^{nk}}{E\, I_z} + \\
& + \alpha_T \left(\Delta T_x\, \bar{N}_{xF} - \Delta T_y\, \bar{M}_{zF} + \Delta T_z\, \bar{M}_{yF} \right) \Bigg] dx + \\
& + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vF}^{(r)}\, N_v^{(r)nk}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vF}^{(q)}\, M_v^{(q)nk}}{k_\varphi^{(q)}}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

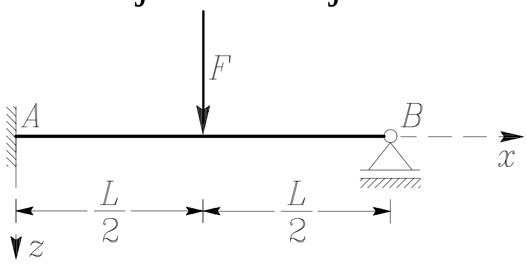
Člen, ki pripada virtualnemu momentu δM_{Ts}, označimo s c_M

$$c_M = \omega_{Ts} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \Bigg[\frac{\bar{N}_{xM}\, N_x^{nk}}{E\, A_x} + \frac{\bar{N}_{yM}\, N_y^{nk}}{G\, A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zM}\, N_z^{nk}}{G\, A_z^s} + \frac{\bar{M}_{xM}\, M_x^{nk}}{G\, I_x} + \frac{\bar{M}_{yM}\, M_y^{nk}}{E\, I_y} + \frac{\bar{M}_{zM}\, M_z^{nk}}{E\, I_z} + \alpha_T \left(\Delta T_x\, \bar{N}_{xM} + \Delta T_y\, \bar{M}_{zM} + \Delta T_z\, \bar{M}_{yM} \right) \Bigg] dx + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vM}^{(r)}\, N_v^{(r)nk}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vM}^{(q)}\, M_v^{(q)nk}}{k_\varphi^{(q)}}. \tag{4}$$

Primer 5.30

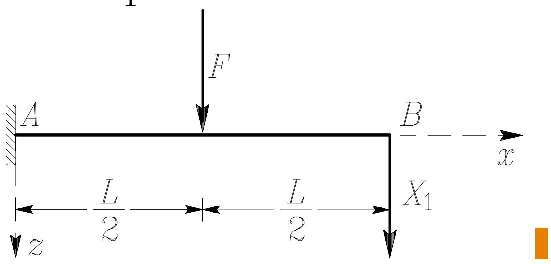
1. Naloga

Izračunajmo reakcije in notranje sile za nosilec na sliki!



2. Rešitev

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Osnovno konstrukcijo lahko izberemo tako, da odstranimo desno podporo in njen vpliv nadomestimo s silo X_1:

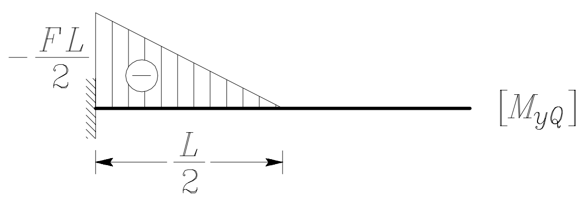


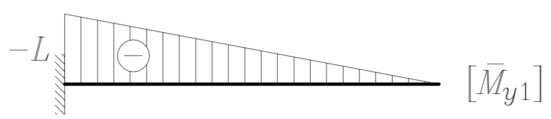
Iz pogoja, da je navpični pomik točke B enak nič dobimo

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0.$$

Za račun koeficientov a_{11} in b_1 potrebujemo potek notranjih sil na osnovni konstrukciji zaradi zunanje obtežbe F in zaradi sile $X_1 = 1$.

M. Stanek, G. Turk in R. Flajs: Računanje notranjih sil in pomikov statično nedoločenih konstrukcij po metodi sil





Upoštevamo le vpliv upogibnega momenta M_y in enačbi (1) in (2).

$$a_{11} = \int_0^L \frac{\bar{M}_{y1}\,\bar{M}_{y1}}{E\,I_y} dx = \frac{1}{E\,I_y} \frac{L\,L}{2} \frac{2}{3} L = \frac{L^3}{3\,E\,I_y},$$

$$b_1 = \int_0^L \frac{\bar{M}_{y1}\,M_{yQ}}{E\,I_y} dx = \frac{1}{E\,I_y} \underbrace{F \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2}}_{\substack{\text{ploščina} \\ M_{yQ}}} \underbrace{\left(\frac{L}{2} + \frac{2}{3}\frac{L}{2}\right)}_{\substack{\text{vrednost } \bar{M}_{y1} \\ \text{v težišču } M_{yQ}}} = \frac{5\,F\,L^3}{48\,E\,I_y}.$$

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{5\,F}{16}.$$

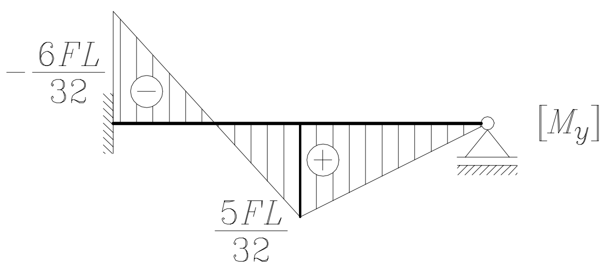
Potek upogibnega momenta M_y na statično nedoločeni konstrukciji lahko izračunamo vsaj na dva načina:

- Upoštevamo princip superpozicije. To pomeni, da seštejemo moment M_{yQ} zaradi sile F in moment M_{y1} zaradi sile X_1.

$$M_y(x=0) = -F\frac{L}{2} - L X_1 = -F\frac{L}{2} + L\frac{5\,F}{16} = -\frac{6\,F\,L}{32},$$

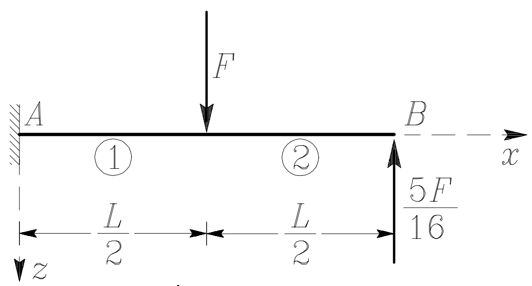
$$M_y(x=L/2) = 0 - \frac{L}{2}X_1 = \frac{5\,F\,L}{16\;\;2} = \frac{5\,F\,L}{32},$$

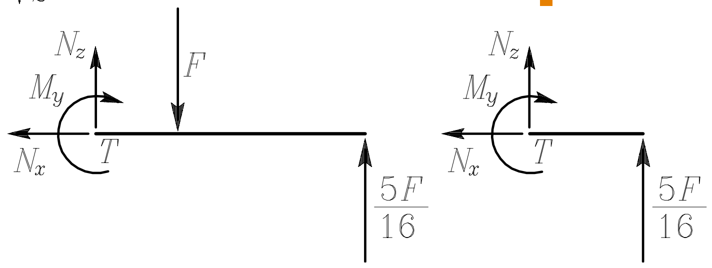
$$M_y(x=L) = 0.$$



- Upoštevamo izračunani X_1 in za obe polji napišemo ravnotežni enačbi

$$\sum {M_y}^T = 0.$$





Prečno silo izračunamo običajno z upoštevanjem X_1 iz ravnotežnih enačb

$$\sum N_z = 0$$

za obe polji

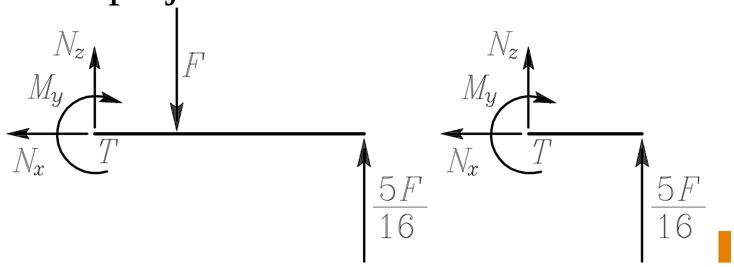
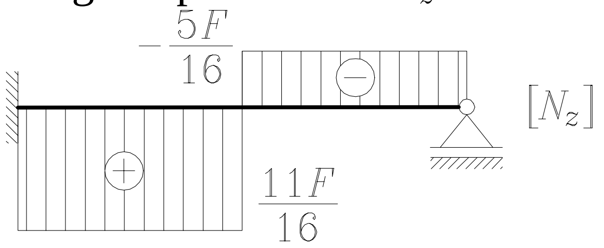
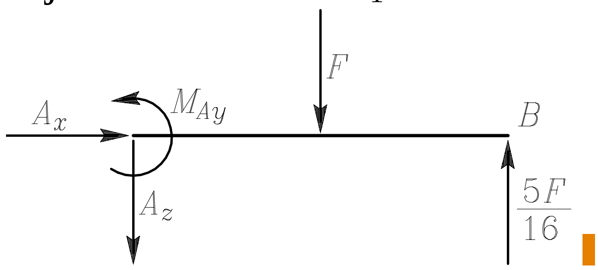


Diagram prečne sile N_z na statično nedoločeni konstrukciji



Račun reakcij opravimo na osnovni konstrukciji, na katero delujeta zunanja sila F in sila X_1



Določimo jih iz ravnotežnih enačb:

$$\sum x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = 0,$$

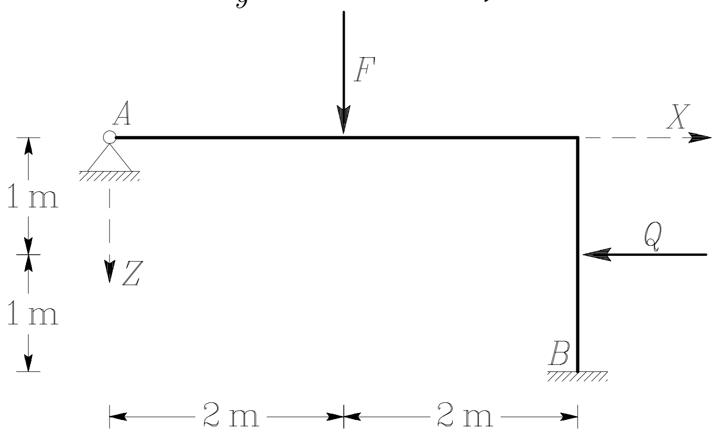
$$\sum z = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = -\frac{11\,F}{16},$$

$$\sum M_y^A = 0 \quad \rightarrow \quad M_{Ay} = \frac{3\,F\,L}{16}.$$

Primer 5.31

1. Naloga

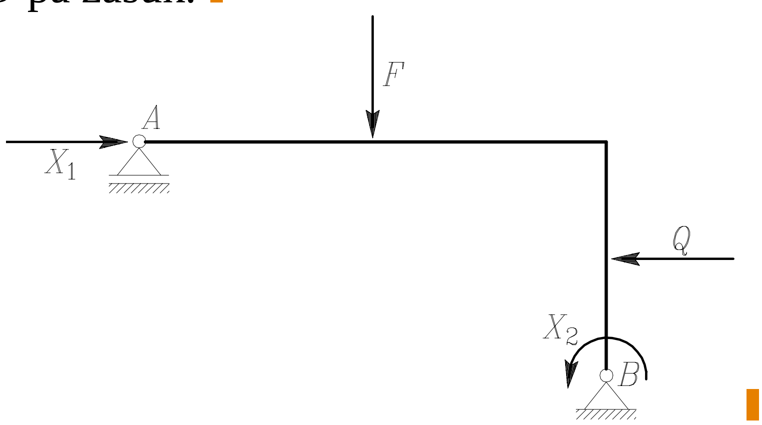
Podatki: $E\,I_y =$ konstanta, $F = 40$ kN in $Q = 100$ kN.



Za konstrukcijo na sliki določimo reakcije in notranje sile!

2. Rešitev

Stopnja statične nedoločenosti je $n = 3+2-3 = 2$. Osnovno konstrukcijo tvorimo tako, da v podpori A sprostimo vodoravni pomik, v podpori B pa zasuk.



Kinematična pogoja za vodoravni pomik podpore A in zasuk v podpori B :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0, a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

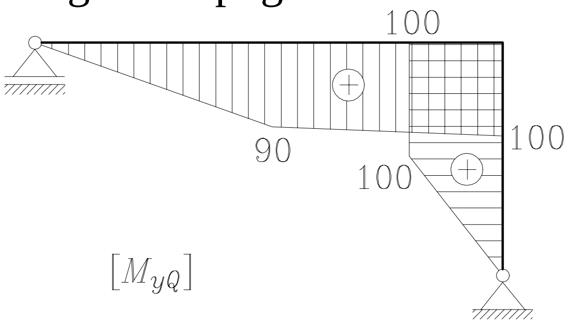
Reakcije osnovne konstrukcije zaradi sil P in Q ter zaradi enotskih sil X_1 in X_2 so:

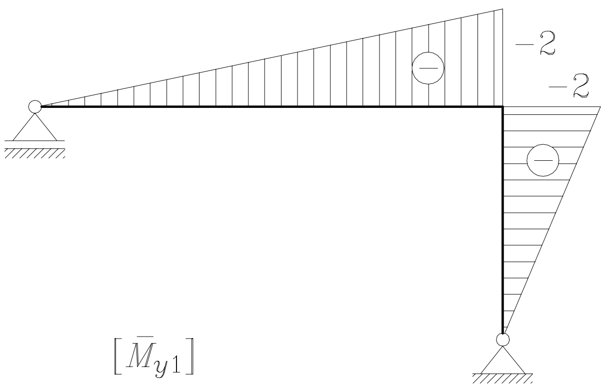
$$A_z(F,Q) = -45\,\mathrm{kN}, \quad B_x(F,Q) = 100\,\mathrm{kN}, \quad B_z(F,Q) = 5\,\mathrm{kN},$$

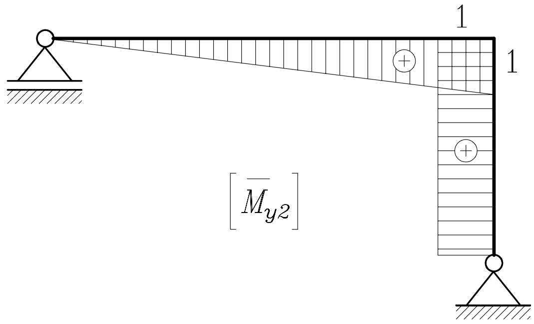
$$\bar{A}_z(X_1=1) = 0.5, \quad \bar{B}_x(X_1=1) = -1, \quad \bar{B}_z(X_1=1) = -0.5,$$
$$\bar{A}_z(X_2=1) = -0.25, \quad \bar{B}_x(X_2=1) = 0, \quad \bar{B}_z(X_2=1) = 0.25.$$

M. Stanek, G. Turk in R. Flajs: Računanje notranjih sil in pomikov statično nedoločenih konstrukcij po metodi sil

Diagrame upogibnih momentov prikazujemo na sliki







Koeficiente a_{ij} in b_i določimo po enačbah (1) in (2), kjer zanemarimo vpliv osnih sil.

$$E\,I_y\,a_{11} = \frac{2\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = 8,$$

$$E\,I_y\,a_{22} = \frac{1\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 = \frac{10}{3} \cong 3.33,$$

$$E\,I_y\,a_{12} = -\frac{2\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{2\cdot 2}{2}\cdot 1 = -\frac{14}{3} \cong -4.67,$$

$$a_{21} = a_{12},$$

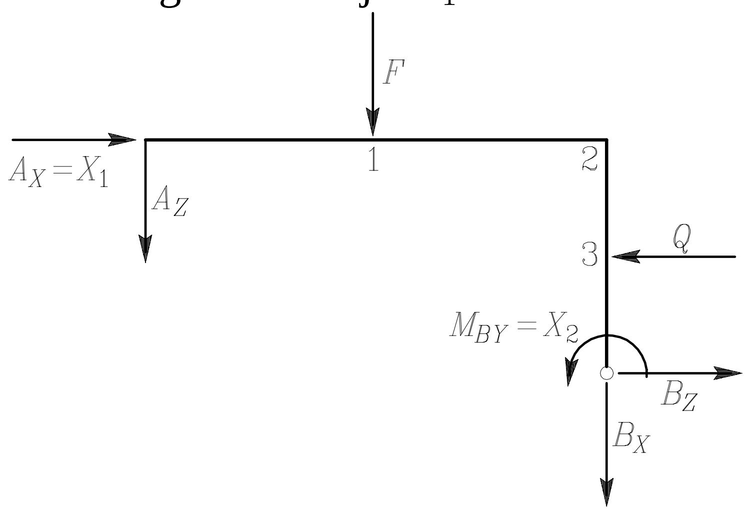
$$E\,I_y\,b_1 = -\left[\frac{90\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{100\cdot 2}{2}\cdot(1+\frac{2}{3}\cdot 1) + \frac{90\cdot 2}{2}\cdot(1+\frac{1}{3}\cdot 1) + \right.$$
$$\left. +100\cdot 1\cdot\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{100\cdot 1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right] = -530,$$

$$E\,I_y\,b_2 = \frac{90\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{100\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{90\cdot 2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) +$$
$$+\,100\cdot 1\cdot 1 + \frac{100\cdot 1}{2}\cdot 1 = \frac{970}{3} \cong 323.33.$$

Kinematična pogoja predstavljata sistem dveh linearnih enačb, kjer sta neznanki sili X_1 in X_2:

$$\begin{bmatrix} 8.0 & -4.67 \\ -4.67 & 3.33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 530.0 \\ -323.3 \end{bmatrix}$$

Rešitev tega sistema je $X_1 = 52.73$ kN in $X_2 = -23.18$ kNm.



Reakcije lahko določimo na dva načina:

A) Rešimo ravnotežne enačbe na osnovni konstrukciji. Pri tem upoštevamo zunanjo obtežbo in neznane sile X_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

B) Reakcije določimo s seštevanjem že prej izračunanih reakcij zaradi zunanje obtežbe in neznanih sil X_i.

Tako dobimo

$$\begin{aligned} A_z &= A_z(F, Q) + A_z(X_1) + A_z(X_2) = \\ &= A_z(F, Q) + \bar{A}_z(X_1 = 1)\, X_1 + \bar{A}_z(X_2 = 1)\, X_2 = \\ &= -45 + 0.5 \cdot 52.73 - 0.25 \cdot (-23.18) = -12.84 \ \text{kN}, \\ B_z &= 5 - 0.5 \cdot 52.73 + 0.25 \cdot (-23.18) = -27.16 \ \text{kN}, \\ B_x &= 100 - 1 \cdot 52.73 = 47.27 \ \text{kN}. \end{aligned}$$

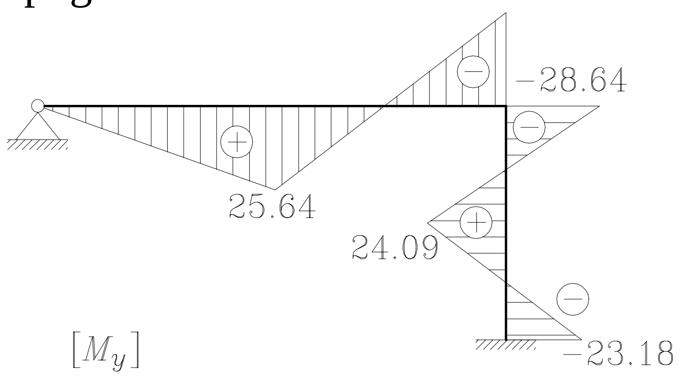
Reakciji A_x in M_{By} sta enaki iskanim količinam X_1 in X_2

$$A_x = X_1 = 52.73\,\text{kN}, \qquad M_{By} = X_2 = -23.18\,\text{kNm}.$$

Upogibne momente določimo s seštevanjem upogibnih momentov zaradi sil P, Q, X_1 in X_2. Ker so posamezni diagrami odsekoma linearni, določimo vrednosti upogibnih momentov le v točkah A, B, 1, 2 in 3.

$$\begin{aligned} A: &\quad M_y = 0 \ \text{kNm}, \\ B: &\quad M_y = 1 \cdot (-23.18) = -23.18 \ \text{kNm}, \\ 1: &\quad M_y = 90 - 1 \cdot 52.73 + 0.5 \cdot (-23.18) = 25.68 \ \text{kNm}, \\ 2: &\quad M_y = 100 - 2 \cdot 52.73 + 1 \cdot (-23.18) = -28.64 \ \text{kNm}, \\ 3: &\quad M_y = 100 - 1 \cdot 52.73 + 1 \cdot (-23.18) = 24.09 \ \text{kNm}. \end{aligned}$$

Upogibni momenti statično nedoločene konstrukcije



Osne in prečne sile na statično nedoločeni konstrukciji izračunamo tako, da obravnavamo osnovno konstrukcijo, sili X_1 in X_2 pa upoštevamo kot zunanjo obtežbo.

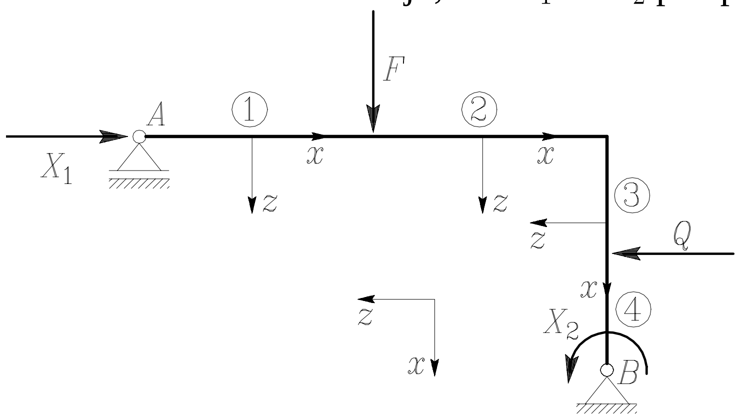
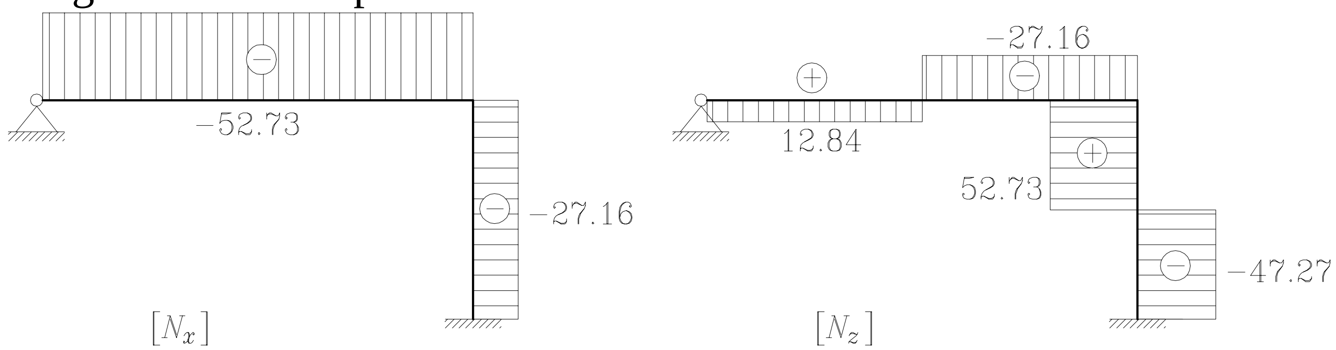


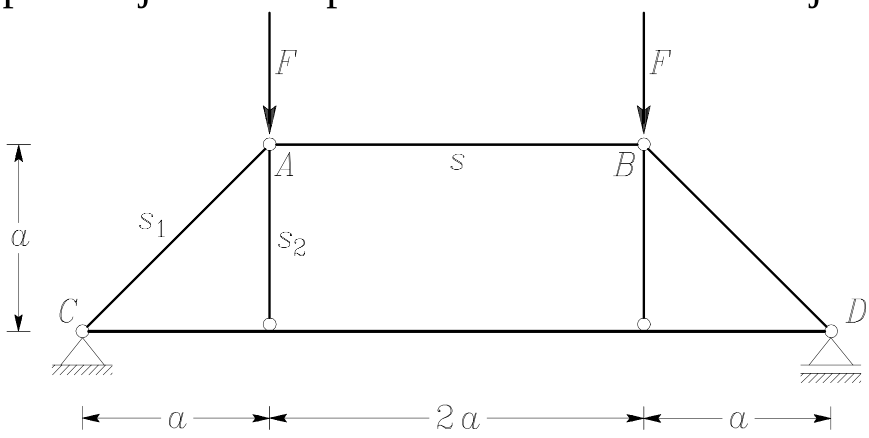
Diagrama osnih in prečnih sil



Primer 5.35

1. Naloga

Trapezno vešalo na sliki je obteženo z dvema silama velikosti F. Določimo silo S v razpori AB. Velikost sile F je 100 kN, razdalja a je 2 m, ploščine prečnih prerezov so: $A_{s1} = 196$ cm^2, $A_{s2} = 144$ cm^2, $A_s = 64$ cm^2 in $A_n = 240$ cm^2. Vztrajnostni moment I_n nosilca je 8000 cm^4. Pri računu upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na deformacije.



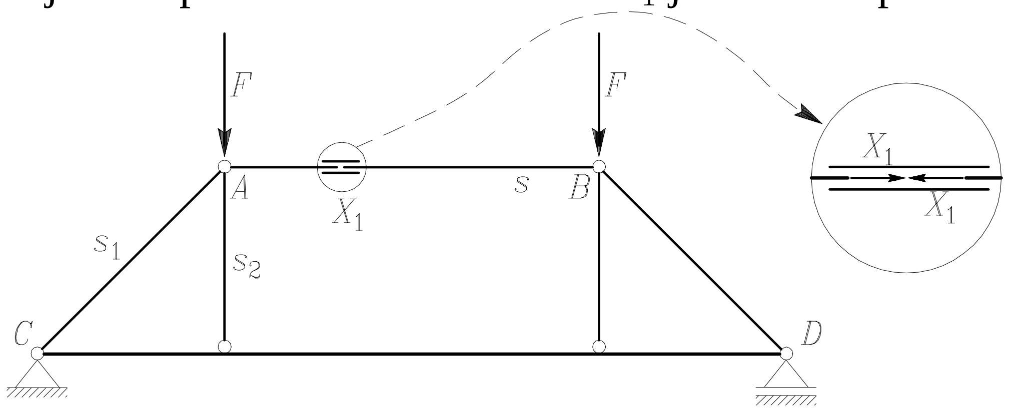
2. Rešitev

Stopnjo statične nedoločenosti izračunamo z naslednjim izrazom

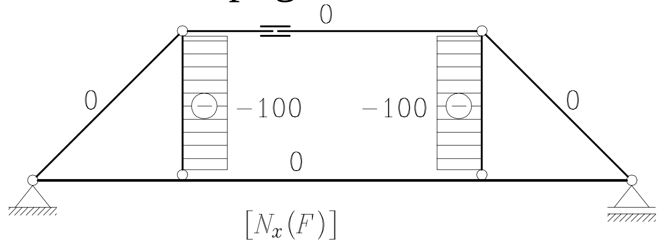
$$n = 2 + 1 + 2(2-1)\cdot 4 + 2(3-1)\cdot 2 - 6\cdot 3 = 1,$$

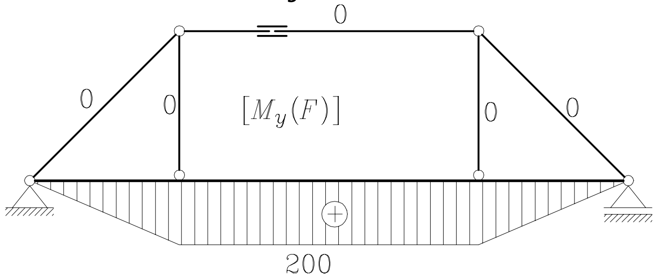
torej je konstrukcija enkrat statično nedoločena.

Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da sprostimo vzdolžni pomik nekje v razpori AB. Neznana sila X_1 je sila v razpori.

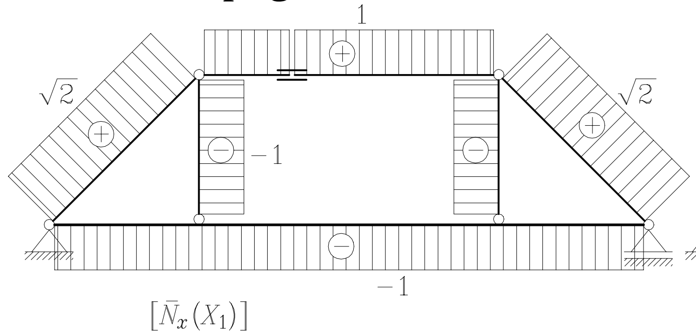


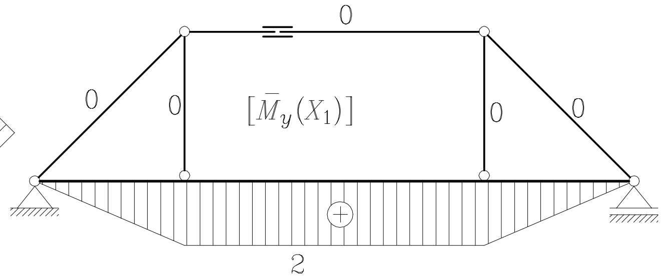
Osne sile in upogibni momenti na osnovni konstrukciji zaradi sil F.





Osne sile in upogibni momenti na osnovni konstrukciji zaradi sil $X_1 = 1$.





Koeficienta a_{11} in b_1 izračunamo po enačbah (1) in (2) naslednjima izrazoma:

$$E\,a_{11} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^2\cdot\sqrt{2}}{0.0196}\cdot 2 + \frac{2\cdot 1\cdot 1}{0.0144}\cdot 2 + \frac{4\cdot 1\cdot 1}{0.0064} + \frac{8\cdot 1\cdot 1}{0.024} + $$
$$+ \frac{1}{0.00008}\left(\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 2\right) =$$
$$= 1813.34 + 266666.67 = 268480.00,$$
$$E\,b_1 = \frac{2\cdot 100\cdot 1}{0.0144}\cdot 2 + \frac{1}{0.00008}\left(\frac{2\cdot 200}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 200\cdot 2\right) =$$
$$= 27777.78 + 26666666.67 = 26694444.44.$$

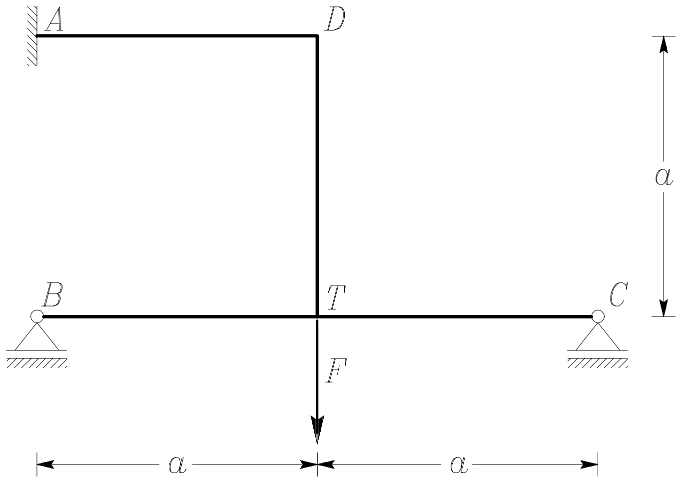
Sila X_1 je enaka sili v razpori S

$$X_1 \equiv S = -\frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{26694444.44}{268480} = -99.43\,\mathrm{kN}.$$

Primer 5.38

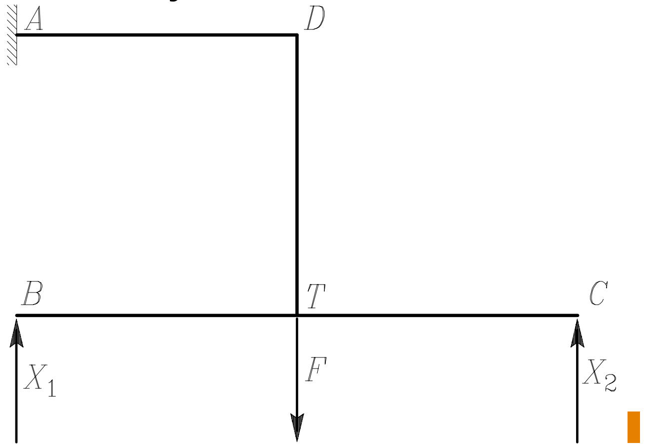
1. Naloga

Za konstrukcijo na sliki določimo navpični pomik točke T! Togost elementov konstrukcije je za vse elemente enaka $EI_y = $ konst. Konstrukcija je obtežena le s točkovno silo F v točki T.



2. Izračun notranjih sil

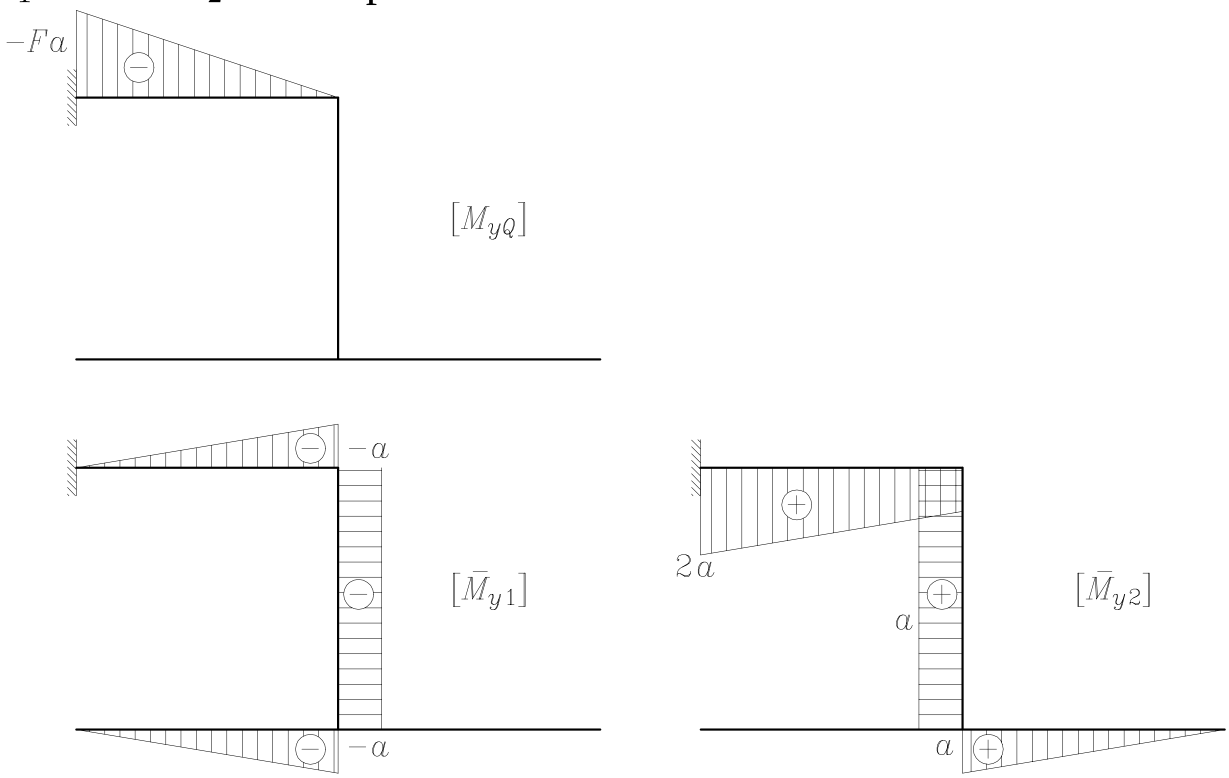
Stopnja statične nedoločenosti je $n = 2$ ($n = 3+1+1-3\cdot 2$). Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da odstranimo podpori B in C



Kinematična pogoja sta:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

Diagrami upogibnega momenta zaradi zunanje obtežbe in zaradi sil $X_1 = 1$ in $X_2 = 1$ so prikazani na sliki



Koeficiente a_{ij} in b_i določimo po enačbah (1) in (2).

$$E\,I_y\,a_{11} = \frac{a\,a}{2}\frac{2}{3}a\cdot 2 + a^3 = \frac{5}{3}a^3,$$

$$E\,I_y\,a_{22} = \frac{a\,a}{2}\frac{2}{3}a + a^3 + \frac{a\,a}{2}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}2\,a\right) + \frac{2\,a\,a}{2}\left(\frac{2}{3}2\,a + \frac{a}{3}\right) = \frac{11\,a^3}{3},$$

$$E\,I_y\,a_{12} = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}2\,a\right) - a^3 = -\frac{5}{3}a^3,$$

$$E\,I_y\,b_1 = \frac{F\,a\,a}{2}\frac{a}{3} = \frac{F\,a^3}{6}, \qquad E\,I_y\,b_2 = \frac{F\,a^2}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3}2\,a\right) = -\frac{5\,F\,a^3}{6}.$$

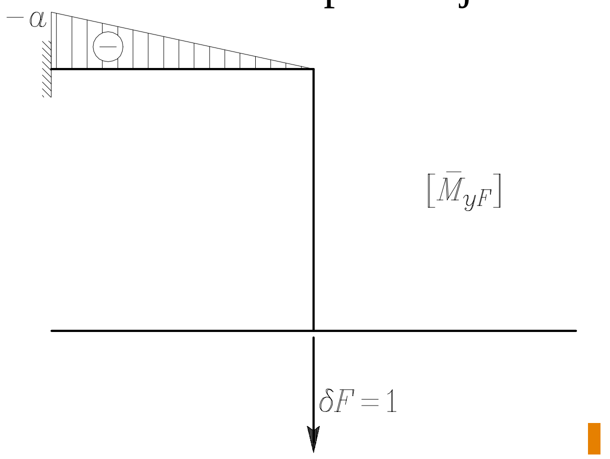
Rešitev sistema kinematičnih enačb

$$\begin{bmatrix} \frac{5\,a^3}{3} & -\frac{5\,a^3}{3} \\ -\frac{5\,a^3}{3} & \frac{11\,a^3}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F\,a^3}{6} \\ \frac{5\,F\,a^3}{6} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 5\,F \end{bmatrix}.$$

je $X_1 = \dfrac{7\,F}{30}, \qquad X_2 = \dfrac{F}{3}.$

3. Izračun pomika

Osnovno konstrukcijo obtežimo z virtualno silo $\delta F = 1$ na mestu in v smeri iskanega pomika. Upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile $\delta F = 1$ prikazujemo na sliki



Pri računu pomika točke T zanemarimo vpliv osnih sil, zato računamo

$$w_T = \sum_{el} \int_0^L \frac{M_y^{nk}\,\bar{M}_{yF}}{EI_y} dx.$$

Upoštevamo, da je $M_y^{nk} = M_{yQ} + X_1\,\bar{M}_{y1} + X_2\,\bar{M}_{y2}$ in da je $\bar{M}_{yF}$ različen od nič le v zgornjem vodoravnem elementu

$$w_T = \int\limits_0^a \frac{M_{yQ}\,\bar{M}_{yF}}{E\,I_y}\,dx + X_1 \int\limits_0^a \frac{\bar{M}_{y1}\,\bar{M}_{yF}}{E\,I_y}\,dx + X_2 \int\limits_0^a \frac{\bar{M}_{y2}\,\bar{M}_{yF}}{E\,I_y}\,dx.$$

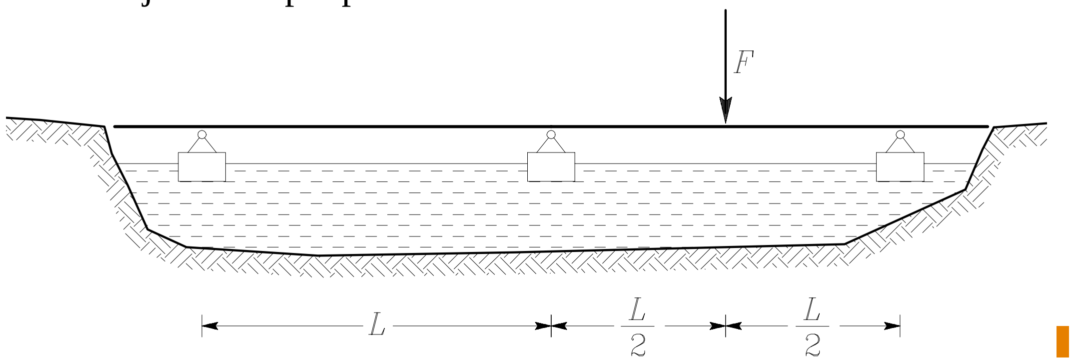
Te integrale izračunamo na osnovi diagramov $[\bar{M}_{y1}]$, $[\bar{M}_{y1}]$, $[M_{yQ}]$ in $[\bar{M}_{yF}]$. Dobimo

$$w_T = \frac{1}{E\,I_y}\left[\frac{F\,a\,a}{2}\frac{2}{3}a + X_1\frac{a\,a}{2}\frac{1}{3}a - X_2\frac{a\,a}{2}\left(\frac{2}{3}2a + \frac{1}{3}a\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{E\,I_y}\left(\frac{F\,a^3}{3} + \frac{7\,F\,a^3}{30}\frac{}{6} - \frac{F}{3}\frac{5\,a^3}{6}\right) = \frac{17\,F\,a^3}{180\,E\,I_y}.$$

Primer 5.43

1. Naloga

Nosilec pontonskega mostu je podprt s tremi pontoni s tlorisno ploščino A. Določimo reakcijo B_z na srednji ponton! Pri tem zanemarimo lastno težo nosilca. V neobremenjenem stanju so vse podpore na isti višini



Tlorisna ploščina pontona je $A = 8$ m^2, specifična teža vode je $\gamma_v = 10$ kN/m^3. Dolžina nosilca je $L = 4$ m, vztrajnostni moment prečnega prereza pa $I_y = 25759$ cm^4. Modul elastičnosti materiala nosilca je $E = 20000$ kN/cm^2.

Togost podlage k_v določimo z enačbo

$$F = k_v u.$$

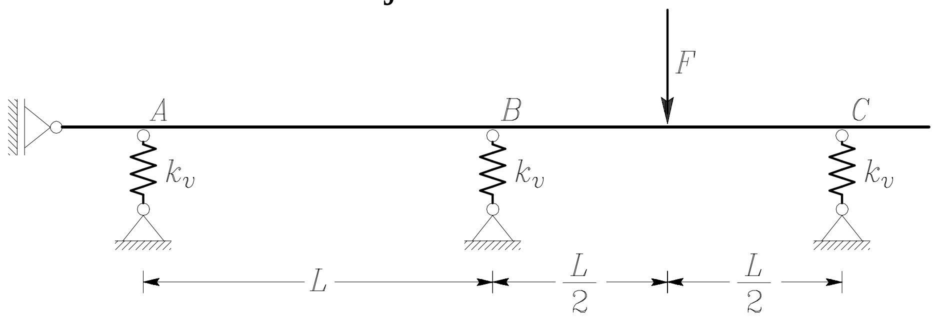
Sila F, s katero se ponton odziva na obtežbo nosilca, je enaka teži izpodrinjene vode

$$F = A\,\gamma_v\,u.$$

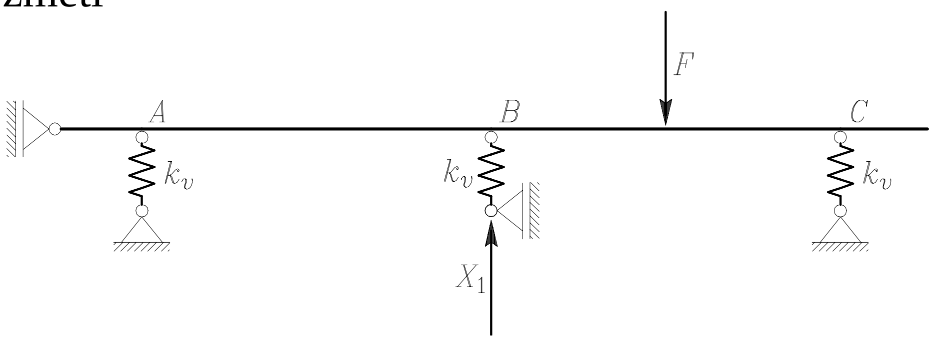
Z u smo označili ugrez pontona zaradi obtežbe F. Togost podlage k_v je

$$k_v = \frac{F}{u} = A\,\gamma_v.$$

Na spodnji sliki prikazujemo statični model konstrukcije, kjer smo pontone nadomestili z linijskimi linearno elastičnimi vzmetmi.



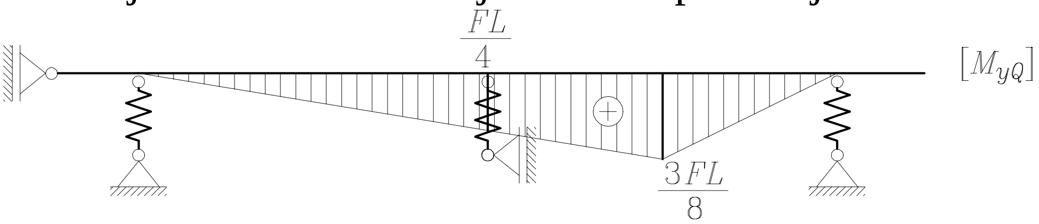
Stopnja statične nedoločenosti je $n = 4 - 3 = 1.$
Osnovno konstrukcijo lahko izberemo tako, da sprostimo pomik srednje vzmeti



Sila X_1, ki smo jo predpostavili na mestu in v smeri srednje vzmeti, je enaka iskani reakciji B_z. Kinematični pogoj je

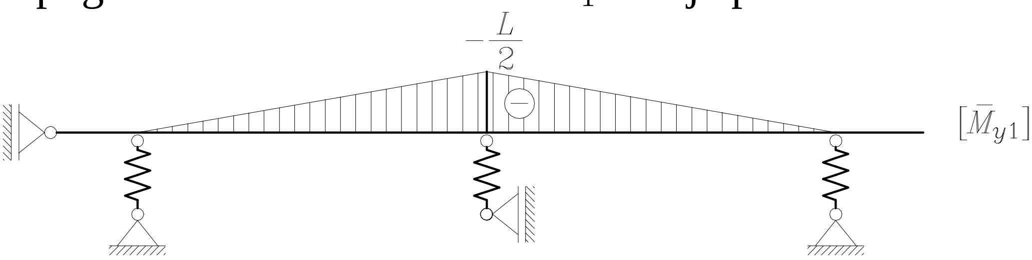
$$a_{11}\,X_1 + b_1 = 0.$$

Notranje sile zaradi zunanje obtežbe prikazujemo na sliki



Sile v vzmeteh zaradi zunanje obtežbe so $N_{AQ} = -\frac{F}{4},\ N_{BQ} = 0,\ N_{CQ} = -\frac{3\,F}{4}$.

Upogibni moment zaradi sile $X_1 = 1$ je podan na sliki



Sile v vzmeteh zaradi sile $X_1 = 1$ so $\bar{N}_{vA1} = \frac{1}{2},\ \bar{N}_{vB1} = -1,\ \bar{N}_{vC1} = \frac{1}{2}$.

Koeficienta a_{11} in b_1 sta:

$$a_{11} = \frac{1}{E\,I_y}\frac{L}{2}\frac{L}{2}\frac{2}{3}\frac{L}{2}2 + \frac{\bar{N}_{vA1}\,\bar{N}_{vA1}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vB1}\,\bar{N}_{vB1}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vC1}\,\bar{N}_{vC1}}{k_v} =$$

$$= \frac{L^3}{6\,E\,I_y} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{k_v} + \frac{(-1)(-1)}{k_v} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{k_v} = \frac{L^3}{6\,E\,I_y} + \frac{3}{2\,A\,\gamma_v},$$

$$b_1 = \frac{1}{E\,I_y}\left[\frac{L}{2}\frac{L}{2}\frac{2}{3}\frac{F\,L}{4} + \frac{L}{2}\frac{L}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{3\,F\,L}{8} + \frac{2}{3}\frac{F\,L}{4}\right) + \frac{L}{4}\frac{L}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{3\,F\,L}{8} + \frac{1}{3}\frac{F\,L}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{L}{4}\frac{L}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3\,F\,L}{8}\right] + \frac{\bar{N}_{vA1}\,N_{vAQ}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vB1}\,N_{vBQ}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vC1}\,N_{vCQ}}{k_v} =$$

$$= -\frac{11\,F\,L^3}{96\,E\,I_y} - \frac{1}{2}\frac{F}{4}\frac{1}{A\,\gamma_v} + 0 - \frac{1}{2}\frac{3\,F}{4}\frac{1}{A\,\gamma_v} = -\frac{11\,F\,L^3}{96\,E\,I_y} - \frac{F}{2\,A\,\gamma_v}.$$

Z upoštevanjem prikazanih izrazov v kinematičnem pogoju dobimo neznanko X_1

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = F\frac{48\,E\,I_y + 11\,A\,\gamma_v\,L^3}{16\,(9\,E\,I_y + A\,\gamma_v\,L^3)} \equiv -B_z.$$

Za podane vrednosti sledi

$$B_z = -X_1 = -F\,\frac{48\cdot 20000\cdot 25759 + 11\cdot 80000\cdot 10\cdot 10^{-6}\cdot 400^3}{16\,(9\cdot 20000\cdot 25759 + 80000\cdot 10\cdot 10^{-6}\cdot 400^3)} = -0.337\,F.$$

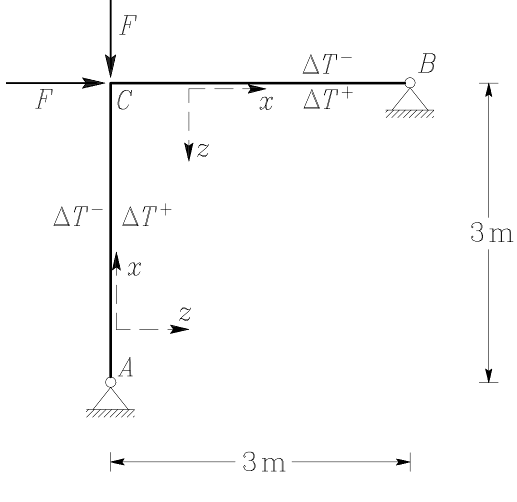
Celotne sile v vzmeteh so:

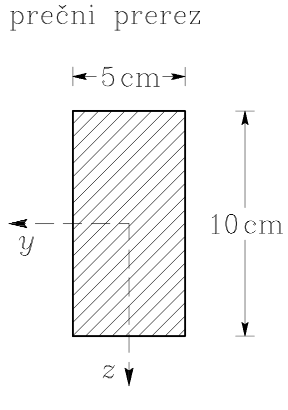
$$N_{vA} = -\frac{F}{4} + \frac{X_1}{2}, \qquad N_{vB} = -X_1, \qquad N_{vC} = -\frac{3\,F}{4} + \frac{X_1}{2}.$$

Primer 5.44

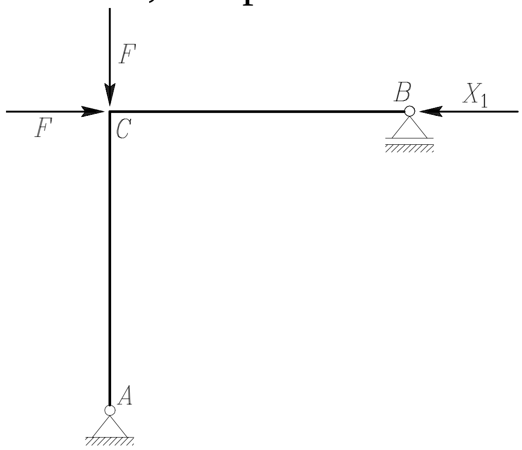
1. Naloga

Konstrukcija je obtežena z dvema točkovnima silama velikosti F v točki C, poleg tega se je konstrukcija segrela za $\Delta T^+ = 10°$ C na notranji strani in za $\Delta T^- = 30°$ C na zunanji strani. Predpostavimo, da se temperatura po prerezu spreminja linearno. Podatki: $E = 2\cdot 10^8$ kN/m^2, $\alpha_T = 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$. Določi potek upogibnega momenta.





Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da sprostimo vodoravni pomik v podpori B



Neznano silo X_1 izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0.$$

Koeficienta a_{11} in b_1 določimo po enačbah:

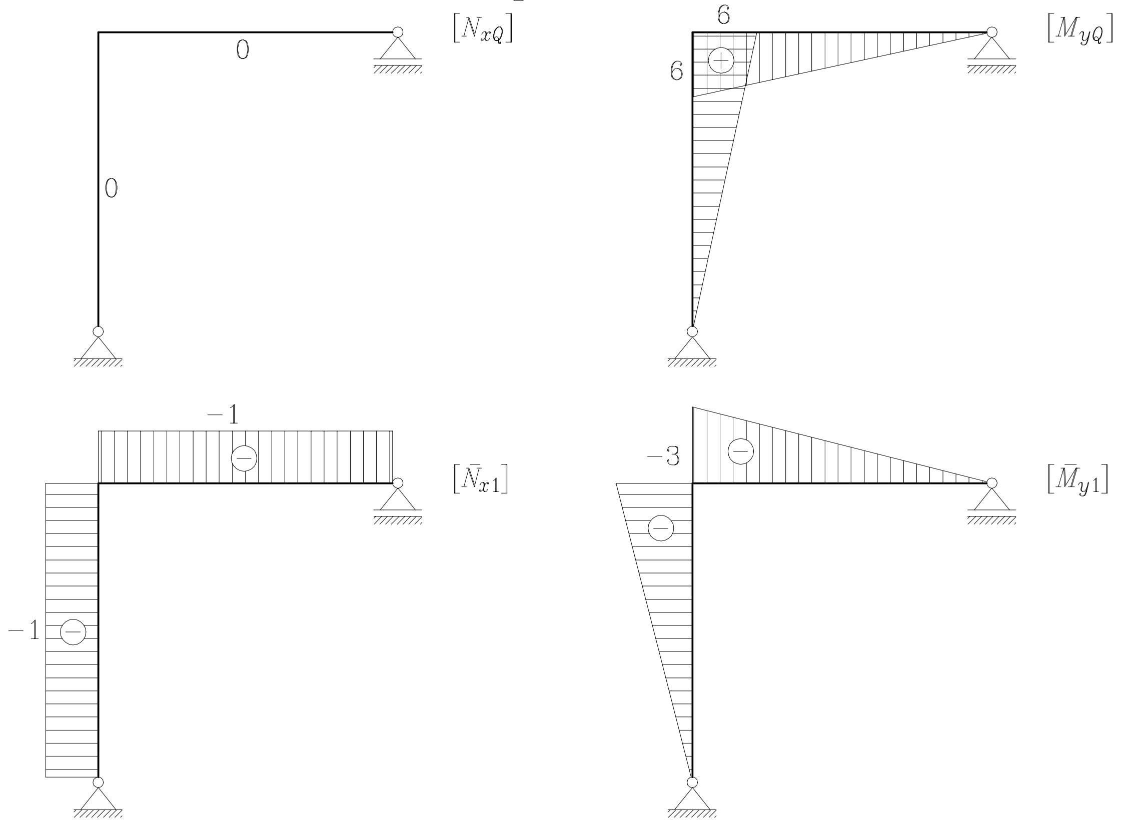
$$a_{11} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left(\frac{\bar{N}_{x1}\, \bar{N}_{x1}}{E\, A_x} + \frac{\bar{M}_{y1}\, \bar{M}_{y1}}{E\, I_y} \right) dx,$$

$$b_1 = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left[\left(\frac{\bar{N}_{x1}\, N_{xQ}}{E\, A_x} + \frac{\bar{M}_{yi}\, M_{yQ}}{E\, I_y} \right) + \alpha_T \left(\Delta T_x\, \bar{N}_{xi} + \Delta T_z\, \bar{M}_{yi} \right) \right] dx,$$

kjer sta

$$\Delta T_x = \frac{10 + 30}{2} = 20^\circ\ \mathrm{C}, \quad \Delta T_z = \frac{10 - 30}{0.10} = -200^\circ\ \mathrm{C/m}.$$

Osna sila in upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi točkovnih sil v točki C ter zaradi sile $X_1 = 1$.



M. Stanek, G. Turk in R. Flajs: Računanje notranjih sil in pomikov statično nedoločenih konstrukcij po metodi sil

Koeficienta a_{11} in b_1 izračunamo iz diagramov na prejšnji sliki

$$E\,a_{11} = \frac{1}{A_x} 3 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{I_y} \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} 3 \cdot 2 = \frac{6}{A_x} + \frac{18}{I_y} =$$

$$= \frac{6}{5 \cdot 10^{-3}} + \frac{18}{416.67 \cdot 10^{-8}} = 4321200,$$

$$E\,b_1 = -\frac{1}{I_y} \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} 6 \cdot 2 + E\,\alpha_T\,\Delta T_x \cdot (-3) \cdot 2 + E\,\alpha_T\,\Delta T_z \cdot \left(-\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 2 \right) =$$

$$= -\frac{36}{416.67 \cdot 10^{-8}} + 2 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot (-6) +$$

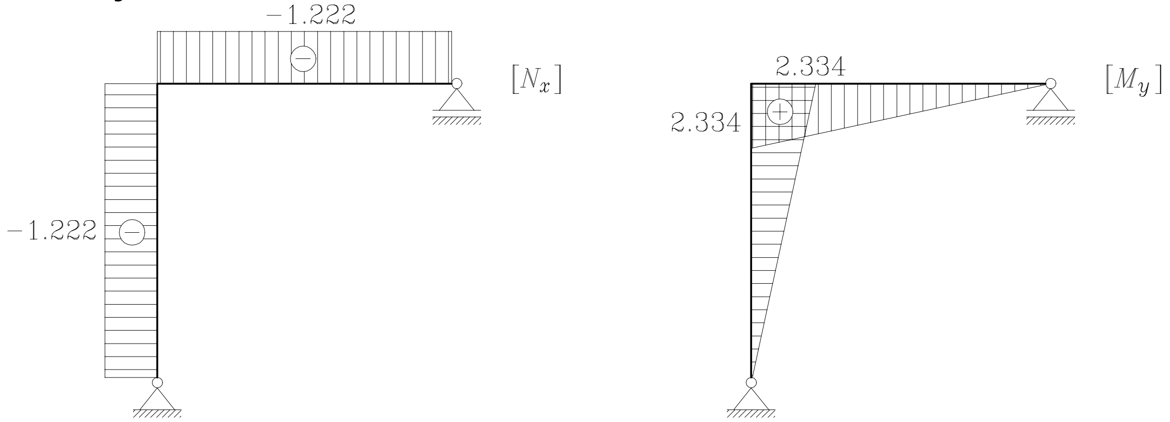
$$+ 2 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot (-200) \cdot (-9) =$$

$$= -5280000.$$

Sila X_1 je

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = 1.222 \text{ kN}.$$

Diagram osnih sil in upogibnih momentov določenih s superpozicijo, prikazujemo na sliki

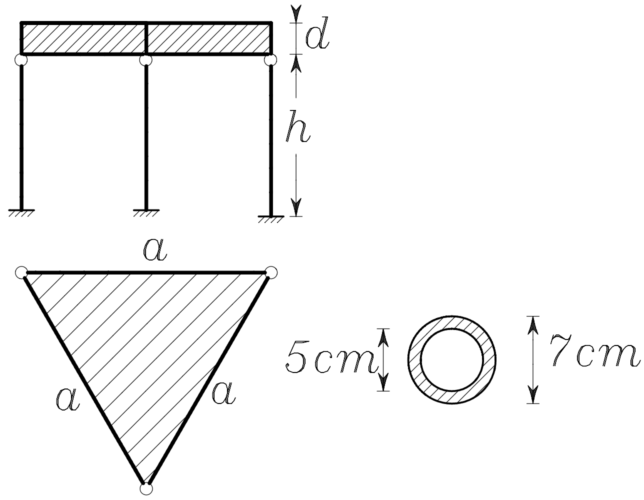


Primer

1. Naloga

Debela betonska plošča je podprta s tremi stebri, kot prikazuje slika. Kako visoki so lahko stebri (h), da bo zagotovljena varnost $v = 2.5$?

Podatki: $E = 21000\,\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $a = 4$ m, $d = 30$ cm, $\gamma_b = 25\,\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$



Izračunamo težo plošče:

Izračunamo osno silo v enem stebru.

Vztrajnostni momenti stebra:

Eulerjeva kritična osna sila pri kateri se steber ukloni.

Uklonska varnost stebra