

1. VAJA IZ TRDNOSTI

(linearna algebra - ponovitev, Kroneckerjev δ_{ij})

NALOGA 1: Podana sta vektorja: $\mathbf{a} = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z$ in $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 1\mathbf{e}_z$. Izračunaj

- produkt vektorja $\mathbf{a}$ s številom $\sqrt{2}$,
- vsoto vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$,
- skalarni produkt vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$,
- vektorski produkt vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$,
- dolžini (velikosti) vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$,
- enotska vektorja v smereh vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N01.m]

- $\sqrt{2}\mathbf{a} = \sqrt{2}\mathbf{e}_x + 2\sqrt{2}\mathbf{e}_y - 3\sqrt{2}\mathbf{e}_z$,
- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 4\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z$,
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$,
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{e}_x - 8\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z$,
- $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$ in $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{14}$,
- $\mathbf{e}_a = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_y - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_z$, in $\mathbf{e}_b = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_x + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_y - \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_z$.

NALOGA 2: Podane so matrike:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

Določi

- produkt matrike A s številom 3
- transponirano matriko matrike A
- vsoto matrik A in B
- produkt matrik A in C
- sled ang. trace (vsoto diagonalnih elementov) matrike D

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N02.m]

- $3A = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 12 \\ 9 & -3 & 15 \end{bmatrix}$,

- $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$
- $A+B = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix},$
- $A \cdot C = \begin{bmatrix} -17 & -29 \\ -15 & 4 \end{bmatrix},$
- $\text{sled}(D) = \text{tr}(D) = -3.$

NALOGA 3: Zapiši $\mathbf{a} = [1, -2, 5, 1]^T$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{e}_1 = [1, 1, 1, 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [1, 2, 3, 1]^T$, $\mathbf{e}_3 = [2, -1, 1, -1]^T$ in $\mathbf{e}_4 = [0, 0, 0, 1]^T$.

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N03.m] $\mathbf{a}(e) = -6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$

NALOGA 4: Preveri, da so vektorji $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [1, 1, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_3 = [1, 1, 1, 0]^T$ in $\mathbf{e}_4 = [1, 1, 1, 1]^T$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$. Določi koordinate vektorja $\mathbf{a} = [2, -3, 1, 5]^T$ v tej bazi. Kakšne so koordinate vektorja $\mathbf{a}$ v bazi $\mathbf{f}_1 = [1, 1, -1, 1]^T$, $\mathbf{f}_2 = [1, -1, -1, 1]^T$, $\mathbf{f}_3 = [1, 1, 1, 1]^T$ in $\mathbf{f}_4 = [-1, 1, 1, 1]^T$?

Rešitev: $\mathbf{a}(e) = [5, -4, -4, 5]^T$, $\mathbf{a}(f) = [-2, 4, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}]^T$

NALOGA 5: Izračunaj determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}.$$

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N05.m] 216, 5

NALOGA 6: Določi rang matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N06.m] 4, 2

NALOGA 7: Pokaži, da za kvadratni matriki $[A]$, $[B]$ velja $([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$. Če sta matriki $[A]$, $[B]$ še obrnljivi, je matrika $[A] \cdot [B]$ obrnljiva in je $([A] \cdot [B])^{-1} = [B]^{-1} \cdot [A]^{-1}$. Dokaži tudi, da velja $([A]^T)^{-1} = ([A]^{-1})^T$! Pokaži, da inverzna operacija ohranja simetrijo (poševno simetrijo) matrike.

NALOGA 8: Za kvadratno matriko lahko definiramo sled matrike $[A]$ kot $\text{tr}([A]) = a_{11} + \dots + a_{nn}$. Pokaži, da je sled linearen operator. Pokaži, da je $\text{tr}([A] \cdot [B]) = \text{tr}([B] \cdot [A])$. Če je $[Q]$ obrnljiva, pokaži, da je $\text{tr}([Q]^{-1} \cdot [A] \cdot [Q]) = \text{tr}([A])$. Če je $[A]$ simetrična $[B]$ pa poševno simetrična matrika, potem je $\text{tr}([A] \cdot [B]) = 0$.

NALOGA 9: Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 1 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 4 = 0.$$

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N09.m] $x = [1, 2, 1, 1]^T$

NALOGA 10: Poišči splošno rešitev sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N10.m]

$$x = [0, 0, 6, -7]^T + \alpha_1 [1, 0, -15, 18]^T + \alpha_2 [0, 1, 10, -12]^T, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

NALOGA 11: Zapiši rešitev sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

glede na parameter $a \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Pri $a = -3$ in $a = 0$ sistem ni rešljiv, pri vseh drugih vrednostih parametra a pa imamo rešitev $x = \frac{1}{a(a+3)}[2 - a^2, 2a - 1, a^3 + 2a^2 - a - 1]^T$.

NALOGA 12: Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrik

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:[Rešitev v Matlabu je na datoteki V01N12.m]

NALOGA 13: Izračunaj lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da imata matriki $[A]$ in $[A]^2$ enake lastne vektorje.

Rešitev: Lastne vrednosti so $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. Lastni vektorji so $[e_1] = [0, 0, 1]^T, [e_2] = \frac{\sqrt{2}}{2} [1, 1, 0]^T, [e_3] = \frac{\sqrt{2}}{2} [1, -1, 0]^T$.

NALOGA 14: Izračunaj:

- $\sum_i \delta_{ii},$
- $\sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij},$
- $\sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk},$
- $\sum_j \delta_{ij} \delta_{jk},$
- $\sum_i \delta_{ij} A_{ik},$

kjer sta e permutacijski simbol, δ pa Kroneckerjev delta.

Rešitev: $\sum_i \delta_{ii} = 3, \sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij} = 3, \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = 3, \sum_j \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}, \sum_i \delta_{ij} A_{ik} = A_{jk},$