

Dejan Zupan

IZPITNE NALOGE IN REŠITVE NALOG IZ PREDMETA TRDNOST  
NA VISOKOŠOLSLEM ŠTUDIJU GRADBENIŠTVA

ŠTUDIJSKO LETO: 2003/04

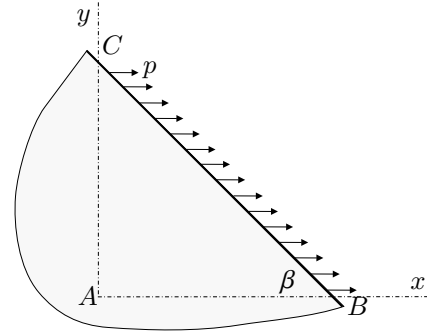
## TRDNOST (VŠŠ) - 1. IZPITNI ROK (29. 01. 2004)

Pazljivo preberite besedilo vsake naloge! Naloge imajo različno težo (20%, 25%, 25% in 30%), ob tem je 4. naloga še obvezna! Pišite čitljivo! Uspešno reševanje!

1. Na rob tanke stene, ki leži pod kotom  $\beta = 30^\circ$  glede na os  $x$ , deluje enakomerna površinska obtežba velikosti  $p = 5 \text{ kN/cm}^2$  v smeri osi  $x$ , kot kaže slika. Privzemimo, da so napetosti po celotni prostornini stene konstantne. Specifična sprememba dolžine v smeri osi  $x$  ( $\varepsilon_{xx}$ ) pa je  $2 \cdot 10^{-3}$ . Določite napetostni tenzor, če poznamo naslednje materialne parametre:

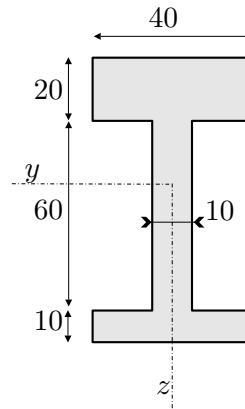
$$\nu = 0,3, E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2,$$

$$\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \Delta T = 10 \text{ K. (20\%)}$$



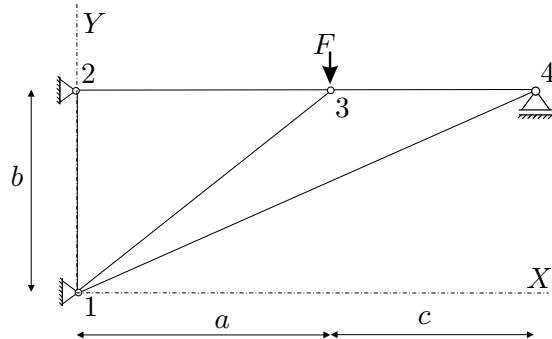
2. Prerez na sliki je obremenjen s prečno silo  $N_z = 12 \text{ kN}$ . Določite in narišite potek strižnih napetosti  $\sigma_{xz}$  po prerezu!

Podatki za prerez so v centimetrih. (25%)



3. Za paličje na sliki določite pomike vozlišč in reakcije v podporah! (25%)

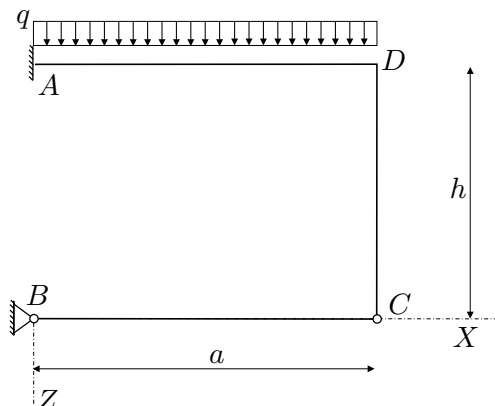
Podatki:  $a = 4 \text{ m}$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ,  $c = 2 \text{ m}$ ,  
 $F = 5 \text{ MN}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $A = 0,02 \text{ m}^2$ .



4. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine in navpični pomik v točki  $D$ !

**(OBVEZNA NALOGA! 30%)**

Podatki:  $a = 4 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ ,  $q = 15 \text{ kN/m}$   
 $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $J_y = 2800 \text{ cm}^4$ ,  
 $A_x = 150 \text{ cm}^2$ .



## REŠITVE NALOG

### 1.naloga

$$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{zz} = 0;$$

$$\sigma_{yy} = 11.0741$$

$$\sigma_{xx} = 10 + 3\sigma_{yy} = 43.222, \sigma_{xy} = -\sqrt{3}\sigma_{yy} = -19.181.$$

### 2. naloga

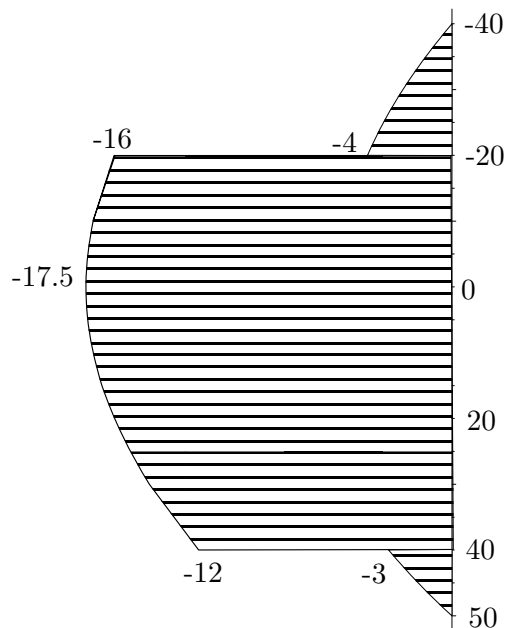
$$I_y^T = 1.8 \cdot 10^6;$$

$$S_y^*(z^*) = 20z^2 - 32000; z \in [-40, -20]$$

$$S_y^*(z^*) = 5z^2 - 26000; z \in [-20, 40]$$

$$S_y^*(z^*) = 20z^2 - 50000; z \in [40, 50]$$

$z^*$	$b^*$	$S_y^*$	$\sigma_{xz}$ [N/cm <sup>2</sup> ]
-40	40	0	0
-20	40	-24000	-4.0
-20	10	-24000	-16.0
0	10	-26000	-17.3
40	10	-18000	-12.0
40	40	-18000	-3.0
50	40	0	0



### Nasvet za 4. nalogo

Najbolj elegantno je sprostiti podporo  $B$  v smeri  $X$  ali še bolje izrezati palico  $BC$ . Konstrukcija ki ostane je kolenasta konzola.  $X_1 = -10.7$ ; Rešitve so priložene.

## TABELA DOLŽIN, KOSINUSOV IN OSNIH TOGOSTI ZA PODANO PALICJE

palica	vozel1	vozel2	dolzina	cos(a_ij)	cos(b_ij)	k_ij
1	1	2	3.000	0.000	1.000	1333.333
2	1	3	5.000	0.800	0.600	800.000
3	1	4	6.708	0.894	0.447	596.285
4	2	3	4.000	1.000	0.000	1000.000
5	3	4	2.000	1.000	0.000	2000.000

## TOGOSTNA MATRIKA PALICJA

-989.028	-622.514	0.000	0.000	512.000	384.000	477.028	238.514
-622.514	-1740.590	0.000	1333.333	384.000	288.000	238.514	119.257
0.000	0.000	-1000.000	0.000	1000.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1333.333	0.000	-1333.333	0.000	0.000	0.000	0.000
512.000	384.000	1000.000	0.000	-3512.000	-384.000	2000.000	0.000
384.000	288.000	0.000	0.000	-384.000	-288.000	0.000	0.000
477.028	238.514	0.000	0.000	2000.000	0.000	-2477.028	-238.514
238.514	119.257	0.000	0.000	0.000	0.000	-238.514	-119.257

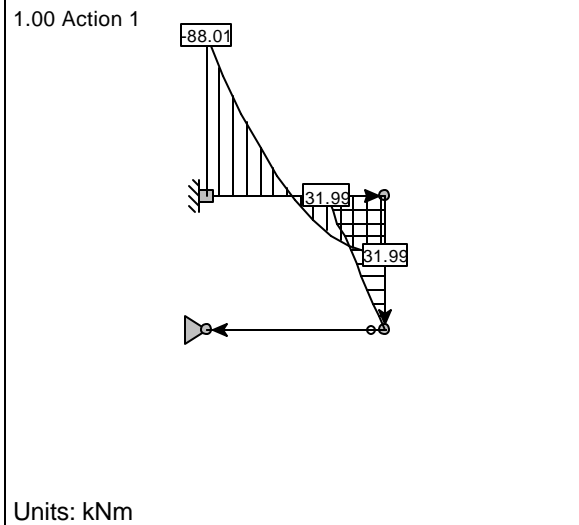
## POMIKI IN REAKCIJE VOZLIŠC DANEGA PALICJA

vozel	u_x	u_y	R_x	R_y
1	0.00000	0.00000	4.813	4.073
2	0.00000	0.00000	-4.813	0.000
3	0.00481	-0.02378		
4	0.00389	0.00000		0.927

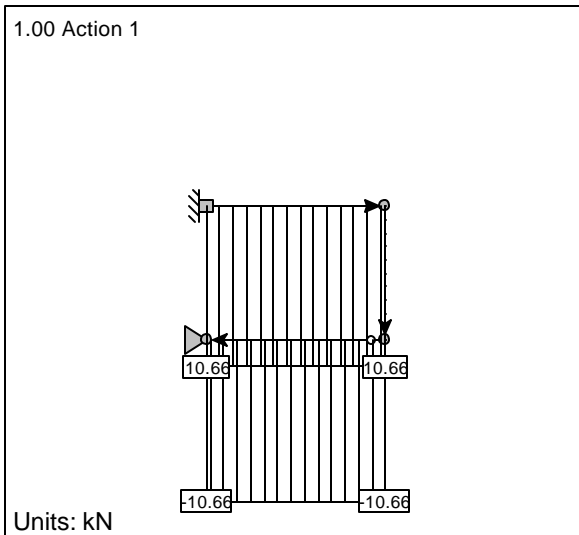
## TABELA OSNIH SIL ZA PODANO PALICJE

palica	vozel1	vozel2	N_ij
1	1	2	0.000
2	1	3	-8.333

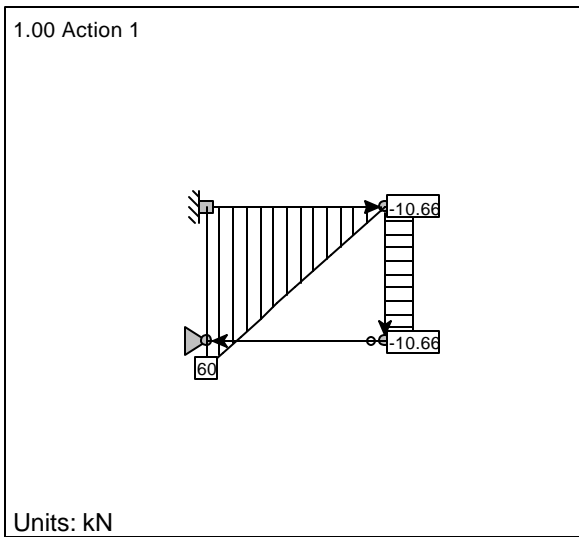
## Upogibni momenti $M_y$



## Osne sile $F_x$



## Strizne sile $F_z$



Pomiki vozlisc

Node	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
D	0.001354	3.811	-0.31223
C	-0.001354	3.811	0.15534

Node	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
B	-	-	-0.54588

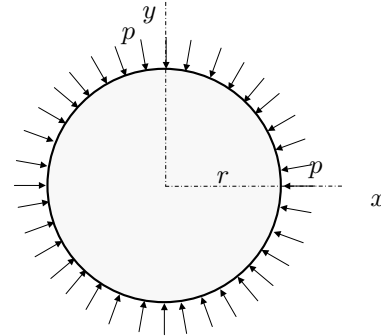
## TRDNOST (VŠŠ) - 2. IZPITNI ROK (09. 02. 2004)

Pazljivo preberite besedilo vsake naloge! Naloge imajo različno težo (20%, 30%, 20% in 30%), ob tem je 4. naloga še obvezna!

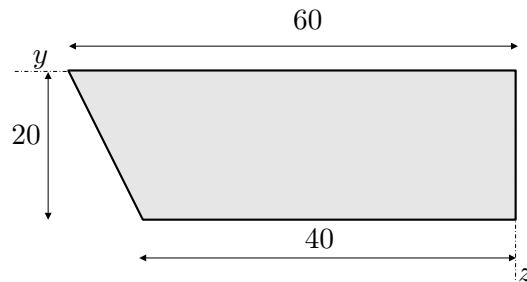
Pišite čitljivo! Uspešno reševanje!

1. Plašč homogenega valjastega vzorca višine  $h = 2$  cm in polmera  $r = 3$  cm je obtežen z enakomerno normalno površinsko obtežbo velikosti  $p = 17$  kN/cm<sup>2</sup>, kot kaže slika. Temperatura se ne spremeni! Določite spremembo višine valja, ob delovanju obtežbe, če poznamo naslednje materialne parametre:

$$\nu = 0.2, E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2. \quad (20\%)$$

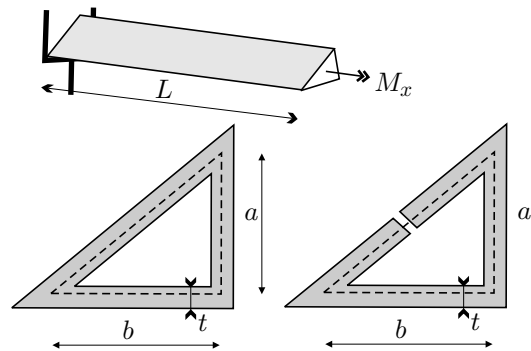


2. Za prerez na sliki določi geometrijske karakteristike ( $A$ ,  $y_T$ ,  $z_T$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_{yz}$ ,  $I_y^T$ ,  $I_z^T$ ,  $I_{yz}^T$ )! Če je prerez obremenjen s prečno silo  $N_x = 10$  kN in upogibnim momentom  $M_y = -15$  kNm, določite potek normalnih napetosti  $\sigma_{xx}$  po prerezu! Posebej izračunajte vrednosti normalnih napetosti v ogliščih! (30%)



3. Nosilec na sliki je na enem koncu obtežen s torzijskim momentom  $M_x = 150$  kNm, na drugem koncu pa podpora preprečuje zasuk. Prerez nosilca je odprti oziroma zaprti tankostenski prerez (pravokotni trikotnik) na sliki. Za oba prereza izračunajte potek zasukov vzdolž osi  $x$  in posebej vrednost zasuka pri  $x = L$ ! (20%)

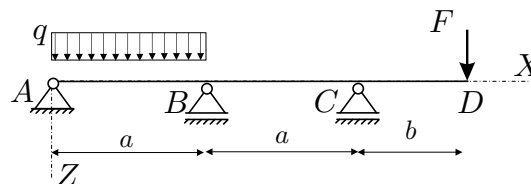
Podatki:  $t = 1$  cm,  $b = 20$  cm,  $a = 15$  cm  
 $L = 3$  m,  $G = 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>.



4. Za kontinuirni nosilec na sliki izračunajte notranje statične količine in vertikalni pomik v točki  $D$ !

**(OBVEZNA NALOGA! 30%)**

Podatki:  $a = 4$  m,  $b = 2$  m,  
 $F = 5$  kN,  $q = 10$  kN/m,  
 $E = 3500$  kN/cm<sup>2</sup>,  $J_y = 20000$  cm<sup>4</sup>,  
 $A_x = 600$  cm<sup>2</sup>.



## REŠITVE NALOG

### 1.naloga

$$\sigma_{xx} = -17, \sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = 0;$$

$$\sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = -17, \sigma_{yz} = 0;$$

$$\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{zz} = 0;$$

$$\varepsilon_{zz} = 0.00034;$$

$$\Delta h = \varepsilon_{zz} \cdot h = 0.00068; \text{ višina se poveča.}$$

### 2.naloga

$$A_x = 1000, y_T = 25.3, z_T = 9.3;$$

$$I_y = 120\,000, I_z = 86\,666.7, I_{yz} = -220\,000;$$

$$I_y^T = 32\,888.9, I_z^T = 224\,889, I_{yz}^T = 16\,444.4;$$

$$\sigma_{xx}(y, z) = \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_z I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

$$\sigma_{xx}(y, z) = 0.01 - 0.0035 y - 0.0473 z$$

$y$	$z$	$y$ glede na $T$	$z$ glede na $T$	$\sigma_{xx}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]
0	0	-25.3	-9.3	0.538
60	0	34.7	-9.3	0.330
40	20	14.7	10.7	-0.547
0	20	-25.3	10.7	-0.409

### 3.naloga

odprti prerez:

$$\omega_x = \omega_{x,0} + \alpha x = \alpha x;$$

$$\alpha = \frac{M_x}{GI_x} = 0.075$$

$$I_x = \frac{1}{3}(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) = 20$$

$$\omega_x(L) = 0.075 * 300 = 22.5$$

zaprti prerez:

$$\omega_x = \omega_{x,0} + \alpha x = \alpha x;$$

$$\alpha = \frac{M_x}{GI_x} = 0.001$$

$$I_x = \frac{4tA_s^2}{L_{\text{srednjice}}} = \frac{ta^2b^2}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = 1500$$

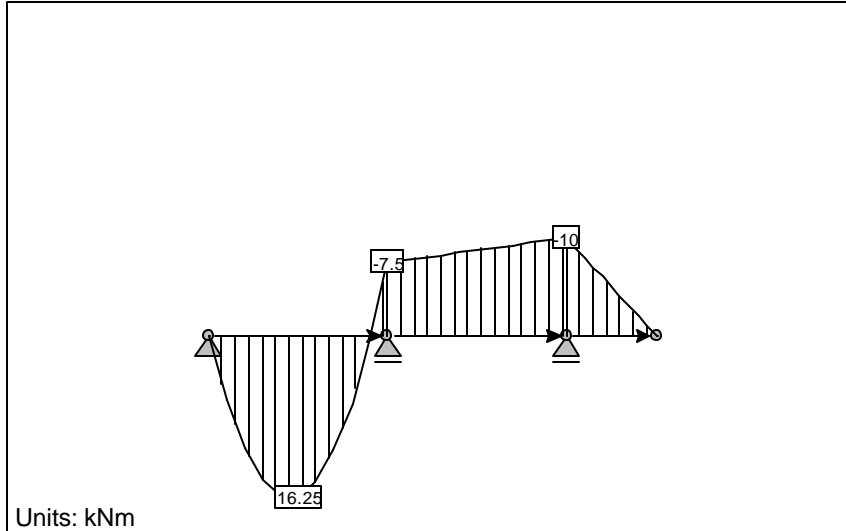
$$\omega_x(L) = 0.001 * 300 = 0.3\text{rad} = 17.2^\circ$$

### 4. naloga

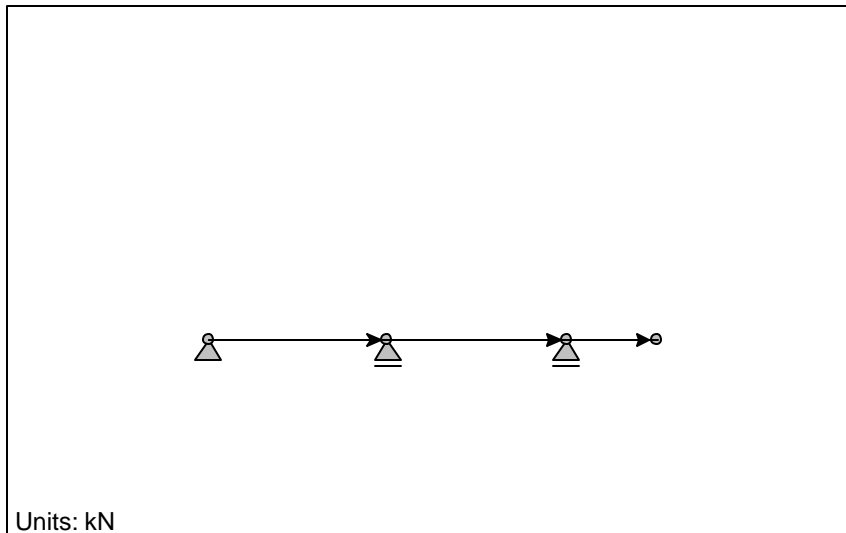
Najbolj se spleča sprostiti zasuk na mestu podpore  $B$ .  $X_1 = -7.5$ . Diagrami so priloženi!



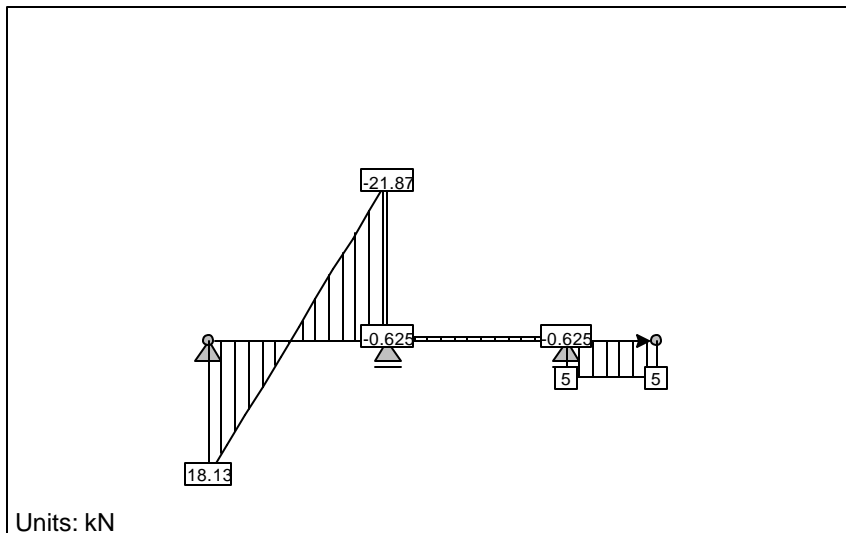
### Upogibni momenti My



### Osne sile Fx



### Strizne sile Fz



Pomiki vozlisc

Node	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
A:	-	-	-0.17734
B:	0	-	0.13642

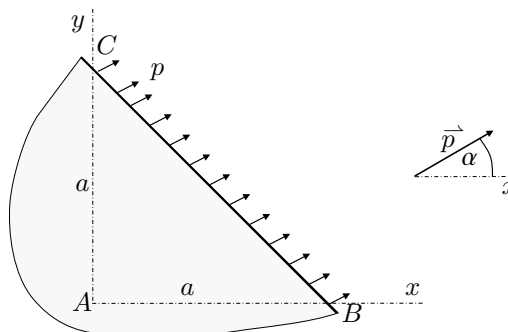
Node	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
C:	0	-	-0.15006
D:	0	0.71429	-0.23191

## TRDNOST (VŠŠ) - 1. IZREDNI IZPITNI ROK (19. 03. 2004)

Pazljivo preberite besedilo vsake naloge! Naloge so točkovane neenakovredno, ob tem je 3. naloga še obvezna! Pišite čitljivo! Uspešno reševanje!

1. Na rob tanke stene deluje enakomerna zvezna površinska obtežba velikosti  $p = 2 \text{ kN/cm}^2$  pod kotom  $\alpha = 30^\circ$  glede na os  $x$  (glej sliko). Napetosti so po celotni steni konstantne, specifična sprememba pravega kota med vlaknima v smereh  $x$  in  $y$  pa znaša  $D_{xy} = -0.003$ . Ob predpostavki homogenega, izotropnega, linearno elastičnega materiala stene, izračunaj tenzor majhnih deformacij! (25% )

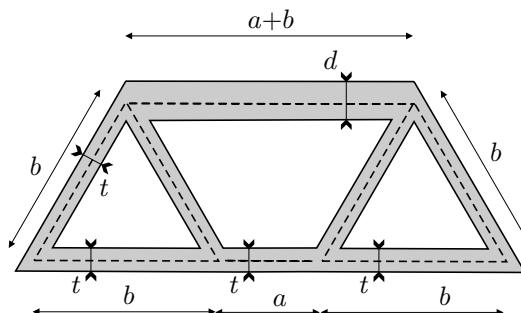
Podatki:  $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.2$ .



2. Določi strižne napetosti v tankostenskem prerezu pri enakomerni torzijski obremenitvi  $M_x = 20 \text{ kN/m}$ . (25% )

Podatki:  $t = 1 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,

$a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 20 \text{ cm}$ .



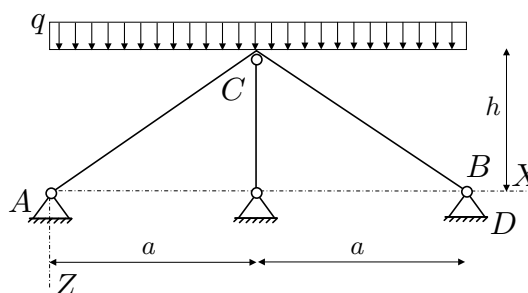
3. Za dvakrat statično nedoločeno konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine in vertikalni pomik v točki  $C$ ! Uporabite metodo sil, pri čemer upoštevajte tudi vpliv osnih sil; prečnih sil ni potrebno upoštevati.

**(OBVEZNA NALOGA! 50% )**

Podatki:  $a = 3 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $q = 2 \text{ kN/m}$ ,

$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $A_x = 200 \text{ cm}^2$ ,

$J_y = 1667 \text{ cm}^4$ .



## REŠITVE NALOG

### 1.naloga

$$\varepsilon_{xy} = \frac{D_{xy}}{2} = -0.0015, \quad \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{zz} = 0;$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} = -26.25;$$

$$e_S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad e_p = \begin{bmatrix} p \frac{\sqrt{3}}{2} \\ p \frac{1}{2} \end{bmatrix} p \frac{1}{2};$$

$$\sigma_{xx} = p \frac{\sqrt{3}}{2} - \sigma_{yy} = 28.7, \sigma_{yy} = p \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_{yy} = 27.7;$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.0011 & -0.0015 & 0 \\ -0.0015 & 0.00105 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00054 \end{bmatrix}$$

### 2.naloga

$$a_{11} = 60, a_{22} = 65, a_{33} = 60, a_{12} = -20, a_{13} = 0;$$

$$A_{S1} = A_{S3} = 173.2, A_{S2} = 346.4;$$

$$\varphi_{n1} = 11.73, \varphi_{n1} = 17.88, \varphi_{n1} = 11.73;$$

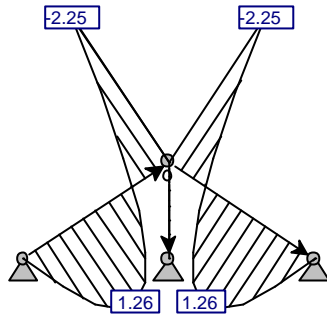
$$I_x = 20516.$$

### 3.naloga

Dve sprostivti sta najbolj ugodni. Pri obeh v točki  $C$  odrežemo palico. Pri prvi sprostivti dodamo členek v  $C$ , pri drugi pa v podpori  $B$  sprostimo pomik v smeri  $X$ . Pri obeh sprostivtah imamo simetrijo, zato je dovolj obravnavati le eno polovico. Obe sprostivti omogočata delo z lepimi diagrami (iz tabel), če seveda pravilno transformiramo obtežbo in reakcije!

## Upogibni momenti My

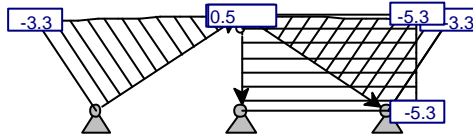
1.00 Action 1



Units: kNm

## Osne sile Fx

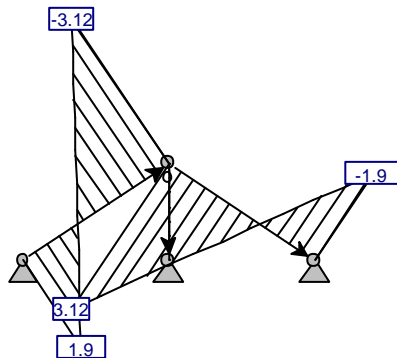
1.00 Action 1



Units: kN

## Precne sile Fz

1.00 Action 1



Units: kN

### Vozliscni pomiki

Node	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
B:	-	-	0.022183
C:	0	2.4984E-4	0

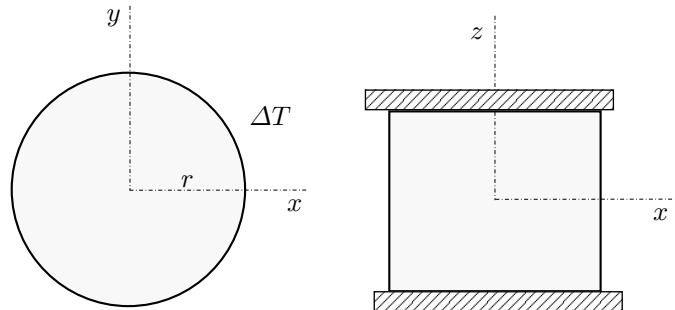
Node	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
A:	-	-	-0.022183
D:	-	-	0

## TRDNOST (VSS) - 3. IZPITNI ROK (24. 06. 2004)

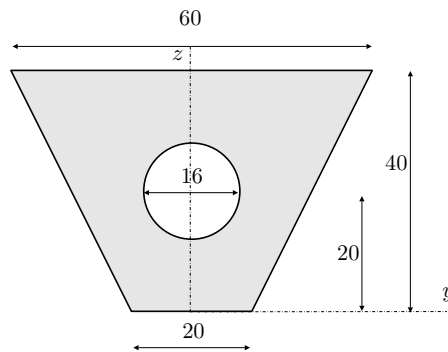
Pazljivo preberite besedilo vsake naloge! Naloge imajo različno težo (20%, 20%, 25% in 35%), ob tem je 4. naloga še obvezna!

Pišite čitljivo! Uspešno reševanje!

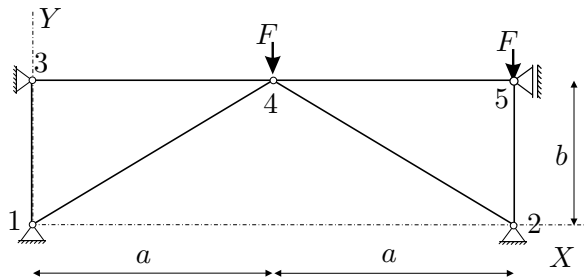
1. Homogen valjasti vzorec višine  $h = 5$  cm in polmera  $r = 6$  cm je nameščen med dve togi, nepremični plošči. Valj segrejemo za  $35^\circ\text{C}$ . Privzemimo, da je material izotropen in linearno elastičen. Določite spremembo polmera valja in velikost normalne komponente napetostnega vektorja na ploskvi med valjem in ploščama, če velja  $\nu = 0.2$ ,  $E = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\alpha_T = 1.5 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>. (20%)



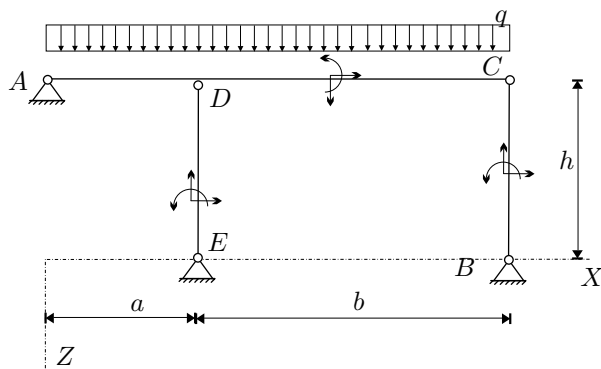
2. Za prerez na sliki določi geometrijske karakteristike; to je ploščino  $A$ , težišče  $y_T$ ,  $z_T$ , vztrajnostne momente glede na podane koordinate  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_{yz}$  in vztrajnostne momente glede na težišče  $I_y^T$ ,  $I_z^T$ ,  $I_{yz}^T$ ! Določite tudi kot  $\alpha$  pod katerim ležijo glavne vztrajnostne osi glede na podane. (20%)



3. Za paličje na sliki določite pomike vozlišč po metodi pomikov! (25%)  
Podatki:  $a = 5$  m,  $b = 3$  m,  $F = 3$  MN,  
 $E = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $A = 0.02$  m<sup>2</sup>.



4. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine in navpični pomik v točki  $C$  po metodi sil! Vpliva osnih in prečnih sil ni potrebno upoštevati (**OBVEZNA NALOGA! 35%**)  
Podatki:  $a = 2$  m,  $b = 4$  m,  $h = 3$  m,  
 $q = 2$  kN/m,  $E = 3000$  kN/cm<sup>2</sup>,  
 $J_y = 833$  cm<sup>4</sup>,  $A_x = 100$  cm<sup>2</sup>.



A =

1399.04375516353

Sy =

33314.8898040665

Sz =

-0.545775741376929

yT =

-0.000390106270345443

zT =

23.8126146384695

Iy =

983101.353470247

Iyz =

-13.6392403349455

Iz =

263453.057849958

IyT =

189786.720842919

IyzT =

-0.64289178209583

IzT =

263453.057388335



alfa =

-8.72707687363002e-006

Ig =

189786.720837308

263453.057393945

## TABELA DOLŽIN, KOSINUSOV IN OSNIH TOGOSTI ZA PODANO PALICJE

palica	vozel1	vozel2	dolzina	cos(a_ij)	cos(b_ij)	k_ij
1	1	3	3.000	0.000	1.000	1333.333
2	1	4	5.831	0.857	0.514	685.994
3	2	4	5.831	-0.857	0.514	685.994
4	2	5	3.000	0.000	1.000	1333.333
5	3	4	5.000	1.000	0.000	800.000
6	4	5	5.000	1.000	0.000	800.000

## TOGOSTNA MATRIKA PALICJA

-504.408	-302.645	0.000	0.000	0.000	0.000	504.408	302.645	↙
0.000	0.000							
-302.645	-1514.920	0.000	0.000	0.000	1333.333	302.645	181.587	↙
0.000	0.000							
0.000	0.000	-504.408	302.645	0.000	0.000	504.408	-302.645	↙
0.000	0.000							
0.000	0.000	302.645	-1514.920	0.000	0.000	-302.645	181.587	↙
0.000	1333.333							
0.000	0.000	0.000	0.000	-800.000	0.000	800.000	0.000	↙
0.000	0.000							
0.000	1333.333	0.000	0.000	0.000	-1333.333	0.000	0.000	↙
0.000	0.000							
504.408	302.645	504.408	-302.645	800.000	0.000	-2608.815	0.000	↙
800.000	0.000							
302.645	181.587	-302.645	181.587	0.000	0.000	0.000	-363.173	↙
0.000	0.000							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	800.000	0.000	↙
-800.000	0.000							
0.000	0.000	0.000	1333.333	0.000	0.000	0.000	0.000	↙
0.000	-1333.333							

## POMIKI IN REAKCIJE VOZLIŠC DANEGA PALICJA

vozel	u_x	u_y	R_x	R_y
1	0.00000	0.00000	2.500	1.500
2	0.00000	0.00000	-2.500	4.500
3	0.00000	0.00000	0.000	0.000
4	0.00000	-0.00826		

```
-----  
5          0.00000      -0.00225          0.000  
-----
```

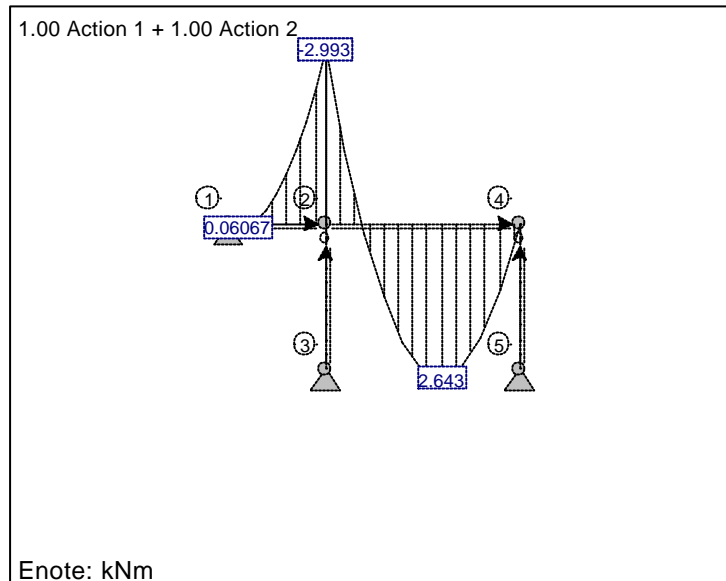
## TABELA OSNIH SIL ZA PODANO PALICJE

```
=====
```

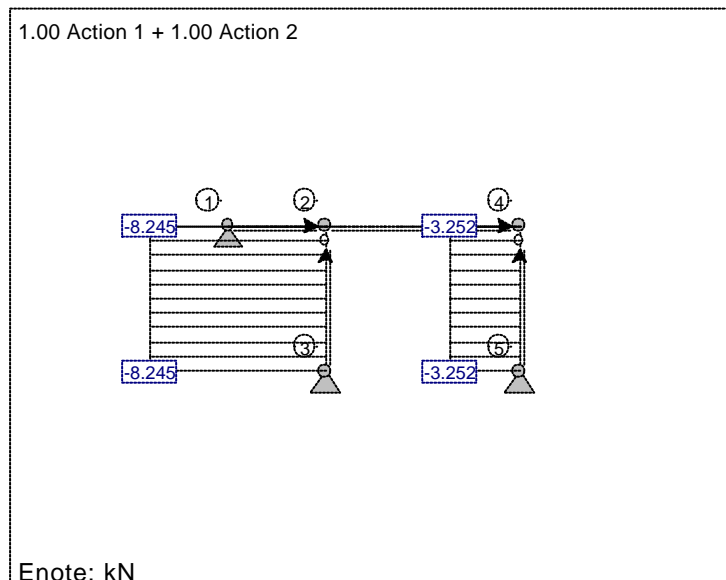
palica	vozel1	vozel2	N_ij
1	1	3	0.000
2	1	4	-2.915
3	2	4	-2.915
4	2	5	-3.000
5	3	4	0.000
6	4	5	0.000

```
=====
```

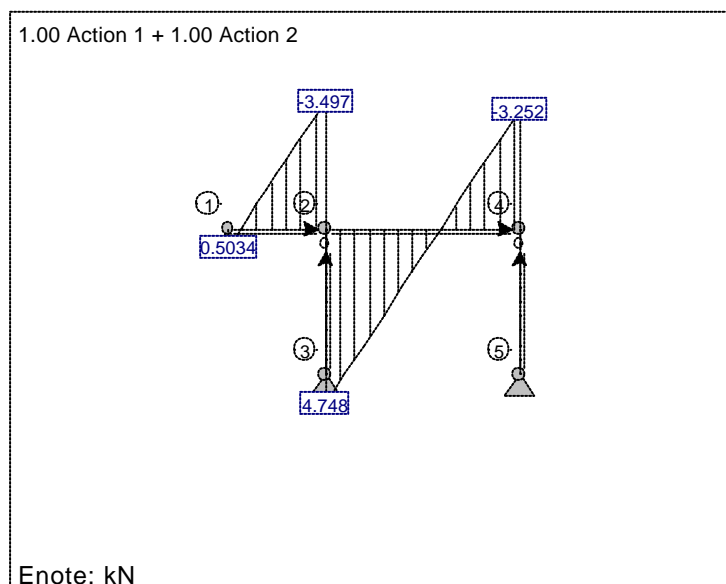
LC1: Load case 2: Upogibni moment My



LC1: Load case 2: Osna sila Fx



LC1: Load case 2: Preèna sila Fz



LC1: Load case 2: Vozlišèni pomiki

Voz.	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
1:	-	-	0.073519
2:	0	0.008245	-0.306914
3:	-	-	0

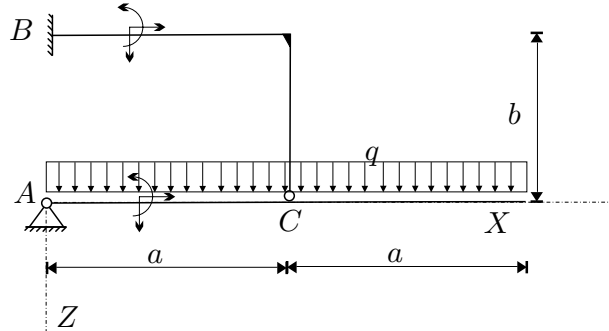
Voz.	ux [cm]	uz [cm]	fiy [deg]
4:	0	0.0032517	0.765685
5:	-	-	0

TRDNOST (VSS) - 4. IZPITNI ROK (06. 09. 2004)

RAČUNSKI DEL IZPITA:

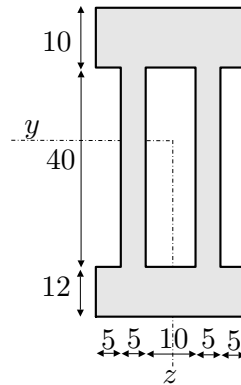
1. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine in navpični pomik v točki  $C$  po metodi sil! Vpliva osnih in prečnih sil ni potrebno upoštevati **(OBVEZNA NALOGA! 40%)**

Podatki:  $a = 4 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  
 $q = 3 \text{ kN/m}$ ,  $E = 3000 \text{ kN/cm}^2$ ,  
 $J_y = 1667 \text{ cm}^4$ ,  $A_x = 200 \text{ cm}^2$ .



2. Prerez na sliki je obremenjen s prečno silo  $N_z = 10 \text{ kN}$  in upogibnim momentom  $M_y = 15 \text{ kNm}$ . Določite in narišite potek normalnih napetosti  $\sigma_{xx}$  in strižnih napetosti  $\sigma_{xz}$  po prerezu! (30%)

Podatki za prerez so v centimetrih.



3. Deformiranje telesa je podano s poljem pomikov  $\vec{u} = 10^{-3} [7y^2 \vec{e}_x + 5xz \vec{e}_y - 2xyz \vec{e}_z]$ .

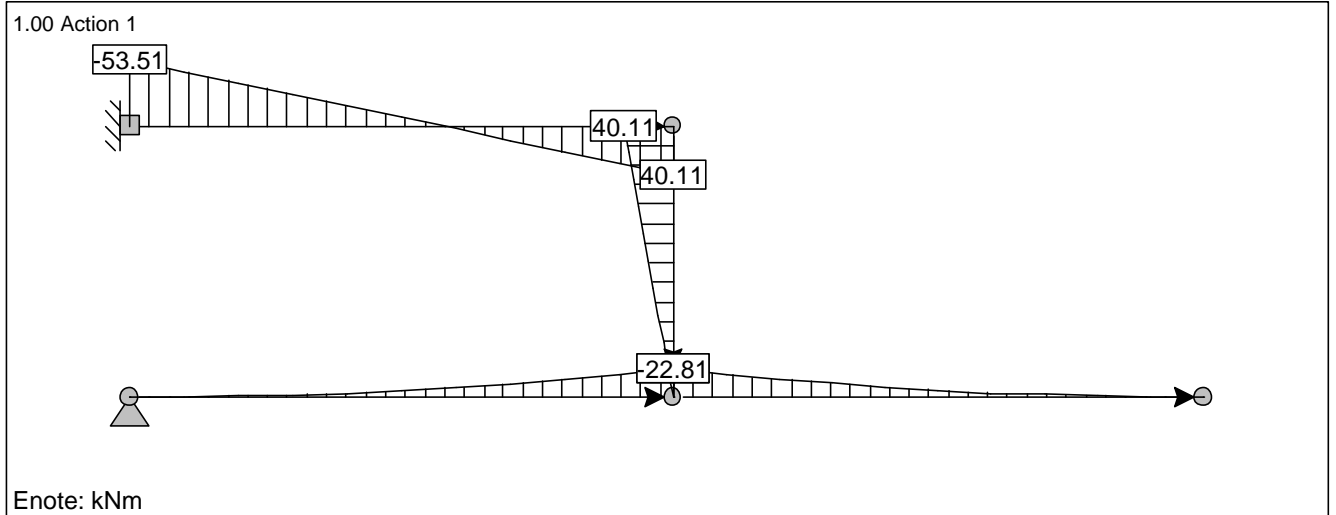
Izračunajte:

- tenzor majhnih deformacij in njegovo vrednost v točki (1,1,1);
- specifično spremembo volumna v točki (1, 1, 1) in;
- specifično spremembo dolžine vlakna v smeri vektorja  $\vec{a} = 5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$ . (30%)

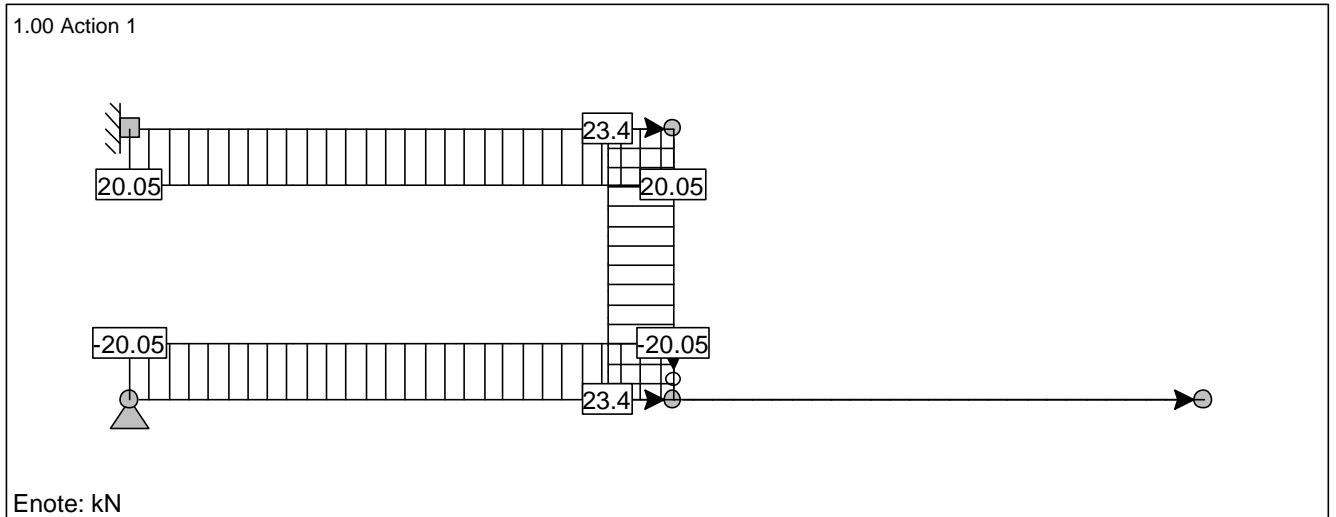
TEORETIČNI DEL IZPITA:

Izmed treh zastavljenih vprašanj si izberete dve, na kateri boste odgovarjali. Izbrani vprašanji jasno označite! Pišite čitljivo.

LC1: Load case 2: Upogibni moment My



LC1: Load case 2: Osna sila Fx



LC1: Load case 2: Preèna sila Fz

