

2. VAJA IZ TRDNOSTI

(tenzor napetosti)

(napetostni vektor, transformacija koordinatnega sistema, glavne normalne napetosti, strižne napetosti, ravninsko napetostno stanje, Mohrovi krogi, ravnotežne enačbe)

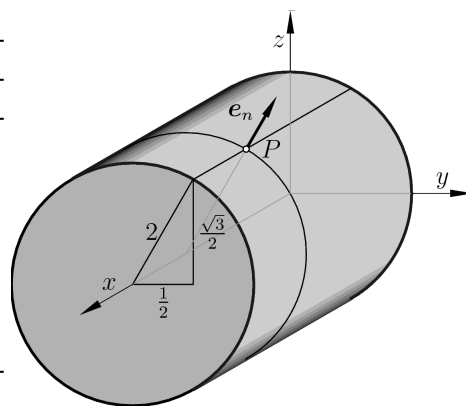
Opomba: Pri obravnavi napetostnega tenzorja ne smemo pozabiti na enote. V nalogah, kjer enote niso posebej navedene, so vse komponente napetostnih tenzorjev kot tudi vse komponente napetostnih vektorjev podane v (Pascalih) [Pa].

NALOGA 1: Trikotna streha z oglišči $A(3 \text{ m}, 0, 0)$, $B(0, 2 \text{ m}, 0)$ in $C(0, 0, 1 \text{ m})$ je obtežena s snegom itenzitete $q_S = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$, ki pada v smeri $-\mathbf{e}_z$. Izračunaj vektor specifične površinske obtežbe zaradi delovanja snega v poljubni točki strehe. Privzemi enakomerno razporeditev obtežbe po strehi.

NALOGA 2: Napetostno stanje valja je določeno s tenzorjem napetosti, ki ga v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) podaja matrika

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Skozi točko $P(2, 1, \sqrt{3})$ položimo tangentno ravnino na površino cilindra $y^2 + z^2 = 4$. Določi vektor napetosti $\sigma_n(P)$ v tej točki glede na tangentno ravnino.



Rešitev: Normala na ravnino v točki P je $\mathbf{e}_n(P) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_z$. Napetostni vektor $\sigma_n(P) = (\frac{5}{2} \mathbf{e}_x + 3 \mathbf{e}_y + \sqrt{3} \mathbf{e}_z)$ MPa.

NALOGA 3: Napetostno stanje v točki P je podano s tenzorjem napetosti

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix},$$

kjer so a , b in c realne konstante, σ pa poljubna napetost. Določi konstante a , b in c , tako da bo napetostni vektor $\sigma_n(P)$ v ravnini z normalo $\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$ skozi točko P enak 0.

Rešitev: Konstante so $a = b = c = -\frac{1}{2}$.

NALOGA 4: Za podani napetostni tenzor (komponente tenzorja so dane v kartezičnem koordinatnem sistemu)

$$[\sigma_{ij}] = \sigma \begin{bmatrix} 16 & -12 & 0 \\ -12 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

poišči normalni ravnini $\mathbf{e}_a$ in $\mathbf{e}_b$, da bosta napetostna vektorja v teh ravninah σ_a in σ_b med seboj oklepala pravi kot. Ali je rešitev več? Če je rešitev več, poišči vsaj eno.

Podatki: $\sigma = 2 \text{ MPa}$.

Rešitev: Normalni ravnini $\mathbf{e}_a$ in $\mathbf{e}_b$, v katerih napetostna vektorja σ_a in σ_b med seboj oklepata pravi kot sta $\mathbf{e}_a = \frac{1}{5}(3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y)$ in $\mathbf{e}_b = \frac{1}{5}(-4\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y)$. Rešitev je več. Za vektor $\mathbf{e}_a$ bi npr. lahko izbrali poljuben enotski vektor v ravnini $z = 0$, za vektor $\mathbf{e}_b$ pa vektor $\mathbf{e}_z$.

NALOGA 5: Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) z bazo $\{e_x, e_y, e_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$. Privzemi sledeče zveze med baznimi vektorji: $e_\xi = -e_y$, $e_\eta = e_x$ in $e_\zeta = e_z$. Fizikalno gledano, lahko novo bazo dobimo z rotacijo stare okrog osi e_z za kot -90° .

Rešitev:

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Opomba: Potek reševanja je prikazan na prosojnicah.

NALOGA 6: Določi glavne normalne napetosti in smeri glavnih normalnih napetosti za napetostni tenzor, ki je v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) podan z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix}.$$

Kakšno napetostno stanje opisuje tenzor napetosti?

Rešitev: Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 3\tau$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = 0$.

Smeri glavnih normalnih napetosti so:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_x + e_y + e_z),$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_x + e_y + e_z),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_y + e_z).$$

Tenzor napetosti opisuje enoosno napetostno stanje. Smer osi se ujema z vektorjem e_1 .

NALOGA 7: Določi glavne normalne napetosti in smeri glavnih normalnih napetosti za napetostni tenzor, ki je v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) podan z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Kakšno napetostno stanje opisuje tenzor napetosti? Fizikalno pojasni dobljeni rezultat.

Rešitev: Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 3\tau$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = 0$.

Smeri glavnih normalnih napetosti so:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_x + e_y + e_z),$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2e_x + e_y + e_z),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_y + e_z).$$

Tenzor napetosti opisuje enoosno napetostno stanje. Smer osi se ujema z vektorjem e_1 .

NALOGA 8: Pokaži, da lahko strižno napetost v oktaederski ravnini τ_o zapišemo z enačbo

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}.$$

NALOGA 9: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Določi komponente $[\sigma_{\alpha\beta}]$ tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (ξ, η, ζ) v točki P , ki je določen z baznimi vektorji

$$e_\xi = \frac{3}{5}e_x - \frac{4}{5}e_y, \quad e_\eta = \frac{4}{5}e_x + \frac{3}{5}e_y, \quad e_\zeta = e_z.$$

Fizikalno pojasni dobljene rezultate.

Rešitev:

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Potek reševanja je podan na prosojnicah.

NALOGA 10: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Določi

- a) normalno in strižno komponento, ter velikost vektorja napetosti, ki v točki P pripada ravnini z normalo

$$e_\xi = \frac{1}{2} (e_x + e_y + \sqrt{2}e_z),$$

- b) velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti,
 c) velikosti in ravnine ekstremnih strižnih napetosti ter pripadajoče normalne napetosti v teh ravninah,
 d) hidrostatični in deviatorični del tenzorja napetosti ter velikosti in smeri glavnih deviatoričnih napetosti,
 e) normalno in strižno napetost v oktaedrski ravnini skozi točko P .

Rešitev:

- a) $\sigma_\xi = (2e_x + 2e_y - \sqrt{2}e_z)$ MPa,
 $\sigma_{\xi\xi} = 1$ MPa, $\sigma_{\xi t} = 3$ MPa.
 b) $\sigma_{11} = 4$ MPa, $\sigma_{22} = 2$ MPa, $\sigma_{33} = -2$ MPa,
 $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_x + e_y)$.
 $e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_x + e_y)$.
 $e_3 = e_z$.
 c) Ekstremna strižna napetost $\tau_{\text{ext}} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) = 3$ MPa.
 Pripadajoča normalna napetost $\sigma_\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) = 1$ MPa.
 Smeri ravnin ekstremne strižne napetosti so $e_\tau = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 \pm e_3)$.

d) Hidrostatična napetost $\sigma^H = \frac{4\text{MPa}}{3}$. Hidrostatični del tenzorja napetosti:

$$[\sigma_{ij}^H] = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Deviatorični del tenzorja napetosti:

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Glavne deviatorične napetosti: $s_{11} = \frac{8}{3} \text{MPa}$, $s_{22} = \frac{2}{3} \text{MPa}$, $s_{33} = -\frac{10}{3} \text{MPa}$.

e) Normala oktaedrske ravnine $e_O = \frac{\sqrt{3}}{3}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Normalna napetost v oktaedrski ravnini $\sigma_{OO} = \sigma^H = \frac{4}{3} \text{MPa}$.

Strižna napetost v oktaedrski ravnini $\tau_O = \frac{\sqrt{56}}{3} \text{MPa} = 2.4944 \text{MPa}$.

NALOGA 11: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z) .

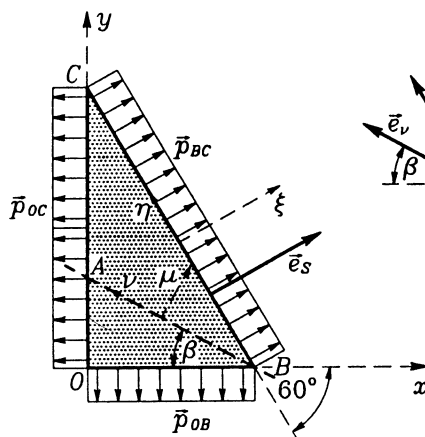
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \text{Pa}.$$

Določi velikost po absolutni vrednosti največje strižne napetosti $\tau_{\max}$ in normalo ravnine v kateri deluje.

Rešitev: Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 10 \text{Pa}$, $\sigma_{22} = 5 \text{Pa}$, $\sigma_{33} = -15 \text{Pa}$.

$\tau_{\max} = |(\sigma_{33} - \sigma_{11})/2| = 12.5 \text{Pa}$.

NALOGA 12: Na stranske ploskve tanke trikote prizme deluje samo normalna enakomerna površinska obtežba. Privzemimo, da so napetosti po celotni prostornini prizme enake. Določimo napetosti v poljubni ravnini AB , ki je glede na negativno os nagnjena za kot β . Normalna obtežba na robu BC z normalo e_ξ je $p_{BC} = -2 \text{Pa}$.

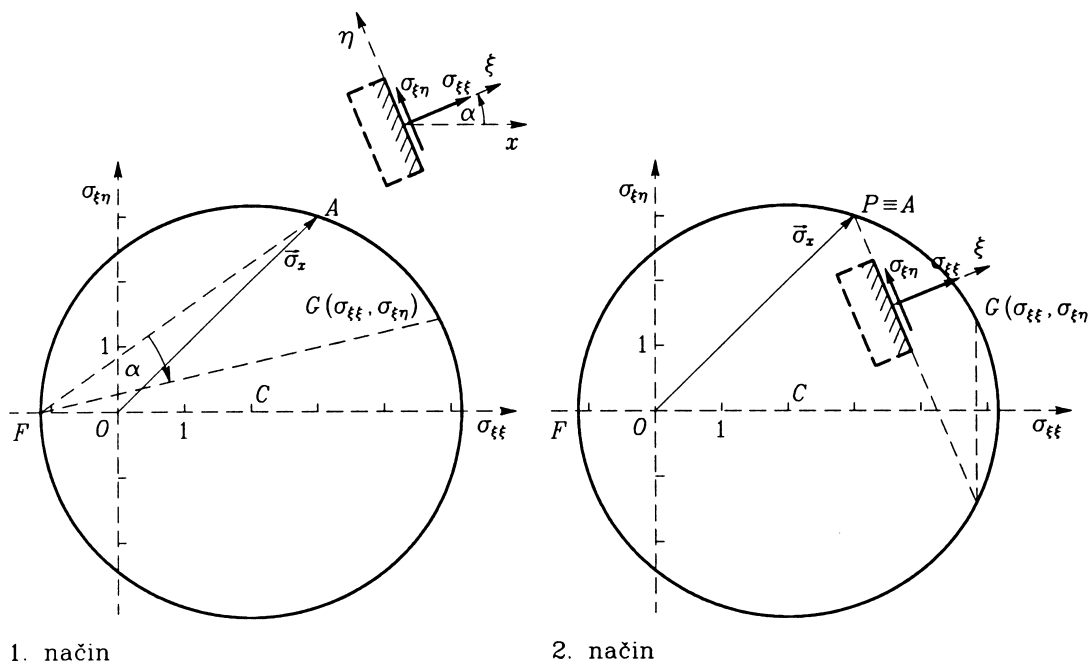


$$\begin{aligned} e_{\xi x} &= \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \\ e_{\xi y} &= \sin 30^\circ = 1/2 \\ e_{\eta x} &= -\sin 30^\circ = -1/2 \\ e_{\eta y} &= \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \\ e_{\mu x} &= \sin \beta \\ e_{\mu y} &= \cos \beta \\ e_{\nu x} &= -\cos \beta \\ e_{\nu y} &= \sin \beta \end{aligned}$$

Rešitev: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -2 \text{Pa}$, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{\mu\mu} = -2 \text{Pa}$, $\sigma_{\mu\nu} = 0$.

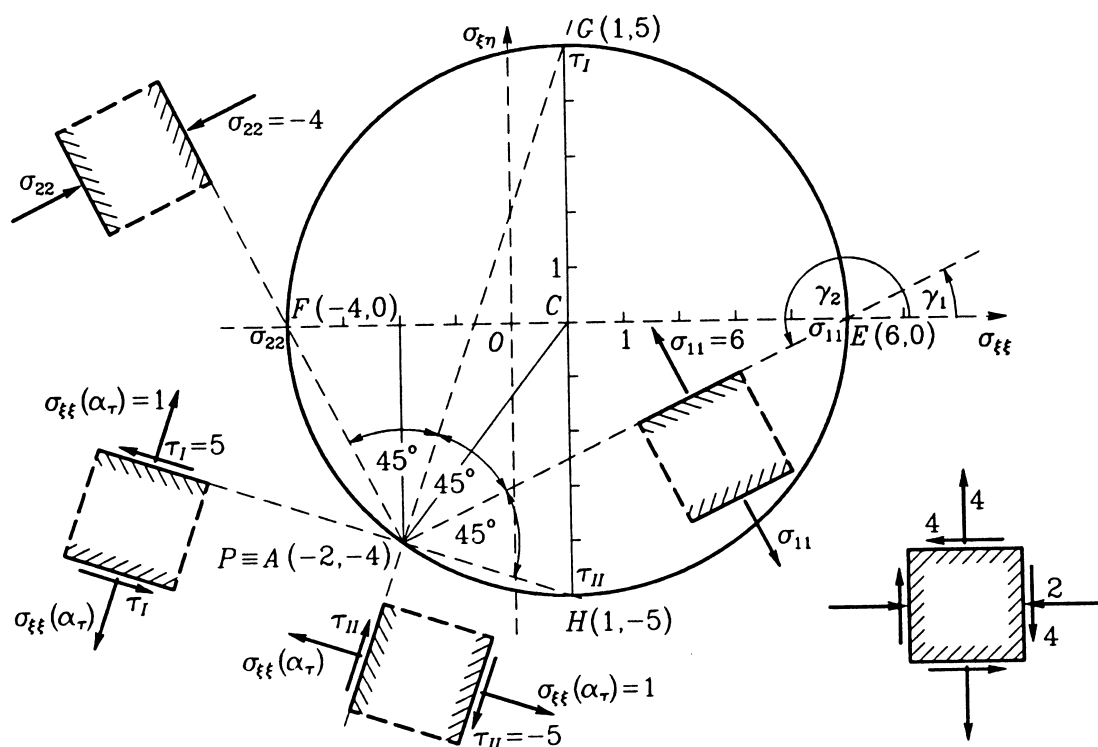
NALOGA 13: Napetostno stanje je podano s komponentami tenzorja napetosti v koordinatnem sistemu x, y : $\sigma_{xx} = 3 \text{N/cm}^2$, $\sigma_{yy} = 1 \text{N/cm}^2$, $\sigma_{xy} = 3 \text{N/cm}^2$. Določi napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ in $\sigma_{\xi\eta}$ v ravnini z normalo e_ξ , $\alpha = 22.5^\circ$ z uporabo Mohrovih krogov.

Rešitev:



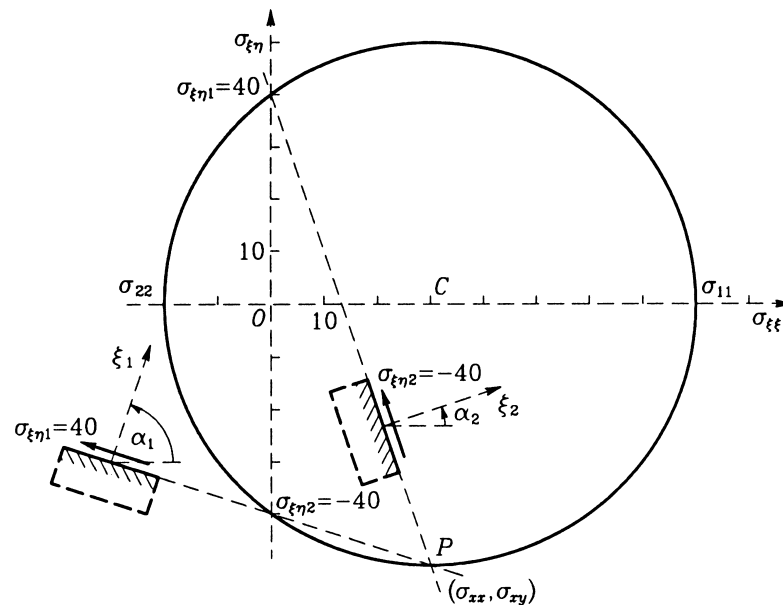
NALOGA 14: Podane so napetosti σ_{xx} , σ_{yy} in σ_{xy} ($\sigma_{xx} = -2 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_{yy} = 4 \text{ N/cm}^2$, $\sigma_{xy} = -4 \text{ N/cm}^2$). Z Mohrovo krožnico določi velikosti glavnih normalnih napetosti in pripadajoče smeri ravnin. Določi tudi največje strižne napetosti, pripadajoče normalne napetosti ter smeri ravnin za te napetosti. Rezultate prikaži na kvadratih, katerih robovi imajo smeri ravnin za iskane napetosti.

Rešitev:

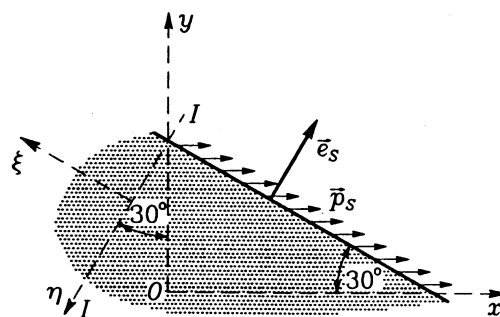


NALOGA 15: Ravnsko napetostno stanje je podano s komponentami napetostnega tenzorja $[\sigma_{ij}]$ v koordinatnem sistemu x, y : $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 30 \text{ Pa}$, $\sigma_{xy} = -50 \text{ Pa}$. Določi naklon ravnin glede na os x , v kateri delujejo le strižne napetosti $\sigma_{\xi\eta}$, normalne pa so enake nič ($\sigma_{\xi\xi} = 0$). Določi tudi vrednosti teh strižnih napetosti.

Rešitev:



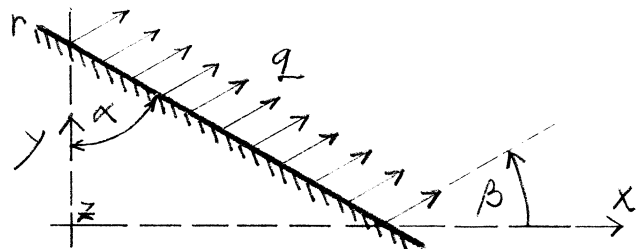
NALOGA 16: Na rob tanke stene deluje enakomerna zvezna površinska obtežba $p_s = 6 e_x$ [MPa]. V prerezu $I - I$ je normalna komponenta napetosti enaka nič. Določi strižno napetost v prerezu $I - I$. Predpostavi, da so napetosti po celotni steni konstantne.



$$\begin{aligned} e_{sx} &= \frac{1}{2} \\ e_{sy} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ e_{\xi x} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e_{\xi y} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rešitev: $\sigma_{xx} = 5.25$ MPa, $\sigma_{yy} = -2.25$ MPa, $\sigma_{xy} = 3.8971$ MPa.
Strižna napetost znaša 5.1962 MPa.

NALOGA 17: Na rob stene (RNS) deluje enakomerna zvezna obtežba q kot kaže skica. Določi komponente tenzorja v koordinatnem sistemu (x, y, z) tako, da bosta glavni normalni napetosti nasprotno enaki med seboj ($\sigma_{11} = -\sigma_{22}$)! Določi ravnini obeh glavnih normalnih napetosti. Podatki: $q = 10$ MPa, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



Rešitev: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ MPa, $\sigma_{xy} = q = 10$ MPa.
Normali glavnih ravnin oklepata kota $\alpha_{g1} = 45^\circ$ in $\alpha_{g2} = 135^\circ$ z osjo x .

NALOGA 18: Iz okolice točke P izrežemo infinitezimalno majhen trapez, prikazan na spodnji sliki. Slika prikazuje potek napetosti na stranskih ploskvah (nevrtsane napetosti so enake 0). Iz meritev poznamo vrednost normalne napetosti σ_{xx} . Določi vrednosti preostalih neznanih napetosti na sliki.

