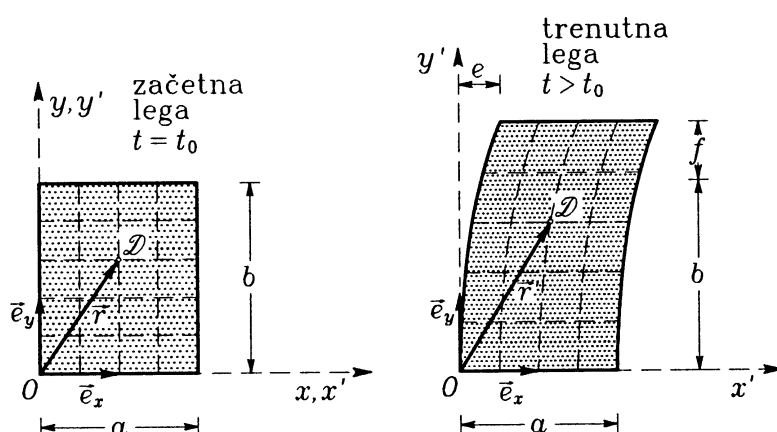


3. VAJA IZ TRDNOSTI

(tenzor deformacij)

(pomiki togega telesa, Lagrangev in Eulerjev opis, tenzor velikih deformacij, tenzor majhnih deformacij in rotacij, kompatibilitetni pogoji)

NALOGA 1: Gumijasti kvader dimenzij $a \times b \times c$ v začetni nedeformirani legi se deformira kot prikazuje slika. Določi pomik v referenčnem in prostorskem opisu. Zapiši materialne bazne vektorje e'_x , e'_y in e'_z za ta primer. Pokaži, da vektor e'_y leži na tangenti na materialno os in ni nujno enotski.

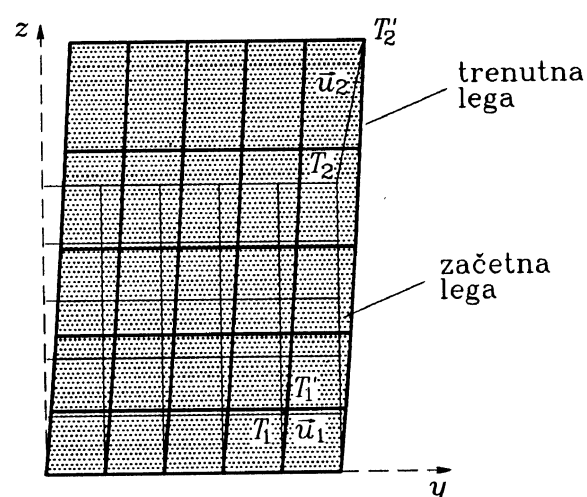


Rešitev: Pomik v referenčnem opisu: $\mathbf{u} = \frac{e}{b^2} y^2 \mathbf{e}_x + \frac{f}{b} y \mathbf{e}_y$.

Pomik v prostorskem opisu: $\mathbf{u} = \frac{e y'}{(b+f)^2} \mathbf{e}_x + \frac{f y'}{f+b} \mathbf{e}_y$.

Bazni vektorji: $\mathbf{e}'_x = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}'_y = \frac{2y}{b^2} \mathbf{e}_x + \left(1 + \frac{f}{b}\right) \mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z$.

NALOGA 2: Deformiranje telesa je podano s poljem pomikov v materialnem koordinatnem sistemu $\mathbf{u} = 10^{-3} ((xy - 3) \mathbf{e}_x + (2x^2 + z) \mathbf{e}_y + z^2 \mathbf{e}_z)$ [cm]. Telo v nedeformiranem stanju zaseda trirazsežno območje $(x, y, z) \in [0, 1] \times [0, 5] \times [0, 5]$. Analiziraj deformiranje telesa v ravnini $x = 0$. Določi spremembo razdalje med delcema D_1 in D_2 , ki sta se pred deformiranjem nahajala v točkah $\mathbf{r}_1 = 4 \mathbf{e}_y + 1 \mathbf{e}_z$ [cm] in $\mathbf{r}_2 = 5 \mathbf{e}_y + 5 \mathbf{e}_z$ [cm]. Določi tudi specifično spremembo dolžin vlaken v smeri $T_1 T_2$.



Rešitev: Specifična sprememba dožine daljice $\overline{T_1 T_2}$ je $\overline{D_{TT}} = \overline{\varepsilon_{TT}} = \frac{\Delta \overline{T_1 T_2}}{\overline{T_1 T_2}} = 0.005881$.

Količina $\overline{D_{TT}}$ predstavlja **povprečno** normalno deformacijo $\overline{\varepsilon_{TT}}$ vlaken v smeri $T_1 T_2$ med točkama T_1 in T_2 .

Normalna komponenta deformacije ε_{TT} v smeri $\mathbf{e}_T = \frac{T_1 T_2}{\overline{T_1 T_2}}$ v točki T_1 je $\varepsilon_{TT}(T_1) = 0.00211$.

Normalna komponenta deformacije ε_{TT} v smeri e_T v točki T_3 , ki se nahaja na sredini med točkama T_1 in T_2 je $\varepsilon_{TT}(T_3) = 0.005882$.

NALOGA 3: Pomik tanke stene stranico $b = 1$ m debeline $d = 1$ cm je podan z vektorjema

$$(a) \quad \vec{u}(x, y, z) = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y = ay \vec{e}_x + ax \vec{e}_y \implies u_x = ay, u_y = ax,$$

$$(b) \quad \vec{u}(x, y, z) = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y = -ay \vec{e}_x + ax \vec{e}_y \implies u_x = -ay, u_y = ax.$$

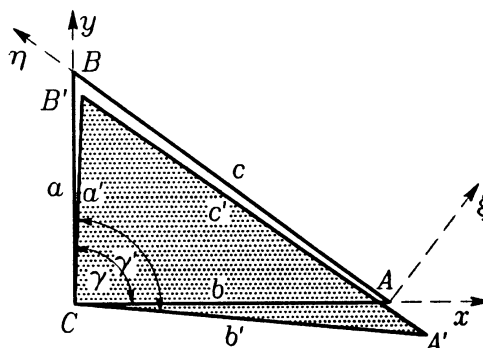
Določi:

- Komponente tenzorja majhnih deformacij ε_{ij} , komponente tenzorja rotacij ω_{ij} v kartezičnem koordinatnem sistemu in vektor zasuka ω .
- Specifične spremembe dolžin daljic AB , AC , AD in BC in spremembi pravih kotov CAB in CED .
- Glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri.

Podatki: $a = 10^{-4}$, $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,0)$ in $E(0.5,0.5,0)$. Vse razdalje so v metrih.

Rešitev: Glej prosojnice.

NALOGA 4: Obravnavamo ploščo trikotne oblike s stranicami $a = 3$ m, $b = 4$ m in $c = 5$ m. Plošča se zaradi delovanja zunanje obtežbe deformira. Spremembe dolžin stranic trikotnika so $\Delta a = -0.012$ m, $\Delta b = 0.015$ m in $\Delta c = 0.0088$ m. Določi spremembo pravega kota med stranicama a in b .



Trikotna plošča pred in po deformiranju

Rešitev: Točno: $\Delta\gamma = \gamma' - \gamma = 90.09482^\circ - 90^\circ = 0.09482^\circ = 0.001655$ rad.

Približno: Iz ε_{xx} , ε_{yy} , $\varepsilon_{\eta\eta}$ izračunamo ε_{xy} . $\Delta\gamma \approx 2\varepsilon_{xy} = -0.001667$ rad.

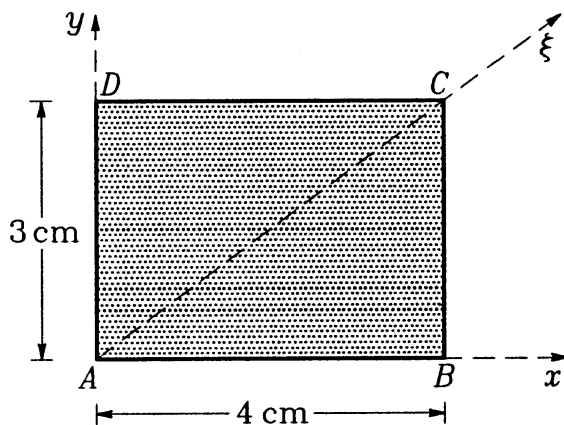
NALOGA 5: Predpostavi, da so deformacije po pravokotni plošči konstantne po prostornini plošče. Deformacijski tenzor je

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Privzemi, da sta pomik in zasuk v točki A enaka nič. Določi spremembo dolžine diagonale pravokotne plošče na dva načina:

- (1) izračunaj pomik v točki C in določi deformirano dolžino diagonale.

(2) določi deformacijo $\varepsilon_{\xi\xi}$ v smeri diagonale in iz nje izračunaj spremembo dolžine diagonale.



Dimenziji a in b pravokotne plošče ter lega točke C

Rešitev: Pri izračunu pomika lahko uporabimo rezultat naloge 7. Dobimo $\vec{u}_C = 10^{-2} (\vec{e}_x + 1.7\vec{e}_y)$ [cm]. Od tu izračunamo $\Delta d = d - d_0 = 5.018206 - 5 = 0.018206$ cm, kjer smo z d označili dolžino diagonale v deformirani legi z d_0 pa dolžino diagonale v začetni nedeformirani legi.

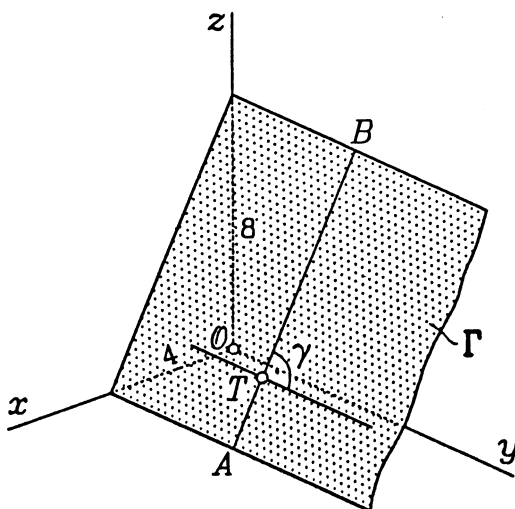
Upoštevamo enačbi $\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx} e_{\xi x}^2 + \varepsilon_{yy} e_{\xi y}^2 + 2\varepsilon_{xy} e_{\xi x} e_{\xi y} = 3.64 \cdot 10^{-4}$ in $\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\Delta d}{d_0}$ in dobimo $\Delta d = 0.018200$ cm.

NALOGA 6: Deformiranje telesa je opisano z vektorskim poljem pomikov

$$\vec{u} = 10^{-4} ((5x^2 - 6z)\vec{e}_x + 2y^2 z\vec{e}_y + (x^2 - 3y^2 z)\vec{e}_z).$$

V točki $T(x, 4, 2)$, ki leži v ravnini Γ določi:

- specifično spremembo dolžine normale na ravnino Γ ,
- specifično spremembo pravega kota γ ,
- rezultirajoči vektor zasuka $\vec{\omega}$, vrednosti $\vec{\omega}_n$ in $\vec{\omega}_t$ tenzorja zasukov ter povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale na ravnino Γ ,
- ugotovi ali v kakšni točki na črti $\overline{AB}$ vlada izohrono defomacijsko stanje (to pomeni, da je specifična sprememba prostornine v kakšni točki enaka 0).



Rešitev:

- a) specifična sprememba dolžine normale na ravnino Γ je $D_{nn} \approx \varepsilon_{nn} = \frac{72}{5} \cdot 10^{-4}$,
- b) specifična sprememba pravega kota γ je $\Delta\gamma = D_{\gamma t} \approx 2\varepsilon_{\gamma t} = -\frac{32}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$,
- c) rezultirajoči vektor zasuka $\vec{\omega} = 10^{-4} (-40\vec{e}_x - 6\vec{e}_y)$,
 $\vec{\omega}_n = \vec{\omega} \times \vec{e}_n = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} (-6\vec{e}_x + 40\vec{e}_y + 12\vec{e}_z)$,
 $\vec{\omega}_t = \vec{\omega} \times \vec{e}_t = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}} (-12\vec{e}_x + 80\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)$,
 povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale na ravnino Γ je $\omega_n = \frac{-80}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$,
- d) v točki $T\left(\frac{40}{11}, 4, \frac{8}{11}\right)$ na črti $\overline{AB}$ vlada izohrono defomacijsko stanje.

NALOGA 7: Polje pomikov je podano z enačbo

$$\vec{u} = 10^{-4} ((x-z)^2 \vec{e}_x + (y+z)^2 \vec{e}_y - xy \vec{e}_z).$$

V točki $P(0, 2, -1)$ določi:

- a) tenzor majhnih deformacij,
- b) tenzor majhnih zasukov,
- c) vektor zasuka $\vec{\omega}$.
- d) specifično spremembo dolžine v smeri $\vec{e}_\xi = \frac{1}{9} (8\vec{e}_x - \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$
- e) spremembo pravega kota med vektorjema $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\eta = \frac{1}{9} (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 7\vec{e}_z)$.

Rešitev:

- a) tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

- b) tenzor majhnih zasukov

$$[\omega_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

- c) vektor zasuka $\vec{\omega} = -10^{-4} \vec{e}_x$.

- d) specifična sprememba dolžine v smeri $\vec{e}_\xi = \frac{1}{9} (8\vec{e}_x - \vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$ je $D_{\xi\xi} \approx \varepsilon_{\xi\xi} = \frac{-6}{81} \cdot 10^{-4}$.

- e) sprememba pravega kota med vektorjema $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\eta = \frac{1}{9} (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 7\vec{e}_z)$ znaša $D_{\xi\eta} \approx 2\varepsilon_{\xi\eta} = 10^{-4} \cdot \frac{318}{81}$

NALOGA 8: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\vec{u} = 10^{-4} ((4x - y + 3z) \vec{e}_x + (x + 7y) \vec{e}_y + (-3x + 4y + 4z) \vec{e}_z).$$

Določi:

- a) specifično spremembo volumna,
- b) tenzor majhnih deformacij,
- c) glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri,
- d) ekstremne strižne deformacije in pripadajoče smeri,
- e) deviatorični del tenzorja majhnih deformacij,
- f) Rezultate prikaži z Mohrovimi krogi.

Rešitev:

- a) specifična sprememba volumna $\varepsilon_V = 10^{-4} (4 + 7 + 4)$,
- b) tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

- c) glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri so
 $\varepsilon_{11} = 8 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{22} = 4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{33} = 3 \cdot 10^{-4}$,
 $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$,
 $\vec{e}_2 = \vec{e}_x$,
 $\vec{e}_3 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} (\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)$.
- d) ekstremna strižna deformacija in pripadajoče smeri so
 $\gamma_2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) = -\frac{5}{2} \cdot 10^{-4}$, $\vec{e}_{II} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_3 \pm \vec{e}_1)$.
- e) deviatorični del tenzorja majhnih deformacij

$$[e_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

NALOGA 9: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\vec{u} = (-cy + bz)\vec{e}_x + (cx - az)\vec{e}_y + (-bx + ay)\vec{e}_z,$$

kjer so a, b in c zelo majhne konstante.

Pokaži, da vektor pomikov opisuje rotacijo telesa. Poišči tudi vektor rotacije $\vec{\omega}_0$.

Rešitev: Vektor rotacije $\vec{\omega}_0 = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$

NALOGA 10: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\vec{u} = \frac{2 \cdot 10^{-3} y}{\sqrt{3}} \vec{e}_z.$$

Poišči normalo ravnine, v kateri ni normalnih deformacij.

Rešitev: Normali ravnin, v kateri ni normalnih deformacij sta $\vec{e}_n = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ in $\vec{e}_n = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_z$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

NALOGA 11: V kartezijskem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z je podan kvader z oglišči $A(0,0,0), B(a,0,0), C(0,b,0), D(a,b,0), E(0,0,c), G(a,0,c), F(0,b,c), H(a,b,c)$. Velja $a : b : c = 2 : 3 : 5$. Pri deformaciji ostanejo dolžine stranic $\overline{AB}, \overline{AC}$ in $\overline{AE}$ nespremenjene, pravi kot BAC se poveča na $90^\circ 00' 03''$, pravi kot CAE se zmanjša na $89^\circ 59' 54''$, pravi kot EAB pa preide na $89^\circ 59' 56''$.

Določi specifično spremembo dolžine diagonale $\overline{AH}$.

Rešitev: Specifična sprememba dolžine diagonale $\varepsilon_{\xi\xi} = 0.143 \cdot 10^{-4}$.