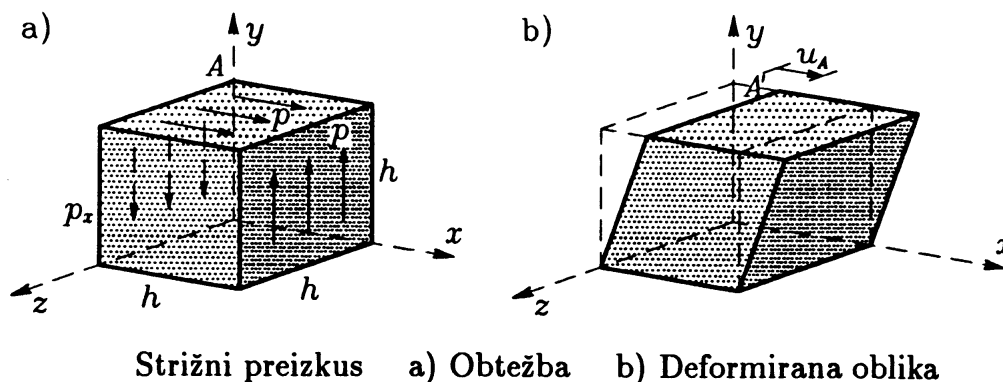


4. VAJA IZ TRDNOSTI

(linearizirana elastičnost, plastično tečenje)

NALOGA 1: Eden izmed preizkusov za določanje mehanskih lastnosti materialov je **strižni preizkus**, s katerim določimo strižni modul G . Vzorec v obliki kocke podpremo in obremenimo tako, da je od nič različna le ena od strižnih deformacij (na primer ε_{xy}). Drugi dve strižni deformaciji in vse normalne komponente tenzorja deformacij v koordinatnem sistemu x, y, z so enake nič. Shemo preizkusa prikazujemo na sliki. Pri strižnem preizkusu običajno obtežimo samo vodoravni ploskvi, navpičnih pa ne. Pri taki obtežbi pride do neenakomerne porazdelitve napetosti po preizkušancu, zato v tem računskem primeru predpostavimo še obtežbo v dveh navpičnih ploskvah. Spodnja ploskev kocke je nepomično podprta s togo podlago. Zgornjo ploskev in dve stranski ploskvi kocke obremenimo z enakomerno porazdeljeno obtežbo p . Merimo velikost pomika u_A na vrhu kvadra. Preizkusi kažejo, da deformirana oblika kvadra približno ustreza paralelepipedu, prikazanem na sliki.



Določi strižni modul G v primerih.

- Opravimo eno meritev in dobimo
 $h = 0.1 \text{ m}$, $u_A = 0.0006 \text{ m}$, $p = 500 \text{ MPa}$.
- Opravimo več meritev in dobimo
 $h_1 = 0.10 \text{ m}$, $u_{A1} = 0.00060 \text{ m}$, $p_1 = 500 \text{ MPa}$,
 $h_2 = 0.10 \text{ m}$, $u_{A2} = 0.00050 \text{ m}$, $p_2 = 400 \text{ MPa}$,
 $h_3 = 0.15 \text{ m}$, $u_{A3} = 0.00085 \text{ m}$, $p_3 = 500 \text{ MPa}$,
 $h_4 = 0.15 \text{ m}$, $u_{A4} = 0.00080 \text{ m}$, $p_4 = 450 \text{ MPa}$.

Rešitev:

a) $G = 83\,333 \text{ MPa}$.

b) $G = \bar{G} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 G_i = 83\,986 \text{ MPa}$.

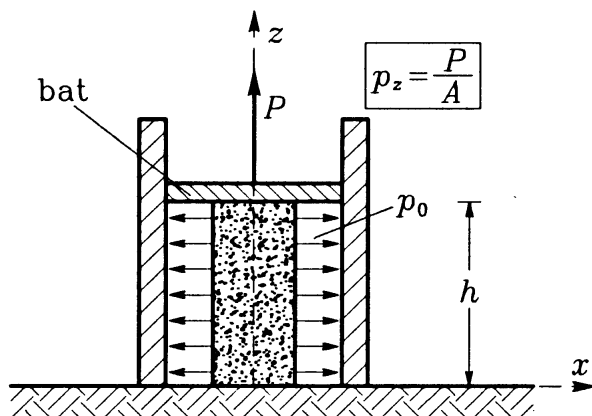
Rešitev, dobljena po metodi najmanjših kvadratov, se ujema s povprečno vrednostjo.

NALOGA 2: S **triosnim preizkusom** lahko hkrati določimo vrednosti elastičnega modula in Poissonovega količnika materiala. Pri triosnem preizkusu vzpostavimo tako napetostno stanje, kjer sta v dveh smereh normalni napetosti enaki, normalna napetost v tretji smeri pa je različna. Pri

izbranem napetostnem stanju lahko merimo spremembo dolžine v smeri z in spremembo prostornine ΔV . Vzorec ima prečni prerez s ploščino A in višino h . Napetostno stanje določata obtežbi p_z in p_o (slika). Predpostavimo, da je napetostno stanje približno konstantno po celotni prostornini vzorca.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p_o, \quad \sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Ob predpostavki, da so strižne napetosti enake nič, smo privzeli, da je trenje med vzorcem in podlago ter vzorcem in batom zanemarljivo majhno. Pri preizkusih je pogosto težko zagotoviti majhno trenje, v teh primerih se moramo zavedati, da so gornje enačbe le približek dejanskega stanja.



Triosni preizkus

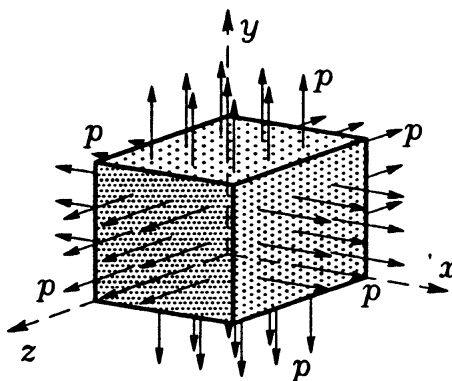
Določi elastični modul E in Poissonov količnik ν v sledečih primerih.

- Opravimo eno meritev in dobimo
 $p_z = -20 \text{ kN/cm}^2$, $p_o = -10 \text{ kN/cm}^2$, $\epsilon_{zz} = -0.00073$, $\epsilon_V = -0.00092$.
- Opravimo več meritev in dobimo
 $p_{z1} = -5 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o1} = -2.5 \text{ kN/cm}^2$, $\epsilon_{zz,1} = -0.000170$, $\epsilon_{V1} = -0.00028$,
 $p_{z2} = -10 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o2} = -5.0 \text{ kN/cm}^2$, $\epsilon_{zz,2} = -0.000375$, $\epsilon_{V2} = -0.00060$,
 $p_{z3} = -15 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o3} = -7.5 \text{ kN/cm}^2$, $\epsilon_{zz,3} = -0.000600$, $\epsilon_{V3} = -0.00080$,
 $p_{z4} = -20 \text{ kN/cm}^2$, $p_{o4} = -10.0 \text{ kN/cm}^2$, $\epsilon_{zz,4} = -0.000730$, $\epsilon_{V4} = -0.00092$.

Rešitev:

- $E = 200\,000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.27$.
- $E = 197\,910 \text{ MPa}$, $\nu = 0.251$ (rešitev, dobljena po metodi najmanjših kvadratov).
 $\bar{E} = 214\,930 \text{ MPa}$, $\bar{\nu} = 0.209$ (povprečni vrednosti).
Bolj natančna je prva rešitev, dobljena po metodi najmanjših kvadratov.

NALOGA 3: S **hidrostatičnim preizkusom** lahko določimo vrednost kompresijskega modula K . Telo v obliki kocke obtežimo s hidrostatičnim pritiskom (slika). Napetostno stanje v delcu telesa je hidrostatični pritisk, če so normalne komponente napetostnega tenzorja medsebojno enake, strižne komponente pa so enake nič:



Hidrostatični preizkus

Določi kompresijski modul K in v sledečih primerih.

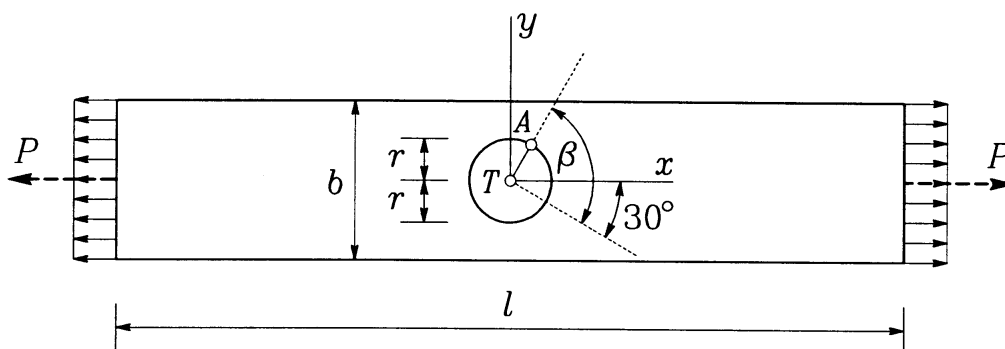
- Opravimo eno meritev in dobimo
 $p = -20 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00092$.
- Opravimo več meritev in dobimo
 $p = -5 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00023$,
 $p = -10 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00048$,
 $p = -15 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00070$,
 $p = -20 \text{ MPa}$, $\varepsilon_V = -0.00092$,

Rešitev:

- $K = \frac{p}{\varepsilon_V} = 21739 \text{ MPa}$,
- $K = \bar{K} = 21435 \text{ MPa}$ (povprečna vrednost).

NALOGA 4: V sredini ravnega kovinskega traku z dolžino $l = 100 \text{ cm}$, širino $b = 10 \text{ cm}$ in debelino $d = 1 \text{ mm}$ narišemo krog s polmerom $r = 2 \text{ cm}$. Ožja konca traku enakomerno obtežimo s silo $P = 42 \text{ kN}$. Pri tem se dolžina traku poveča za 2 mm , širina pa se zmanjša za 0.06 mm . Narisani krog se spremeni v pravilno elipso. Določi:

- elastični modul E in koeficient prečne kontrakcije v uporabljene kovine ter spremembo debeline traku,
- velikosti polosi dobljene elipse,
- spremembo pravega kota
- č) novo dolžino polmera $\overline{TA}$.

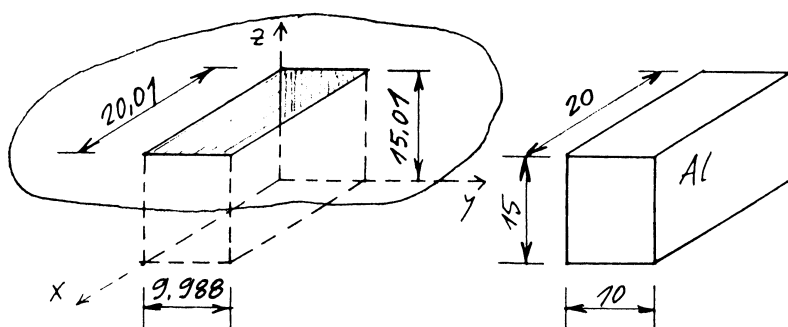


Rešitev:

- a) elastični modul $E = 21\,000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, koeficient prečne kontrakcije $\nu = 0.3$, sprememba debeline traku $\Delta d = -6 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$.
- b) velikosti polosi dobljene elipse sta $a' = 2.0040 \text{ cm}$ in $b' = 1.9988 \text{ cm}$.
- c) sprememba pravega kota $\Delta\beta = 0.13^\circ$.
- č) nova dolžina polmera $\overline{TA}' = 2.0001 \text{ cm}$.

NALOGA 5: V absolutno togi podlagi je narejena pravokotna prizmatična luknja dimenzij $20.01 \text{ cm} \times 9.988 \text{ cm} \times 15.01 \text{ cm}$. V luknjo želimo vstaviti pravokoten aluminijast kvader dimenzij $20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$.

- a) Za koliko moramo spremeniti temperaturo kvadra, da ga lahko vstavimo v odprtino? Kolikšne so tedaj dimenzije kvadra?
- b) Določi napetosti v kvadru in njegove dimenzije, ko se njegova temperatura spet izenači s temperaturo okolice!
- c) Za koliko moramo sedaj spremeniti temperaturo kvadra, da v tlorisnem pogledu popolnoma zapolni odprtino? Kolikšne so tedaj napetosti v kvadru in njegova višina?



$$E = 7200 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.34$$

$$\alpha_T = 2.4 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

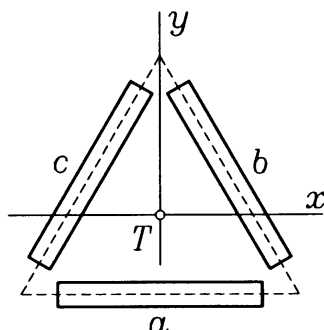
Rešitev:

- a) Temperaturo kvadra moramo spremeniti za $\Delta T^a = -50 \text{ K}$.
Nove dimenzije kvadra so $l_x^a = 19.976 \text{ cm}$, $l_z^a = 14.982 \text{ cm}$.
- b) Napetosti v kvadru so $\sigma_{xx}^b = \sigma_{zz}^b = 0$, $\sigma_{yy}^b = -8.64 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.
Njegove dimenzije so $l_x^b = 20.008 \text{ cm}$, $l_z^b = 15.006 \text{ cm}$.
- c) Sedaj moramo spremeniti temperaturo kvadra za $\Delta T^c = 2.9 \text{ K}$.
Napetosti v kvadru so $\sigma_{xx}^c = \sigma_{zz}^c = 0$, $\sigma_{yy}^c = -9.14 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.
Njegova višina znaša $l_z^c = 15.007 \text{ cm}$.

NALOGA 6: Na enakostranični Δ -rozeti, sestavljeni iz treh enakih merilnih lističev (strain gauge), so bile v točki T na površini tanke stojine jeklenega polnostenskega nosilca izmerjene specifične spremembe dolžin v treh smereh kot kaže slika. V smeri pravokotno na svojo ravnino stojina ni obtežena ali podprta in ostane ravna tudi pa deformaciji.

- a) Določi komponente tenzorja majhnih deformacij v točki T glede na koordinatni sistem (x, y, z) .
Za koliko se spremeni začetna debelina stojine $\delta = 8 \text{ mm}$ v točki T ?

b) Določi ravnine in velikosti glavnih normalnih in glavnih strižnih napetosti.



$$\varepsilon_a = 2.0 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_b = 1.5 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_c = 1.0 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta = 0.8 \text{ cm}$$

$$E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.3.$$

Rešitev:

a) Tenzor majhnih deformacij v točki T glede na koordinatni sistem (x, y, z) je enak

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -0.2887 & 0 \\ -0.2887 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2857 \end{bmatrix}.$$

Začetna debelina stojine se spremeni za $\Delta\delta = -1.0286 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$.

Tenzor napetosti v točki T je enak

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5.308 & -0.466 & 0 \\ -0.466 & 3.692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 5.432 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{22} = 3.567 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{33} = \sigma_{zz} = 0$.

Smeri glavnih normalnih napetosti so:

$$e_1 = 0.966 e_x - 0.259 e_y, e_2 = 0.259 e_x + 0.966 e_y, e_3 = e_z.$$

Glavni strižni napetosti sta $\tau_{III} = 0.933 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ in $\tau'_{III} = -0.933 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ v ravnini (x, y) . Pripadajoči

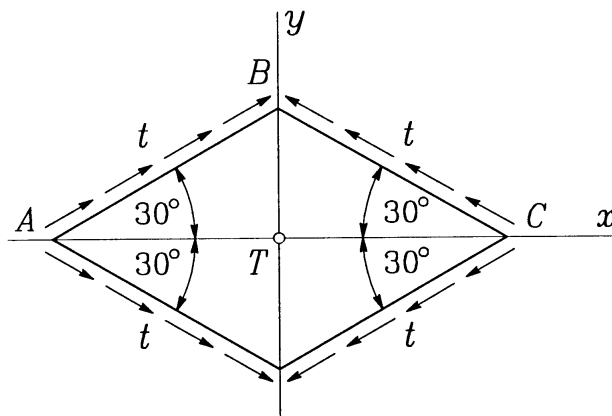
$$\text{smeri sta } e_I = \frac{\sqrt{3}}{2} e_x + \frac{1}{2} e_y \text{ in } t_I = \frac{1}{2} e_x - \frac{\sqrt{3}}{2} e_y.$$

NALOGA 7: Na robove tanke stene, v kateri vlada homogeno ravninsko napetostno stanje ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$), deluje le enakomerna tangencialna zvezna obtežba kot kaže slika.

a) Dokaži, da v simetrijskih ravninah $x = 0$ in $y = 0$ ni strižnih napetosti.

b) Določi komponente tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij v bazi e_x, e_y, e_z .

c) Določi specifično spremembo dolžine robu AB .



$$E_j = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$t = 50\sqrt{3} \text{ MPa}$$

Rešitev:

a) Pokažemo, da je $\sigma_{xy} = 0$.

b) Tenzor napetosti je

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -150 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}].$$

Tenzor majhnih deformacij

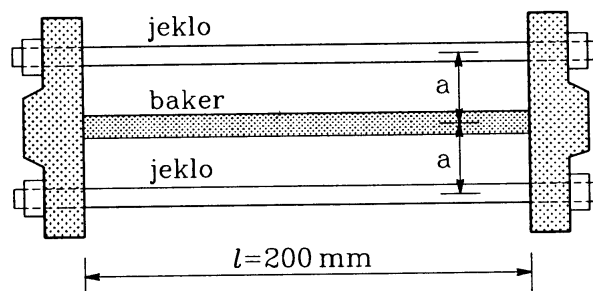
$$[\epsilon_{ij}] = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} -78.57 & 0 & 0 \\ 0 & 45.24 & 0 \\ 0 & 0 & 14.29 \end{bmatrix}.$$

c) Specifična sprememba dolžine robu AB je $-47.62 \cdot 10^{-5}$.

NALOGA 8: Med dva toga odlitka, ki sta spojena z dvema jeklenima vijakoma premera 10 mm in dolžine 200 mm, moramo vstaviti bakreno palico s prečnim prerezom $A = 600 \text{ mm}^2$ in dolžino 200.2 mm.

a) Za koliko moramo ohladiti bakreno palico, da jo je mogoče vstaviti med odlitka? (Temperatura jeklenih vijakov se pri tem ne spremeni.)

b) Določi razdaljo med odlitkoma ter napetosti v jeklenih vijakih in bakrenem vložku, ko se temperatura bakrene palice spet izenači s temperaturo okolja in jeklenih vijakov!



$$E_j = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\alpha_j = 1.2 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

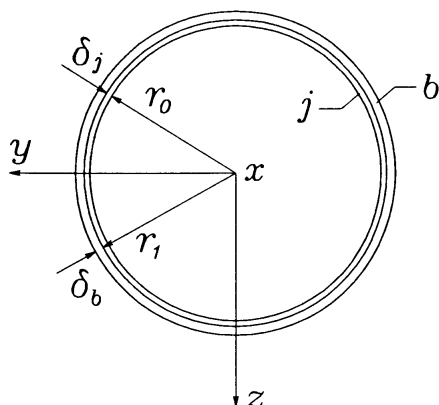
$$E_b = 1.0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\alpha_b = 1.7 \cdot 10^{-5} / \text{K}$$

Rešitev:

- a) Bakreno palico moramo ohladiti za $\Delta T_b = -58.8 \text{ K}$.
- b) Razdalja med odlitkoma znaša 200.129 mm .
 Napetosti v jeklenih vijakih sta $\sigma_j = 135.37 \text{ MPa}$.
 Napetost v bakrenem vložku znaša $\sigma_b = -35.46 \text{ MPa}$.

NALOGA 9: Podvodni cevovod je sestavljen iz jeklene notranje in varovalne bakrene zunanje cevi, ki se tesno, vendar brez napetosti prilegata med seboj (skica). Konstrukcijska izvedba cevovoda je takšna, da so vzdolžne normalne napetosti v pravokotnem prečnem prerezu cevi zanemarljivo majhne.

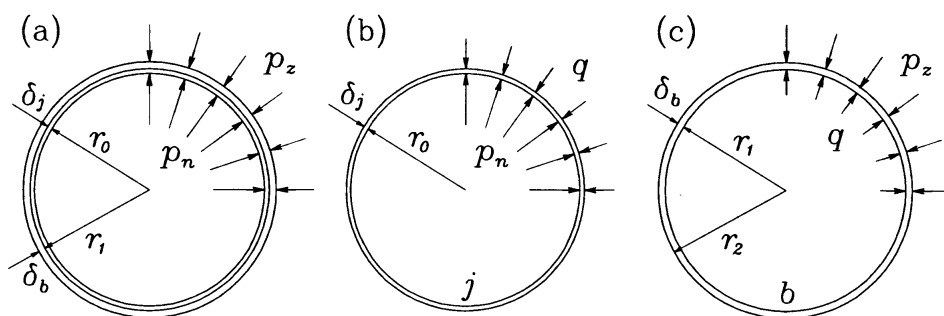


$$\begin{aligned} r_0 &= 50 \text{ cm} \\ \delta_j &= 1 \text{ cm} \\ \delta_b &= 1.5 \text{ cm} \\ E_j &= 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ \nu_j &= 0.30 \\ E_b &= 1 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ \nu_b &= 0.34 \end{aligned}$$

Določi normalne napetosti v tangencialni smeri v obeh ceveh v naslednjih primerih:

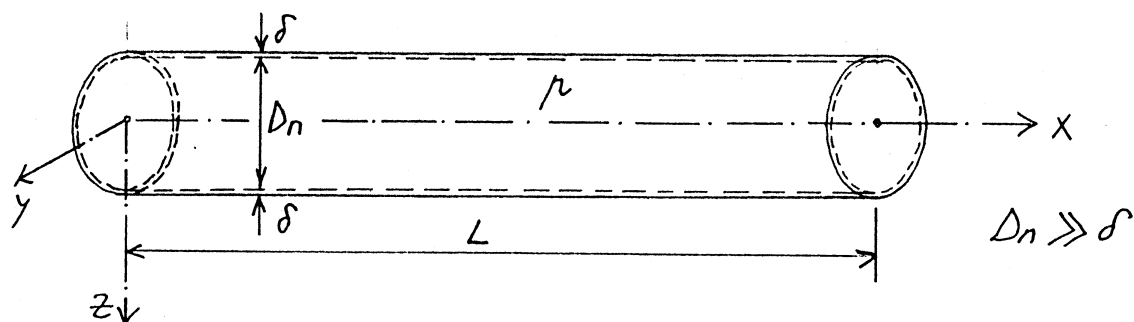
- a) pri tlačnem preizkusu cevovoda na kopnem z notranjim hidrostatičnim tlakom velikosti 5.5 MPa ,
- b) pri praznem cevovodu v globini 50 m pod vodo,
- c) med obratovanjem cevovoda z notranjim tlakom 1.4 MPa v globini 50 m pod vodo!

Rešitev: Namig: Prereži konstrukcijo na dva dela in vpliv odstranjenega dela nadomesti z obtežbo q na sliki.



- a) $q = 2.304 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^j = 157.518 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^b = 78.321 \text{ MPa}$,
- b) $q = 0.293 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^j = -14.952 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^b = -7.532 \text{ MPa}$,
- c) $q = 0.880 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^j = 25.143 \text{ MPa}$, $\sigma_{ss}^b = 12.405 \text{ MPa}$.

NALOGA 10: Pojasni zakaj hrenovka vedno poči podolgem. (Obravnavaj poenostavljen primer valjaste tankostenske posode z enakomernim notranjim pritiskom.)

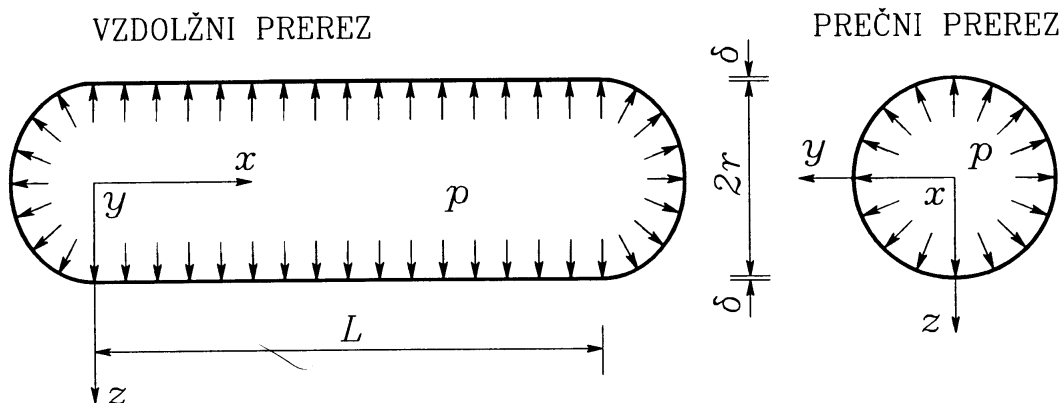


Rešitev:

$$\sigma_{xx} = \frac{p D_n}{4 \delta}, \quad \sigma_{ss} = \frac{p D_n}{2 \delta} \quad (\text{kotelna formula}).$$

Ker je $\sigma_{ss} = 2 \sigma_{xx}$, hrenovka poči podolgem.

NALOGA 11: Določi napetosti in deformacije v tankostenski krožno valjasti posodi z rotacijskima kalotama pri hidrostatskem notranjem tlaku p (glej sliko). Lastno težo posode in vsebine lahko zanemarimo.



Rešitev: Najprej velja $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$. Od tu sledi $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

Krajši račun da $\sigma_{xx} = p \frac{r^2}{\delta(2r+\delta)} \approx p \frac{r}{2\delta}$. Z uporabo kotelne formule dobimo $\sigma_{ss} = p \frac{r}{\delta}$.

Z uporabo konstitucijskih enačb dobimo:

$$\epsilon_{xx} = \frac{p}{E} \left(\frac{r}{2\delta} + \nu \left(1 - \frac{r}{\delta} \right) \right) \approx p \frac{r(1-2\nu)}{2\delta E},$$

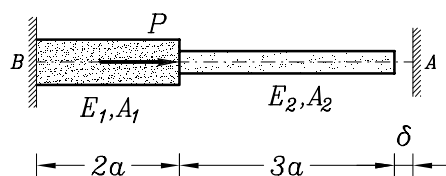
$$\epsilon_{ss} = \frac{p}{E} \left(\frac{r}{\delta} + \nu \left(1 - \frac{r}{2\delta} \right) \right) \approx p \frac{r(2-\nu)}{2\delta E},$$

$$\epsilon_{rr} = -\frac{p}{E} \left(1 + \frac{3r\nu}{2\delta} \right) \approx -p \frac{3r\nu}{2\delta E}.$$

NALOGA 12: Izračunaj napetosti v sestavljeni palici v točkah A in B po deformiranju s silo P .

Podatki: $a = 50 \text{ cm}$, $\delta = 0.05 \text{ mm}$, $P = 200 \text{ kN}$, $A_1 = 150 \text{ cm}^2$, $E_1 = 10000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ (baker), $A_2 = 50 \text{ cm}^2$, $E_2 = 20000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ (jeklo)

Rešitev: $\sigma_A = -0.77 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_B = 1.08 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$



NALOGA 13: Zapiši Misesov pogoj za začetek plastičnega tečenja za prikazani primer napetostnega stanja

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Misesov pogoj plastičnega tečenja zapišemo z enačbo

$$\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xz}^2 = \sigma_Y^2.$$

NALOGA 14: Napetostno stanje delca D je opisano s komponentami tenzorja napetosti glede na koordinatni sistem (x, y, z) .

- Dokaži, da je ravnina Π_ζ , katere normala e_ζ oklepa enake kote z osmi, ena od glavnih ravnin podanega napetostnega stanja! Določi preostali dve glavni ravnini in vse glavne normalne napetosti.
- Obravnavano telo je narejeno iz bilinearnega elastičnoplastičnega materiala. Pri enoosnem napetostnem stanju je prehod iz elastičnega v plastično stanje določen z mejo plastičnega tečenja σ_Y . Upoštevajoč Misesov pogoj tečenja določi napetost q_Y , pri kateri pri podanem prostorskem napetostnem stanju delca D nastopijo prve plastične deformacije. Napetost q_Y izrazi v odvisnosti od vrednosti σ_Y !

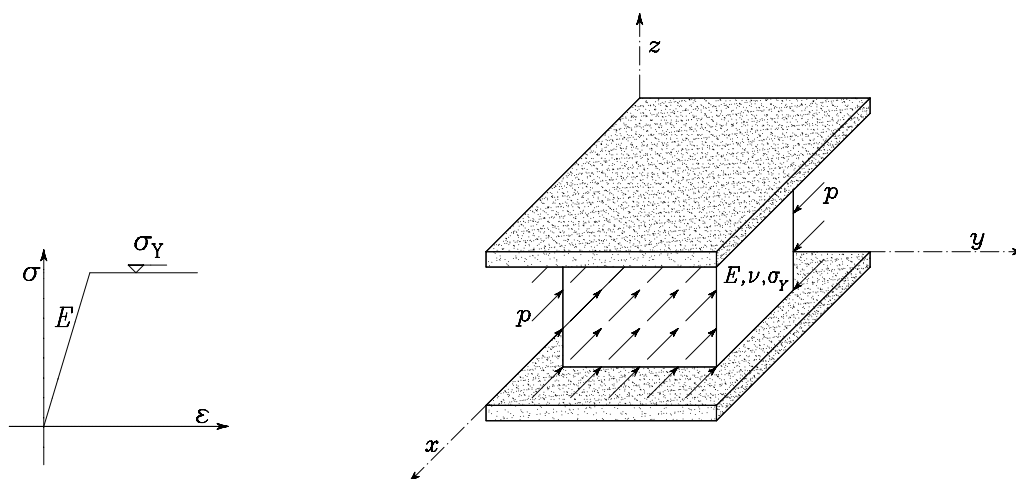
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} q & 2q & 2q \\ 2q & q & 2q \\ 2q & 2q & q \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

- Ker je $\sigma_{\zeta\xi} = \sigma_{\zeta\eta} = 0$, je dokaz končan. Izračunamo $\sigma_{\zeta\zeta} = 5q$. Preostali dve glavni normalni napetosti sta $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -q$. Glavni smeri e_1 in e_2 sta torej poljubna medsebojno pravokotna vektorja v ravnini Π_ζ .
- Napetost, pri kateri pri podanem prostorskem napetostnem stanju delca D nastopijo prve plastične deformacije $q_Y = \frac{\sigma_Y}{6}$.

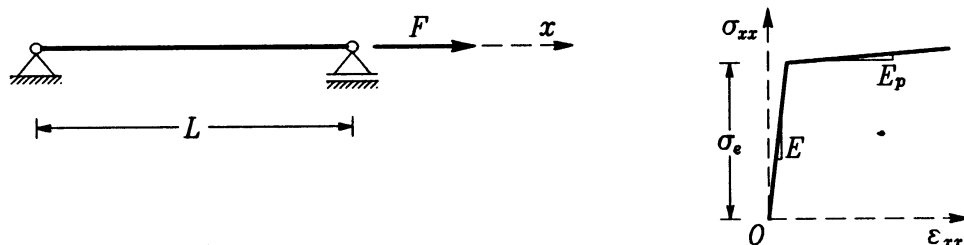
NALOGA 15: Telo iz idealno elastično–plastičnega, izotropnega, materiala je brez trenja vloženo med dve povsem togi plošči. Ob predpostavki, da v telesu vlada homogeno napetostno in deformacijsko stanje določi obtežbo p , pri kateri po Misesovem kriteriju plastičnega tečenja nastopi začetek plastifikacije. Upoštevaj $\epsilon_{zz} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$. Izračunaj tudi pripadajočo volumsko deformacijo ϵ_V za ta primer.

Podatki: E , ν , σ_Y .

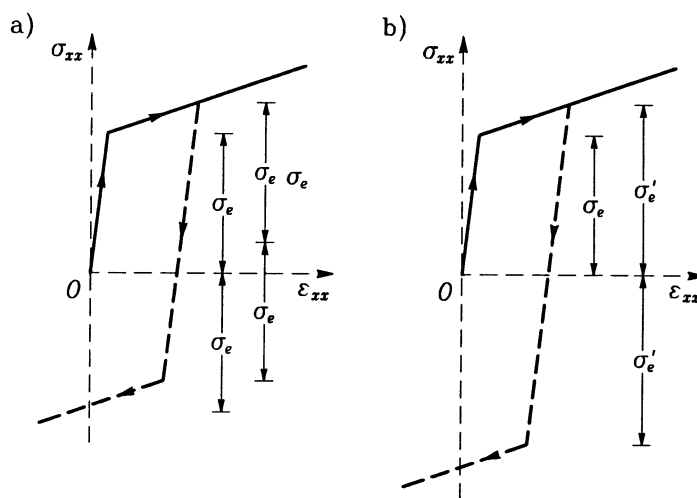


Rešitev: Začetek plastifikacije nastopi pri obtežbi $p = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$.
 Volumska deformacija telesa znaša $\varepsilon_V = \frac{(-1+\nu+2\nu^2)p}{E}$.

NALOGA 16: Izračunajmo pomik na koncu prostoležečega nosilca, obteženega le z vodoravno silo F , ki najprej naraste do vrednosti $F = 10 \text{ kN}$, nato pa pade na ter narašča v nasprotno smer do $F = -10 \text{ kN}$ (slika)! Ploščina prečnega prereza je $A_x = 0.4 \text{ cm}^2$, meja elastičnosti je $\sigma_e = 20 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, elastični modul je $E = 20000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, modul plastičnega utrjevanja pa je $E_p = 200 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$. Uporabimo obe vrsti utrjevanja: kinematično in izotropno. Dolžina nosilca je $L = 0.1 \text{ m}$.



Model konstrukcije in model materiala



Linearno elastično-plastični model:

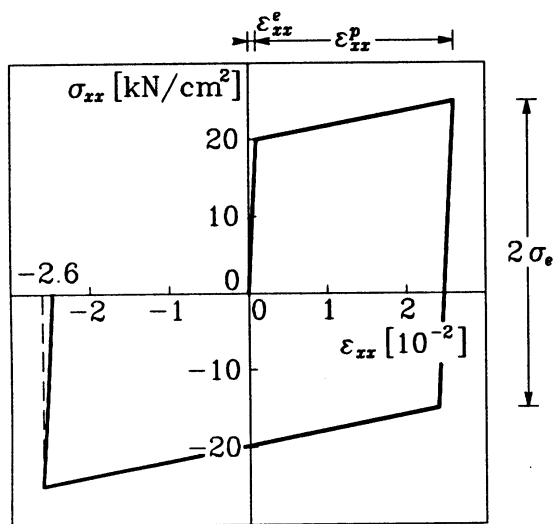
a) Kinematično utrjevanje b) Izotropno utrjevanje

Rešitev:

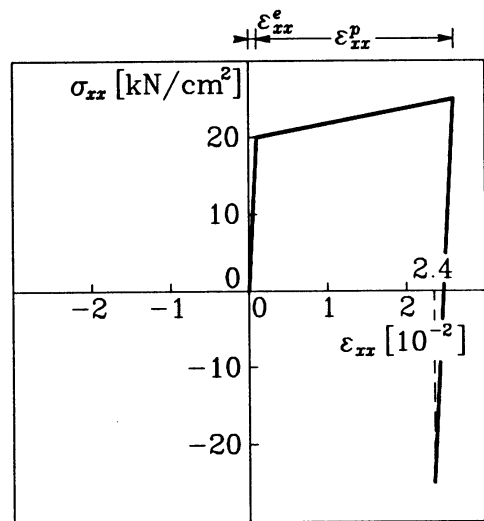
V primeru kinematičnega utrjevanja znaša pomik na prostem koncu nosilca $u_x = -0.0026$ m.

V primeru izotropnega utrjevanja znaša pomik na prostem koncu nosilca $u_x = 0.0024$ m.

a)



b)



Zveza med napetostjo in deformacijo:

a) Kinematično utrjevanje

b) Izotropno utrjevanje