Transformacija komponent tenzorja napetosti

Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

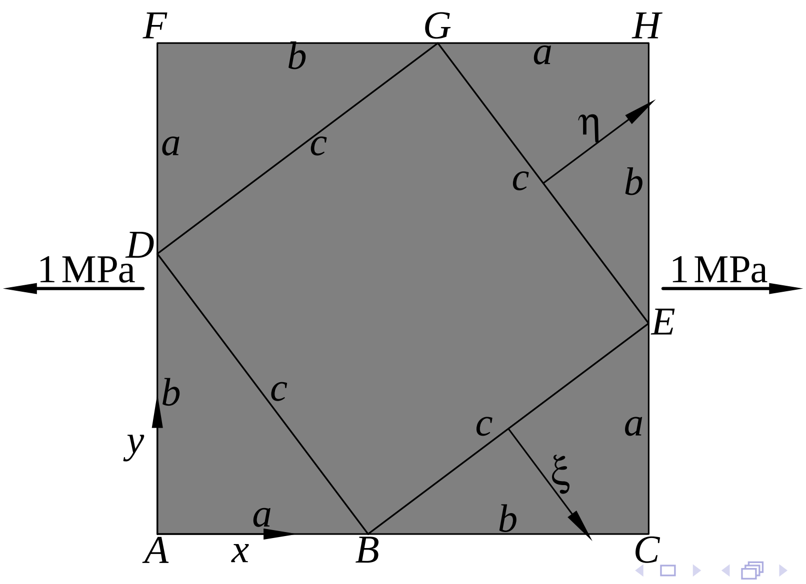
Določi komponente $[\sigma_{\alpha\beta}]$ tenzorja napetosti v tej točki v kartezijskem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ), določenem z baznimi vektorji

$$e_\xi = \frac{3}{5} e_x - \frac{4}{5} e_y, \quad e_\eta = \frac{4}{5} e_x + \frac{3}{5} e_y, \quad e_\zeta = e_z.$$

Fizikalno pojasni dobljene rezultate.

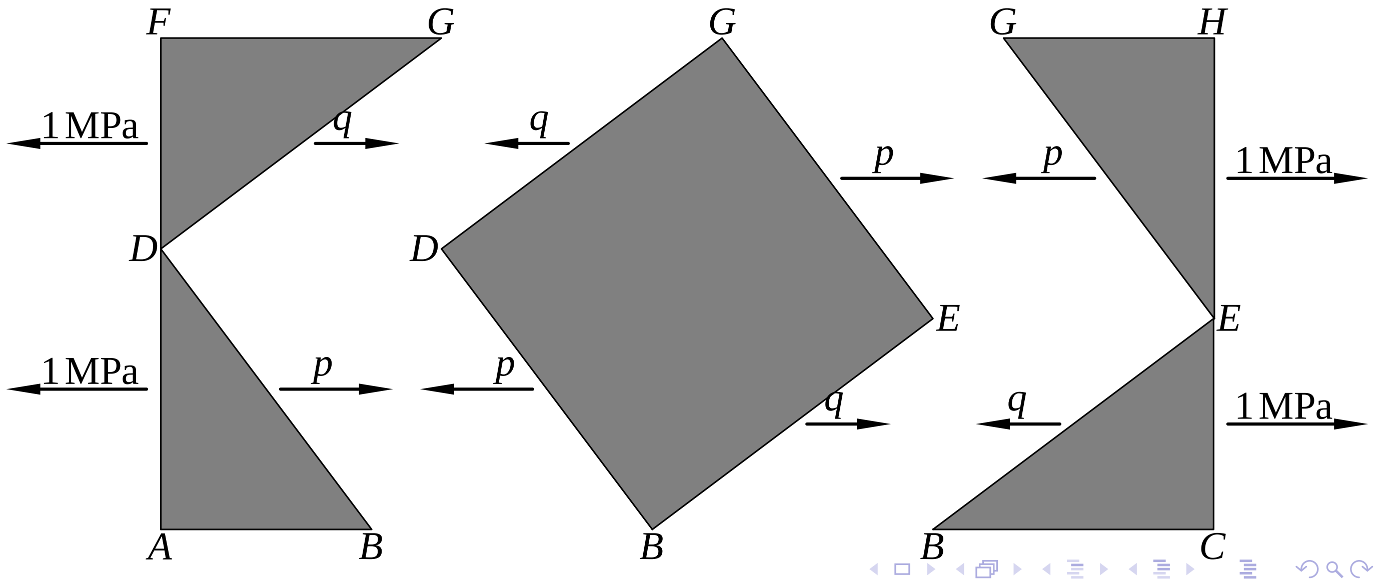
1. Uporaba ravnotežnih enačb iz Statike

Iz okolice točke P izrežemo tanko kvadratno steno s stranico $a + b$, debeline d. Normalno napetost $\sigma_{xx} = 1$MPa na sliki predstavimo s puščicama. Iz stene izrežemo kvadrat s stranico c. Normali stranic BE in EG tvorita nov (zavrten) kartezični koordinatni sistem (ξ, η, ζ) (os ζ sovpade z osjo z) (glej sliko). Iz podatkov izluščimo razmerje stranic $a : b : c = 3 : 4 : 5$. Napetostno stanje v tem koordinatnem sistemu predstavimo s komponentami tenzorja napetosti $\sigma_{\alpha\beta}$, kjer $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$.



1. Uporaba ravnotežnih enačb iz Statike

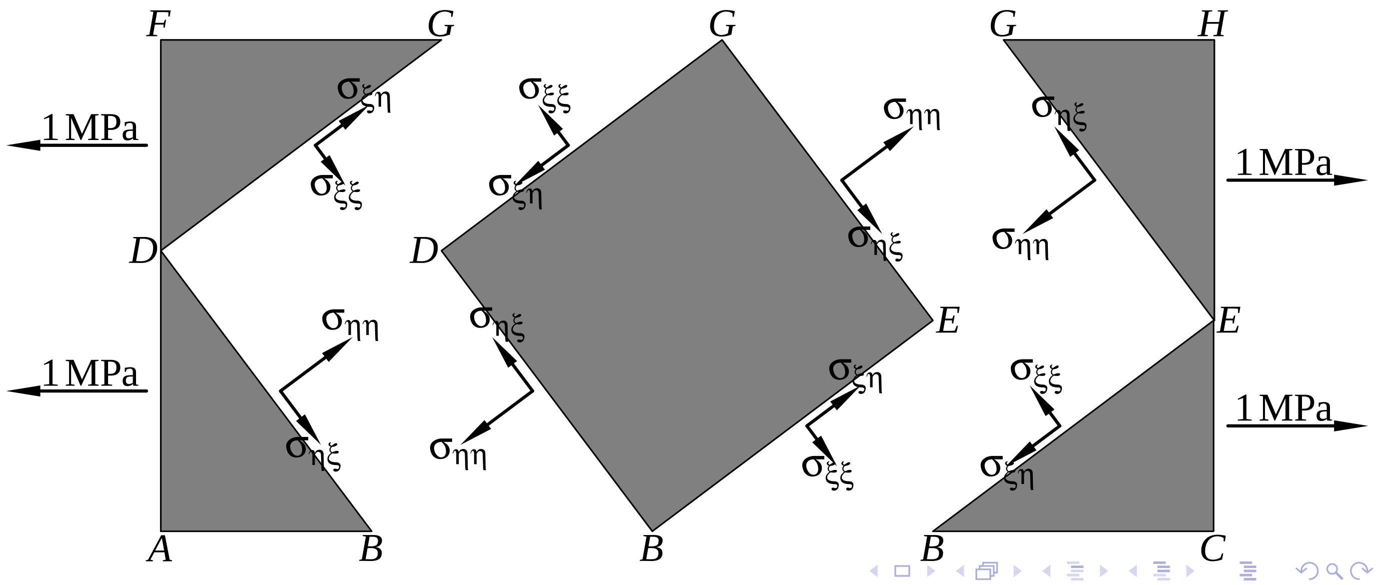
Steno razrežemo kot prikazuje spodnja slika. Vplive odstranjenih delov nadomestimo z napetostnimi vektorji. Velikosti vektorjev označimo s p in q, smeri pa so prikazane na sliki. Ker je napetosno stanje v okolici točke P homogeno, lahko velikosti napetosnih vektorjev dobimo z ravnotežnih enačb $\sum X = 0$ za trikotnika ABD in DGF. Iz enačb $\sum X = -1\text{MPa}\,ad + q\,cd = 0$, $\sum X = -1\text{MPa}\,bd + p\,cd = 0$ izračunamo $p = \frac{4}{5}\text{MPa}$ in $q = \frac{3}{5}\text{MPa}$. Preveri ravnotežje preostalih delov stene!



1. Uporaba ravnotežnih enačb iz Statike

Vsak napetostni vektor razstavimo na dve komponenti, t.j. normalno in strižno napetost. Glej sliko. Z upoštevanjem geometrije dobimo

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{3}{5}q = \frac{9}{25}\text{MPa}, \quad \sigma_{\xi\eta} = \frac{4}{5}q = \frac{12}{25}\text{MPa},$$
$$\sigma_{\eta\xi} = \frac{3}{5}p = \frac{12}{25}\text{MPa}, \quad \sigma_{\eta\eta} = \frac{4}{5}p = \frac{16}{25}\text{MPa}.$$



2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Tenzor napetosti v novi bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\xi &= \sigma_{\xi\xi}\, e_\xi + \sigma_{\xi\eta}\, e_\eta + \sigma_{\xi\zeta}\, e_\zeta, \\ \boldsymbol{\sigma}_\eta &= \sigma_{\eta\xi}\, e_\xi + \sigma_{\eta\eta}\, e_\eta + \sigma_{\eta\zeta}\, e_\zeta, \\ \boldsymbol{\sigma}_\zeta &= \sigma_{\zeta\xi}\, e_\xi + \sigma_{\zeta\eta}\, e_\eta + \sigma_{\zeta\zeta}\, e_\zeta. \end{aligned}$$

Fizikalni pomen od nič različnih komponent je tako razviden iz zadnje slike.

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i\in\{x,y,z\}} \sum_{j\in\{x,y,z\}} e_{\alpha i}\, e_{\beta j}\, \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \tag{1}$$

Najprej izračunamo smerne kosinuse

$$\begin{aligned} e_{\xi x} &= e_{x\xi} = e_\xi \cdot e_x = \tfrac{3}{5}, & e_{\eta x} &= e_{x\eta} = e_\eta \cdot e_x = \tfrac{4}{5}, \\ e_{\xi y} &= e_{y\xi} = e_\xi \cdot e_y = -\tfrac{4}{5}, & e_{\eta y} &= e_{y\eta} = e_\eta \cdot e_y = \tfrac{3}{5}, \\ e_{\xi z} &= e_{z\xi} = e_\xi \cdot e_z = 0, & e_{\eta z} &= e_{z\eta} = e_\eta \cdot e_z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{\zeta x} &= e_{x\zeta} = e_\zeta \cdot e_x = 0, \\ e_{\zeta y} &= e_{y\zeta} = e_\zeta \cdot e_y = 0, \\ e_{\zeta z} &= e_{z\zeta} = e_\zeta \cdot e_z = 1. \end{aligned}$$

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.
Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2\sigma_{xx} + e_{\xi y}^2\sigma_{yy} + e_{\xi z}^2\sigma_{zz} + \\
&+ 2e_{\xi x}e_{\xi y}\sigma_{xy} + 2e_{\xi x}e_{\xi z}\sigma_{xz} + 2e_{\xi y}e_{\xi z}\sigma_{yz} = \\
&= \frac{9}{25}\text{MPa}, \\
\sigma_{\eta\eta} &= e_{\eta x}^2\sigma_{xx} + e_{\eta y}^2\sigma_{yy} + e_{\eta z}^2\sigma_{zz} + \\
&+ 2e_{\eta x}e_{\eta y}\sigma_{xy} + 2e_{\eta x}e_{\eta z}\sigma_{xz} + 2e_{\eta y}e_{\eta z}\sigma_{yz} = \\
&= \frac{16}{25}\text{MPa}, \\
\sigma_{\zeta\zeta} &= e_{\zeta x}^2\sigma_{xx} + e_{\zeta y}^2\sigma_{yy} + e_{\zeta z}^2\sigma_{zz} + \\
&+ 2e_{\zeta x}e_{\zeta y}\sigma_{xy} + 2e_{\zeta x}e_{\zeta z}\sigma_{xz} + 2e_{\zeta y}e_{\zeta z}\sigma_{yz} = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x}e_{\eta x}\sigma_{xx} + e_{\xi x}e_{\eta y}\sigma_{xy} + e_{\xi x}e_{\eta z}\sigma_{xz} + \\
&+ e_{\xi y}e_{\eta x}\sigma_{yx} + e_{\xi y}e_{\eta y}\sigma_{yy} + e_{\xi y}e_{\eta z}\sigma_{yz} + \\
&+ e_{\xi z}e_{\eta x}\sigma_{zx} + e_{\xi z}e_{\eta y}\sigma_{zy} + e_{\xi z}e_{\eta z}\sigma_{zz} = \\
&= \frac{12}{25}\text{MPa}, \\
\sigma_{\xi\zeta} &= e_{\xi x}e_{\zeta x}\sigma_{xx} + e_{\xi x}e_{\zeta y}\sigma_{xy} + e_{\xi x}e_{\zeta z}\sigma_{xz} + \\
&+ e_{\xi y}e_{\zeta x}\sigma_{yx} + e_{\xi y}e_{\zeta y}\sigma_{yy} + e_{\xi y}e_{\zeta z}\sigma_{yz} + \\
&+ e_{\xi z}e_{\zeta x}\sigma_{zx} + e_{\xi z}e_{\zeta y}\sigma_{zy} + e_{\xi z}e_{\zeta z}\sigma_{zz} = 0 \\
\sigma_{\eta\zeta} &= e_{\eta x}e_{\zeta x}\sigma_{xx} + e_{\eta x}e_{\zeta y}\sigma_{xy} + e_{\eta x}e_{\zeta z}\sigma_{xz} + \\
&+ e_{\eta y}e_{\zeta x}\sigma_{yx} + e_{\eta y}e_{\zeta y}\sigma_{yy} + e_{\eta y}e_{\zeta z}\sigma_{yz} + \\
&+ e_{\eta z}e_{\zeta x}\sigma_{zx} + e_{\eta z}e_{\zeta y}\sigma_{zy} + e_{\eta z}e_{\zeta z}\sigma_{zz} = 0.
\end{aligned}$$

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Posamezne komponente izračunamo (z manj pisanja) z enačbo $\sigma_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi x} & e_{\xi x} \end{bmatrix} [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} e_{\eta x} & e_{\eta x} & e_{\eta x} \end{bmatrix}^T$. Dobimo

$$\sigma_{\xi\xi} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{9}{25} \text{MPa},$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{12}{25} \text{MPa},$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{16}{25} \text{MPa}.$$

Ostale komponente so enake nič. Izračunamo jih na enak način.

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Upoštevamo simetrijo tenzorja in dobljene rezultate povežemo v končni rezultat

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

3. Določitev matrike z uporabo transformacijske enačbe

Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi\, x} & e_{\eta\, x} & e_{\zeta\, x} \\ e_{\xi\, y} & e_{\eta\, y} & e_{\zeta\, y} \\ e_{\xi\, z} & e_{\eta\, z} & e_{\zeta\, z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\xi & e_\eta & e_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo dogovor o seštevanju in enačbe (1) prepišemo v obliko

$$[\sigma_{ij}] = [T]\,[\sigma_{\alpha\beta}]\,[T]^T, \qquad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T\,[\sigma_{ij}]\,[T],$$

Kratek izračun da

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T\,[\sigma_{ij}]\,[T] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$