

Neznano silo  $X_1$  izračunamo iz enačbe

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{\frac{5 F a^3}{6 E I_y} + \frac{2 F a^2}{k_\varphi}}{\frac{a^3}{3 E I_y} + \frac{1}{k_v} + \frac{a^2}{k_\varphi}}.$$

Vrednosti sile v linijski vzmeti in upogibnih momentov v nosilcu so odvisne od razmerij med togostmi obeh vzmeti in nosilca. Primerjamo lahko togost linijske vzmeti  $k_v$ , s togostjo spiralne vzmeti  $k_\varphi/a^2$  in togostjo nosilca  $E I_y/a^3$ . Prvi skrajni primer je določen s pogojem, da je togost vzmeti  $k_v$  bistveno manjša od togosti spiralne vzmeti in nosilca:

$$k_v \ll \frac{k_\varphi}{a^2}, \quad k_v \ll \frac{E I_y}{a^3}.$$

V tem primeru je  $X_1 = 0$ , nosilec se obnaša, kot da linijske vzmeti sploh ni. Diagram upogibnega momenta je prikazan na sliki 5.183a. Moment v spiralni vzmeti je  $M_v = -2 F a$ .

Pri drugem posebnem primeru je togost spiralne vzmeti bistveno manjša od togosti linijske vzmeti in nosilca:

$$\frac{k_\varphi}{a^2} \ll k_v, \quad \frac{k_\varphi}{a^2} \ll \frac{E I_y}{a^3}.$$

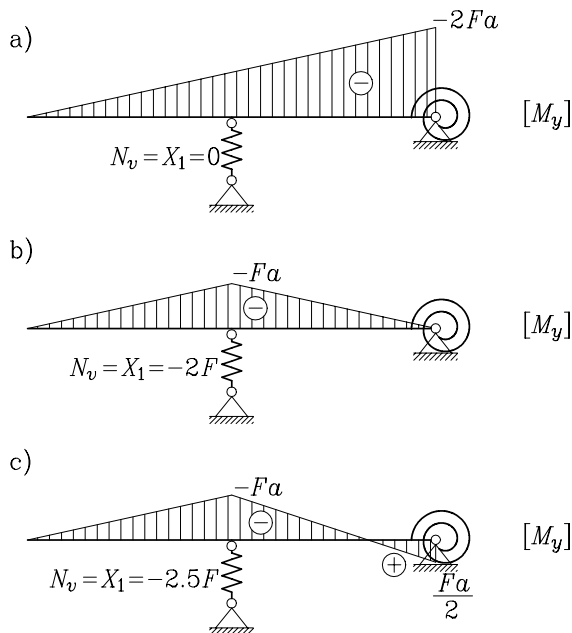
Sila  $X_1$ , ki predstavlja silo v linijski vzmeti  $N_v$ , je enaka  $X_1 = -2 F$ , nosilec pa se obnaša kot prostoležeči nosilec s previsom, kot da spiralne vzmeti ni. Moment v spiralni vzmeti je torej enak nič  $M_v = 0$ . Diagram upogibnega momenta prikazujemo na sliki 5.183b.

Tretji posebni primer je določen s pogojem, da je togost nosilca zelo majhna v primerjavi s togostima vzmeti:

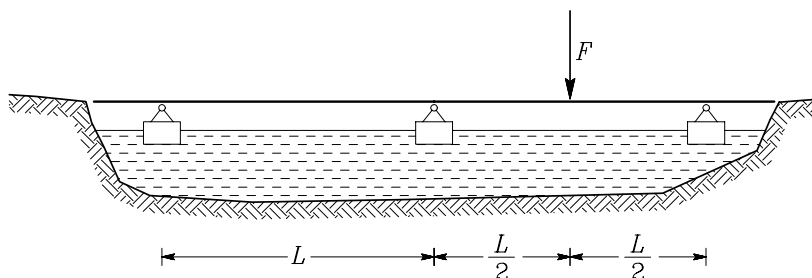
$$\frac{E I_y}{a^3} \ll k_v, \quad \frac{E I_y}{a^3} \ll \frac{k_\varphi}{a^2} \ll .$$

Sila  $X_1$  je sedaj enaka  $X_1 = N_v = -2.5 F$ . Moment v spiralni vzmeti je  $M_v = F a/2$ . Nosilec se obnaša tako, kot da so vse podpore absolutno toge. Diagram upogibnega momenta prikazujemo na sliki 5.183c.



Slika 5.183: Diagram  $M_y$  na statično nedoločeni konstrukciji

**Primer 5.44** Nosilec pontonskega mostu je podprt s tremi pontoni s tlorisno ploščino  $A$ . Določimo reakcijo  $B_z$  na srednji ponton! Pri tem zanemarimo lastno težo nosilca. V neobremenjenem stanju so vse podpore na isti višini (slika 5.184).



Slika 5.184: Geometrija in obtežba

Tlorisna ploščina pontona je  $A = 8 \text{ m}^2$ , specifična teža vode je  $\gamma_v = 10 \text{ kN/m}^3$ . Dolžina nosilca je  $L = 4 \text{ m}$ , vztrajnostni moment prečnega prereza pa  $I_y = 25759 \text{ cm}^4$ . Modul elastičnosti materiala nosilca je  $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$ .

Togost podlage  $k_v$  določimo z enačbo

$$F = k_v u.$$



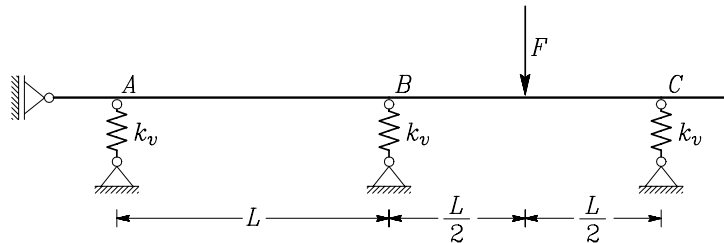
Sila  $F$ , s katero se ponton odziva na obtežbo nosilca, je enaka teži izpodrinjene vode

$$F = A \gamma_v u.$$

Z  $u$  smo označili ugrez pontona zaradi obtežbe  $F$ . Togost podlage  $k_v$  je

$$k_v = \frac{F}{u} = A \gamma_v.$$

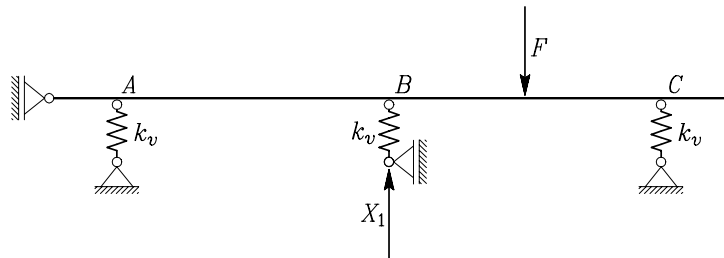
Na sliki 5.185 prikazujemo statični model konstrukcije, kjer smo pontone nadomestili z linijskimi linearno elastičnimi vzmetmi.



Slika 5.185: Računski model konstrukcije

Stopnja statične nedoločenosti je  $n = 4 - 3 = 1$ .

Osnovno konstrukcijo lahko izberemo tako, da sprostimo pomik srednje vzmeti (slika 5.186).

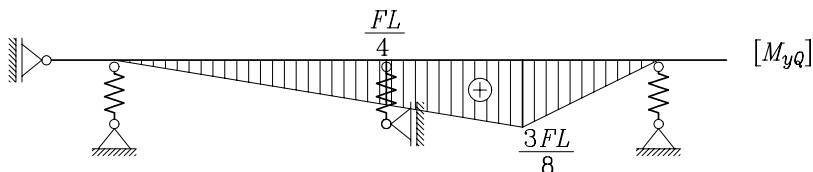


Slika 5.186: Osnovna konstrukcija

Sila  $X_1$ , ki smo jo predpostavili na mestu in v smeri srednje vzmeti, je enaka iskani reakciji  $B_z$ . Kine-matični pogoj je

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0.$$

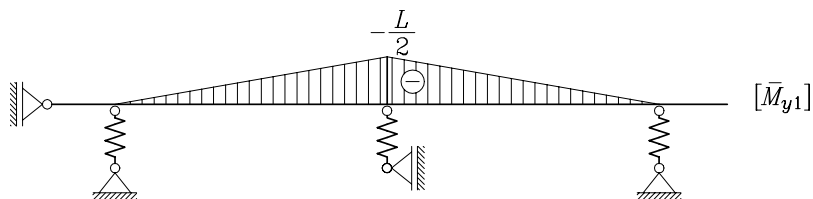
Notranje sile zaradi zunanje obtežbe prikazujemo na sliki 5.187.

Slika 5.187: Upogibni moment zaradi sile  $F$ 

Osne sile v vzmeteh zaradi zunanje obtežbe so:

$$N_{AQ} = -\frac{F}{4}, \quad N_{BQ} = 0, \quad N_{CQ} = -\frac{3F}{4}.$$

Upogibni moment zaradi sile  $X_1 = 1$  je podan na sliki 5.188.

Slika 5.188: Upogibni moment zaradi sile  $X_1 = 1$ 

Osne sile v vzmeteh zaradi sile  $X_1 = 1$  so

$$\bar{N}_{vA1} = \frac{1}{2}, \quad \bar{N}_{vB1} = -1, \quad \bar{N}_{vC1} = \frac{1}{2}.$$

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  sta:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E I_y} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{2} 2 + \frac{\bar{N}_{vA1} \bar{N}_{vA1}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vB1} \bar{N}_{vB1}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vC1} \bar{N}_{vC1}}{k_v} = \\ &= \frac{L^3}{6 E I_y} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{k_v} + \frac{(-1)(-1)}{k_v} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{k_v} = \frac{L^3}{6 E I_y} + \frac{3}{2 A \gamma_v}, \\ b_1 &= \frac{1}{E I_y} \left( \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{2}{3} \frac{F L}{4} + \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \frac{3 F L}{8} + \frac{2 F L}{4} \right) + \frac{L}{4} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \frac{3 F L}{8} + \frac{1 F L}{4} \right) \right) + \\ &+ \frac{L}{4} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3 F L}{8} \left) + \frac{\bar{N}_{vA1} N_{vAQ}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vB1} N_{vBQ}}{k_v} + \frac{\bar{N}_{vC1} N_{vCQ}}{k_v} = \\ &= -\frac{11 F L^3}{96 E I_y} - \frac{1}{2} \frac{F}{4} \frac{1}{A \gamma_v} + 0 - \frac{1}{2} \frac{3 F}{4} \frac{1}{A \gamma_v} = -\frac{11 F L^3}{96 E I_y} - \frac{F}{2 A \gamma_v}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem prikazanih izrazov v kinematičnem pogoju dobimo neznanko  $X_1$

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = F \frac{48 E I_y + 11 A \gamma_v L^3}{16 (9 E I_y + A \gamma_v L^3)} \equiv -B_z.$$



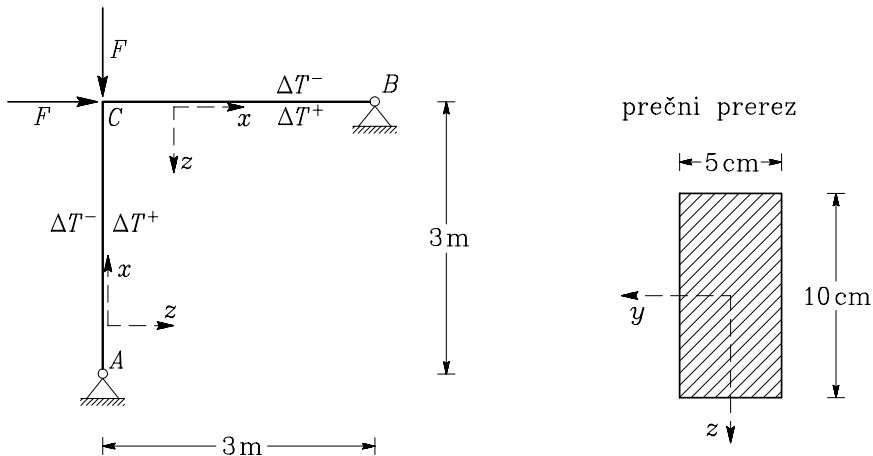
Celotne sile v vzmeteh so:

$$N_{vA} = -\frac{F}{4} + \frac{X_1}{2}, \quad N_{vB} = -X_1, \quad N_{vC} = -\frac{3F}{4} + \frac{X_1}{2}.$$

Za podane vrednosti sledi

$$B_z = -X_1 = -F \frac{48 \cdot 20000 \cdot 25759 + 11 \cdot 80000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 400^3}{16 (9 \cdot 20000 \cdot 25759 + 80000 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 400^3)} = -0.337 F.$$

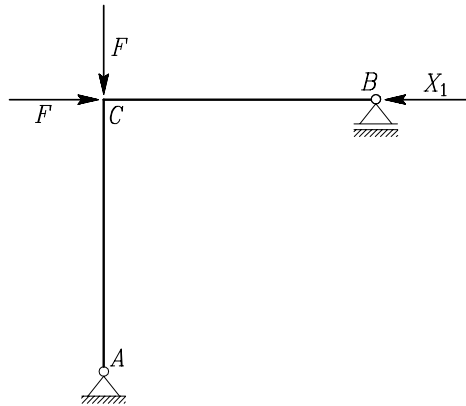
**Primer 5.45** Določimo potek upogibnega momenta za konstrukcijo na sliki 5.189. Konstrukcija je obtežena z dvema točkovnima silama velikosti  $F$  v točki  $C$ , poleg tega se je konstrukcija segrela za  $\Delta T^+ = 10^\circ\text{C}$  na notranji strani in za  $\Delta T^- = 30^\circ\text{C}$  na zunanji strani. Predpostavimo, da se temperatura po prerezu spreminja linearno. Prečni prerez elementov ima pravokotno obliko širine 5 cm in višine 10 cm. Modul elastičnosti  $E$  materiala je  $2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ , temperaturni razteznostni koeficient  $\alpha_T$  je  $10^{-5} (\text{°C})^{-1}$ .



Slika 5.189: Na konstrukcijo razen zunanjih sil deluje še sprememba temperature

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da sprostimo vodoravni pomik v podpori  $B$  (slika 5.190).





Slika 5.190: Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da podporo  $B$  spremenimo tako, da dopušča vodoravni pomik

Neznano silo  $X_1$  izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11}X_1 + b_1 = 0.$$

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  določimo po enačbah:

$$a_{11} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left( \frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{E A_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{E I_y} \right) dx,$$

$$b_1 = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left( \left( \frac{\bar{N}_{x1} N_{xQ}}{E A_x} + \frac{\bar{M}_{yi} M_{yQ}}{E I_y} \right) + \alpha_T (\Delta T_x \bar{N}_{xi} + \Delta T_z \bar{M}_{yi}) \right) dx,$$

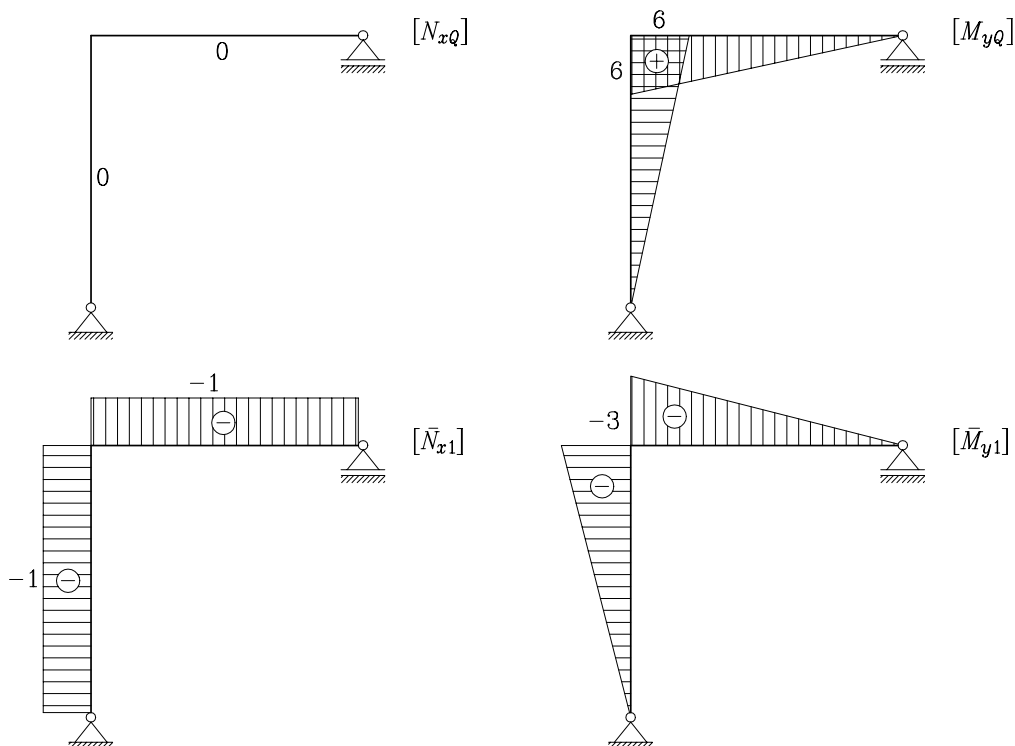
kjer sta

$$\Delta T_x = \frac{10 + 30}{2} = 20^\circ\text{C},$$

$$\Delta T_z = \frac{10 - 30}{0.10} = -200^\circ\text{C/m}.$$

Na sliki 5.191 prikazujemo osno silo in upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi točkovnih sil v točki  $C$  ter zaradi sile  $X_1 = 1$ .



Slika 5.191: Notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi sile  $X_1 = 1$  in zaradi zunanje obtežbe

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  izračunamo iz diagramov na sliki 5.191

$$E a_{11} = \frac{1}{A_x} 3 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{I_y} \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} 3 \cdot 2 = \frac{6}{A_x} + \frac{18}{I_y} = \frac{6}{5 \cdot 10^{-3}} + \frac{18}{416.67 \cdot 10^{-8}} = 4321200,$$

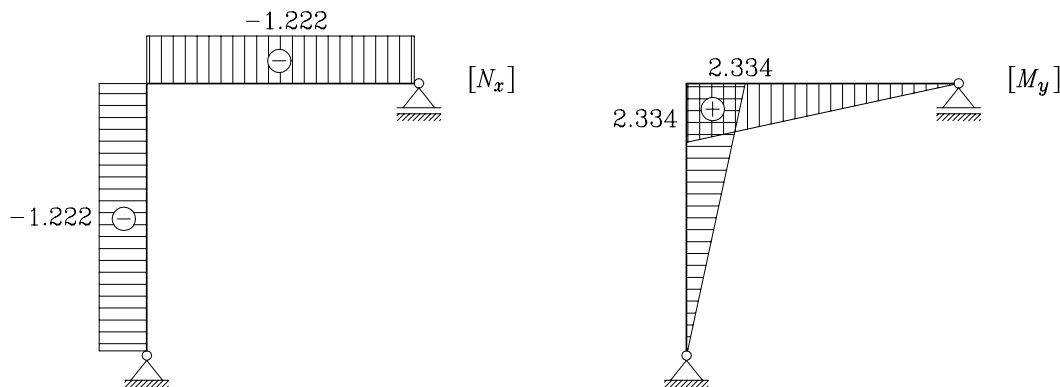
$$\begin{aligned} E b_1 &= -\frac{1}{I_y} \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} 6 \cdot 2 + E \alpha_T \Delta T_x \cdot (-3) \cdot 2 + E \alpha_T \Delta T_z \cdot \left( -\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 2 \right) = \\ &= -\frac{36}{416.67 \cdot 10^{-8}} + 2 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot (-6) + 2 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot (-200) \cdot (-9) = \\ &= -5280000. \end{aligned}$$

Sila  $X_1$  je

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = 1.222 \text{ kN}.$$

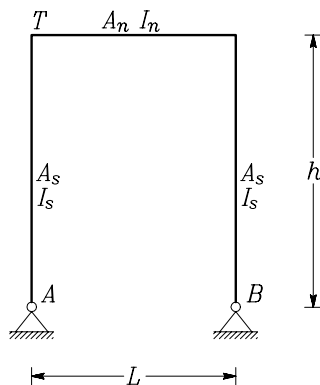
Diagram osnih sil in upogibnih momentov določenih s superpozicijo, prikazujemo na sliki 5.192.





Slika 5.192: Diagram osnih sil in upogibnih momentov na statično nedoločeni konstrukciji

**Primer 5.46** Na konstrukcijo, prikazano na sliki 5.193, učinkuje enakomerna sprememba temperature  $\Delta T_x = -15^\circ\text{C}$ . Določimo vodoravni pomik točke  $T$ ! Pri tem upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na pomike. Ploščina prečnega prereza in vztrajnostni moment stebrov sta  $A_s = 256.8 \text{ cm}^2$  in  $I_s = 2140 \text{ cm}^4$ , nosilca pa  $A_n = 174 \text{ cm}^2$  in  $I_n = 1450 \text{ cm}^4$ . Lastnosti materiala določata  $E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$  in  $\alpha_T = 0.00001 \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$ . Višina konstrukcije je  $h = 4 \text{ m}$ , širina pa je  $L = 3 \text{ m}$ .

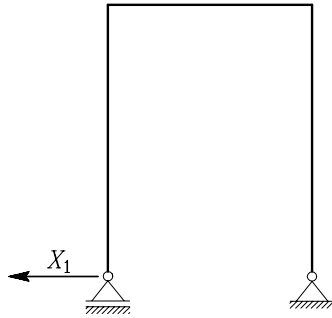


Slika 5.193: Geometrija konstrukcije

Stopnja statične nedoločenosti je  $n = 1$ . Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da sprostimo vodoravni pomik v podpori  $A$  (slika 5.194).







Slika 5.194: Osnovna konstrukcija

Kinematični pogoj je

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0.$$

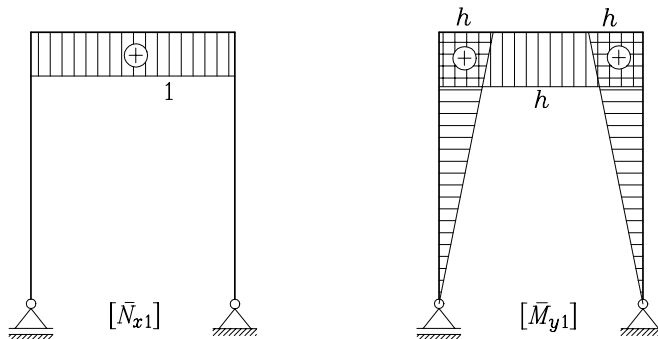
Enačbi za račun koeficientov  $a_{11}$  in  $b_1$  sta

$$a_{11} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left( \frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{E A_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{E I_y} \right) dx, \quad b_1 = \sum_{\text{el}} \int_0^L \alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{x1} dx,$$

enačba za račun pomika  $u_T$  pa je

$$u_T = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left( \frac{N_x^{nk} \bar{N}_{xF}}{E A_x} + \frac{M_y^{nk} \bar{M}_{yF}}{E I_y} \right) dx + \sum_{\text{el}} \int_0^L \alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{xF} dx.$$

Notranje sile zaradi sile  $\bar{X}_1 = 1$  prikazujemo na sliki 5.195.

Slika 5.195: Notranje sile zaradi sile  $\bar{X}_1 = 1$ 

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  sta:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{E A_n} \cdot L \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{E I_n} L h h + \frac{2}{E I_s} \frac{h^2}{2} \frac{2}{3} h = \frac{L}{E A_n} + \frac{L h^2}{E I_n} + \frac{2}{3} \frac{h^3}{E I_s} = \\
 &= \frac{1}{2.1 \cdot 10^7} \left( \frac{3}{0.0174} + \frac{3 \cdot 4^2}{0.0000145} + \frac{2 \cdot 4^3}{0.0000214} \right) = 0.252585 \text{ m/kN}, \\
 b_1 &= \int_0^L \alpha_T \Delta T_x 1 dx = \alpha_T \Delta T_x L = 0.00001 \cdot (-15) \cdot 3 = -0.00045 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

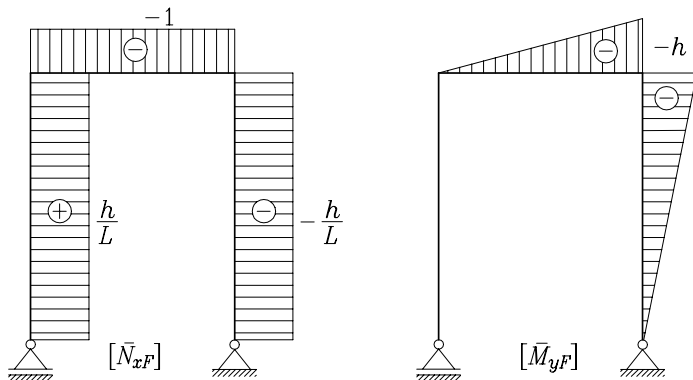
Sila  $X_1$  je

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = 0.00178 \text{ kN}.$$

Notranje sile na statično nedoločeni konstrukciji izračunamo po enačbah

$$N_x^{nk} = X_1 \bar{N}_{x1}, \quad M_y^{nk} = X_1 \bar{M}_{y1},$$

saj razen spremembe temperature konstrukcija ni bila obtežena in sta zato  $N_{xQ} = 0$  in  $M_{yQ} = 0$ . Notranje sile na statično določeni konstrukciji zaradi sile  $\delta F = 1$  v točki  $T$  prikazujemo na sliki 5.196.



Slika 5.196: Notranje sile zaradi sile  $\delta F = 1$

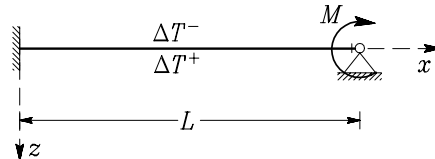
Pomik točke  $T$  določimo po enačbah (5.55). Pri tem uporabimo diagrame na slikah 5.195 in 5.196:

$$\begin{aligned}
 u_T &= -\frac{1}{E A_n} X_1 \cdot L \cdot 1 - \frac{1}{E I_n} h X_1 L \frac{h}{2} - \\
 &\quad - \frac{1}{E I_s} h X_1 \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} h + \alpha_T \Delta T_x \frac{h}{L} h - \alpha_T \Delta T_x \frac{h}{L} h - \alpha_T \Delta T_x \cdot 1 \cdot L = \\
 &= -1.463 \cdot 10^{-8} - 1.404 \cdot 10^{-4} - 8.457 \cdot 10^{-5} - 8 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-4} + 4.5 \cdot 10^{-4} = 0.00022 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Zaradi enakomernega segrevanja celotne konstrukcije za  $15^\circ \text{C}$  se točka  $T$  premakne le za 0.22 mm. Tudi notranje sile so v tem primeru zelo majhne:  $N_x = 0.00178 \text{ kN}$ ,  $M_{y,max} = 0.00713 \text{ kNm}$ .



**Primer 5.47** Določimo navpični pomik pri  $x = L/2$  za konstrukcijo na sliki 5.197! Pri računu upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na pomike. Velikost momenta  $M$  je 500 kNcm, sprememba temperature na spodnji strani nosilca  $\Delta T^+ = -30^\circ\text{C}$ , na zgornji strani pa  $\Delta T^- = 40^\circ\text{C}$ . Temperaturni razteznostni koeficient je  $\alpha_T = 0.00002 (\text{°C})^{-1}$ . Dolžina nosilca je  $L = 100$  cm, višina prečnega prereza  $h = 10$  cm, ploščina in vztrajnostni moment prečnega prereza sta  $A_x = 10.3 \text{ cm}^2$  in  $I_y = 171 \text{ cm}^4$ . Modul elastičnosti materiala je  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ .

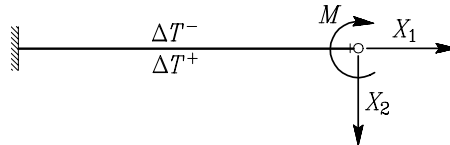


Slika 5.197: Geometrija in obtežba

Spremembe temperature  $\Delta T_x$ ,  $\Delta T_y$  in  $\Delta T_z$  so

$$\Delta T_x = \frac{40 - 30}{2} = 5^\circ\text{C}, \quad \Delta T_z = \frac{-30 - 40}{10} = -7^\circ\text{C/cm}, \quad \Delta T_y = 0^\circ\text{C/cm}.$$

Stopnja statične nedoločenosti je  $n = 2$ . Osnovno konstrukcijo tvorimo tako, da odstranimo levo podoro in s tem dobimo preprost konzolni nosilec (slika 5.198).



Slika 5.198: Osnovna konstrukcija

Kinematična pogoja za račun sil  $X_1$  in  $X_2$  sta:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 &= 0, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 &= 0. \end{aligned}$$

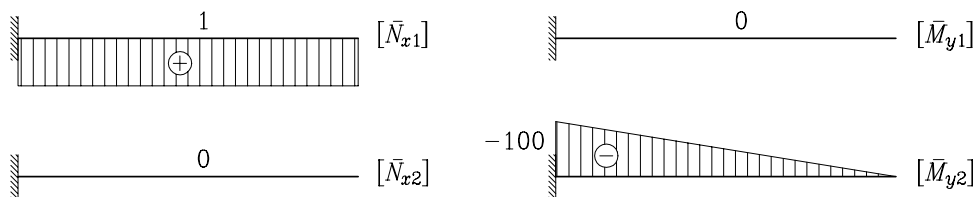
Notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi zunanje obtežbe prikazujemo na sliki 5.199.



Slika 5.199: Notranje sile zaradi zunanje obtežbe

Notranje sile zaradi sil  $\bar{X}_1 = 1$  in  $\bar{X}_2 = 1$  prikazujemo na sliki 5.200.



Slika 5.200: Notranje sile zaradi sil  $\bar{X}_1 = 1$  in  $\bar{X}_2 = 1$ 

Koeficienti  $a_{ij}$  in  $b_i$  so:

$$a_{11} = \frac{L}{EA_x} = \frac{100}{21000 \cdot 10.3} = 0.000462321,$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{22} = \frac{L^3}{3EI_y} = \frac{100^3}{3 \cdot 21000 \cdot 171} = 0.0928247,$$

$$b_1 = \int_0^L \alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{x1} dx = 0.00002 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 100 = 0.01,$$

$$b_2 = \frac{1}{EI_y} \cdot M \cdot L \cdot \frac{L}{2} + \int_0^L \alpha_T \Delta T_z \bar{M}_{y2} dx = \frac{500 \cdot 100^2}{2 \cdot 21000 \cdot 171} - 0.00002 \cdot (-7) \cdot \frac{100^2}{2} = 1.39618.$$

Rešitev sistema enačb je:

$$X_1 = -21.63 \text{ kN}, \quad X_2 = -15.04 \text{ kN}.$$

Račun notranjih sil na statično nedoločeni konstrukciji:

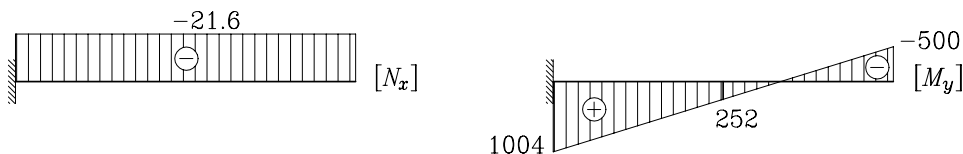
$$M_y(x=0) = -M - L X_2 = -500 - 100 \cdot (-15.04) = 1004 \text{ kNcm},$$

$$M_y(x=L/2) = -M - \frac{L}{2} X_2 = -500 - 50 \cdot (-15.04) = 252 \text{ kNcm},$$

$$M_y(x=L) = -M = -500 \text{ kNcm},$$

$$N_x = X_1 = -21.63 \text{ kN}.$$

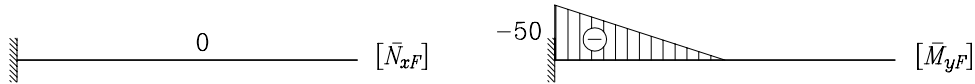
Potek notranjih sil na statično nedoločeni konstrukciji prikazujemo na sliki 5.201.



Slika 5.201: Notranje sile na statično nedoločeni konstrukciji



Za račun navpičnega pomika pri  $x = L/2$  moramo izračunati notranje sile na statično določeni konstrukciji zaradi  $\delta F = 1$  (slika 5.202).

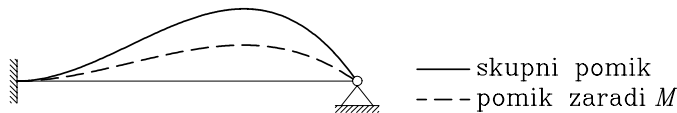


Slika 5.202: Notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi  $\delta F = 1$

Pomik  $w(L/2)$  je

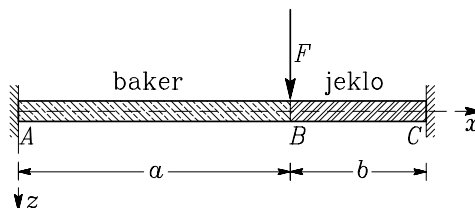
$$w(L/2) = \int_0^L \frac{M_y^{nk} \bar{M}_{yF}}{EI_y} dx + \int_0^L \alpha_T \Delta T_z \bar{M}_{yF} dx = \frac{1}{21000 \cdot 171} \cdot \frac{-100}{2} \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} \left( 252 + \frac{2}{3} 752 \right) + 0.00002 \cdot (-7) \cdot \frac{-100}{2} \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} = -0.26226 + 0.175 = -0.087 \text{ cm}.$$

Na sliki 5.203 prikazujemo deformirano lego zaradi obtežbe z momentom  $M$  in zaradi skupne obtežbe z momentom in temperaturno razliko.



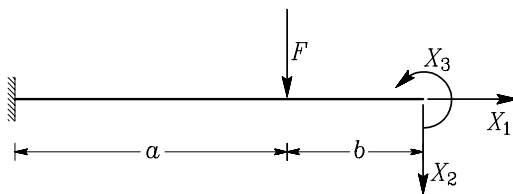
Slika 5.203: Pomiki zaradi momenta  $M$  in zaradi skupnega vpliva  $M$  in spremembe temperature

**Primer 5.48** Nosilec na sliki 5.204 je togo vpet v obeh krajiščih. Levi del nosilca dolžine  $a = 2$  m je iz bakra, desni del dolžine  $b = 1$  m pa iz jekla. Po namestitvi nosilca povečamo temperaturo za  $50^\circ \text{C}$  ter obtežimo nosilec s silo  $F$ . Določimo diagrama osnih sil in upogibnih momentov ter vodoravni pomik točke  $C$ ! Velikost sile  $F$  je 100 kN, vztrajnostni moment  $I_y$  nosilca je  $1000 \text{ cm}^4$ , ploščina  $A_x$  prečnega prereza pa  $100 \text{ cm}^2$ . Modul elastičnosti  $E_b$  bakra je  $10000 \text{ kN/cm}^2$ , modul elastičnosti  $E_j$  jekla pa  $21000 \text{ kN/cm}^2$ . Temperaturni razteznostni koeficient  $\alpha_b$  bakra je  $1.65 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ , temperaturni razteznostni koeficient  $\alpha_j$  jekla pa  $1.25 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ .



Slika 5.204: Levi del nosilca je iz bakra, desni pa iz jekla

Konstrukcija je trikrat statično nedoločena. Osnovno konstrukcijo, ki jo izberemo tako, da odstranimo podporo  $B$ , prikazujemo na sliki 5.205.



Slika 5.205: Vpliv podpore B nadomestimo z neznanimi silama  $X_1$  in  $X_2$  ter neznanim momentom  $X_3$

Sili  $X_1$  in  $X_2$  ter moment  $X_3$  izračunamo iz kinematičnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + b_1 &= 0, \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + b_2 &= 0, \\ a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

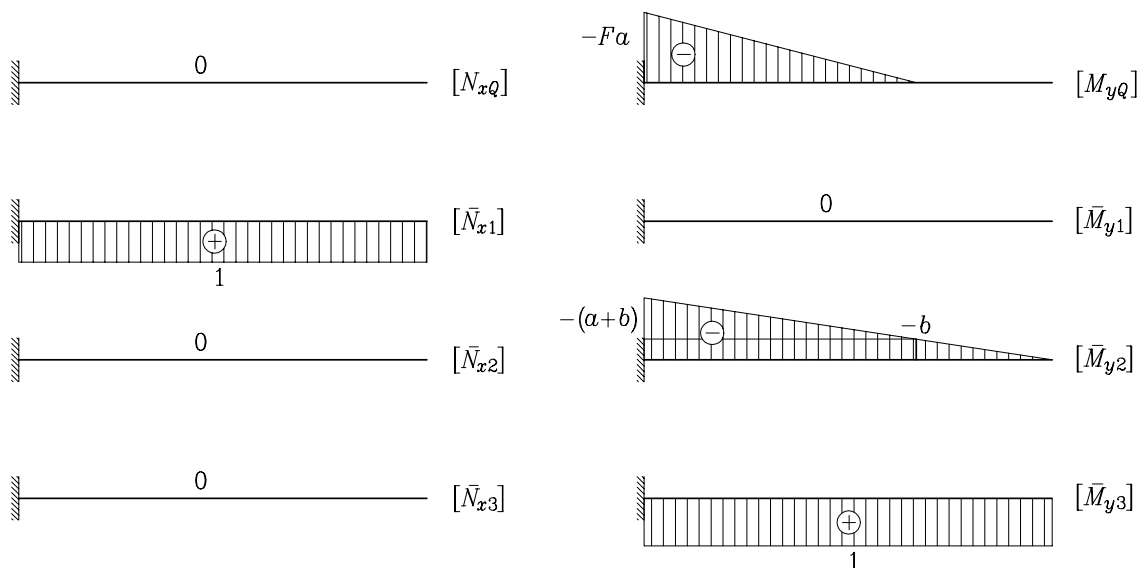
Koeficiente  $a_{ij}$  in  $b_i$  izračunamo iz enačb:

$$a_{ij} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left( \frac{\bar{N}_{xi} \bar{N}_{xj}}{E A_x} + \frac{\bar{M}_{yi} \bar{M}_{yj}}{E I_y} \right) dx$$

in

$$b_i = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left( \frac{\bar{N}_{xi} N_{xQ}}{E A_x} + \frac{\bar{M}_{yi} M_{yQ}}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{xi} \right) dx.$$

Diagrame osne sile in upogibnega momenta na osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  ter zaradi sil  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  in  $X_3 = 1$  prikazujemo na sliki 5.206.



Slika 5.206: Oсна sila in upogibni moment na osnovni konstrukciji



Račun koeficientov  $a_{ij}$  in  $b_i$  določimo iz diagramov na sliki 5.218:

$$a_{11} = \frac{a}{E_b A_b} + \frac{b}{E_j A_j},$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_b I_b} \left[ b a \left( b + \frac{a}{2} \right) + \frac{a a}{2} \left( \frac{2}{3} a + b \right) \right] + \frac{1}{E_j I_j} \frac{b b}{2} \frac{2}{3} b = \frac{1}{E_b I_b} \left[ b^2 a + a^2 b + \frac{a^3}{3} \right] + \frac{1}{E_j I_j} \frac{b^3}{3},$$

$$a_{33} = \frac{a}{E_b I_b} + \frac{b}{E_j I_j},$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{13} = 0,$$

$$a_{23} = -\frac{1}{E_b I_b} \left[ a \cdot 1 \left( b + \frac{a}{2} \right) \right] - \frac{1}{E_j I_j} b \cdot 1 \cdot \frac{b}{2} = -\frac{a}{E_b I_b} \left( b + \frac{a}{2} \right) - \frac{b^2}{2 E_j I_j},$$

$$b_1 = \alpha_b \Delta T_x a + \alpha_j \Delta T_x b,$$

$$b_2 = \frac{1}{E_b I_b} \frac{F a a}{2} \left( b + \frac{2}{3} a \right) = \frac{F a^2}{2 E_b I_b} \left( b + \frac{2}{3} a \right),$$

$$b_3 = -\frac{1}{E_b I_b} \frac{F a a}{2} \cdot 1 = -\frac{F a^2}{2 E_b I_b}.$$

Vstavimo številke in dobimo

$$a_{11} = \frac{200}{10000 \cdot 100} + \frac{100}{21000 \cdot 100} = 0.000247619,$$

$$a_{22} = \frac{1}{10000 \cdot 1000} \left( 100^2 \cdot 200 + 200^2 \cdot 100 + \frac{200^3}{3} \right) + \frac{1}{21000 \cdot 1000} \frac{100^3}{3} = 0.88254,$$

$$a_{33} = \frac{200}{10000 \cdot 1000} + \frac{100}{21000 \cdot 1000} = 0.0000247619,$$

$$a_{12} = 0,$$

$$a_{13} = 0,$$

$$a_{23} = -\frac{1}{10000 \cdot 1000} [200 (100 + 100)] - \frac{1}{21000 \cdot 1000} \frac{100^2}{2} = -0.0042381,$$

$$b_1 = (1.65 \cdot 10^{-5} \cdot 200 + 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot 100) \cdot 50 = 0.2275,$$

$$b_2 = \frac{1}{10000 \cdot 1000} \frac{100 \cdot 200^2}{2} \left( 100 + \frac{2}{3} 200 \right) = 46.6667,$$

$$b_3 = -\frac{1}{10000 \cdot 1000} \frac{100 \cdot 200^2}{2} = -0.2.$$

Kinematične enačbe (5.62) rešimo in dobimo:

$$X_1 = -918.750 \text{ kN}, \quad X_2 = -79.1222 \text{ kN}, \quad X_3 = -5465.14 \text{ kNcm}.$$



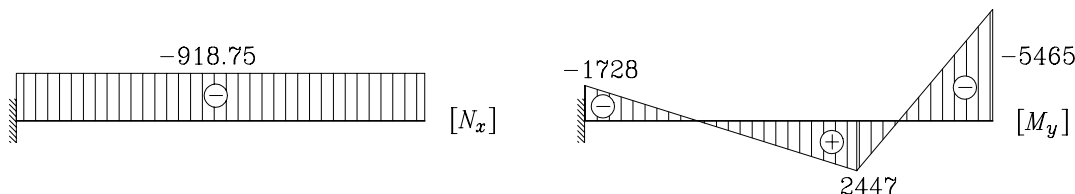
Izračunajmo vrednosti upogibnega momenta v točkah  $A$ ,  $B$  in  $C$  na statično nedoločeni konstrukciji:

$$M_{yA} = -F a - (a + b) X_2 + X_3 = -1728.5 \text{ kNcm},$$

$$M_{yB} = X_3 = -5465.1 \text{ kNcm},$$

$$M_{yC} = -b X_2 + X_3 = 2447.1 \text{ kNcm},$$

Na sliki 5.207 prikazujemo diagram osne sile in upogibnega momenta na statično nedoločeni konstrukciji.

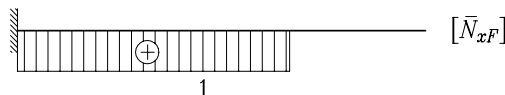


Slika 5.207: Diagram osne sile in upogibnega momenta na statično nedoločeni konstrukciji

V enačbi za račun pomika  $u_C$  upoštevamo le vpliv osnih sil, upogibnih momentov in temperaturne spremembe  $\Delta T_x$ :

$$u_C = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left( \frac{\bar{N}_{xF} N_x^{nk}}{E A_x} + \frac{\bar{M}_{yF} M_y^{nk}}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_x \bar{N}_{xF} \right) dx.$$

Na sliki 5.208 prikazujemo diagram osne sile zaradi virtualne sile  $\delta F_{Cx} = 1$  na statično določeni konstrukciji.



Slika 5.208: Diagram osne sile zaradi  $\delta F_{Cx} = 1$  na osnovni konstrukciji

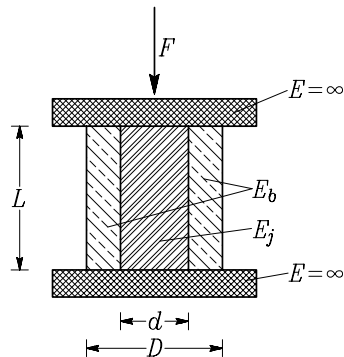
Pomik  $u_C$  je

$$u_C = \frac{-918.75 \cdot 200 \cdot 1}{10000 \cdot 100} + 1.65 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \cdot 200 \cdot 1 = -0.01875 \text{ cm}.$$

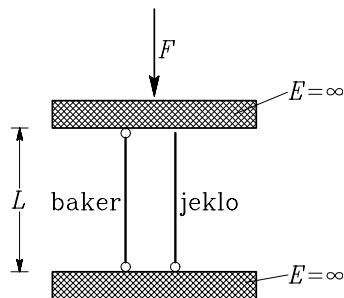
**Primer 5.49** Jekleni valj premera  $d$  in bakrena cev zunanjega premera  $D$  na sliki 5.209 sta položeni med dve neskončno togi plošči. Stik med ploščama ter valjem in cevjo ne more prenesti nateznih napetosti, poleg tega je trenje na tem stiku zanemarljivo. Ker je tudi trenje med valjem in cevjo zanemarljivo, nastopi v valju in cevi enoosno napetostno stanje, kjer je edina od nič različna napetost  $\sigma_{xx}$ . Na plošči delujeta sili  $F$  tako, kot kaže slika 5.209. Določimo vzdolžno normalno napetost  $\sigma_{xx}$  v valju in v cevi, če temperaturo povečamo za  $50^\circ\text{C}$ ! Velikost sile  $F$  je 450 kN, premer  $d = 100$  mm, premer  $D$  pa 200 mm. Modul elastičnosti bakra  $E_b$  je  $11000 \text{ kN/cm}^2$ , modul elastičnosti jekla  $E_j$  pa  $20000 \text{ kN/cm}^2$ . Temperaturni razteznostni koeficient jekla je  $\alpha_{Tj} = 1.2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ , bakra pa  $\alpha_{Tb} = 1.7 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ .



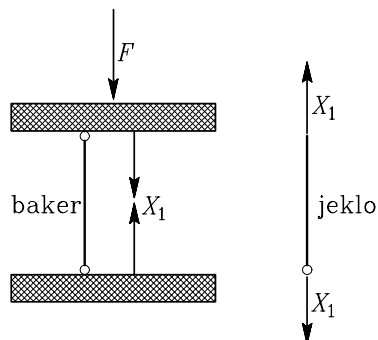


Slika 5.209: Na jekleni valj in bakreno cev delujeta sila  $F$  in sprememba temperature  $\Delta T$ 

Ker je  $\alpha_{Tb} > \alpha_{Tj}$ , se bakrena cev pri enakem zvišanju temperature bolj raztegne kot jekleni valj ( $\Delta u = \alpha \Delta T L$ ). Zato lahko pričakujemo, da se bo pri določenem zvišanju temperature bakrena cev toliko raztegnila, da bo prevzel celotno silo  $F$ , medtem ko bo sila v jeklenem valju enaka nič. Izračunajmo najprej temperaturo, pri kateri bo sila v jeklenem valju enaka nič. Računski model prikazujemo na sliki 5.210.

Slika 5.210: Imamo dve neznani sili  $N_j$  in  $N_b$  ter eno ravnotežno enačbo

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Za neznano silo  $X_1$  izberimo silo v jeklenem valju (slika 5.211).



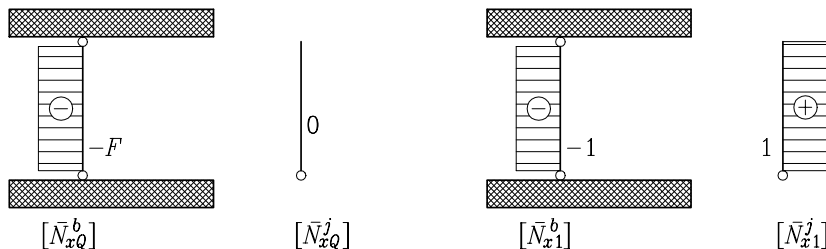
Slika 5.211: Osnovna konstrukcija



Kinematični pogoj zapišemo z enačbo

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0.$$

Na sliki 5.212 prikazujemo potek osne sile zaradi sile  $F$  ter zaradi sile  $X_1 = 1$ .



Slika 5.212: Potek osne sile zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  izračunamo po enačbah:

$$a_{11} = \frac{1}{E_b A_b} \cdot (-1) \cdot L \cdot (-1) + \frac{1}{E_j A_j} \cdot 1 \cdot L \cdot 1 = \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_j A_j},$$

$$b_1 = \frac{1}{E_b A_b} (-F) \cdot L \cdot (-1) + \alpha_{Tb} \Delta T \cdot (-1) \cdot L + \alpha_{Tj} \Delta T \cdot 1 \cdot L = \frac{F L}{E_b A_b} + \Delta T L (\alpha_{Tj} - \alpha_{Tb}).$$

Kinematični pogoj je:

$$\left( \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_j A_j} \right) X_1 + \frac{F L}{E_b A_b} + \Delta T L (\alpha_{Tj} - \alpha_{Tb}) = 0.$$

Če je sila  $X_1 = 0$ , dobimo:

$$\Delta T = \frac{F}{E_b A_b (\alpha_{Tb} - \alpha_{Tj})}.$$

Izračunajmo ploščino prečnega prereza bakrene cevi

$$A_b = \frac{\pi (20^2 - 10^2)}{4} = 235.6194 \text{ cm}^2.$$

Sprememba temperature, pri kateri prevzame vso silo valj je enaka

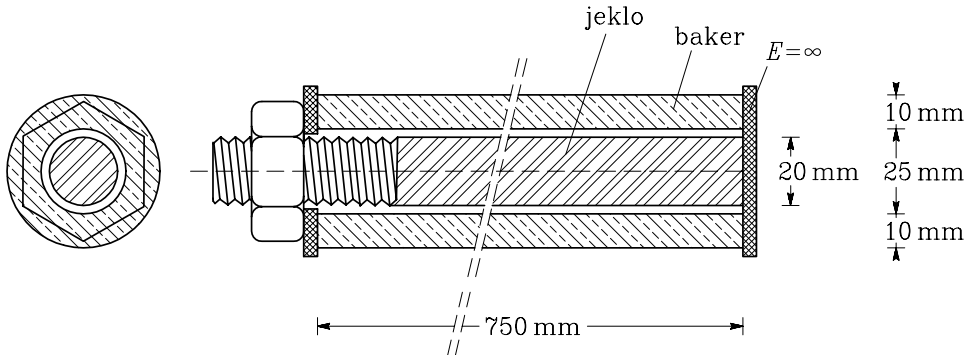
$$\Delta T = \frac{450}{11000 \cdot 235.6194 (1.7 - 1.2) \cdot 10^{-5}} = 34.72^\circ\text{C}.$$

Tako ugotovimo, da pri  $\Delta T = 50^\circ\text{C}$  prevzame vso silo bakreni valj. Napetosti sta torej

$$\sigma_{xxj} = 0, \quad \sigma_{xxb} = -\frac{450}{235.6194} = -1.91 \text{ kN/cm}^2.$$

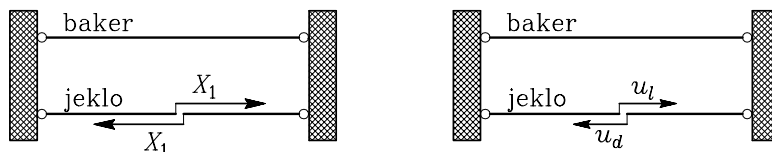


**Primer 5.50** Jekleni vijak na sliki 5.213 je nameščen v bakreni cevi. Matica je zategnjena toliko, da v vijaku in cevi ni napetosti. Kolikšne so napetosti v vijaku in cevi, če matico zavrtimo za  $90^\circ$ . En navoj vijaka oziroma matice je 3 mm. Modul elastičnosti  $E_b$  bakra je  $10000 \text{ kN/cm}^2$ , modul elastičnosti  $E_j$  jekla pa  $21000 \text{ kN/cm}^2$ .



Slika 5.213: Zategovanje matice povzroči nateg v jeklenem vijaku in tlak v bakreni cevi

Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da prerežemo vijak (glej sliko 5.214). Izračunati moramo silo  $N_v$  v vijaku in silo  $N_c$  v cevi pri čemer imamo na razpolago le eno ravnotežno enačbo in sicer  $\sum X = 0$ . Zato je naloga enkrat statično nedoločena. Izračunati moramo velikost sile  $X_1$ . Vsiljeni pomik zaradi zasuka matice znaša  $\Delta u = u_L - u_D = 0.25 \cdot 3 = 0.75 \text{ mm}$ .

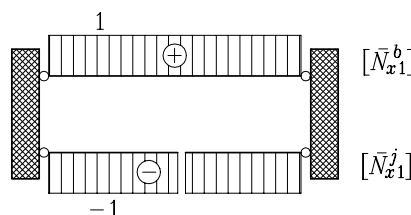


Slika 5.214: Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da prerežemo vijak

Kinematični pogoj, iz katerega izračunamo neznano silo  $X_1$ , zapišemo z enačbo:

$$a_{11} X_1 + b_1 = \Delta u.$$

Na sliki 5.215 prikazujemo notranji sili zaradi sile  $X_1 = 1$  v osnovni konstrukciji.



Slika 5.215: Velikost natezne sile v jeklenem vijaku ter tlačne sile v bakreni cevi je 1

Koeficient  $b_1$  je enak nič, koeficient  $a_{11}$  pa izračunamo po enačbi

$$a_{11} = \frac{1}{E_b A_c} \cdot 1 \cdot L \cdot 1 + \frac{1}{E_j A_v} \cdot 1 \cdot L \cdot 1 = \frac{L}{E_b A_c} + \frac{L}{E_j A_v}.$$

Ploščini  $A_c$  prereza cevi in  $A_v$  vijaka sta:

$$A_c = \frac{\pi}{4} (4.5^2 - 2.5^2) = 10.996 \text{ cm}^2, \quad A_v = \pi r^2 = \pi 1^2 = 3.14 \text{ cm}^2.$$

Tako dobimo

$$\left( \frac{L}{E_b A_c} + \frac{L}{E_j A_v} \right) X_1 = \Delta u.$$

oziroma silo  $X_1 \equiv N_v$ :

$$X_1 = \frac{\Delta u E_b A_c E_j A_v}{L (E_j A_v + E_b A_c)}.$$

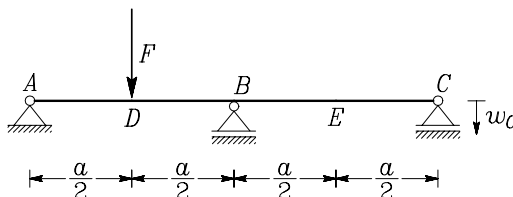
Vstavimo podatke in dobimo

$$X_1 = \frac{0.075 \cdot 10^4 \cdot 10.996 \cdot 2.1 \cdot 10^4 \cdot 3.14}{75 \cdot (2.1 \cdot 10^4 \cdot 3.14 + 10^4 \cdot 10.996)} = 41.233 \text{ kN} \equiv N_v.$$

Napetost v vijaku  $\sigma_{xxv} = X_1/A_v$ , v cevi pa  $-\sigma_{xxc} = -X_1/A_c$ :

$$\sigma_{xxv} = \frac{X_1}{A_v} = \frac{41.233}{3.14} = 13.125 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{xxc} = -\frac{X_1}{A_c} = -\frac{41.233}{10.996} = -3.750 \text{ kN/cm}^2.$$

**Primer 5.51** Za konstrukcijo na sliki 5.216 določimo diagram upogibnih momentov in navpični pomik  $w_D$  točke  $D$ . Podpora  $C$  se premakne v smeri osi  $z$  za 2 cm, velikost sile  $F$  je 15 kN. Razdalja  $a$  je 2 m, vztrajnostni moment  $I_y$  prečnega prereza nosilca je  $4.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ , modul elastičnosti materiala pa  $20000 \text{ kN/cm}^2$ .



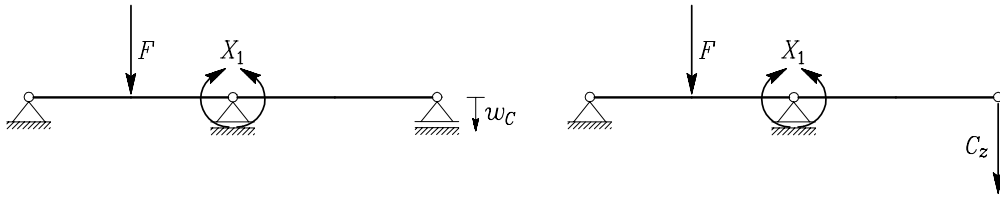
Slika 5.216: Podpora  $C$  se premakne za  $w_C$

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena  $n = 2 + 1 + 1 - 3 = 1$ . Računanje neznane sile  $X_1$  prikažimo za tri različne osnovne konstrukcije.

### A) Prvi primer osnovne konstrukcije

Na sliki 5.217 prikazujemo osnovno konstrukcijo za primer, ko v nosilec nad podporo  $B$  vstavimo členek, ki dovoli medsebojni zasuk sosednjih elementov. Na sliki 5.217 prikazujemo tudi virtualno obtežbo  $\delta X_1$  na osnovni konstrukciji ter reakcijo  $\delta C$ , ki opravi delo na predpisanem pomiku  $w_C$  podpore  $C$ .





Slika 5.217: Prvi primer izbrane osnovne konstrukcije

Velikost reakcije  $\delta C$  zaradi momentov  $\delta X_1$  na osnovni konstrukciji izračunamo iz ravnotežne enačbe

$$\sum_{BC} M_y^B = 0 \rightarrow \delta C a + \delta X_1 = 0 \rightarrow \delta C = -\frac{\delta X_1}{a}.$$

Delo virtualnih sil ( $\delta X_1$  in  $\delta C$ ) na resničnih pomikih zapišemo takole:

$$\delta W_z^* = \delta X_1 \omega_{By}^l - \delta X_1 \omega_{By}^d + \delta C w_C = \delta X_1 \left[ (\omega_{By}^l - \omega_{By}^d) - \frac{w_C}{a} \right] = -\delta X_1 \frac{w_C}{a},$$

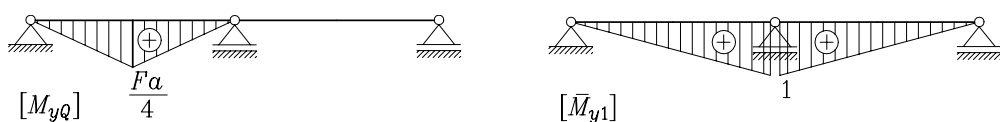
pri čemer smo upoštevali, da morata biti zasuka na levi in desni strani podpore enaka ( $\omega_{By}^l = \omega_{By}^d$ ). Delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah zapišemo z enačbo

$$\delta W_n^* = \delta X_1 (a_{11} X_1 + b_1).$$

Zapišemo izrek o virtualnih silah  $\delta W_n^* - \delta W_z^* = 0$  za obravnavani primer in dobimo kinematični pogoj za račun neznane sile  $X_1$

$$a_{11} X_1 + b_1 + \frac{w_C}{a} = 0.$$

Na sliki 5.218 prikazujemo upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$ .

Slika 5.218: Upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$ .

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  sta

$$a_{11} = \frac{1}{E I_y} \frac{1}{2} \frac{a}{3} \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2a}{3 E I_y},$$

$$b_1 = \frac{1}{E I_y} \frac{F a}{4} a \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{E I_y} \left( \frac{F a}{4} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{F a}{4} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \right) = \frac{F a^2}{16 E I_y}.$$

Moment v nosilcu nad podporo  $B$  izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$X_1 = -\frac{3 F a}{32} - \frac{w_C 3 E I_y}{2 a^2} = -2.8125 - 67.50 = -70.3125 \text{ kNm} \equiv M_{By}.$$



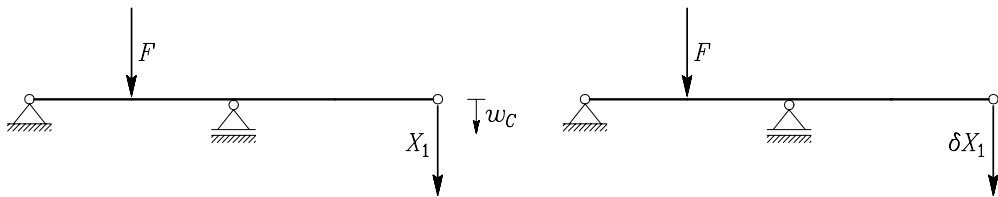
Izračunajmo še upogibni moment v točkah  $D$  in  $E$ :

$$M_{Dy} = \frac{F a}{4} + \frac{X_1}{2} = -27.656 \text{ kNm},$$

$$M_{Ey} = \frac{X_1}{2} = -35.156 \text{ kNm}.$$

## B) Drugi primer osnovne konstrukcije

Na sliki 5.219 prikazujemo osnovno konstrukcijo za primer, ko podporo  $C$  odstranimo in njen vpliv nadomestimo z neznano silo  $X_1$ . Na sliki 5.219 prikazujemo tudi virtualno obtežbo  $\delta X_1$  na osnovni konstrukciji.



Slika 5.219: Drugi primer izbrane osnovne konstrukcije

Delo virtualne sile  $\delta X_1$  na resničnem pomiku zapišemo z enačbo

$$\delta W_z^* = \delta X_1 w_C.$$

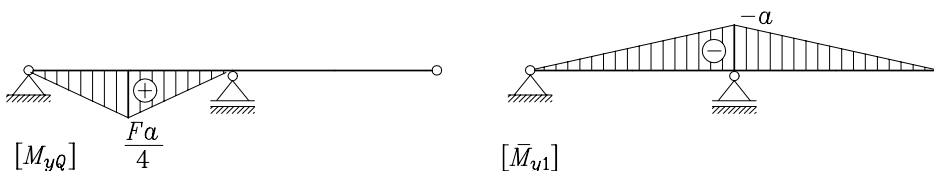
Delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah zapišemo z enačbo

$$\delta W_n^* = \delta X_1 (a_{11} X_1 + b_1).$$

Zapišemo izrek o virtualnih silah  $\delta W_n^* - \delta W_z^* = 0$  za obravnavani primer in dobimo kinematični pogoj za račun neznanne sile  $X_1$ :

$$a_{11} X_1 + b_1 = w_C.$$

Na sliki 5.220 prikazujemo upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$ .



Slika 5.220: Upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$



Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  sta

$$a_{11} = \frac{1}{E I_y} \frac{a}{2} \frac{a}{3} \frac{2}{3} a \cdot 2 = \frac{2 a^3}{3 E I_y},$$

$$b_1 = -\frac{1}{E I_y} \left( \frac{F a}{4} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \frac{a}{3} + \frac{F a}{4} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \frac{2 a}{3} \right) = -\frac{F a^3}{16 E I_y}.$$

Reakcijo  $B_z$  izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$X_1 = \frac{3 F}{32} + \frac{w_C}{2 a^3} \frac{3 E I_y}{3} = 1.406 + 33.75 = 35.156 \text{ kN} \equiv B_z.$$

Izračunajmo še upogibni moment v točkah  $B$ ,  $D$  in  $E$ :

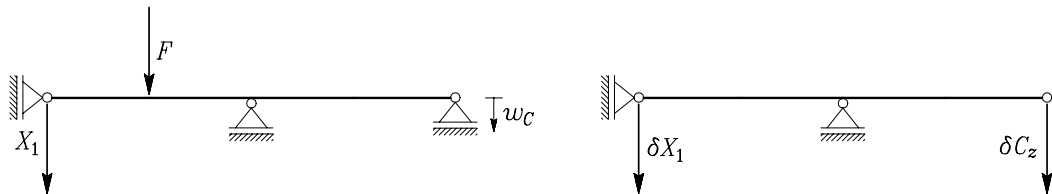
$$M_{By} = -a X_1 = -70.312 \text{ kNm},$$

$$M_{Dy} = \frac{F a}{4} - \frac{X_1 a}{2} = -27.656 \text{ kNm},$$

$$M_{Ey} = -\frac{a X_1}{2} = -35.156 \text{ kNm}$$

### C) Tretji primer osnovne konstrukcije

Na sliki 5.221 prikazujemo osnovno konstrukcijo za primer, ko v podpori  $A$  odstranimo vez za navpični pomik in vpliv odstranjene vezi nadomestimo z neznano silo  $X_1$ . Na sliki 5.221 prikazujemo tudi virtualno obtežbo  $\delta X_1$  na osnovni konstrukciji.



Slika 5.221: Tretji primer izbrane osnovne konstrukcije

Velikost reakcije  $\delta C$  zaradi sile  $\delta X_1$  na osnovni konstrukciji izračunamo iz ravnotežne enačbe:

$$-\delta C a + \delta X_1 a = 0 \quad \rightarrow \quad \delta C = \delta X_1.$$

Delo virtualnih sil  $\delta X_1$  in  $\delta C$  na resničnih pomikih zapišemo takole:

$$\delta W_z^* = \delta X_1 w_A + \delta C w_C = \delta X_1 w_C,$$

pri čemer smo upoštevali, da je pomik  $w_A$  enak nič. Delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah zapišemo z enačbo:

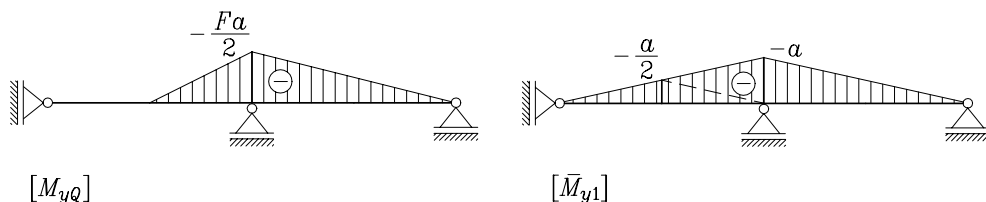
$$\delta W_n^* = \delta X_1 (a_{11} X_1 + b_1).$$



Zapišemo izrek o virtualnih silah  $\delta W_n^* - \delta W_z^* = 0$  za obravnavani primer in dobimo kinematični pogoj za račun neznane sile  $X_1$ :

$$a_{11} X_1 + b_1 = w_C.$$

Na sliki 5.222 prikazujemo upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$ .



Slika 5.222: Upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  sta:

$$a_{11} = \frac{1}{E I_y} \frac{a}{2} \frac{a}{2} \frac{2}{3} a \cdot 2 = \frac{2 a^3}{3 E I_y},$$

$$b_1 = \frac{1}{E I_y} \frac{F a}{2} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \frac{a}{2} + \frac{2}{3} a \right) + \frac{1}{E I_y} \frac{F a}{2} \frac{a}{2} \frac{2}{3} a = \frac{13 F a^3}{48 E I_y}.$$

Reakcijo  $A_z$  izračunamo iz kinematičnega pogoja:

$$X_1 = -\frac{39 F}{96} + \frac{w_C 3 E I_y}{2 a^3} = -6.09375 + 33.75 = 27.656 \text{ kN} \equiv A_z.$$

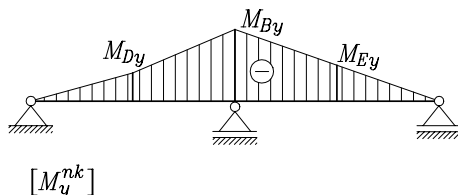
Izračunajmo še upogibni moment v točkah  $B$ ,  $D$  in  $E$

$$M_{By} = -\frac{F a}{2} - a X_1 = -70.312 \text{ kNm},$$

$$M_{Dy} = -\frac{a}{2} X_1 = -27.656 \text{ kNm},$$

$$M_{Ey} = -\frac{F a}{4} - \frac{a}{2} X_1 = -35.156 \text{ kNm}.$$

Diagram upogibnega momenta je enak za vse tri izbrane osnovne konstrukcije in ga prikazujemo na sliki 5.223.



Slika 5.223: Upogibni moment na statično nedoločeni konstrukciji

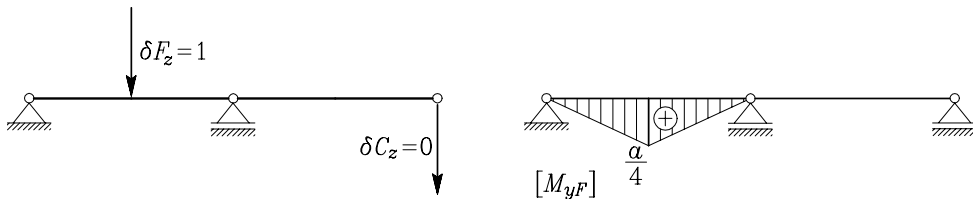




Tudi računanje navpičnega pomika  $w_D$  točke  $D$  prikažimo za tri različno izbrane osnovne konstrukcije.

### A) Prvi primer osnovne konstrukcije

Na sliki 5.224 prikazujemo osnovno konstrukcijo za primer, ko v nosilec nad podporo  $B$  vstavimo členek. Na tako konstrukcijo postavimo v točko  $D$  navpično virtualno silo  $\delta F_z = 1$ . Reakcija  $\delta C$  je v tem primeru enaka nič. Zato je  $\delta W_z^*(\delta F_z) = \delta F_z w_D$ . Na sliki 5.224 prikazujemo tudi pripadajoči potek upogibnega momenta.



Slika 5.224: Upogibni moment za prvi primer osnovne konstrukcije zaradi sile  $\delta F_z = 1$

Pomik  $w_D$  izračunamo po enačbi

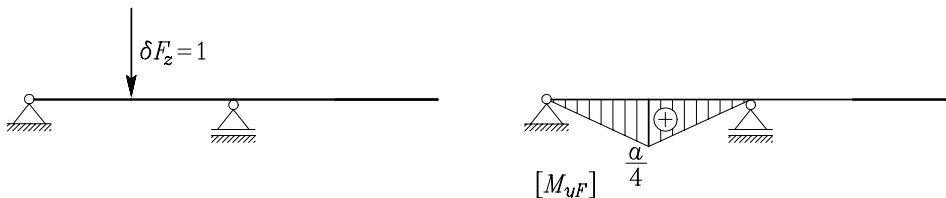
$$w_D = \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{\bar{M}_{yF} M_y^{nk}}{E I_y} dx.$$

Ob upoštevanju diagramov na slikah 5.223 in 5.224 dobimo

$$w_D = \frac{1}{E I_y} \left[ M_{Dy} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{a}{4} + \frac{a}{4} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} M_{Dy} + \frac{1}{3} M_{By} \right) \right] = -0.001675 \text{ m}.$$

### B) Drugi primer osnovne konstrukcije

Na sliki 5.225 prikazujemo osnovno konstrukcijo za primer, ko v desno podporo  $C$  vstavimo vez, ki dovoli navpični pomik (desno podporo odstranimo). Na tako konstrukcijo postavimo v točko  $D$  navpično virtualno silo  $\delta F_z = 1$ . Reakcija  $\delta C$  je v tem primeru enaka nič. Zato je  $\delta W_z^*(\delta F_z) = \delta F_z w_D$ . Na sliki 5.225 prikazujemo tudi pripadajoči potek upogibnega momenta zaradi virtualne sile  $\delta F_z$ .



Slika 5.225: Upogibni moment za drugi primer osnovne konstrukcije zaradi sile  $\delta F_z = 1$



Ker sta diagrama  $\bar{M}_{yF}$  in  $M_y^{nk}$  enaka kot v primeru A, je pomik  $w_D$  enak

$$w_D = -0.001675 \text{ m.}$$

### A) Tretji primer osnovne konstrukcije

Na sliki 5.226 prikazujemo osnovno konstrukcijo za primer, ko podporo A spremenimo tako, da dovoli navpični pomik. Na tako konstrukcijo postavimo v točko D navpično virtualno silo  $\delta F_z = 1$ . Reakcija  $\delta C$  je v tem primeru različna od nič. Izračunamo jo iz ravnotežne enačbe

$$\sum M_Y^B = 0 \rightarrow \delta F_z \frac{a}{2} - \delta C a = 0 \rightarrow \delta C = \frac{\delta F_z}{2}.$$

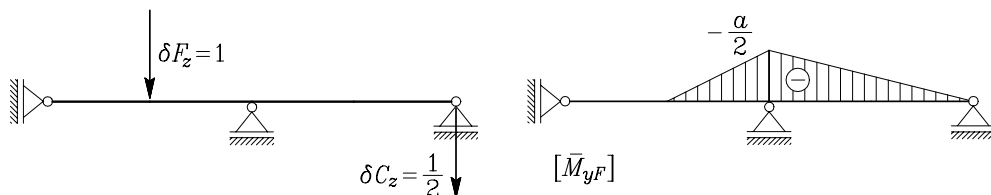
Zato je  $\delta W_z^*$  enak

$$\delta W_z^* = \delta F_z w_D + \delta C w_C = \delta F_z \left( w_D + \frac{w_C}{2} \right).$$

Enačba za račun pomika  $w_D$  ima v tem primeru naslednjo obliko:

$$w_D + \frac{w_C}{2} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{\bar{M}_{yF} M_y^{nk}}{E I_y} dx.$$

Na sliki 5.226 prikazujemo tudi pripadajoči potek upogibnega momenta zaradi virtualne sile  $\delta F_z = 1$ .



Slika 5.226: Upogibni moment za tretji primer osnovne konstrukcije zaradi sile  $\delta F_z = 1$

Pomik  $w_D$  določimo ob upoštevanju diagramov na slikah 5.223 in 5.226

$$w_D + \frac{w_C}{2} = \frac{1}{E I_y} \left[ -\frac{a}{2} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} M_{Dy} + \frac{2}{3} M_{By} \right) - \frac{a}{2} \frac{a}{2} \frac{2}{3} M_{By} \right] = 0.008325.$$

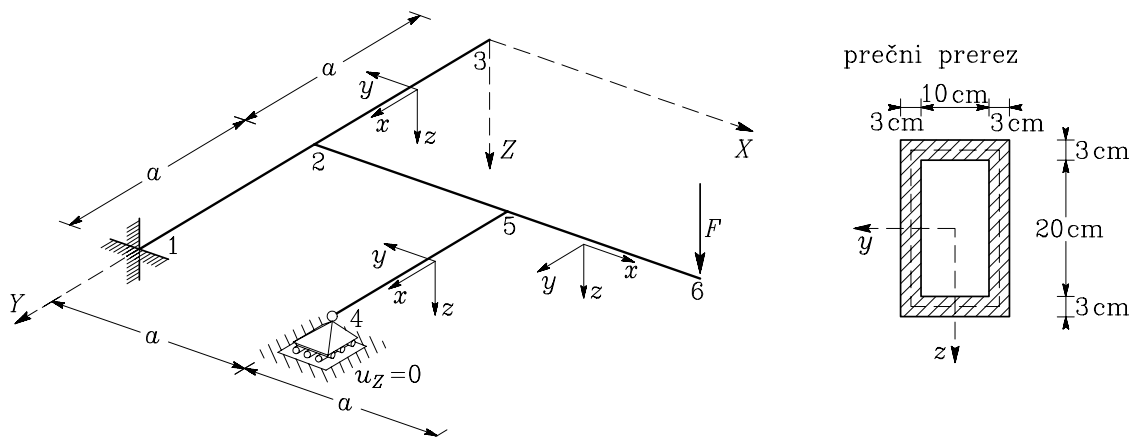
V zadnjo enačbo vstavimo  $w_C = 0.02 \text{ m}$  in izračunamo

$$w_D = -0.01 + 0.008325 = -0.001675 \text{ m.}$$

Vidimo, da smo z vsemi tremi osnovnimi konstrukcijami izračunali enako velikost pomika  $w_D$ .

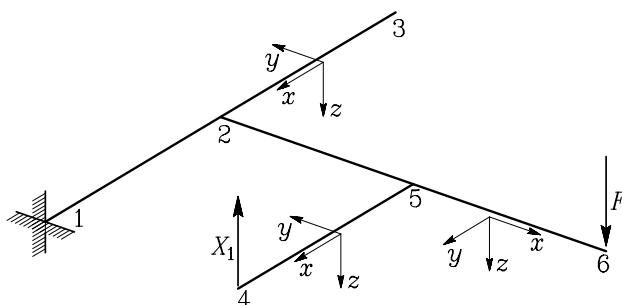
**Primer 5.52** Za konstrukcijo s tankostenskim prečnim prerezom z eno odprtino na sliki 5.227 določimo diagram upogibnih momentov! Velikost sile  $F$  je 1 kN, razdalja  $a$  je 2 m, modul elastičnosti  $E$  materiala je 20000 kN/cm<sup>2</sup>, Poissonov količnik  $\nu$  pa 0.3. Pri računu predpostavimo, da v konstrukciji poleg upogiba nastopa enakomerna torzija. Vpliva prečnih sil na pomike ne upoštevamo.





Slika 5.227: Notranje sile na osnovni konstrukciji izračunamo iz ravnotežnih pogojev za izrezano vozlišče

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena ( $n = 6 + 1 - 6 = 1$ ). Osnovno konstrukcijo, ki jo izberemo tako, da odstranimo podporo v točki 4, prikazujemo na sliki 5.228.



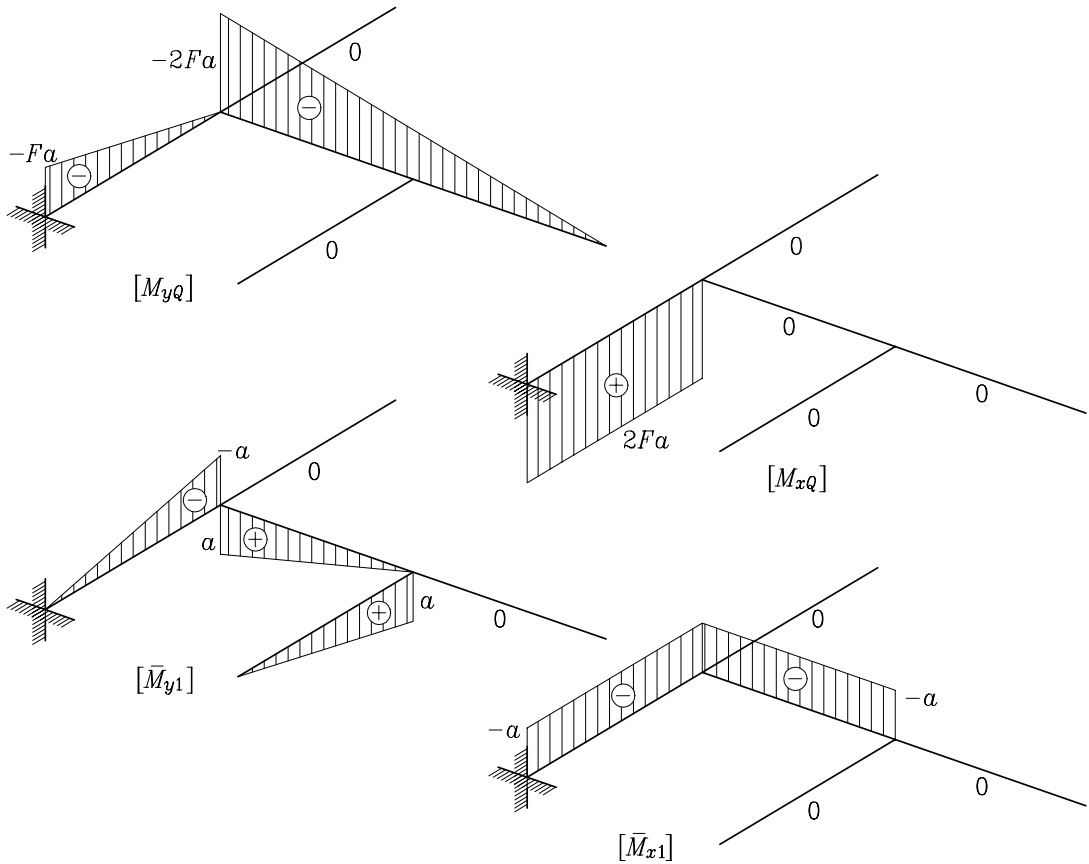
Slika 5.228: Osnovna konstrukcija

Silo  $X_1$  izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0.$$

Na sliki 5.229 prikazujemo notranje sile v osnovni konstrukciji zaradi sile  $F$  in zaradi sile  $X_1 = 1$ .





Slika 5.229: Notranje sile v osnovni konstrukciji

Koeficienta  $a_{11}$  in  $b_1$  določimo na osnovi diagramov na sliki 5.229

$$a_{11} = a^3 \left( \frac{1}{E I_y} + \frac{2}{G I_x} \right), \quad b_1 = -2 F a^3 \left( \frac{1}{3 E I_y} + \frac{1}{G I_x} \right).$$

Neznano silo  $X_1$  izračunamo po enačbi

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2 F}{3} \frac{G I_x + 3 E I_y}{G I_x + 2 E I_y}.$$

Strižni modul ter vztrajnostni in torzijski vztrajnostni moment so

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7692.31 \text{ kN/cm}^2,$$

$$I_y = (16 \cdot 26^3 - 10 \cdot 20^3)/12 = 16768 \text{ cm}^4,$$



$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\oint \frac{d\zeta}{t}} = \frac{4 (13 \cdot 23)^2}{2 (23 + 13)/3} = 14900.17 \text{ cm}^4.$$

Sila  $X_1$  je

$$X_1 = \frac{2 \cdot 1}{3} \cdot \frac{7692.31 \cdot 14900.17 + 3 \cdot 20000 \cdot 16768}{7692.31 \cdot 14900.17 + 2 \cdot 20000 \cdot 16768} = 0.9514 \text{ kN}.$$

Izračunajmo še vrednosti upogibnega momenta v krajiščih posameznih elementov:

$$\text{element 12 : } M_{y1} = -F a = -2 \text{ kNm},$$

$$M_{y2} = -a X_1 = -1.903 \text{ kNm},$$

$$\text{element 25 : } M_{y2} = -2 F a + a X_1 = -2.097 \text{ kNm},$$

$$M_{y5} = -F a = -2.0 \text{ kNm},$$

$$\text{element 56 : } M_{y5} = -F a = -2.0 \text{ kNm},$$

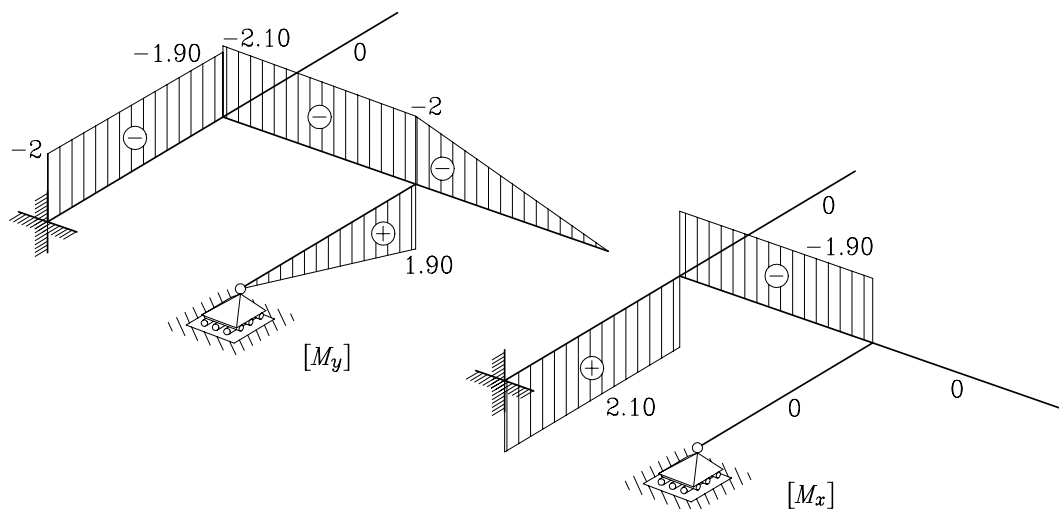
$$\text{element 45 : } M_{y5} = a X_1 = 1.903 \text{ kNm}.$$

Izračunajmo tudi torzijski moment v elementih 12 in 25:

$$\text{element 12 : } M_x = -2 F a - a X_1 = 2.097 \text{ kNm},$$

$$\text{element 25 : } M_x = -a X_1 = -1.903 \text{ kNm}.$$

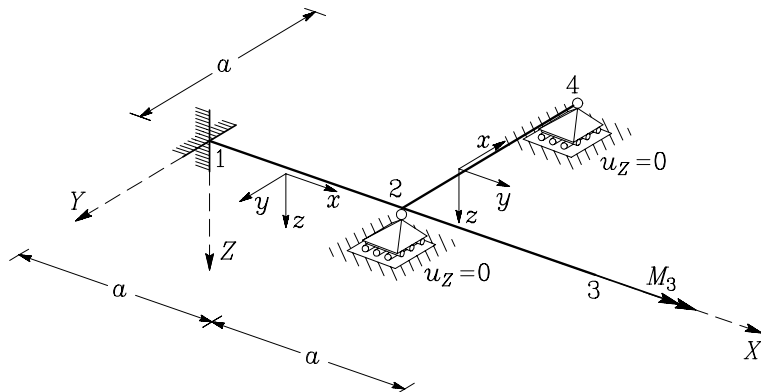
Diagrama  $M_y$  in  $M_x$  na statično nedoločeni konstrukciji prikazujemo na sliki 5.230.



Slika 5.230: Notranje sile v statično nedoločeni konstrukciji

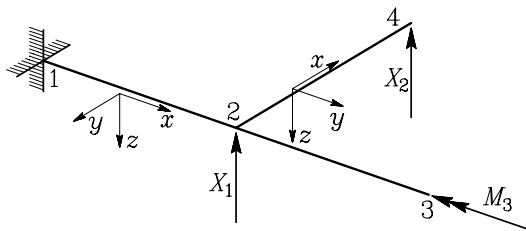


**Primer 5.53** Za konstrukcijo na sliki 5.231 izračunajmo notranje sile ter zasuk  $\omega_{3x}$  točke 3 okrog lokalne  $x$  osi! Moment  $M_3$  je enak 160 kNm, dolžina  $a$  pa 1.6 m. Torzijski vztrajnostni moment  $I_x$  je 40000 cm<sup>4</sup>, vztrajnostni moment  $I_y$  pa 20000 cm<sup>4</sup>, modul elastičnosti  $E$  materiala je 20000 kN/cm<sup>2</sup>, strižni modul  $G$  pa 8000 kN/cm<sup>2</sup>. Predpostavimo, da v konstrukciji nastane enakomerna torzija.



Slika 5.231: Čeprav ležijo elementi konstrukcije v ravni  $X, Y$ , je zaradi obtežbe s torzijskim momentom konstrukcija prostorska

Stopnja statične nedoločenosti  $n$  je enaka 2 ( $n = 6 + 1 + 1 - 6 = 2$ ). Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da odstranimo podpori v točkah 2 in 4. Za račun notranjih sil moramo izbrati lokalni koordinatni sistem za vsak element konstrukcije (slika 5.232).



Slika 5.232: Osnovna konstrukcija ter lokalni koordinatni sistemi za račun notranjih sil

Neznani sili  $X_1$  in  $X_2$  izračunamo iz kinematičnih pogojev

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 &= 0, \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Na sliki 5.233 prikazujemo diagrame torzijskega in upogibnega momenta zaradi torzijskega momenta  $M_3$  ter zaradi sil  $X_1 = 1$  in  $X_2 = 1$ .

