

---

# RAČUNANJE POMIKOV STATIČNO DOLOČENIH KONSTRUKCIJ PO METODI SIL

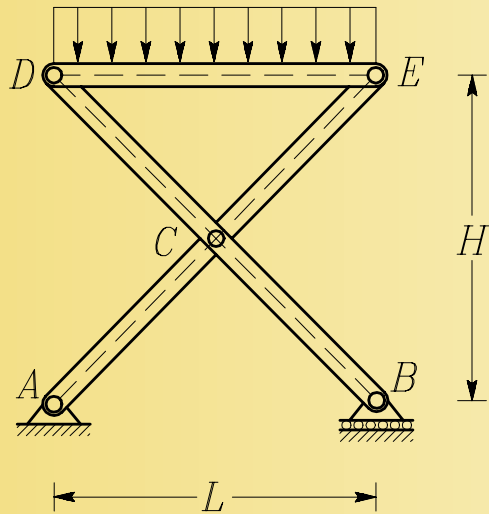
Marjan Stanek, Goran Turk in Rado Flajs  
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
Univerza v Ljubljani

<http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/TRDNOST>

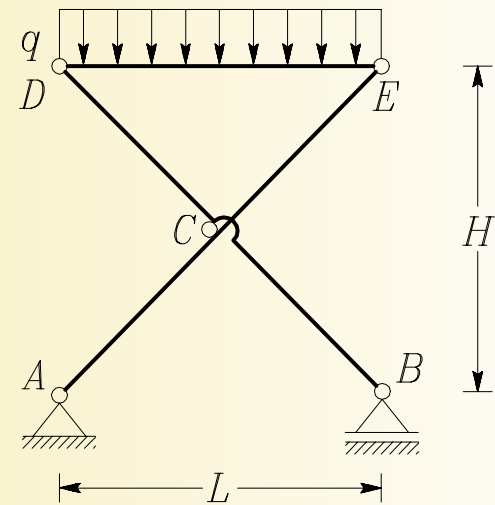
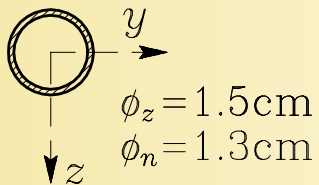
# Primer 5.9

## 1. Naloga

Podatki:  $q = 1 \text{ N/cm.}$ ,  $L = H = 1 \text{ m}$ ,  $\phi_z = 1.5 \text{ cm}$ ,  $\phi_n = 1.3 \text{ cm}$ .  
 $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ .



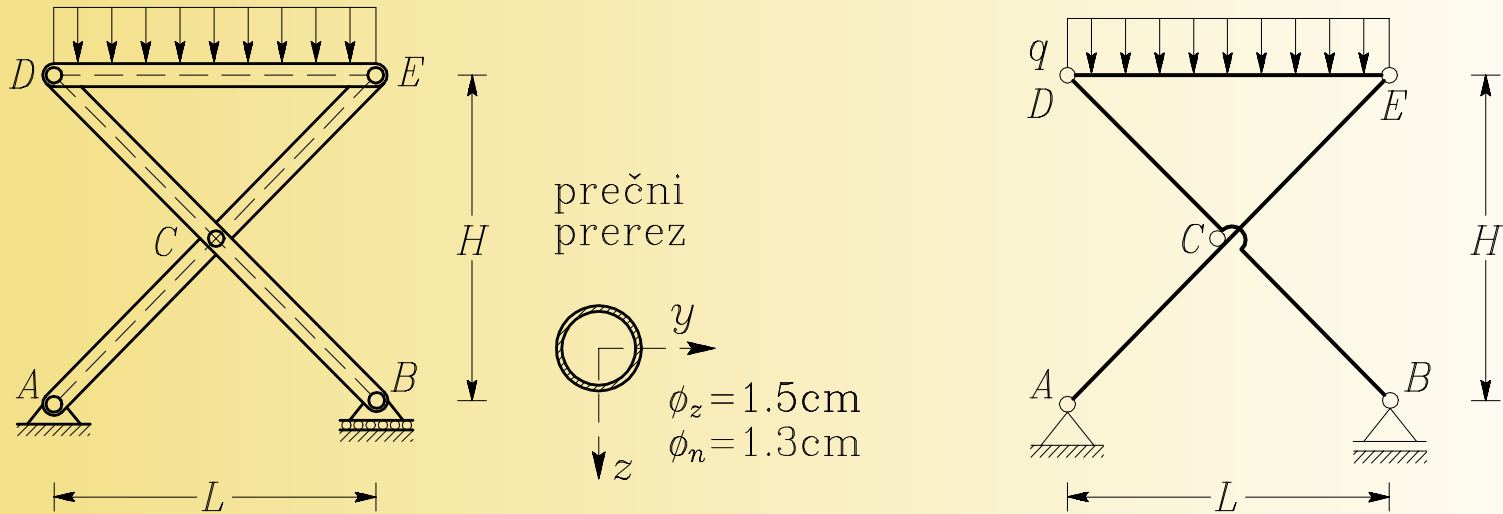
prečni  
prerez



# Primer 5.9

## 1. Naloga

Podatki:  $q = 1 \text{ N/cm.}$ ,  $L = H = 1 \text{ m}$ ,  $\phi_z = 1.5 \text{ cm}$ ,  $\phi_n = 1.3 \text{ cm}$ .  
 $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ .



Izračunajmo navpični pomik v točki  $E$ !

## 2. Postopek

$$A_x = \frac{\phi_z^2 - \phi_n^2}{4} \pi = 0.4398 \text{ cm}^2, \quad I_y = \frac{\phi_z^4 - \phi_n^4}{64} \pi = 0.1083 \text{ cm}^4.$$

## 2. Postopek

$$A_x = \frac{\phi_z^2 - \phi_n^2}{4} \pi = 0.4398 \text{ cm}^2, \quad I_y = \frac{\phi_z^4 - \phi_n^4}{64} \pi = 0.1083 \text{ cm}^4.$$

Za določitev navpičnega pomika v točki  $E$  v to točko postavimo navpično virtualno silo  $\delta F_z = 1$ .

## 2. Postopek

$$A_x = \frac{\phi_z^2 - \phi_n^2}{4} \pi = 0.4398 \text{ cm}^2, \quad I_y = \frac{\phi_z^4 - \phi_n^4}{64} \pi = 0.1083 \text{ cm}^4.$$

Za določitev navpičnega pomika v točki  $E$  v to točko postavimo navpično virtualno silo  $\delta F_z = 1$ .

Navpični pomik v točki  $E$  določimo z enačbo:

$$w_E = \sum_{\text{el}} \int_{Li} \left( \frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} \right) dx$$

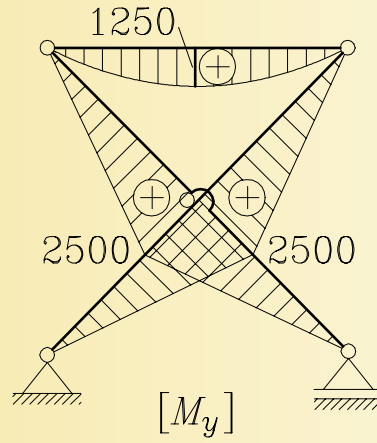
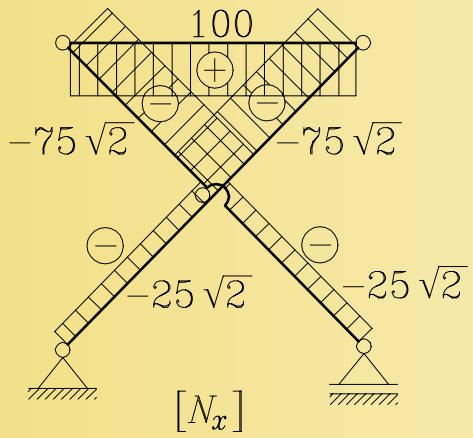
## 2. Postopek

$$A_x = \frac{\phi_z^2 - \phi_n^2}{4} \pi = 0.4398 \text{ cm}^2, \quad I_y = \frac{\phi_z^4 - \phi_n^4}{64} \pi = 0.1083 \text{ cm}^4.$$

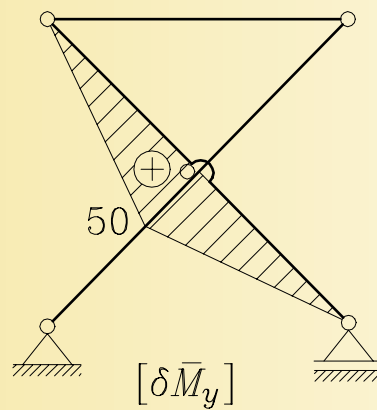
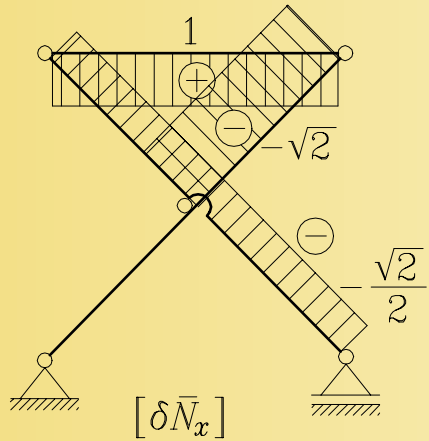
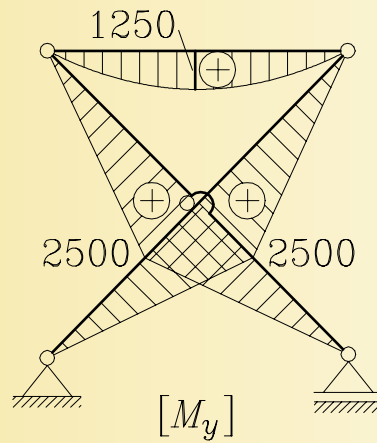
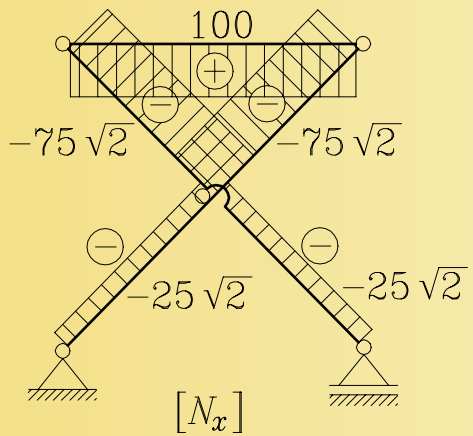
Za določitev navpičnega pomika v točki  $E$  v to točko postavimo navpično virtualno silo  $\delta F_z = 1$ .

Navpični pomik v točki  $E$  določimo z enačbo:

$$w_E = \sum_{\text{el}} \int_{Li} \left( \frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} \right) dx = w_{E,A_x} + w_{E,M_y}$$







$$w_{E,Ax} = \frac{1}{E A_x} \left( 1 \cdot 100 \cdot 100 + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right) = 0.0031 \text{ cm}$$

$$w_{E,Ax} = \frac{1}{E A_x} \left( 1 \cdot 100 \cdot 100 + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right) = 0.0031 \text{ cm}$$

$$w_{E,My} = \frac{1}{E I_y} \left( \frac{2500 \cdot 50 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 \cdot 2 \right) = 2.7203 \text{ cm}$$

$$w_{E,Ax} = \frac{1}{E A_x} \left( 1 \cdot 100 \cdot 100 + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right) = 0.0031 \text{ cm}$$

$$w_{E,My} = \frac{1}{E I_y} \left( \frac{2500 \cdot 50 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 \cdot 2 \right) = 2.7203 \text{ cm}$$

### 3. Rezultat

$$w_E = w_{E,Ax} + w_{E,Ey} = 0.0031 \text{ cm} + 2.7203 \text{ cm} = 2.7234 \text{ cm}$$

### 3. Rezultat

$$w_E = w_{E,Ax} + w_{E,Ey} = 0.0031 \text{ cm} + 2.7203 \text{ cm} = 2.7234 \text{ cm}$$

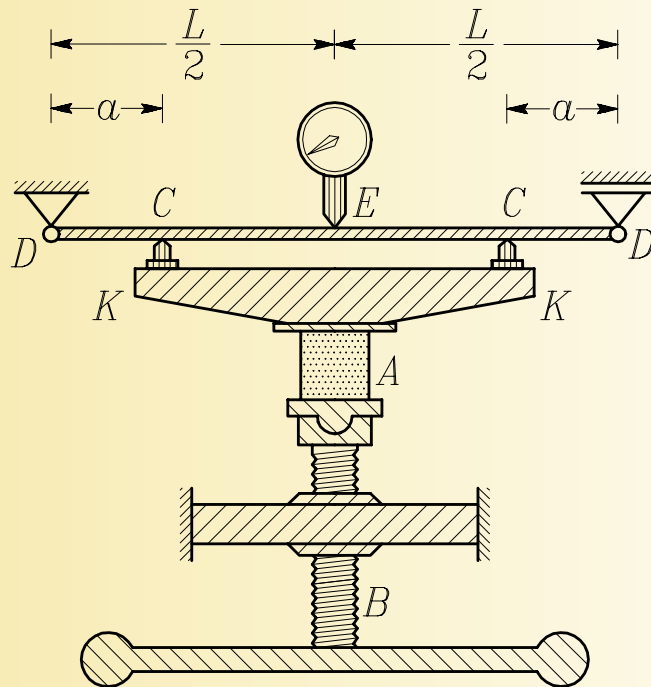
### 4. Zaključek

Relativni vpliv osnih sil na pomik v točki  $E$  znaša le 0.12 % od skupnega pomika. Pomik v točki  $E$  se zgodi skoraj izključno zaradi upogiba nosilcev, medtem ko je vpliv osnih deformacij zanemarljiv. Zato pri računu pomikov velikokrat vpliv osnih sil zanemarimo.

# Primer 5.11

## 1. Naloga

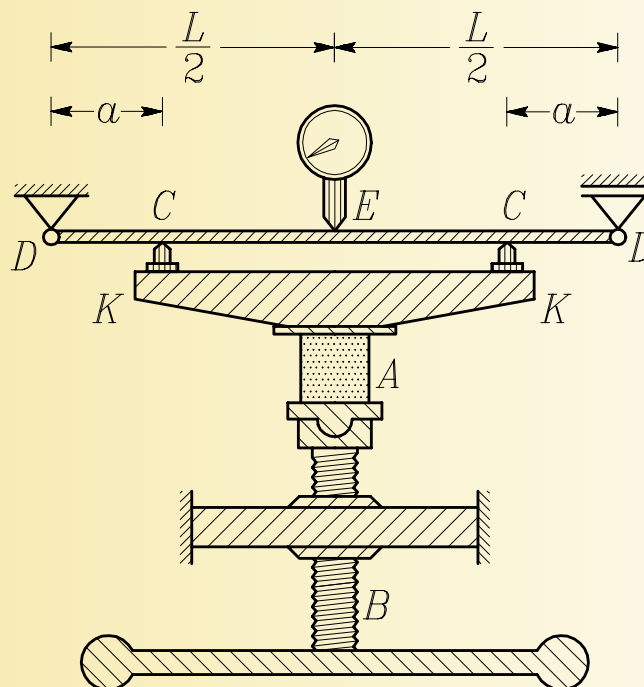
S prikazano napravo merimo silo  $F$ , ki se preko vijaka  $B$  prenaša na preizkušanec  $A$ . Silo merimo z velikostjo pomika jeklenega nosilca  $D-D$  v točki  $E$ . Sila se na nosilec  $D-D$  prenaša preko togega nosilca  $K-K$ .



# Primer 5.11

## 1. Naloga

S prikazano napravo merimo silo  $F$ , ki se preko vijaka  $B$  prenaša na preizkušanec  $A$ . Silo merimo z velikostjo pomika jeklenega nosilca  $D-D$  v točki  $E$ . Sila se na nosilec  $D-D$  prenaša preko togega nosilca  $K-K$ .



Določimo razdaljo  $a$  od podpore  $D$  do prijemališča sile  $K$  na nosilec  $D-D$ , da bo pri sili  $F = 5$  kN upogib nosilca v točki  $E$  enak 1 mm? Nosilec  $D-D$  ima širino 6 cm, višino 4 cm, dolžino 1 m, modul elastičnosti materiala pa je  $20000$  kN/cm<sup>2</sup>.



## 2. Postopek

Pomik  $w_T$  na sredini nosilca  $D-D$  določimo z enačbo

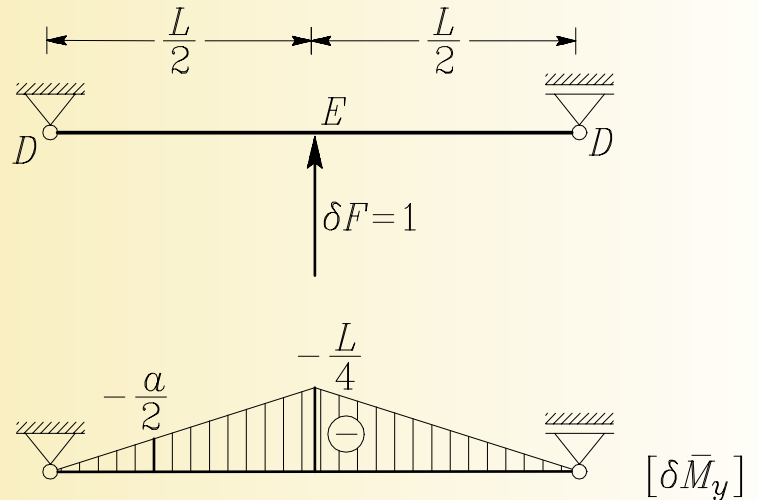
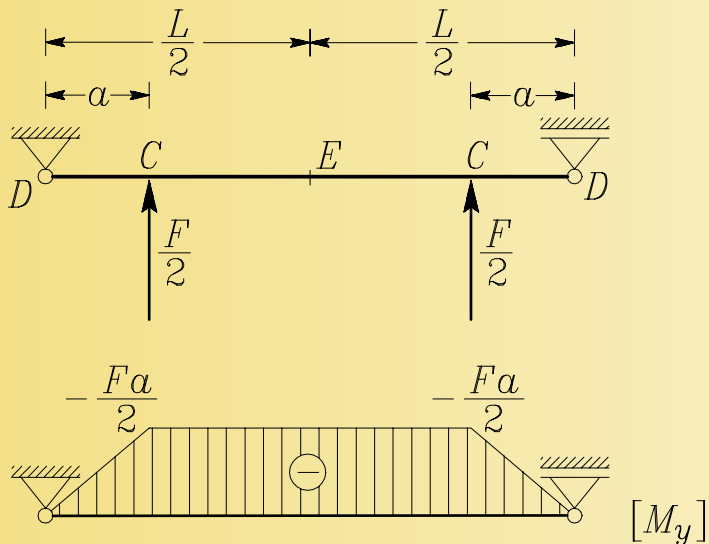
$$w_T = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx.$$

## 2. Postopek

Pomik  $w_T$  na sredini nosilca  $D-D$  določimo z enačbo

$$w_T = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx.$$

Diagram  $M_y$  v nosilcu  $D-D$  zaradi sil  $F/2$  in  $\delta F = 1$ :



Za obravnavani primer dobimo:

Za obravnavani primer dobimo:

$$E I_y w_T = 2 \frac{F a a 2 a}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + 2 \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{L}{4} \right) \left( \frac{L}{2} - a \right) \frac{F a}{2} = -\frac{F a^3}{12} + \frac{F L^2 a}{16}.$$

Iz zadnje enačbe moramo določiti  $a$ , zato jo preoblikujemo takole:

$$a^3 - \frac{3}{4} L^2 a + \frac{12}{F} E I_y w_T = 0.$$

Za obravnavani primer dobimo:

$$E I_y w_T = 2 \frac{F a a 2 a}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + 2 \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{L}{4} \right) \left( \frac{L}{2} - a \right) \frac{F a}{2} = -\frac{F a^3}{12} + \frac{F L^2 a}{16}.$$

Iz zadnje enačbe moramo določiti  $a$ , zato jo preoblikujemo takole:

$$a^3 - \frac{3}{4} L^2 a + \frac{12}{F} E I_y w_T = 0.$$

Vztrajnostni moment pravokotnega prečnega prereza nosilca  $D-D$  je

$$I_y = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4.$$

Za obravnavani primer dobimo:

$$E I_y w_T = 2 \frac{F a a 2 a}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + 2 \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{L}{4} \right) \left( \frac{L}{2} - a \right) \frac{F a}{2} = -\frac{F a^3}{12} + \frac{F L^2 a}{16}.$$

Iz zadnje enačbe moramo določiti  $a$ , zato jo preoblikujemo takole:

$$a^3 - \frac{3}{4} L^2 a + \frac{12}{F} E I_y w_T = 0.$$

Vztrajnostni moment pravokotnega prečnega prereza nosilca  $D-D$  je

$$I_y = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4.$$

Ob upoštevanju podatkov dobimo

$$a^3 - \frac{3}{4} 100^2 a + \frac{12}{5} 2 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 0.1 = 0 \quad \rightarrow \quad a^3 - 7500 a + 153600 = 0.$$

Za obravnavani primer dobimo:

$$E I_y w_T = 2 \frac{F a a 2 a}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + 2 \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} + \frac{L}{4} \right) \left( \frac{L}{2} - a \right) \frac{F a}{2} = -\frac{F a^3}{12} + \frac{F L^2 a}{16}.$$

Iz zadnje enačbe moramo določiti  $a$ , zato jo preoblikujemo takole:

$$a^3 - \frac{3}{4} L^2 a + \frac{12}{F} E I_y w_T = 0.$$

Vztrajnostni moment pravokotnega prečnega prereza nosilca  $D-D$  je

$$I_y = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4.$$

Ob upoštevanju podatkov dobimo

$$a^3 - \frac{3}{4} 100^2 a + \frac{12}{5} 2 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 0.1 = 0 \quad \rightarrow \quad a^3 - 7500 a + 153600 = 0.$$

### 3. Rezultat

To nelinearno enačbo rešimo numerično in dobimo  $a = 21.8758$  cm.



### 3. Rezultat

To nelinearno enačbo rešimo numerično in dobimo  $a = 21.8758$  cm.

Računaje ničel polinoma  $a^3 - 7500a + 153600 = 0$ :

### 3. Rezultat

To nelinearno enačbo rešimo numerično in dobimo  $a = 21.8758$  cm.

Računaje ničel polinoma  $a^3 - 7500a + 153600 = 0$ :

MATLAB:

kot ničlo polinoma:

```
x = roots([1 0 -7500 153600]);  
    -95.4429  
x = 73.5670  
    21.8758
```

### 3. Rezultat

To nelinearno enačbo rešimo numerično in dobimo  $a = 21.8758$  cm.

Računaje ničel polinoma  $a^3 - 7500a + 153600 = 0$ :

**MATLAB:**

kot ničlo polinoma:

```
x = roots([1 0 -7500 153600]);  
    -95.4429
```

```
x = 73.5670  
    21.8758
```

kot ničlo funkcije:

```
f = inline('a^3 - 7500 * a + 153600');  
x = fzero(f, 25)  
x = 21.8758
```

### 3. Rezultat

To nelinearno enačbo rešimo numerično in dobimo  $a = 21.8758$  cm.

Računaje ničel polinoma  $a^3 - 7500a + 153600 = 0$ :

**MATLAB:**

kot ničlo polinoma:

```
x = roots([1 0 -7500 153600]);
      -95.4429
```

```
x = 73.5670
      21.8758
```

kot ničlo funkcije:

```
f = inline('a^3 - 7500 * a + 153600');
```

```
x = fzero(f, 25)
```

```
x = 21.8758
```

**Mathematica:**

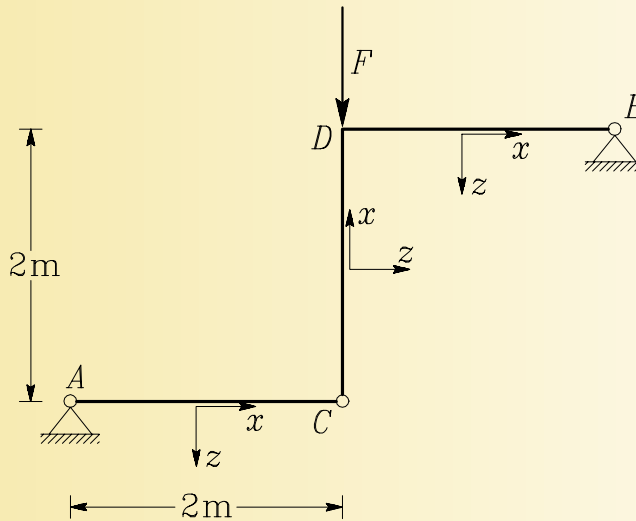
```
FindRoot[a^3 - 7500a + 153600 == 0, {a, 25}];
```

```
{a -> 21.8758 }
```

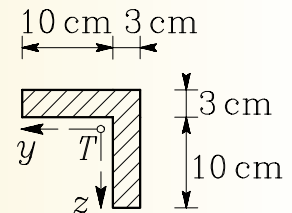
# Primer 5.12

## 1. Naloga

Podatki:  $F = 10 \text{ kN}$ ,  
 modul elastičnosti materi-  
 ala je  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ .  
 Upoštevajmo tudi vpliv os-  
 nih sil na deformiranje kon-  
 strukcije. Dimenzije kon-  
 strukcije so na sliki.



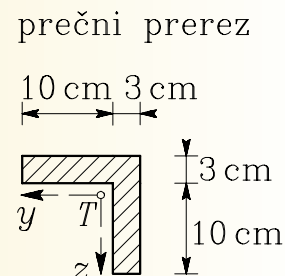
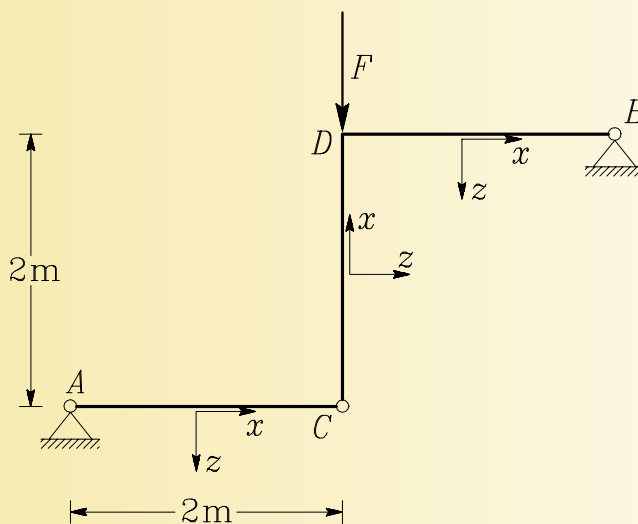
prečni prerez



# Primer 5.12

## 1. Naloga

Podatki:  $F = 10 \text{ kN}$ ,  
 modul elastičnosti materi-  
 ala je  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ .  
 Upoštevajmo tudi vpliv os-  
 nih sil na deformiranje kon-  
 strukcije. Dimenzije kon-  
 strukcije so na sliki.



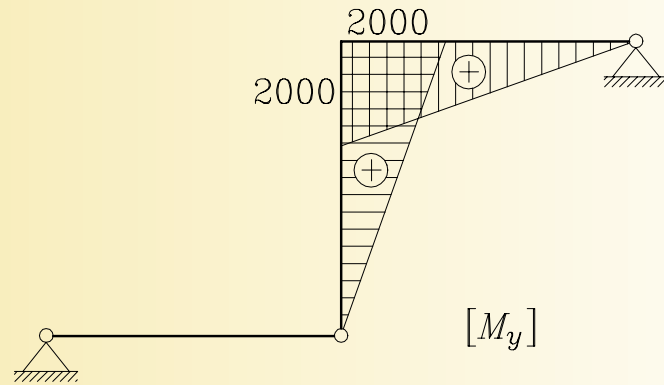
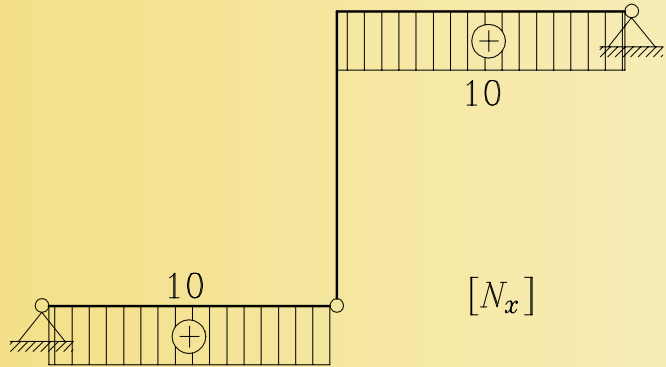
Določimo navpični pomik točke  $D$  statično določene konstrukcije na sliki

## 2. Postopek

Za izračun pomika v točko  $D$  postavimo virtualno silo  $\delta F = 1$ , ki deluje v enaki smeri, kot sila  $F$ .

## 2. Postopek

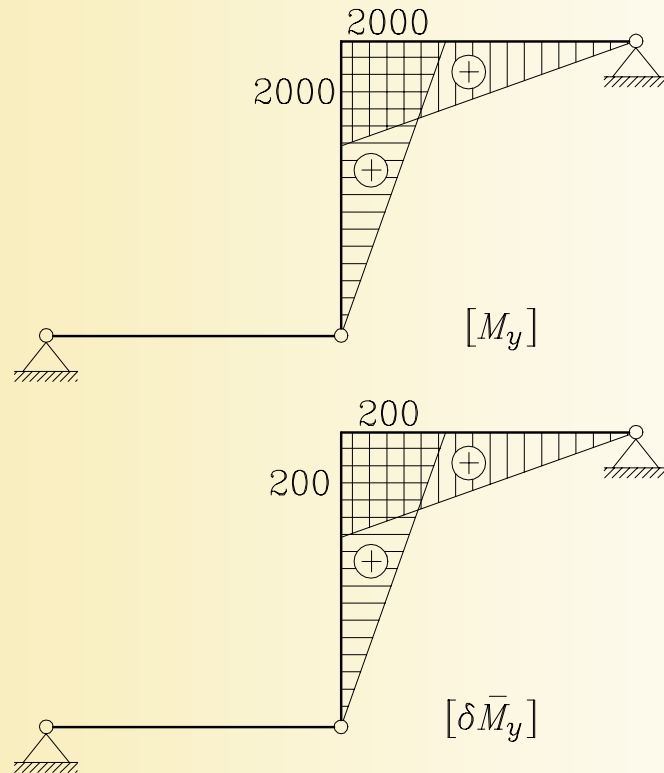
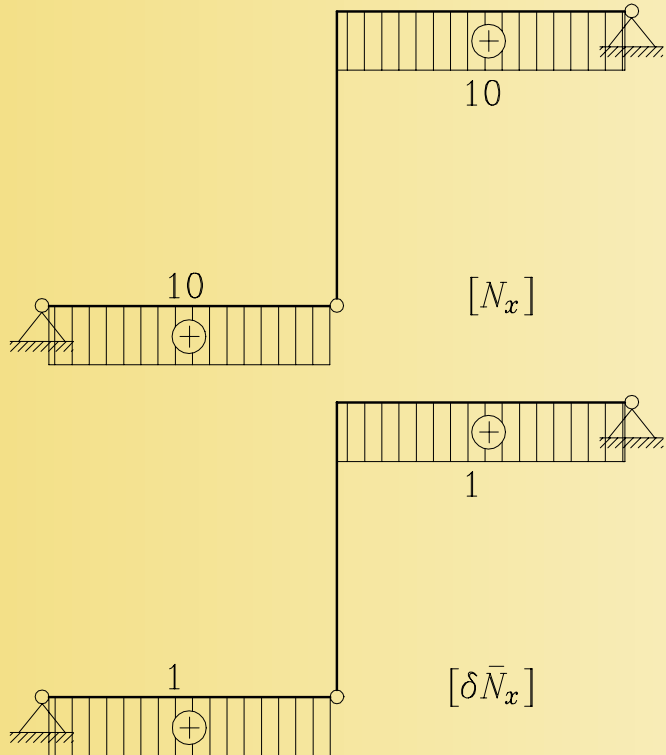
Za izračun pomika v točko  $D$  postavimo virtualno silo  $\delta F = 1$ , ki deluje v enaki smeri, kot sila  $F$ .





## 2. Postopek

Za izračun pomika v točko  $D$  postavimo virtualno silo  $\delta F = 1$ , ki deluje v enaki smeri, kot sila  $F$ .



Enačbo za računanje pomika oziroma zasuka smo izpeljali ob predpostavki, da sta osi  $y$  in  $z$  **glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza.**

Enačbo za računanje pomika oziroma zasuka smo izpeljali ob predpostavki, da sta osi  $y$  in  $z$  **glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza**.

V obravnavanem primeru glavni vztrajnostni osi oklepata z osema  $y$  in  $z$  kot  $45^\circ$ , saj tudi simetrijska os prereza oklepa z osema  $y$  in  $z$  kot  $45^\circ$ .

Enačbo za računanje pomika oziroma zasuka smo izpeljali ob predpostavki, da sta osi  $y$  in  $z$  **glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza**.

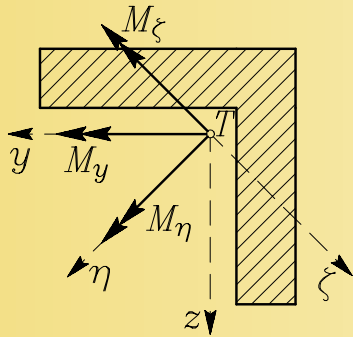
V obravnavanem primeru glavni vztrajnostni osi oklepata z osema  $y$  in  $z$  kot  $45^\circ$ , saj tudi simetrijska os prereza oklepa z osema  $y$  in  $z$  kot  $45^\circ$ .

Če želimo nalogo rešiti, moramo izračunati upogibne momente glede na glavni vztrajnostni osi.

Enačbo za računanje pomika oziroma zasuka smo izpeljali ob predpostavki, da sta osi  $y$  in  $z$  **glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza**.

V obravnavanem primeru glavni vztrajnostni osi oklepata z osema  $y$  in  $z$  kot  $45^\circ$ , saj tudi simetrijska os prereza oklepa z osema  $y$  in  $z$  kot  $45^\circ$ .

Če želimo nalogo rešiti, moramo izračunati upogibne momente glede na glavni vztrajnostni osi.



V tem primeru izračunamo pomik  $w_D$  po enačbi

$$w_D = \int_0^L \left( \frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_\eta \delta \bar{M}_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \delta \bar{M}_\zeta}{E I_\zeta} \right) dx.$$

Geometrijske lastnosti prečnega prereza so:

V tem primeru izračunamo pomik  $w_D$  po enačbi

$$w_D = \int_0^L \left( \frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_\eta \delta \bar{M}_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \delta \bar{M}_\zeta}{E I_\zeta} \right) dx.$$

Geometrijske lastnosti prečnega prereza so:

$$A_x = 69 \text{ cm}^2, \quad I_y = I_z = 995.663 \text{ cm}^4, \quad I_{yz} = 551.087 \text{ cm}^4,$$

$$2 \alpha_g = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \quad \rightarrow \quad \alpha_g = 45^\circ,$$

$$I_\eta = 1546.750 \text{ cm}^4, \quad I_\zeta = 444.576 \text{ cm}^4.$$

V tem primeru izračunamo pomik  $w_D$  po enačbi

$$w_D = \int_0^L \left( \frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_\eta \delta \bar{M}_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \delta \bar{M}_\zeta}{E I_\zeta} \right) dx.$$

Geometrijske lastnosti prečnega prereza so:

$$A_x = 69 \text{ cm}^2, \quad I_y = I_z = 995.663 \text{ cm}^4, \quad I_{yz} = 551.087 \text{ cm}^4,$$

$$2 \alpha_g = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \quad \rightarrow \quad \alpha_g = 45^\circ,$$

$$I_\eta = 1546.750 \text{ cm}^4, \quad I_\zeta = 444.576 \text{ cm}^4.$$

Upogibna momenta v točki  $D$  glede na osi  $\eta$  in  $\zeta$  sta:



V tem primeru izračunamo pomik  $w_D$  po enačbi

$$w_D = \int_0^L \left( \frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_\eta \delta \bar{M}_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \delta \bar{M}_\zeta}{E I_\zeta} \right) dx.$$

Geometrijske lastnosti prečnega prereza so:

$$A_x = 69 \text{ cm}^2, \quad I_y = I_z = 995.663 \text{ cm}^4, \quad I_{yz} = 551.087 \text{ cm}^4,$$

$$2 \alpha_g = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \quad \rightarrow \quad \alpha_g = 45^\circ,$$

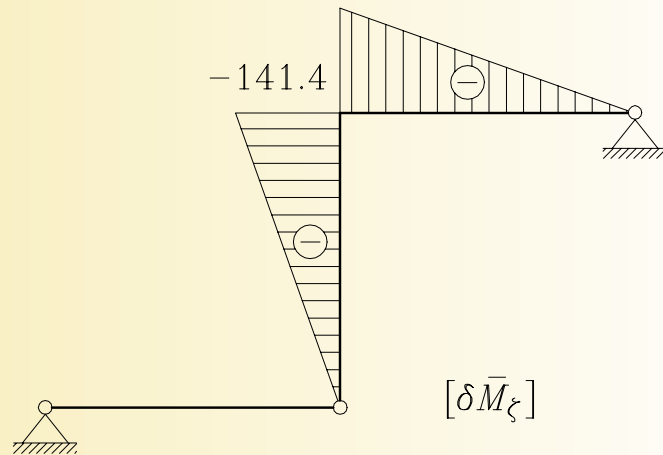
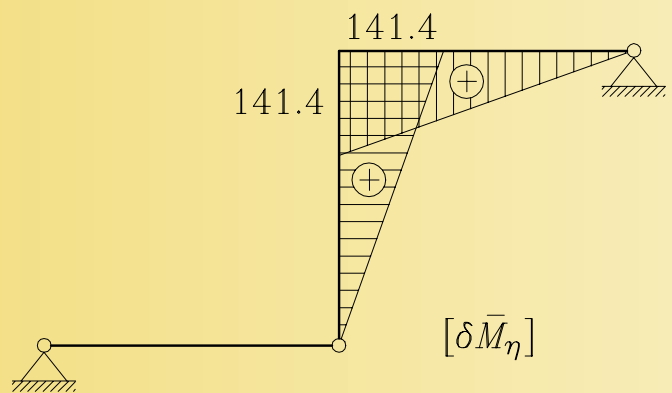
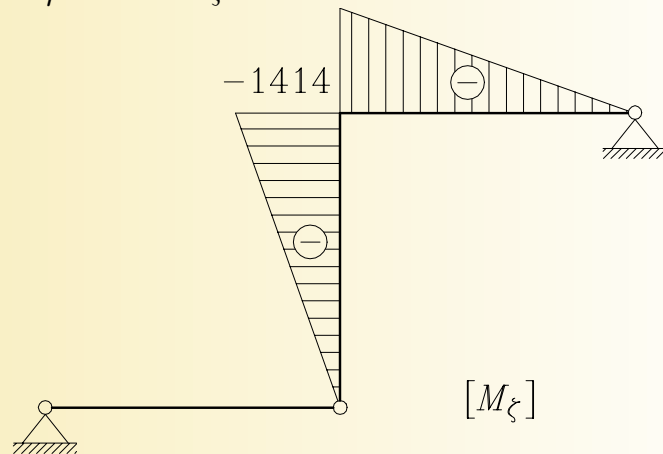
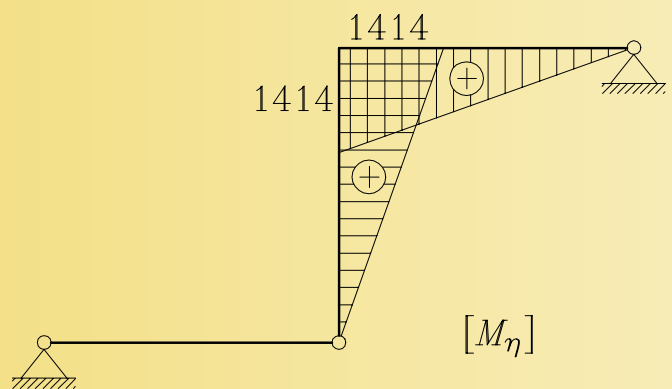
$$I_\eta = 1546.750 \text{ cm}^4, \quad I_\zeta = 444.576 \text{ cm}^4.$$

Upogibna momenta v točki  $D$  glede na osi  $\eta$  in  $\zeta$  sta:

$$M_\eta = M_y \cos 45^\circ = 1414 \text{ kNcm}, \quad M_\zeta = -M_y \cos 45^\circ = -1414 \text{ kNcm}.$$

Diagrama  $M_\eta$  in  $M_\zeta$  zaradi sile  $F$  ter  $\delta\bar{M}_\eta$  in  $\delta\bar{M}_\zeta$  zaradi sile  $\delta F_z = 1$ :

Diagrama  $M_\eta$  in  $M_\zeta$  zaradi sile  $F$  ter  $\delta\bar{M}_\eta$  in  $\delta\bar{M}_\zeta$  zaradi sile  $\delta F_z = 1$ :



### 3. Rezultat

Pomik  $w_D$  je:

$$\begin{aligned}
 w_D &= \frac{1}{E A_x} (10 \cdot 200 \cdot 1 \cdot 2) + \\
 &+ \frac{1}{E I_\eta} \left( \frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2 \right) + \\
 &+ \frac{1}{E I_\zeta} \left( \frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2 \right) = \\
 &= 0.0029 + 0.8620 + 2.9991 = 3.86 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

### 3. Rezultat

Pomik  $w_D$  je:

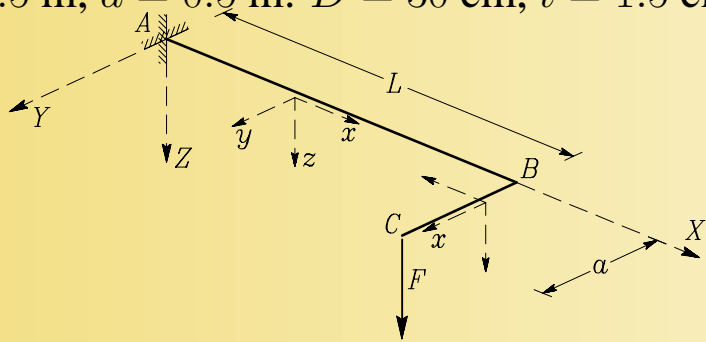
$$\begin{aligned}
 w_D &= \frac{1}{E A_x} (10 \cdot 200 \cdot 1 \cdot 2) + \\
 &+ \frac{1}{E I_\eta} \left( \frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2 \right) + \\
 &+ \frac{1}{E I_\zeta} \left( \frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2 \right) = \\
 &= 0.0029 + 0.8620 + 2.9991 = 3.86 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Tudi v tem primeru je del pomika zaradi osne deformacije zelo majhen v primerjavi z delom zaradi upogiba, saj znaša le 0.075% skupnega pomika.

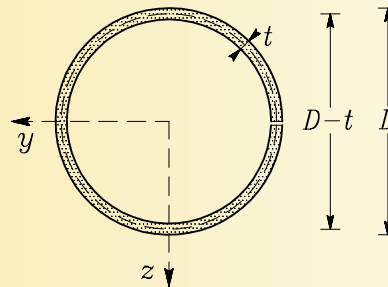
# Primer 5.17

## 1. Naloga

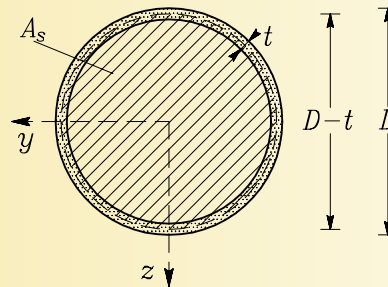
Konzola je sestavljena iz dveh elementov z odprtim/zaprtim tankostenskim prečnim prerezumom. Podatki:  $E = 24000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $G = 10000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $I_{y2} = 5000 \text{ cm}^4$ ,  $L = 1.5 \text{ m}$ ,  $a = 0.5 \text{ m}$ .  $D = 30 \text{ cm}$ ,  $t = 1.5 \text{ cm}$ .



prečni prerez AB



zaprti prečni prerez



Določimo velikost sile  $F$  tako, da bo največja strižna napetost enaka dopustni strižni napetosti  $\tau_{\text{dop}} = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Določimo velikost sile  $F$  tako, da bo največja strižna napetost enaka dopustni strižni napetosti  $\tau_{\text{dop}} = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Določimo tudi, za koliko se sila  $F$  lahko poveča, če stik zavarimo tako, da dobimo elementa z zaprtim tankostenskim prerezom.



Določimo velikost sile  $F$  tako, da bo največja strižna napetost enaka dopustni strižni napetosti  $\tau_{\text{dop}} = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Določimo tudi, za koliko se sila  $F$  lahko poveča, če stik zavarimo tako, da dobimo elementa z zaprtim tankostenskim prerezom.

Pri tem predpostavimo, da nastane v elementih enakomerna torzija.

Določimo velikost sile  $F$  tako, da bo največja strižna napetost enaka dopustni strižni napetosti  $\tau_{\text{dop}} = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Določimo tudi, za koliko se sila  $F$  lahko poveča, če stik zavarimo tako, da dobimo elementa z zaprtim tankostenskim prerezom.

Pri tem predpostavimo, da nastane v elementih enakomerna torzija.

Izračunajmo tudi navpični pomik  $w_C$  točke  $C$  za sili, ki ustrezata odprtemu oziroma zaprtemu prečnemu prerezu.

Določimo velikost sile  $F$  tako, da bo največja strižna napetost enaka dopustni strižni napetosti  $\tau_{\text{dop}} = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Določimo tudi, za koliko se sila  $F$  lahko poveča, če stik zavarimo tako, da dobimo elementa z zaprtim tankostenskim prerezom.

Pri tem predpostavimo, da nastane v elementih enakomerna torzija.

Izračunajmo tudi navpični pomik  $w_C$  točke  $C$  za sili, ki ustrezata odprtemu oziroma zaprtemu prečnemu prerezu.

## 2. Postopek in rezultati

### 2..1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

## 2. Postopek in rezultati

### 2.1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3} d\zeta =$$

## 2. Postopek in rezultati

### 2..1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3} d\zeta = \frac{t^3}{3} L_s = \frac{1.5^3}{3} 2\pi r =$$

## 2. Postopek in rezultati

### 2.1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3} d\zeta = \frac{t^3}{3} L_s = \frac{1.5^3}{3} 2\pi r = 100.727 \text{ cm}^4.$$

## 2. Postopek in rezultati

### 2.1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3} d\zeta = \frac{t^3}{3} L_s = \frac{1.5^3}{3} 2\pi r = 100.727 \text{ cm}^4.$$

Silo  $F_{1,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .



## 2. Postopek in rezultati

### 2.1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3} d\zeta = \frac{t^3}{3} L_s = \frac{1.5^3}{3} 2\pi r = 100.727 \text{ cm}^4.$$

Silo  $F_{1,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} = \frac{|M_x|_{\text{max}}}{I_x} t_{\text{max}}$ .

## 2. Postopek in rezultati

### 2.1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3} d\zeta = \frac{t^3}{3} L_s = \frac{1.5^3}{3} 2\pi r = 100.727 \text{ cm}^4.$$

Silo  $F_{1,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} = \frac{|M_x|_{\text{max}}}{I_x} t_{\text{max}}$ .

Upoštevamo, da je  $|M_x|_{\text{max}} = F_{1,\text{dop}} a$  in dobimo  $\frac{F_{1,\text{dop}} a}{I_x} t_{\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

## 2. Postopek in rezultati

### 2.1 Dopustna sila za oprti $AB$ prerez

$$2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$$

$$I_x = \int_{L_s} \frac{t^3}{3} d\zeta = \frac{t^3}{3} L_s = \frac{1.5^3}{3} 2\pi r = 100.727 \text{ cm}^4.$$

Silo  $F_{1,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} = \frac{|M_x|_{\text{max}}}{I_x} t_{\text{max}}$ .

Upoštevamo, da je  $|M_x|_{\text{max}} = F_{1,\text{dop}} a$  in dobimo  $\frac{F_{1,\text{dop}} a}{I_x} t_{\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

Iz zadnje enačbe izračunamo  $F_{1,\text{dop}}$ :

$$F_{1,\text{dop}} \leq \frac{\tau_{\text{dop}} I_x}{a t_{\text{max}}} = \frac{10 \cdot 100.727}{50 \cdot 1.5} = 13.43 \text{ kN}.$$

## 2..2 Dopustna sila za zaprti $AB$ prerez

$$A_s = \frac{\pi \cdot 28.5^2}{4} = 637.94 \text{ cm}^2.$$

## 2..2 Dopustna sila za zaprti $AB$ prerez

$$A_s = \frac{\pi \cdot 28.5^2}{4} = 637.94 \text{ cm}^2.$$

Silo  $F_{2,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

## 2..2 Dopustna sila za zaprti $AB$ prerez

$$A_s = \frac{\pi \cdot 28.5^2}{4} = 637.94 \text{ cm}^2.$$

Silo  $F_{2,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} = \frac{|M_x|_{\text{max}}}{2 A_s t_{\text{min}}}$ .

## 2..2 Dopustna sila za zaprti $AB$ prerez

$$A_s = \frac{\pi \cdot 28.5^2}{4} = 637.94 \text{ cm}^2.$$

Silo  $F_{2,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} = \frac{|M_x|_{\text{max}}}{2 A_s t_{\text{min}}}$ .

Upoštevamo, da je  $|M_x|_{\text{max}} = F_{2,\text{dop}} a$  in dobimo

$$\frac{F_{2,\text{dop}} a}{2 A_s t_{\text{min}}} \leq \tau_{\text{dop}}.$$

## 2..2 Dopustna sila za zaprti $AB$ prerez

$$A_s = \frac{\pi \cdot 28.5^2}{4} = 637.94 \text{ cm}^2.$$

Silo  $F_{2,\text{dop}}$  izračunamo iz pogoja  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}$ .

Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi  $\sigma_{x\zeta,\text{max}} = \frac{|M_x|_{\text{max}}}{2 A_s t_{\text{min}}}$ .

Upoštevamo, da je  $|M_x|_{\text{max}} = F_{2,\text{dop}} a$  in dobimo

$$\frac{F_{2,\text{dop}} a}{2 A_s t_{\text{min}}} \leq \tau_{\text{dop}}.$$

Iz zadnje enačbe izračunamo  $F_{2,\text{dop}}$ :

$$F_{2,\text{dop}} \leq \frac{\tau_{\text{dop}} 2 A_s t_{\text{min}}}{a} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 637.94 \cdot 1.5}{50} = 382.764 \text{ kN}.$$



## 2..3 Račun pomika točke $C$

$$w_C = \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} \left( \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} + \frac{M_x \delta \bar{M}_x}{G I_x} \right) dx$$

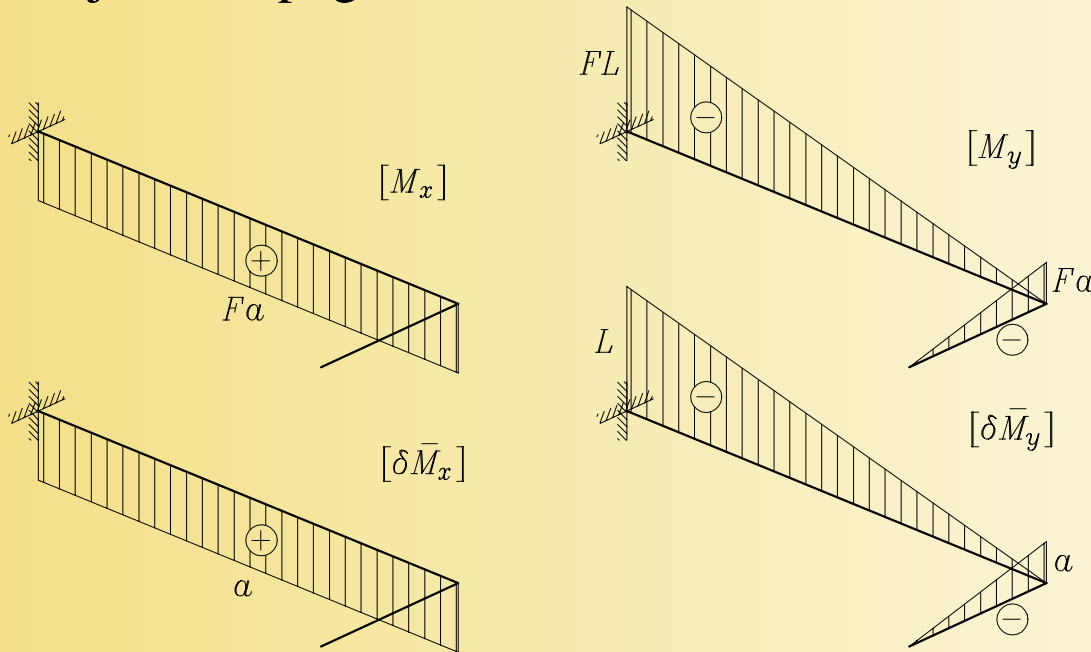
## 2..3 Račun pomika točke $C$

$$w_C = \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} \left( \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} + \frac{M_x \delta \bar{M}_x}{G I_x} \right) dx = w_{C, M_y} + w_{C, M_x}.$$

## 2.3 Račun pomika točke $C$

$$w_C = \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} \left( \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} + \frac{M_x \delta \bar{M}_x}{G I_x} \right) dx = w_{C, M_y} + w_{C, M_x}.$$

Torzijska in upogibna momenta zaradi sil  $F$  in  $\delta F_z = 1$ :



## 2..4 Račun pomika točke $C$ za nosilec z odprtim prečnim prerezom

$$(F_{1,\text{dop}} = 13.43 \text{ kN})$$

$$I_{y1} = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4] = 13673.73 \text{ cm}^4.$$

## 2..4 Račun pomika točke $C$ za nosilec z odprtim prečnim prerezom

$$(F_{1,\text{dop}} = 13.43 \text{ kN})$$

$$I_{y1} = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4] = 13673.73 \text{ cm}^4.$$

$$w_{C,My} = \frac{1}{E I_{y1}} \frac{F_{1,\text{dop}} L L}{2} \frac{2 L}{3} + \frac{1}{E I_{y2}} \frac{F_{1,\text{dop}} a a}{2} \frac{2 a}{3} = 0.0507 \text{ cm}.$$

## 2.4 Račun pomika točke $C$ za nosilec z odprtim prečnim prerezom

$$(F_{1,\text{dop}} = 13.43 \text{ kN})$$

$$I_{y1} = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4] = 13673.73 \text{ cm}^4.$$

$$w_{C,My} = \frac{1}{E I_{y1}} \frac{F_{1,\text{dop}} L L}{2} \frac{2 L}{3} + \frac{1}{E I_{y2}} \frac{F_{1,\text{dop}} a a}{2} \frac{2 a}{3} = 0.0507 \text{ cm}.$$

$$w_{C,Mx} = \frac{1}{G I_x} F_{1,\text{dop}} a L a = 5.0 \text{ cm}.$$

## 2.4 Račun pomika točke $C$ za nosilec z odprtim prečnim prerezom

$$(F_{1,\text{dop}} = 13.43 \text{ kN})$$

$$I_{y1} = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4] = 13673.73 \text{ cm}^4.$$

$$w_{C,My} = \frac{1}{E I_{y1}} \frac{F_{1,\text{dop}} L L}{2} \frac{2 L}{3} + \frac{1}{E I_{y2}} \frac{F_{1,\text{dop}} a a}{2} \frac{2 a}{3} = 0.0507 \text{ cm}.$$

$$w_{C,Mx} = \frac{1}{G I_x} F_{1,\text{dop}} a L a = 5.0 \text{ cm}.$$

$$w_C = 0.0507 + 5.0 = 5.0507 \text{ cm}.$$

## 2..4 Račun pomika točke $C$ za nosilec z odprtim prečnim prerezom

$$(F_{1,\text{dop}} = 13.43 \text{ kN})$$

$$I_{y1} = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4] = 13673.73 \text{ cm}^4.$$

$$w_{C,My} = \frac{1}{E I_{y1}} \frac{F_{1,\text{dop}} L L}{2} \frac{L}{3} + \frac{1}{E I_{y2}} \frac{F_{1,\text{dop}} a a}{2} \frac{2a}{3} = 0.0507 \text{ cm}.$$

$$w_{C,Mx} = \frac{1}{G I_x} F_{1,\text{dop}} a L a = 5.0 \text{ cm}.$$

$$w_C = 0.0507 + 5.0 = 5.0507 \text{ cm}.$$

Delež pomika zaradi upogiba je veliko manjši od deleža zaradi torzije. Nosilci z odprtim tankostenskim prečnim prerezom slabo prevzamejo torzijsko obtežbo.



## 2..5 Račun pomika točke $C$ za nosilec z zaprtim prečnim prerezom

$$(F_{2,\text{dop}} = 382.764 \text{ kN})$$

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\frac{d\zeta}{t}}$$

## 2..5 Račun pomika točke $C$ za nosilec z zaprtim prečnim prerezom

$$(F_{2,\text{dop}} = 382.764 \text{ kN})$$

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\frac{d\zeta}{t}} = \frac{4 \cdot 637.94^2}{\frac{\pi \cdot 28.5}{1.5}} = 27271.92 \text{ cm}^4.$$

## 2..5 Račun pomika točke $C$ za nosilec z zaprtim prečnim prerezom

$$(F_{2,\text{dop}} = 382.764 \text{ kN})$$

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\frac{d\zeta}{t}} = \frac{4 \cdot 637.94^2}{\frac{\pi \cdot 28.5}{1.5}} = 27271.92 \text{ cm}^4.$$

$$w_C = \frac{F_{2,\text{dop}}}{3 E} \left( \frac{L^3}{I_{y1}} + \frac{a^3}{I_{y2}} \right) + \frac{F_{2,\text{dop}} L a^2}{G I_x} = 1.445 + 0.526 = 1.971 \text{ cm}.$$

## 2.5 Račun pomika točke $C$ za nosilec z zaprtim prečnim prerezom

$$(F_{2,\text{dop}} = 382.764 \text{ kN})$$

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\frac{d\zeta}{t}} = \frac{4 \cdot 637.94^2}{\frac{\pi \cdot 28.5}{1.5}} = 27271.92 \text{ cm}^4.$$

$$w_C = \frac{F_{2,\text{dop}}}{3 E} \left( \frac{L^3}{I_{y1}} + \frac{a^3}{I_{y2}} \right) + \frac{F_{2,\text{dop}} L a^2}{G I_x} = 1.445 + 0.526 = 1.971 \text{ cm}.$$

Pomik zaradi torzije je manjši od pomika zaradi upogiba. Nosilci z zaprtim tankosten-skim prečnim prerezom so primerni za prevzem torzijske obtežbe. Kljub temu, da smo konstrukcijo z odprtim prečnim prerezom obremenili kar z 28.5 krat manjšo silo kot nosilec z zaprtim prerezom, so pomiki pri odprtem prerezu več kot 2.5 krat večji.

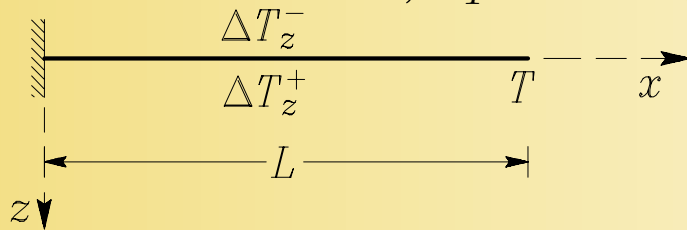
# Primer 5.19

## 1. Naloga

Na spodnji strani previsnega linijskega nosilca nastane sprememba temperature  $\Delta T_z^+ = 10^\circ\text{C}$ , na zgornji strani pa  $\Delta T_z^- = 30^\circ\text{C}$ .

$\Delta T_z^+$  in  $\Delta T_z^-$  se vzdolž osi nosilca ne spreminjata.

Podatki:  $L = 100\text{ cm}$ ,  $h = 10\text{ cm}$ ,  $A_x = 10\text{ cm}^2$ ,  $I_y = 100\text{ cm}^4$ ,  
 $E = 10000\text{ kN/cm}^2$ ,  $\alpha_T = 10^{-5}\text{ (1/}^\circ\text{C)}$ .



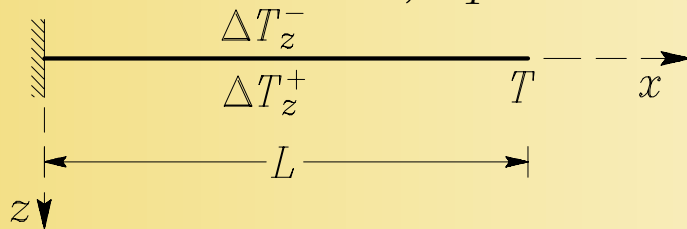
# Primer 5.19

## 1. Naloga

Na spodnji strani previsnega linijskega nosilca nastane sprememba temperature  $\Delta T_z^+ = 10^\circ\text{C}$ , na zgornji strani pa  $\Delta T_z^- = 30^\circ\text{C}$ .

$\Delta T_z^+$  in  $\Delta T_z^-$  se vzdolž osi nosilca ne spreminjata.

Podatki:  $L = 100 \text{ cm}$ ,  $h = 10 \text{ cm}$ ,  $A_x = 10 \text{ cm}^2$ ,  $I_y = 100 \text{ cm}^4$ ,  
 $E = 10000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\alpha_T = 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ .



Izračunajmo pomika  $u_T$  in  $w_T$  ter zasuk  $\omega_T \equiv \omega_{Ty}$  točke  $T$  pri  $x = L$ .  
 Določimo tudi potek notranjih sil!

## 2. Postopek in rezultati

Ker so notranje sile zaradi resnične obtežbe enake nič, računamo  $\delta\bar{W}_n^*$  po enačbi

$$\delta\bar{W}_n^*(\Delta T) = \int_0^L \alpha_T (\Delta T_x \delta\bar{N}_x + \Delta T_z \delta\bar{M}_y) dx.$$

Za račun pomikov  $u_T$  in  $w_T$  ter zasuka  $\omega_T$  moramo izračunati  $\Delta T_x$  in  $\Delta T_z$  in notranje sile, za virtualni sili  $\delta F_{Tx} = 1$  in  $\delta F_{Tz} = 1$  in za virtualni moment  $\delta M_{Ty} = 1$

## 2. Postopek in rezultati

Ker so notranje sile zaradi resnične obtežbe enake nič, računamo  $\delta\bar{W}_n^*$  po enačbi

$$\delta\bar{W}_n^*(\Delta T) = \int_0^L \alpha_T (\Delta T_x \delta\bar{N}_x + \Delta T_z \delta\bar{M}_y) dx.$$

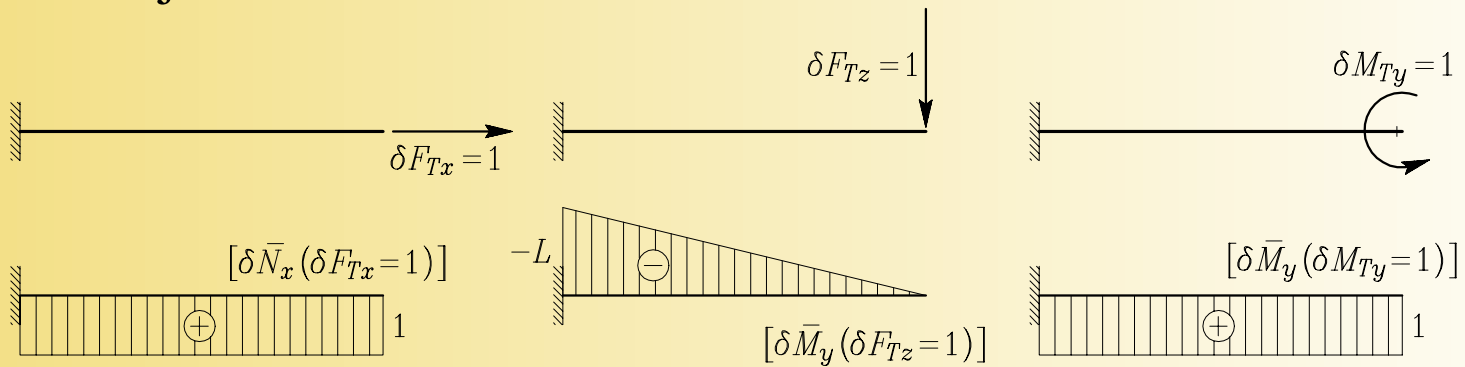
Za račun pomikov  $u_T$  in  $w_T$  ter zasuka  $\omega_T$  moramo izračunati  $\Delta T_x$  in  $\Delta T_z$  in notranje sile, za virtualni sili  $\delta F_{Tx} = 1$  in  $\delta F_{Tz} = 1$  in za virtualni moment  $\delta M_{Ty} = 1$

Konstanti  $\Delta T_x$  in  $\Delta T_z$  izračunamo po enačbi

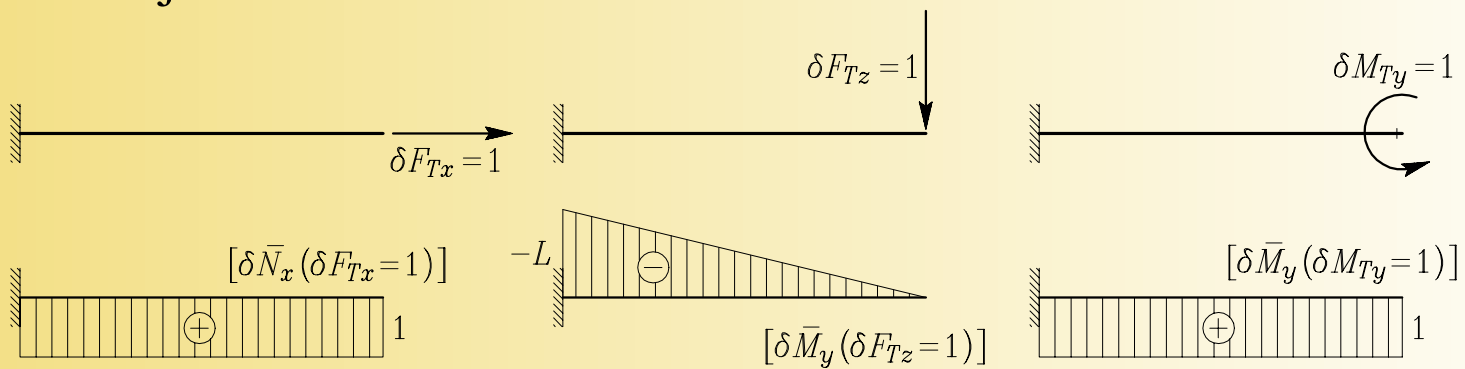
$$\Delta T_x = \frac{10 + 30}{2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \quad \Delta T_z = \frac{10 - 30}{10} = -2 \text{ }^\circ\text{C/cm}.$$



# Notranje sile



# Notranje sile



$$u_{Tx} = u_T = \alpha_T \Delta T_x \int_0^L \delta \bar{N}_x dx = 0.00001 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 1 = 0.02 \text{ cm.}$$

$$u_{Tx} = u_T = \alpha_T \Delta T_x \int_0^L \delta \bar{N}_x dx = 0.00001 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 1 = 0.02 \text{ cm.}$$

Vidimo, da  $\Delta T_z$  ne vpliva na pomik  $u_T$ .

$$u_{Tx} = u_T = \alpha_T \Delta T_x \int_0^L \delta \bar{N}_x dx = 0.00001 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 1 = 0.02 \text{ cm.}$$

Vidimo, da  $\Delta T_z$  ne vpliva na pomik  $u_T$ .

$$u_{Tz} = w_T = \alpha_T \Delta T_z \int_0^L \delta \bar{M}_y dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot \frac{-100 \cdot 100}{2} = 0.1 \text{ cm.}$$

$$u_{Tx} = u_T = \alpha_T \Delta T_x \int_0^L \delta \bar{N}_x dx = 0.00001 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 1 = 0.02 \text{ cm.}$$

Vidimo, da  $\Delta T_z$  ne vpliva na pomik  $u_T$ .

$$u_{Tz} = w_T = \alpha_T \Delta T_z \int_0^L \delta \bar{M}_y dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot \frac{-100 \cdot 100}{2} = 0.1 \text{ cm.}$$

Vidimo, da na  $w_T$  ne vpliva sprememba temperature  $\Delta T_x$  ampak samo  $\Delta T_z$ .

$$u_{Tx} = u_T = \alpha_T \Delta T_x \int_0^L \delta \bar{N}_x dx = 0.00001 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 1 = 0.02 \text{ cm.}$$

Vidimo, da  $\Delta T_z$  ne vpliva na pomik  $u_T$ .

$$u_{Tz} = w_T = \alpha_T \Delta T_z \int_0^L \delta \bar{M}_y dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot \frac{-100 \cdot 100}{2} = 0.1 \text{ cm.}$$

Vidimo, da na  $w_T$  ne vpliva sprememba temperature  $\Delta T_x$  ampak samo  $\Delta T_z$ .

$$\omega_T = \alpha_T \Delta T_z \int_0^L \delta \bar{M}_y dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot 100 \cdot 1 = -0.002 \text{ rad} = -0.115^\circ.$$

Iz ravnotežnih pogojev za obravnavani primer sledi, da so notranje sile enake nič.

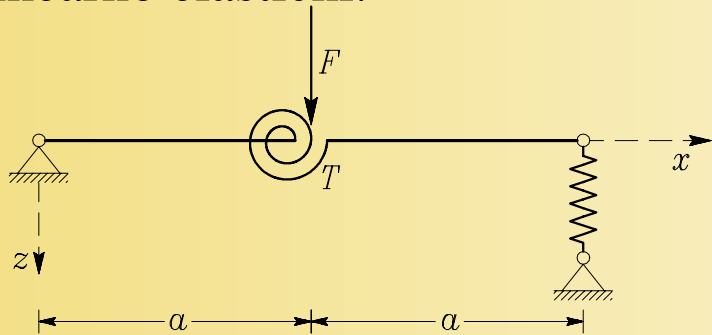
Velja splošno pravilo, da sprememba temperature v **statično določenih konstrukcijah** povzroči deformacije ne pa tudi notranjih sil.



# Primer 5.22

## 1. Naloga

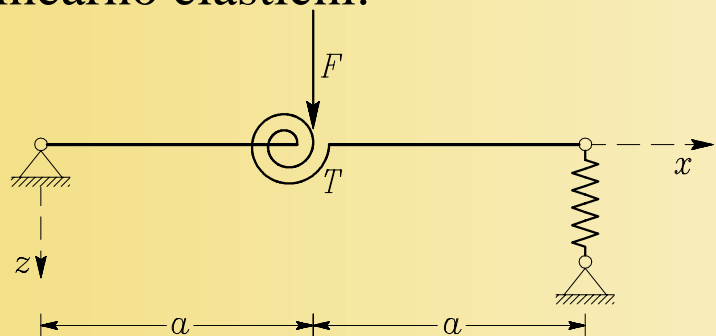
Konstrukcija je sestavljena iz dveh nosilcev in dveh vzmeti. Vzmeti sta linearno elastični.



# Primer 5.22

## 1. Naloga

Konstrukcija je sestavljena iz dveh nosilcev in dveh vzmeti. Vzmeti sta linearno elastični.



Določimo navpični pomik točke  $T$ .

## 2. Postopek

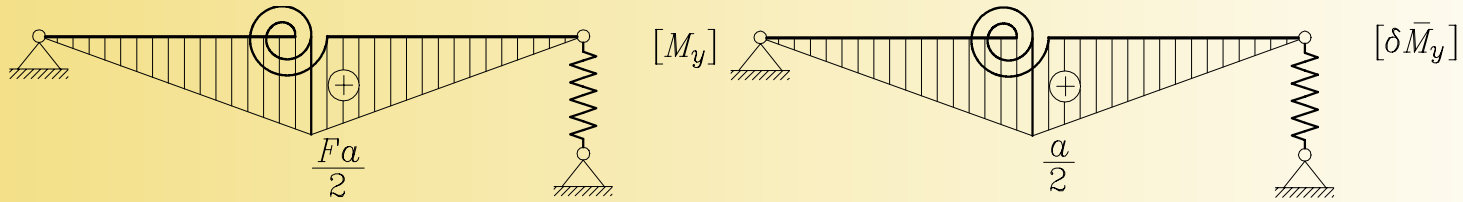
Ker vpliv prečne sile zanemarimo, je:

$$w_T = \int_0^{2a} \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{EI_y} dx + \frac{N_v \delta \bar{N}_v}{k_x} + \frac{M_v \delta \bar{M}_v}{k_\varphi}.$$

## 2. Postopek

Ker vpliv prečne sile zanemarimo, je:

$$w_T = \int_0^{2a} \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{EI_y} dx + \frac{N_v \delta \bar{N}_v}{k_x} + \frac{M_v \delta \bar{M}_v}{k_\varphi}.$$

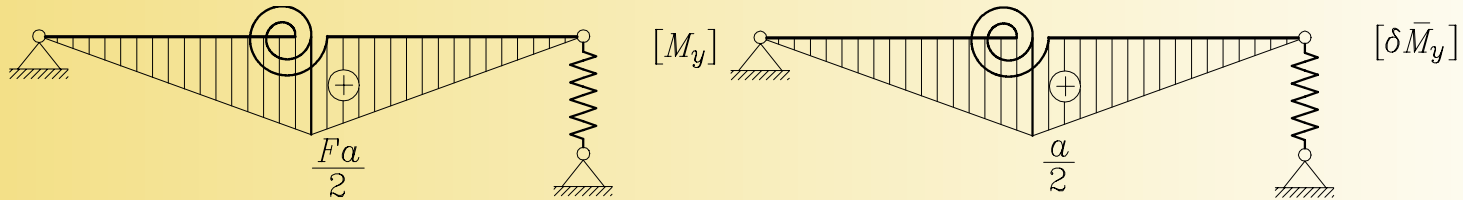


Osna sila in upogibni moment v vzmeteh sta:  $N_v = -F/2$  in  $M_v = Fa/2$ .

## 2. Postopek

Ker vpliv prečne sile zanemarimo, je:

$$w_T = \int_0^{2a} \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{EI_y} dx + \frac{N_v \delta \bar{N}_v}{k_x} + \frac{M_v \delta \bar{M}_v}{k_\varphi}.$$



Osna sila in upogibni moment v vzmeteh sta:  $N_v = -F/2$  in  $M_v = F a/2$ .

Osna sila in upogibni moment v vzmeteh sta:  $\delta N_v = -1/2$  in  $\delta M_v = a/2$ .

Navpični pomik točke  $T$  je

$$w_T = \frac{1}{E I_y} \frac{F a a 2 a}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{F/2}{k_x} \frac{1}{2} + \frac{F a/2}{k_\varphi} \frac{a}{2}$$

in po preureditvi enačbe dobimo

$$w_T = F \left( \frac{a^3}{6 E I_y} + \frac{1}{4 k_x} + \frac{a^2}{4 k_\varphi} \right).$$