

Koeficient a_{11} izračunamo po enaki enačbi kot v prejšnjem primeru

$$\begin{aligned}
 a_{11} = & \frac{1}{E_k A_k} (\bar{N}_{kl}^2 L_{kl} + \bar{N}_{ks}^2 \cdot 10 + 1^2 L_{kd}) + \frac{1}{E_b A_d} (\bar{N}_{dl}^2 \cdot 2 + \bar{N}_{dd}^2 \cdot 2) + \\
 & + \frac{1}{E_b I_d} \left(\bar{M}_{dlm}^2 \frac{2}{2} \frac{2}{3} + \bar{M}_{ddm}^2 \frac{2}{2} \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{E_b A_n} (\bar{N}_{nl}^2 \cdot 10 + \bar{N}_{ns}^2 \cdot 10 + \bar{N}_{nd}^2 \cdot 10) + \\
 & + \frac{1}{E_b I_n} \left(\bar{M}_{nlm}^2 \frac{10}{2} \frac{2}{3} + \bar{M}_{ns}^2 10 + \bar{M}_{ndm}^2 \frac{10}{2} \frac{2}{3} \right) = 3.0396 \cdot 10^{-5} + 1.4652 \cdot 10^{-8} + \\
 & + 1.1493 \cdot 10^{-9} + 8.3517 \cdot 10^{-7} + 6.2515 \cdot 10^{-6} = 3.7497 \cdot 10^{-5}.
 \end{aligned}$$

Tudi koeficient b_1 izračunamo na enak način kot prej

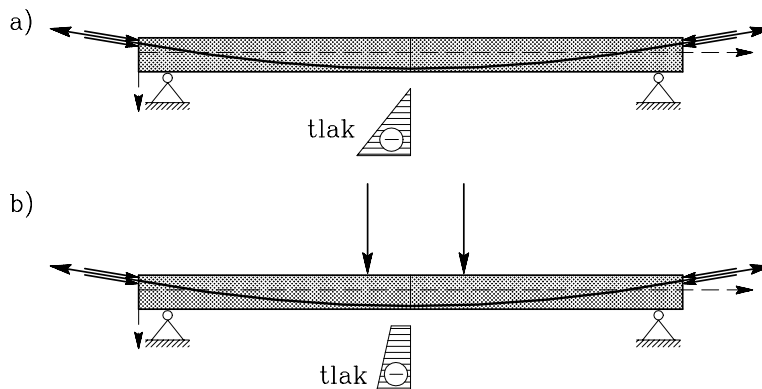
$$b_1 = \frac{1}{E_b I_n} \left(\int_0^{10} \bar{M}_{nl} M_{yQ} dx + \int_{10}^{20} \bar{M}_{ns} M_{yQ} dx + \int_{20}^{30} \bar{M}_{nd} M_{yQ} dx \right) = -0.012125.$$

Sila v kablju pri zanemaritvi trenja med kablom in distančnikom je

$$X_1 = \frac{1}{a_{11}} (0.06 - b_1) = 1923.4 \text{ kN}.$$

Primer 5.61 Zaporedno napenjanje kablov v betonskem nosilcu. Zanima nas padec sile zaradi zaporednega napenjanja kablov.

Ker lahko beton prevzame le majhne natezne napetosti, betonske nosilce z jeklenimi kabli prednapnemo tako, da v nosilcih zaradi lastne teže in prednapetja nastanejo tako razporejene tlačne napetosti, da po obtežitvi nosilca s prometno ali koristno obtežbo v nosilcu ni nateznih napetosti (slika 5.269).



Slika 5.269: a) Napetosti zaradi lastne teže in prednapetja

b) Napetosti zaradi lastne teže, prednapetja in prometne obtežbe

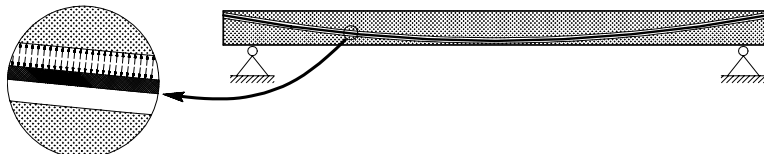
Nosilec običajno prednapnemo z večjim številom kablov. Pri tem opravimo prednapenjanje zaporedoma. Ko prednapenjamo k -ti kabel, se zaradi skrajšanja dolžine nosilca, sile v $(k - 1)$ kablilih zmanjšajo. Pri računu sile v kablilih pri zaporednem prednapenjanju bomo upoštevali naslednje poenostavitve:

- Kable vstavimo v pripravljene luknje v nosilcu (slika 5.270). Trenje med kablom in betonom pri prednapenjanju zanemarimo. Zato se velikost sile vzdolž kabla ne spreminja.



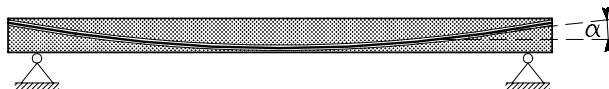
Slika 5.270: Kable vstavimo v vnaprej pripravljene odprtine

- Zanemarimo vpliv prečnega tlaka kabla na beton (slika 5.271).



Slika 5.271: Tlak pravokotno na smer kabla zanemarimo

- Upošteevamo, da je kot med vzdolžno osjo nosilca in osjo kabla majhen ($\cos \alpha \approx 1.0$) (slika 5.272).



Slika 5.272: Naklonski kot kabla je majhen

Oglejmo si primer ravnega nosilca dolžine L , ki ga zaporedoma prednapnemo s tremi kablili. Lastne teže pri računu padca sile ne bomo upoštevali. Prečni prerez se ne spreminja.

Napenjanje prvega kabla.

Kabel na eni strani nosilca pritrdimo, na drugi strani pa ga izvlačimo tako, da z nasproti usmerjeno in enako veliko silo P_1 pritiskamo na beton v okolici kabelske odprtine. Ko doseže sila v kablu zahtevano vrednost, kabel začepimo (pritrdimo ga na začetni prerez tako, da lahko napravo za napenjanje odstranimo).

Račun notranjih sil v prečnem prerezu nosilca zaradi napenjanja prvega kabla

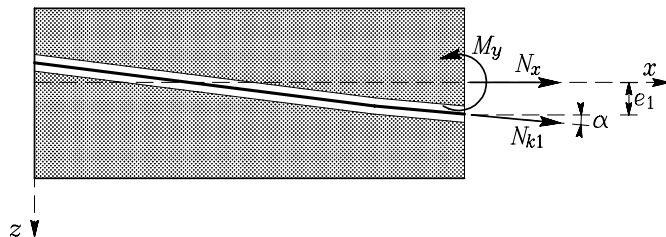


Natezna sila v kablu N_{k1} je enaka sili P_1 :

$$N_{k1} = P_1.$$

Oсна sila in upogibni moment v težišču prečnega prereza betonskega nosilca sta (slika 5.273)

$$N_x = -N_{k1} \cos \alpha \approx -P_1, \quad M_y = -e_1 N_{k1} \cos \alpha \approx -P_1 e_1.$$

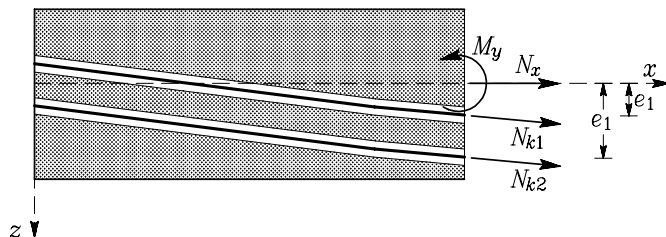


Slika 5.273: Notranje sile v težišču betonskega dela prečnega prereza nosilca

Dolžina nosilca se zaradi napenjanja kabla zmanjša.

Napenjanje drugega kabla.

V tem primeru rešujemo 1–krat statično nedoločeno konstrukcijo. Razen notranje sile N_x in upogibnega momenta M_y v težišču betonskega prereza je neznana še sila prvemu kablu N_{k1} (slika 5.274).



Slika 5.274: Prednapenjanje drugega kabla

Osnovno konstrukcijo naredimo tako, da prvi kabel prerežemo in v tako dobljeni prerez postavimo neznano silo $X_{1,2}$. To je sila v kablu 1 pri napenjanju kabla 2. V resnici bo to sprememba sile v kablu 1, ker je kabel 1 že napet s silo P_1 . Zato uporabimo oznako $\Delta X_{1,2}$ (slika 5.275). Zanimarili smo še, da je začetna dolžina nosilca po prednapetju drugega kabla manjša, kot je bila dolžina pred napenjanjem prvega kabla. Silo $\Delta X_{1,2}$ določimo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11} \Delta X_{1,2} + b_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta X_{1,2} = -\frac{b_1}{a_{11}}.$$





Slika 5.275: Osnovna konstrukcija za primer prednapenjanja drugega kabla

Notranje sile v osnovni konstrukciji zaradi sile P_2 :

$$N_{k1} = 0, \quad N_{k2} = P_2, \quad N_x = -P_2, \quad M_y = -P_2 e_2.$$

Notranje sile v osnovni konstrukciji zaradi sile $\Delta X_{1,2} = 1$

$$N_{k1} = 1, \quad N_{k2} = 0, \quad \bar{N}_{x1} = -1, \quad \bar{M}_{y1} = -1 e_1.$$

Koeficienta a_{11} in b_1 sta:

$$a_{11} = \int_0^{L_{k1}} \frac{dx}{E_{k1} A_{k1}} + \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + \int_0^L \frac{e_1 e_1}{E_b I_b} dx. \quad b_1 = P_2 \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + P_2 \int_0^L \frac{e_1 e_1}{E_b I_b} dx.$$

Napenjanje tretjega kabla.

V tem primeru je konstrukcija 2–krat statično nedoločena. Za naznanke izberemo spremembi sil $\Delta X_{1,3}$ in $\Delta X_{2,3}$ v kablilih 1 in 2 zaradi prednapenjanja kabla 3 (slika 5.276).



Slika 5.276: Osnovna konstrukcija pri prednapenjanje tretjega kabla

Kinematična pogoja

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta X_{1,3} + a_{12} \Delta X_{2,3} + b_1 &= 0, \\ a_{21} \Delta X_{1,3} + a_{22} \Delta X_{2,3} + b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Notranje sile v osnovni konstrukciji zaradi sile P_3

$$N_{k1} = 0, \quad N_{k2} = 0, \quad N_{k3} = P_3, \quad N_x = -P_3, \quad M_y = -P_3 e_3.$$

Notranje sile v osnovni konstrukciji zaradi sile $\Delta X_{1,3} = 1$

$$N_{k1} = 1, \quad N_{k2} = 0.0, \quad N_{k3} = 0.0, \quad \bar{N}_{x1} = -1.0, \quad \bar{M}_{y1} = -1 e_1.$$



Notranje sile v osnovni konstrukciji zaradi sile $\Delta X_{2,3} = 1$

$$N_{k1} = 0, \quad N_{k2} = 1, \quad N_{k3} = 0, \quad \bar{N}_{x2} = -1, \quad \bar{M}_{y2} = -1.0 e_2.$$

Koeficienti a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 in b_2 so:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^{L_{k1}} \frac{dx}{E_{k1} A_{k1}} + \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + \int_0^L \frac{e_1 e_1}{E_b I_b} dx, \\ a_{22} &= \int_0^{L_{k2}} \frac{dx}{E_{k2} A_{k2}} + \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + \int_0^L \frac{e_2 e_2}{E_b I_b} dx, \\ a_{12} &= \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + \int_0^L \frac{e_1 e_2}{E_b I_b} dx, \\ b_1 &= P_3 \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + P_3 \int_0^L \frac{e_1 e_3}{E_b I_b} dx, \\ b_2 &= P_3 \int_0^L \frac{dx}{E_b I_b} + P_3 \int_0^L \frac{e_2 e_3}{E_b I_b} dx. \end{aligned}$$

Neznanki $\Delta X_{1,3}$ in $\Delta X_{2,3}$ izračunamo iz sistema enačb (5.92). Sile v kablh po končanem napenjanju so

$$N_{k1} = P_1 + \Delta X_{1,2} + \Delta X_{1,3}, \quad N_{k2} = P_2 + \Delta X_{2,3}, \quad N_{k3} = P_3.$$

Zaporedno napenjanje k kablov:

V primeru, ko zaporedoma napenjamo k kablov, moramo rešiti $k - 1$ sistemov enačb.

Napenjanje drugega kabla

$$a_{11} \Delta X_{1,2} + b_1 = 0.$$

Napenjanje tretjega kabla

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta X_{1,3} + a_{12} \Delta X_{2,3} + b_1 &= 0, \\ a_{21} \Delta X_{1,3} + a_{22} \Delta X_{2,3} + b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Napenjanje četrtega kabla

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta X_{1,4} + a_{12} \Delta X_{2,4} + a_{13} \Delta X_{3,4} + b_1 &= 0, \\ a_{21} \Delta X_{1,4} + a_{22} \Delta X_{2,4} + a_{23} \Delta X_{3,4} + b_2 &= 0, \\ a_{31} \Delta X_{1,4} + a_{32} \Delta X_{2,4} + a_{33} \Delta X_{3,4} + b_3 &= 0. \end{aligned}$$



Napenjanje k -tega kabla

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta X_{1,k} + a_{12} \Delta X_{2,k} + \dots + a_{1,k-1} \Delta X_{k-1,k} + b_1 &= 0, \\ a_{21} \Delta X_{1,k} + a_{22} \Delta X_{2,k} + \dots + a_{2,k-1} \Delta X_{k-1,k} + b_2 &= 0, \\ &\vdots \\ a_{k-1,1} \Delta X_{1,k} + a_{k-1,2} \Delta X_{2,k} + \dots + a_{k-1,k-1} \Delta X_{k-1,k} + b_{k-1} &= 0. \end{aligned}$$

Če z N_k označimo število vseh kablov, določimo koeficiente a_{ii} , a_{ij} in b_i za napenjanje k -tega kabla ($2 \leq k \leq N_k$) takole:

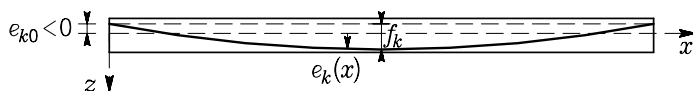
$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^{L_{ki}} \frac{dx}{E_{ki} A_{ki}} + \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + \int_0^L \frac{e_i^2}{E_b I_b} dx, \\ a_{ij} &= \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + \int_0^L \frac{e_i e_j}{E_b I_b} dx, \quad (k > 2 \text{ in } i < k-1), \\ a_{ji} &= a_{ij}, \\ b_i &= P_k \int_0^L \frac{dx}{E_b A_b} + P_k \int_0^L \frac{e_i e_k}{E_b I_b} dx. \end{aligned} \tag{5.93}$$

Silo v kablu i po končanem napenjanju k -tega kabla izračunamo po enačbi

$$N_{ki} = P_i + \sum_{j=i+1}^k \Delta X_{i,j}, \quad (i = 1, \dots, k).$$

V nadaljevanju določimo rešitev integrala $\int_0^L e_i e_j dx$ za primer, ko imajo kabli obliko kvadratne parabole. Ekscentričnost e_k je takrat podana z enačbo $e_k = ax^2 + bx + c$, kjer so z a , b in c označene konstante. Določimo jih iz pogojev na sliki 5.277:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad e_k &= e_{k0} && \rightarrow && e_{k0} = c, \\ x = L/2 : \quad e_k &= f_k + e_{k0} && \rightarrow && f_k + e_{k0} = a \left(\frac{L}{2} \right)^2 + b \frac{L}{2} + e_{k0}, \\ x = L : \quad e_k &= e_{k0} && \rightarrow && e_{k0} = a L^2 + b L + e_{k0}. \end{aligned} \tag{5.94}$$



Slika 5.277: Os kabla je določena s kvadratno parabolo



Rešitev enačb (5.94) je

$$a = -\frac{4 f_k}{L^2}, \quad b = \frac{4 f_k}{L}, \quad c = e_{k0},$$

ekscentričnost kabla e_k pa:

$$e_k = -\frac{4 f_k}{L^2} x^2 + \frac{4 f_k}{L} x + e_{k0}. \quad (5.95)$$

Če uporabimo oznake

$$e_i = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad e_j = a_j x^2 + b_j x + c_j,$$

velja:

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{4 f_i}{L^2}, & b_i &= \frac{4 f_i}{L}, & c_i &= e_{i0}, \\ a_j &= -\frac{4 f_j}{L^2}, & b_j &= \frac{4 f_j}{L}, & c_j &= e_{j0} \end{aligned}$$

in je rešitev integrala $\int_0^L e_i e_j dx$ taka:

$$\int_0^L e_i e_j dx = L \left(e_{i0} e_{j0} + \frac{2}{3} e_{i0} f_j + \frac{2}{3} e_{j0} f_i + \frac{8}{15} f_i f_j \right).$$

V primeru, ko je $e_{i0} = e_{j0} \equiv e_0$ in $f_i = f_j \equiv f$, dobimo

$$\int_0^L e^2 dx = L \left(e_0^2 + \frac{4}{3} e_0 f + \frac{8}{15} f^2 \right).$$

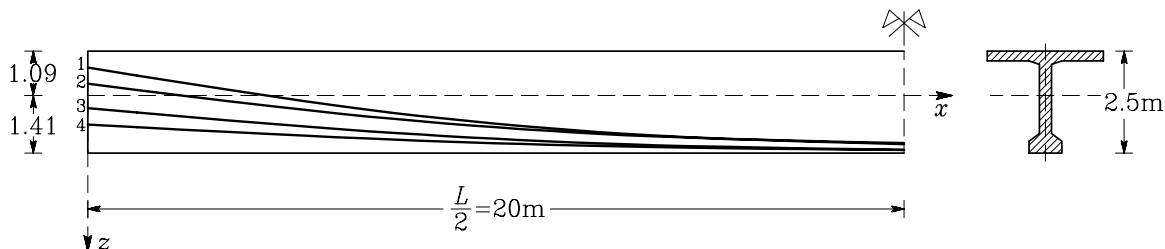
Koeficiente a_{ii} , a_{ij} in b_i za napenjanje k -tega kabla (enačbe (5.93)) za konstantni prečni prerez nosilca in za kable, katerih oblika je določena s kvadratno parabolo, izračunamo iz enačb:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{L_{ki}}{E_{ki} A_{ki}} + \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} \left(e_{i0}^2 + \frac{4}{3} e_{i0} f_i + \frac{8}{15} f_i^2 \right), \\ a_{ij} &= \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} \left(e_{i0} e_{j0} + \frac{2}{3} e_{i0} f_j + \frac{2}{3} e_{j0} f_i + \frac{8}{15} f_i f_j \right), \quad (k > 2 \text{ in } i < k-1), \\ a_{ji} &= a_{ij}, \\ b_i &= \frac{P_k L}{E_b A_b} + \frac{P_k L}{E_b I_b} \left(e_{i0} e_{k0} + \frac{2}{3} e_{i0} f_k + \frac{2}{3} e_{k0} f_i + \frac{8}{15} f_i f_k \right). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Enačbe veljajo za $i = 1, \dots, k-1$ in $j = i+1, \dots, k-1$.



Primer 5.62 Enačbe, izpeljane v primeru 5.61, uporabimo na primeru prostoležečega nosilca dolžine $L = 40$ m, ki je zaporedoma prednapet s štirimi kablji. Višina h prečnega prereza nosilca je 2.5 m. Težišče prečnega prereza je na višini $h_T = 1.41$ m. Ploščina A_b prečnega prereza nosilca je 1.092 m^2 , vztrajnostni moment I_b pa 0.966 m^4 . Modul elastičnosti betona E_b je 34000 MPa . Ploščina A_k prečnega prereza kabla je 0.00168 m^2 , modul elastičnosti E_k kablov pa 195000 MPa . Ekscentričnosti kablov v krajnih prerezih nosilca so $e_{10} = -0.69 \text{ m}$, $e_{20} = -0.29 \text{ m}$, $e_{30} = 0.31 \text{ m}$, $e_{40} = 0.71 \text{ m}$, puščice parabol pa $f_{k1} = 1.87 \text{ m}$, $f_{k2} = 1.47 \text{ m}$, $f_{k3} = 1.02 \text{ m}$ in $f_{k4} = 0.62 \text{ m}$ (slika 5.278).



Slika 5.278: Nosilec je zaporedno prednapenjan s štirimi kablji

Kabli so zaporedno prednapeti s silami $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 2000 \text{ kN}$. Izračunajmo sile v kablji po prednapenjanju četrtega kabla zaradi zaporednega napenjanja kablov!

Pri napenjanju drugega kabla ($k = 2$) rešujemo eno enačbo:

$$a_{11} \Delta X_{1,2} + b_1 = 0, \quad (5.97)$$

pri napenjanju tretjega kabla ($k = 3$) moramo rešiti sistem dveh enačb:

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta X_{1,3} + a_{12} \Delta X_{2,3} + b_1 &= 0, \\ a_{21} \Delta X_{1,3} + a_{22} \Delta X_{2,3} + b_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.98)$$

pri napenjanju četrtega kabla ($k = 4$) pa moramo rešiti sistem treh enačb:

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta X_{1,4} + a_{12} \Delta X_{2,4} + a_{13} \Delta X_{3,4} + b_1 &= 0, \\ a_{21} \Delta X_{1,4} + a_{22} \Delta X_{2,4} + a_{23} \Delta X_{3,4} + b_2 &= 0, \\ a_{31} \Delta X_{1,4} + a_{32} \Delta X_{2,4} + a_{33} \Delta X_{3,4} + b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Pri računu koeficientov a_{ii} potrebujemo dolžine kablov. Dolžino L_k kabla, ki ima obliko kvadratne parabole, izračunamo po enačbi:

$$L_k = \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

V enačbi (5.95) upoštevamo, da je $y(x) \equiv e_k(x)$

$$y = -\frac{4f_k}{L^2} x^2 + \frac{4f_k}{L} x + e_{k0}$$



in izračunamo dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 f_k}{L^2} (L - 2x).$$

Dolžina kabla L_k je:

$$L_k = \frac{1}{L^2} \int_0^L \sqrt{L^4 + 16 f_k^2 L^2 - 64 f_k^2 L x + 64 f_k^2 x^2} dx.$$

Upoštevamo, da je $L = 40$ m, $f_{k1} = 1.87$ m, $f_{k2} = 1.47$ m, $f_{k3} = 1.02$ m in $f_{k4} = 0.62$ m in dobimo:

$$L_{k1} = 40.2319 \text{ m}, \quad L_{k2} = 40.1436 \text{ m}, \quad L_{k3} = 40.0693 \text{ m}, \quad L_{k4} = 40.0256 \text{ m}.$$

Račun koeficientov a_{ii} , a_{ij} in b_i .

Napenjanje drugega kabla (k=2):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{L_{k1}}{E_{k1} A_{k1}} + \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} (e_{10}^2 + \frac{4}{3} e_{10} f_1 + \frac{8}{15} f_1^2) = \frac{40.2319}{195 \cdot 10^3 \cdot 0.00168} + \\ &+ \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} + \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (0.69^2 - \frac{4}{3} \cdot 0.69 \cdot 1.87 + \frac{8}{15} \cdot 1.87^2) = 0.124641, \\ b_1 &= \frac{P_2 L}{E_b A_b} + \frac{P_2 L}{E_b I_b} (e_{10} e_{20} + \frac{2}{3} e_{10} f_2 + \frac{2}{3} e_{20} f_1 + \frac{8}{15} f_1 f_2) = \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} + \\ &+ \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (0.69 \cdot 0.29 - \frac{2}{3} \cdot 0.69 \cdot 1.47 - \frac{2}{3} \cdot 0.29 \cdot 1.87 + \frac{8}{15} \cdot 1.87 \cdot 1.47) = 3.68545. \end{aligned}$$

Iz (5.97) sledi $\Delta X_{1,2} = -29.5684$ kN.

Napenjanje tretjega kabla (k=3):

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0.124641, \\ a_{22} &= \frac{L_{k2}}{E_{k2} A_{k2}} + \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} (e_{20}^2 + \frac{4}{3} e_{20} f_2 + \frac{8}{15} f_2^2) = \frac{40.1436}{195 \cdot 10^3 \cdot 0.00168} + \\ &+ \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} + \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (0.29^2 - \frac{4}{3} \cdot 0.29 \cdot 1.47 + \frac{8}{15} \cdot 1.47^2) = 0.12443, \\ a_{12} &= \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} (e_{10} e_{20} + \frac{2}{3} e_{10} f_2 + \frac{2}{3} e_{20} f_1 + \frac{8}{15} f_1 f_2) = \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} + \\ &+ \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (0.69 \cdot 0.29 - \frac{2}{3} \cdot 0.69 \cdot 1.47 - \frac{2}{3} \cdot 0.29 \cdot 1.87 + \frac{8}{15} \cdot 1.87 \cdot 1.47) = \\ &= 1.84273 \cdot 10^{-3} = a_{21}, \\ b_1 &= \frac{P_3 L}{E_b A_b} + \frac{P_3 L}{E_b I_b} (e_{10} e_{30} + \frac{2}{3} e_{10} f_3 + \frac{2}{3} e_{30} f_1 + \frac{8}{15} f_1 f_3) = \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} + \\ &+ \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (-0.69 \cdot 0.31 - \frac{2}{3} \cdot 0.69 \cdot 1.02 + \frac{2}{3} \cdot 0.31 \cdot 1.87 + \frac{8}{15} \cdot 1.87 \cdot 1.02) = 3.91003, \end{aligned}$$



$$b_2 = \frac{P_3 L}{E_b A_b} + \frac{P_3 L}{E_b I_b} (e_{20} e_{30} + \frac{2}{3} e_{20} f_3 + \frac{2}{3} e_{30} f_2 + \frac{8}{15} f_2 f_3) = \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} +$$

$$+ \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (-0.29 \cdot 0.31 - \frac{2}{3} \cdot 0.29 \cdot 1.02 + \frac{2}{3} \cdot 0.31 \cdot 1.47 + \frac{8}{15} \cdot 1.47 \cdot 1.02) = 4.14321.$$

Iz (5.98) sledi $\Delta X_{1,3} = -30.8847 \text{ kN}$ in $\Delta X_{2,3} = -32.8403 \text{ kN}$.

Napenjanje četrtega kabla ($k=4$):

$$a_{11} = 0.124641,$$

$$a_{22} = 0.12443,$$

$$a_{12} = 1.84273 \cdot 10^{-3} = a_{21},$$

$$a_{33} = \frac{L_{k3}}{E_{k3} A_{k3}} + \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} (e_{30}^2 + \frac{4}{3} e_{30} f_3 + \frac{8}{15} f_3^2) = \frac{40.0693}{195 \cdot 10^3 \cdot 0.00168} +$$

$$+ \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} + \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (0.31^2 + \frac{4}{3} \cdot 0.31 \cdot 1.02 + \frac{8}{15} \cdot 1.02^2) = 0.124695,$$

$$a_{13} = \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} (e_{10} e_{30} + \frac{2}{3} e_{10} f_3 + \frac{2}{3} e_{30} f_1 + \frac{8}{15} f_1 f_3) = \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} +$$

$$+ \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (-0.69 \cdot 0.31 - \frac{2}{3} \cdot 0.69 \cdot 1.02 + \frac{2}{3} \cdot 0.31 \cdot 1.87 + \frac{8}{15} \cdot 1.87 \cdot 1.02) =$$

$$= 1.95501 \cdot 10^{-3} = a_{31},$$

$$a_{23} = \frac{L}{E_b A_b} + \frac{L}{E_b I_b} (e_{20} e_{30} + \frac{2}{3} e_{20} f_3 + \frac{2}{3} e_{30} f_2 + \frac{8}{15} f_2 f_3) = \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} +$$

$$+ \frac{40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (-0.29 \cdot 0.31 - \frac{2}{3} \cdot 0.29 \cdot 1.02 + \frac{2}{3} \cdot 0.31 \cdot 1.47 + \frac{8}{15} \cdot 1.47 \cdot 1.02) =$$

$$= 2.07161 \cdot 10^{-3} = a_{32},$$

$$b_1 = \frac{P_4 L}{E_b A_b} + \frac{P_4 L}{E_b I_b} (e_{10} e_{40} + \frac{2}{3} e_{10} f_4 + \frac{2}{3} e_{40} f_1 + \frac{8}{15} f_1 f_4) = \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} +$$

$$+ \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (-0.69 \cdot 0.71 - \frac{2}{3} \cdot 0.69 \cdot 0.62 + \frac{2}{3} \cdot 0.71 \cdot 1.87 + \frac{8}{15} \cdot 1.87 \cdot 0.62) =$$

$$= 3.92886,$$

$$b_2 = \frac{P_4 L}{E_b A_b} + \frac{P_4 L}{E_b I_b} (e_{20} e_{40} + \frac{2}{3} e_{20} f_4 + \frac{2}{3} e_{40} f_2 + \frac{8}{15} f_2 f_4) = \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} +$$

$$+ \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (-0.29 \cdot 0.71 - \frac{2}{3} \cdot 0.29 \cdot 0.62 + \frac{2}{3} \cdot 0.71 \cdot 1.47 + \frac{8}{15} \cdot 1.47 \cdot 0.62) =$$

$$= 4.23999,$$

$$b_3 = \frac{P_4 L}{E_b A_b} + \frac{P_4 L}{E_b I_b} (e_{30} e_{40} + \frac{2}{3} e_{30} f_4 + \frac{2}{3} e_{40} f_3 + \frac{8}{15} f_3 f_4) = \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 1.092} +$$

$$+ \frac{2000 \cdot 40}{34 \cdot 10^3 \cdot 0.966} (0.31 \cdot 0.71 + \frac{2}{3} \cdot 0.31 \cdot 0.62 + \frac{2}{3} \cdot 0.71 \cdot 1.02 + \frac{8}{15} \cdot 1.02 \cdot 0.62) =$$

$$= 5.00044.$$



Iz (5.99) sledi $\Delta X_{1,4} = -30.4209$ kN, $\Delta X_{2,4} = -32.9743$ kN in $\Delta X_{3,4} = -39.0765$ kN.

Sile v kablilih po napenjanju četrtega kabla so:

$$N_{k1} = P_1 + \Delta X_{1,2} + \Delta X_{1,3} + \Delta X_{1,4} = 2000 - 29.5684 - 30.8847 - 30.4209 = 1909.13 \text{ kN},$$

$$N_{k2} = P_2 + \Delta X_{2,3} + \Delta X_{2,4} = 2000 - 32.8403 - 32.9743 = 1934.19 \text{ kN},$$

$$N_{k3} = P_3 + \Delta X_{3,4} = 2000 - 39.0765 = 1960.92 \text{ kN},$$

$$N_{k4} = P_4 = 2000 \text{ kN}.$$

Oglejmo si še velikosti zmanjšanja sil v kablilih zaradi zaporednega napenjanja kablov!

Napenjanje drugega kabla ($k=2$):

Sile v kablilih po napenjanju drugega kabla ter zmanjšanje sile v prvem kablu glede na stanje po napenjanju prvega kabla in glede na začetno silo napenjanja:

$$N_{k1} = 2000 - 29.57 = 1970.43 \text{ kN} \rightarrow 1.5\% \quad 1.5\%,$$

$$N_{k2} = 2000 \text{ kN}.$$

Sile v kablilih po napenjanju tretjega kabla ter zmanjšanje sil v prvem in drugem kablu glede na stanje po napenjanju drugega kabla in glede na začetno silo napenjanja:

$$N_{k1} = 2000 - 30.88 = 1969.12 \text{ kN} \rightarrow 0.1\% \quad 1.5\%,$$

$$N_{k2} = 2000 - 32.84 = 1967.16 \text{ kN} \rightarrow 1.6\% \quad 1.6\%,$$

$$N_{k3} = 2000 \text{ kN}.$$

Sile v kablilih po napenjanju četrtega kabla ter zmanjšanje sil v prvem, drugem in tretjem kablu glede na stanje po napenjanju tretjega kabla in glede na začetno silo napenjanja:

$$N_{k1} = 1909.13 \text{ kN} \rightarrow 3.3\% \quad 4.5\%,$$

$$N_{k2} = 1934.19 \text{ kN} \rightarrow 1.7\% \quad 3.3\%,$$

$$N_{k3} = 1960.92 \text{ kN} \rightarrow 2.0\% \quad 2.0\%,$$

$$N_{k4} = 2000 \text{ kN}.$$

Celotno zmanjšanje sil napenjanja nosilca je:

$$\Delta P = \Delta X_{1,2} + \Delta X_{1,3} + \Delta X_{1,4} + \Delta X_{2,3} + \Delta X_{2,4} + \Delta X_{3,4} =$$

$$= -29.5684 - 30.8847 - 30.4209 - 32.8403 - 32.9743 - 39.0765 = -195.76 \text{ kN}.$$

Začetna sila $4 \cdot 2000 = 8000$ kN se zaradi zaporednega napenjanja zmanjša na 7804.24 kN, to je za 2.4 %.



6 Geometrijska nelinearnost nosilcev

Osnovne enačbe mehanike trdnih teles smo razdelili v tri skupine: kinematične enačbe, ravnotežne enačbe in konstitucijske enačbe. Osnovne enačbe mehanike trdnih določajo **linearno teorijo elastičnosti**, če upoštevamo naslednje predpostavke:

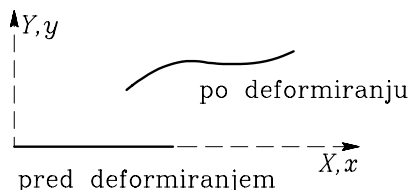
1. Spremembe dolžin, spremembe pravih kotov in zasuki materialnih vlaken so majhne količine. Zato upoštevamo **tenzor majhnih deformacij**.
2. Pomiki trdnega telesa so majhni v primerjavi z dimenzijami telesa. Zato lahko upoštevamo ravnotežne enačbe na **nedeformiranem** telesu.
3. Zveza med napetostmi in deformacijami je **linearno elastična**.

Prva in druga predpostavka zagotavljata **geometrijsko linearnost**, tretja pa **materialno linearnost** osnovnih enačb mehanike trdnih teles. V tem poglavju obravnavamo geometrijsko nelinearnost ravnega nosilca v ravnini X, Y .

6.1 Geometrijska nelinearnost ravnega nosilca v ravnini

Enačbe, s katerimi opišemo geometrijsko nelinearnost dobimo, če upoštevamo tenzor velikih deformacij in ravnotežne enačbe na deformiranem telesu.

Nosilec v ravnini X, Y je obtežen oziroma podprt tako, da ostane v tej ravnini tudi po deformiranju (slika 6.1).



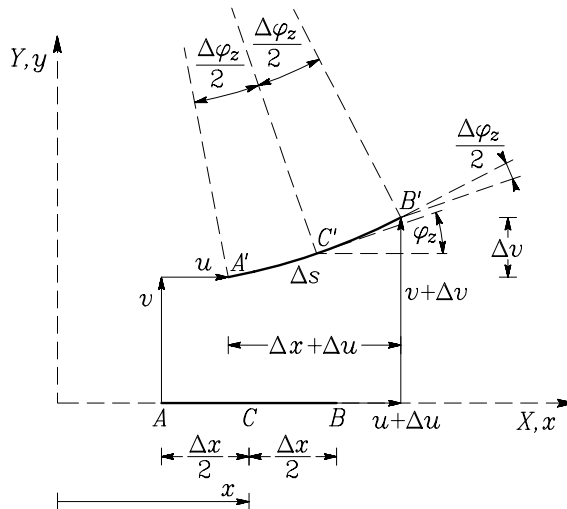
Slika 6.1: Začetna in deformirana lega nosilca

Z X in Y sta označeni prostorski koordinati, x in y pa telesni koordinati.



Kinematične enačbe

Obravnavajmo majhen del nosilca, ki ima pred deformiranjem dolžino Δx . Po deformiranju tak del spremeni obliko in dolžino (slika 6.2).



Slika 6.2: Majhen del nosilca pred in po deformiranju

Dolžina nosilca Δx se po deformiranju spremeni v Δs . Pomik delca v točki A v smeri osi X označimo z u , v smeri osi Y pa z v . Zasuk osi nosilca v točki C okrog osi $Z \equiv z$ določa kot φ_z . Iz slike 6.2 sledi

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta u}{\Delta s} = \cos \varphi_z, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \sin \varphi_z. \quad (6.1)$$

Če izvedemo limitni postopek, pri katerem gre Δs proti nič, sledi

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{du}{ds}, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{dv}{ds}, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds}$$

in dobimo

$$\frac{dx + du}{ds} = \cos \varphi_z, \quad \frac{dv}{ds} = \sin \varphi_z. \quad (6.2)$$

Ukrivljenost $1/R$ osi nosilca je definirana z enačbo [†]

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_z}{\Delta s} = \frac{d\varphi_z}{ds} \rightarrow ds = R d\varphi_z. \quad (6.3)$$

Specifično spremembo dolžine osi nosilca označimo z D_{xx}^0 . Po definiciji je D_{xx}^0 enaka

$$D_{xx}^0 = \frac{ds - dx}{dx} \rightarrow ds = (1 + D_{xx}^0) dx. \quad (6.4)$$

[†] I.N. Bronštejn, K.A. Semendjajev, G. Musiol, H. Mühlig, Matematični priročnik, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1997.

Iz enačb (6.3) in (6.4) sledi

$$dx = \frac{R d\varphi_z}{1 + D_{xx}^0}. \quad (6.5)$$

Enačbo (6.4) vstavimo v (6.2) in dobimo **kinematični enačbi**

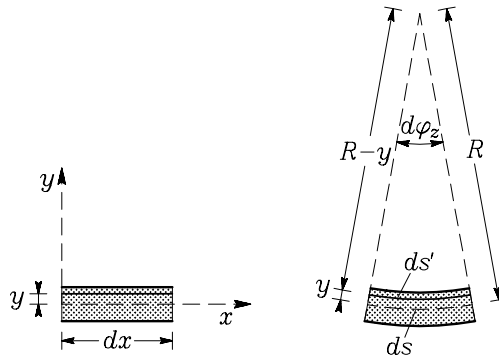
$$\frac{dx + du}{(1 + D_{xx}^0) dx} = \cos \varphi_z, \quad \frac{dv}{(1 + D_{xx}^0) dx} = \sin \varphi_z, \quad (6.6)$$

ki ju zapišemo še takole:

$$1 + \frac{du}{dx} = (1 + D_{xx}^0) \cos \varphi_z, \quad \frac{dv}{dx} = (1 + D_{xx}^0) \sin \varphi_z. \quad (6.7)$$

Če upoštevamo Bernoulli-Navierovo hipotezo, da ravninski prerezi ostanejo ravninski tudi po deformiranju, lahko specifično spremembo D_{xx} dolžine vlakna, ki ni na osi nosilca, izrazimo z D_{xx}^0 , ki ustreza vlaknu na osi nosilca (slika 6.3)

$$D_{xx} = \frac{ds' - dx}{dx}. \quad (6.8)$$



Slika 6.3: Del nosilca diferencialne dolžine pred in po deformiranju

Iz slike 6.3 sledi, da je

$$ds' = (R - y) d\varphi_z. \quad (6.9)$$

Specifično spremembo dolžine D_{xx} dobimo, če izraza (6.5) in (6.9) vstavimo v enačbo (6.8)

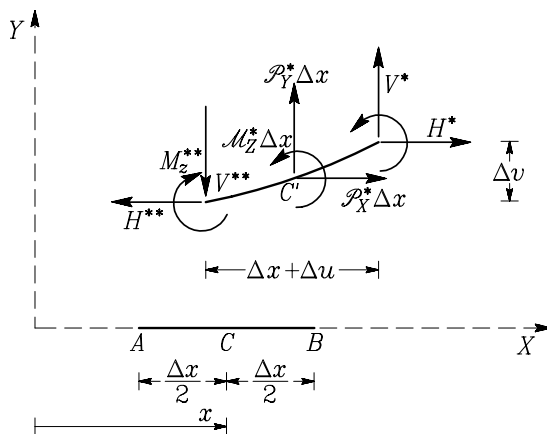
$$D_{xx} = \frac{(R - y) d\varphi_z - \frac{R d\varphi_z}{1 + D_{xx}^0}}{\frac{R d\varphi_z}{1 + D_{xx}^0}} = \frac{(1 + D_{xx}^0)(R - y) - R}{R} = D_{xx}^0 - \frac{y}{R} (1 + D_{xx}^0). \quad (6.10)$$

Enačba (6.10) povezuje specifično spremembo dolžine D_{xx} vlakna pri poljubnem y in specifično spremembo dolžine D_{xx}^0 vlakna pri $y = 0$.



Ravnotežne enačbe

Notranjo silo v smeri osi X označimo s H , v smeri osi Y pa z V . Upogibni moment okrog osi $Z \equiv z$ označimo z M_z . Zvezo med silami H , V in M_z in med zunanjo obtežbo \mathcal{P}_X , \mathcal{P}_Y in \mathcal{M}_Z dobimo, če zapišemo ravnotežne enačbe za zunanje in notranje sile na deformiranem delu nosilca z začetno dolžino Δx ter izvedemo limitni postopek, pri katerem gre Δx proti nič (slika 6.4). Pri tem upoštevamo, da je obtežba \mathcal{P}_X , \mathcal{P}_Y in \mathcal{M}_Z taka, da med deformiranjem nosilca ne spremeni velikosti in smeri.



Slika 6.4: Sile, ki delujejo na elementarni del nosilca, morajo biti v ravnotežju

Notranje sile, označene z $*$, ustrezajo prerezu $x + \Delta x/2$, z $**$ pa ustrezajo prerezu $x - \Delta x/2$. Zvezdica pri linijski obtežbi označuje povprečno vrednost na dolžini Δx . Ravnotežne enačbe so

$$\begin{aligned}
 \sum X = 0 : \quad & -H^{**} + H^* + \mathcal{P}_X^* \Delta x = 0, \\
 \sum Y = 0 : \quad & -V^{**} + V^* + \mathcal{P}_Y^* \Delta x = 0, \\
 \sum M_z^C = 0 : \quad & -M_z^{**} + M_z^* + V^{**} \frac{\Delta x + \Delta u}{2} + V^* \frac{\Delta x + \Delta u}{2} - H^{**} \frac{\Delta v}{2} - H^* \frac{\Delta v}{2} + \\
 & \mathcal{M}_Z^* \Delta x = 0.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Enačbe (6.11) delimo z Δx

$$\begin{aligned}
 \frac{H^* - H^{**}}{\Delta x} + \mathcal{P}_X^* &= \frac{\Delta H}{\Delta x} + \mathcal{P}_X^* = 0, \\
 \frac{V^* - V^{**}}{\Delta x} + \mathcal{P}_Y^* &= \frac{\Delta V}{\Delta x} + \mathcal{P}_Y^* = 0, \\
 \frac{M_z^* - M_z^{**}}{\Delta x} + \frac{1}{2} (V^* + V^{**}) \left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2} (H^* + H^{**}) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \mathcal{M}_Z^* &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$



Izvedemo limitni postopek, pri katerem gre Δx proti nič

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta x} &= \frac{dH}{dx}, & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{P}_X^* &= \mathcal{P}_X, \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} &= \frac{dV}{dx}, & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{P}_Y^* &= \mathcal{P}_Y, \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M_z^* - M_z^{**}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M_z}{\Delta x} = \frac{dM_z}{dx}, \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (H^* + H^{**}) &= 2H, & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (V^* + V^{**}) &= 2V, \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} &= \frac{dv}{dx}, & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} &= \frac{du}{dx}, & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{M}_Z^* &= \mathcal{M}_Z.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

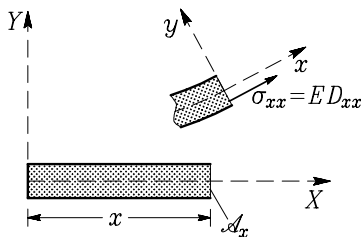
Tako dobimo

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dx} + \mathcal{P}_X &= 0, \\
 \frac{dV}{dx} + \mathcal{P}_Y &= 0, \\
 \frac{dM_z}{dx} + V \left(1 + \frac{du}{dx} \right) - H \frac{dv}{dx} + \mathcal{M}_Z &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Hookov zakon

Predpostavimo linearno zvezo med normalno napetostjo σ_{xx} v prečnem prerezu \mathcal{A}_x v smeri deformirane osi nosilca in med specifično spremembo D_{xx} dolžine vlakna v tej smeri (slika 6.5)

$$\sigma_{xx} = E D_{xx} = E \left(D_{xx}^0 - \frac{y}{R} (1 + D_{xx}^0) \right). \tag{6.15}$$



Slika 6.5: Predpostavimo linearno zvezo med napetostjo in deformacijo

Upoštevali smo enačbo (6.10). Z E označimo modul elastičnosti. Osnova je po definiciji (glej Statika, ...)

$$N_x = \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x = \int_{\mathcal{A}_x} E \left(D_{xx}^0 - \frac{y}{R} (1 + D_{xx}^0) \right) dA_x. \tag{6.16}$$



Če poteka os x skozi težišče prečnega prereza \mathcal{A}_x , je statični moment S_z enak nič in dobimo

$$N_x = E A_x D_{xx}^0 \rightarrow D_{xx}^0 = \frac{N_x}{E A_x}. \quad (6.17)$$

Upogibni moment M_z je

$$M_z = - \int_{\mathcal{A}_x} y \sigma_{xx} dA_x = - \int_{\mathcal{A}_x} y E \left(D_{xx}^0 - \frac{y}{R} (1 + D_{xx}^0) \right) dA_x = \frac{E I_z}{R} (1 + D_{xx}^0). \quad (6.18)$$

Razdalja y se z deformiranjem spreminja, ker pa je višina nosilca majhna v primerjavi z dolžino, lahko spreminjanje višine nosilca zanemarimo. Iz enačb (6.3) in (6.18) sledi

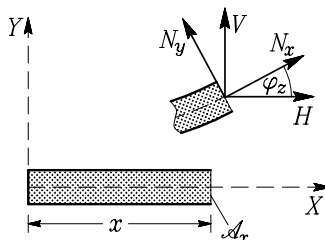
$$\frac{d\varphi_z}{ds} = \frac{M_z}{E I_z (1 + D_{xx}^0)}. \quad (6.19)$$

Če v (6.19) upoštevamo (6.4), dobimo

$$\boxed{\frac{d\varphi_z}{dx} = \frac{M_z}{E I_z}}. \quad (6.20)$$

Oсно silo N_x v smeri tangente in prečno silo N_y v smeri normale na deformirano os nosilca izrazimo z vodoravno silo H in navpično silo V takole (slika 6.6):

$$N_x = H \cos \varphi_z + V \sin \varphi_z, \quad N_y = -H \sin \varphi_z + V \cos \varphi_z. \quad (6.21)$$



Slika 6.6: Osono silo N_x in prečno silo N_y izrazimo z vodoravno silo H in navpično silo V

Če drugo izmed enačb (6.21) vstavimo v (6.17), dobimo

$$\boxed{D_{xx}^0 = \frac{1}{E A_x} (H \cos \varphi_z + V \sin \varphi_z)}. \quad (6.22)$$

Enačbe (6.7), (6.14), (6.22) in (6.20) so **osnovne enačbe ravnega nosilca** za primer, da velikosti pomikov



in zasukov ne omejimo. S temi enačbami upoštevamo **geometrijsko nelinearnost nosilca**

$$1 + \frac{du}{dx} = (1 + D_{xx}^0) \cos \varphi_z, \quad (6.23)$$

$$\frac{dv}{dx} = (1 + D_{xx}^0) \sin \varphi_z, \quad (6.24)$$

$$\frac{dH}{dx} + \mathcal{P}_X = 0, \quad (6.25)$$

$$\frac{dV}{dx} + \mathcal{P}_Y = 0, \quad (6.26)$$

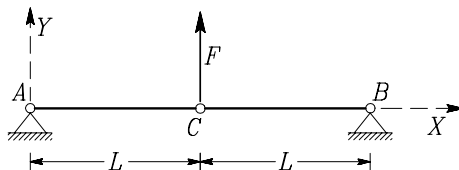
$$\frac{dM_z}{dx} + V \left(1 + \frac{du}{dx} \right) - H \frac{dv}{dx} + \mathcal{M}_Z = 0, \quad (6.27)$$

$$D_{xx}^0 = \frac{1}{E A_x} (H \cos \varphi_z + V \sin \varphi_z), \quad (6.28)$$

$$\frac{d\varphi_z}{dx} = \frac{M_z}{E I_z}. \quad (6.29)$$

Iz sedmih enačb (6.23) do (6.29) izračunamo tri statične količine H , V in M_z in štiri kinematične količine u , v , φ_z in D_{xx}^0 . Enačbe so nelinearne, saj v njih nastopajo produkti neznanih količin in trigonometrične funkcije neznanke φ_z . Rešimo jih lahko le z numeričnimi metodami (na primer metoda končnih elementov, diferenčna metoda in podobno).

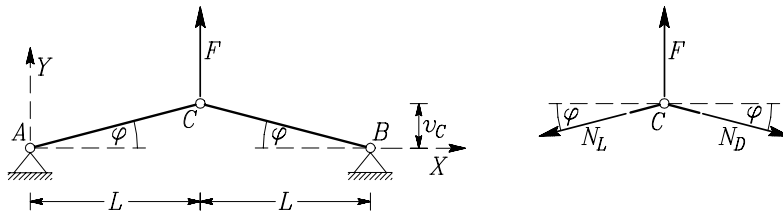
Primer 6.1 Izračunajmo navpični pomik v_C točke C in osno silo N_x v palicah (slika 6.7)! Palici sta iz enakega materiala in imata enako ploščino prečnega prereza A_x . Pri računu upoštevajmo geometrijsko nelinearnost.



Slika 6.7: Paličje sestavljata dve palici

Če predpostavimo, da sta palici absolutno togi, prikazane naloge ne moremo enolično rešiti. Po linearni teoriji ima namreč sistem enačb za račun reakcij determinanto enako nič, kar bi pomenilo, da se konstrukcija lahko premika kot sistem togih teles. Po nelinearni teoriji rešitev naloge lahko poiščemo. Na sliki 6.8 je narisana deformirana lega paličja. Zaradi simetrije v geometrijskih podatkih ter v obtežbi, se členek v točki C premakne v smeri Y osi.





Slika 6.8: Deformirana lega paličja in izrezano vozlišče

Ravnotežna pogoja za vozlišče sta

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 : -N_L \cos \varphi + N_D \sin \varphi = 0, \\ \sum Y &= 0 : F - N_L \sin \varphi - N_D \sin \varphi = 0.\end{aligned}$$

Rešitev enačb je:

$$N_L = N_D \equiv N_x, \quad F = 2 N_x \sin \varphi = 2 N_x \frac{v_C}{L'}.$$

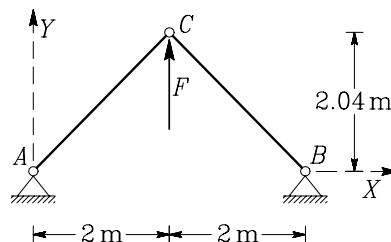
Zapišimo enačbo, ki povezuje osno silo N_x in specifično spremembo dolžine (enačba (6.17)) ter upoštevajmo, da je v palici homogeno napetostno oziroma deformacijsko stanje

$$N_x = E A_x D_{xx}^0, \quad D_{xx}^0 = \frac{L' - L}{L} = \frac{L'}{L} - 1.$$

Dolžino L' deformirane palice izračunamo po Pitagorovem izreku $L' = \sqrt{L^2 + v_C^2}$. Rešiti moramo tri enačbe

$$F = 2 N_x \frac{v_C}{L'}, \quad N_x = E A_x \left(\frac{L'}{L} - 1 \right), \quad L' = \sqrt{L^2 + v_C^2}$$

iz katerih izračunamo v_C , N_x in L' . Enačbe rešimo numerično na primer s programom Mathematica. Če izberemo podatke $L = 2$ m, $F = 5$ kN in $E A_x = 4$ kN, dobimo $N_x = 1.71503$ kN, $v_C = 2.04093$ m in $L_C = 2.85752$ m. Kot φ izračunamo iz pogoja $\tan \varphi = v_C/L$ in dobimo $\varphi = 45.5803^\circ$. Deformirana lega konstrukcije je prikazana na sliki 6.9.



Slika 6.9: Deformirana lega paličja

Reakcije izračunamo iz ravnotežnih pogojev za vozlišči A in B.



6.1.1 Teorija drugega reda

Če v enačbah (6.23) do (6.29) za nosilec v ravnini, s katerimi upoštevamo geometrijsko nelinearnost upoštevamo, da so spremembe dolžin in zasuki majhni, sledi

$$D_{xx}^0 = \frac{ds - dx}{dx} \ll 1 \quad \rightarrow \quad D_{xx}^0 \approx \varepsilon_{xx}^0, \quad \varphi_z \ll 1 \quad \rightarrow \quad \sin \varphi_z \approx \varphi_z, \quad \cos \varphi_z \approx 1. \quad (6.30)$$

Z ε_{xx}^0 označimo vzdolžno deformacijo osi nosilca. Izraze (6.30) vstavimo v (6.23) do (6.29) in kvadrate malih količin v primerjavi z linearnimi členi zanemarimo ter dobimo

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_{xx}^0, \quad (6.31)$$

$$\frac{dv}{dx} = \varphi_z + \varepsilon_{xx}^0 \varphi_z \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \varphi_z, \quad (6.32)$$

$$\frac{dH}{dx} + \mathcal{P}_X = 0, \quad (6.33)$$

$$\frac{dV}{dx} + \mathcal{P}_Y = 0, \quad (6.34)$$

$$\frac{dM_z}{dx} + V \left(1 + \frac{du}{dx} \right) - H \frac{dv}{dx} + \mathcal{M}_Z = 0, \quad (6.35)$$

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{1}{E A_x} (H + V \varphi_z), \quad (6.36)$$

$$\frac{d\varphi_z}{dx} = \frac{M_z}{E I_z}. \quad (6.37)$$

Enačbe (6.31) do (6.37) so nelinearne in predstavljajo osnovne enačbe po **teoriji drugega reda** za ravni nosilec v ravnini X, Y . Neznanke so statične količine H, V, M_z in kinematične količine u, v, φ_z in ε_{xx}^0 .

Če vpliv spremembe dolžine nosilca zanemarimo ($\varepsilon_{xx}^0 \approx 0$), potem je $du = 0$ in dobimo pet enačb za pet neznank v, φ_z, H, V in M_z

$$\frac{dv}{dx} = \varphi_z, \quad (6.38)$$

$$\frac{dH}{dx} + \mathcal{P}_X = 0, \quad (6.39)$$

$$\frac{dV}{dx} + \mathcal{P}_Y = 0, \quad (6.40)$$

$$\frac{dM_z}{dx} + V - H \frac{dv}{dx} + \mathcal{M}_Z = 0, \quad (6.41)$$

$$\frac{d\varphi_z}{dx} = \frac{M_z}{E I_z}. \quad (6.42)$$

Tudi enačbe (6.38) do (6.42) so nelinearne (produkt neznank $H (dv/dx)$). Enačbe (6.38) vstavimo v enačbo (6.42) in dobimo zvezo med upogibnim momentom M_z in pomikom v

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_z}{E I_z} \quad \rightarrow \quad M_z = E I_z \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (6.43)$$



Enačbo (6.41) odvajamo po x in dobimo

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} + \frac{dV}{dx} - \frac{d}{dx} \left(H \frac{dv}{dx} \right) + \frac{d\mathcal{M}_Z}{dx} = 0. \quad (6.44)$$

V (6.44) upoštevamo enačbi (6.40) in (6.43) ter dobimo enačbo za račun pomikov v

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(H \frac{dv}{dx} \right) = \mathcal{P}_Y - \frac{d\mathcal{M}_Z}{dx}. \quad (6.45)$$

Ob znanih obtežbah \mathcal{P}_Y in \mathcal{M}_Z je enačba (6.45) nehomogena diferencialna enačba četrtega reda s spremenljivimi koeficienti za $v(x)$. Ko pomik v izračunamo, dobimo potek momentov M_z po teoriji drugega reda po enačbi (6.43). Pri reševanju enačbe (6.45) potrebujemo vodoravno silo H , ki jo izračunamo iz enačbe (6.39). Navpično silo V izračunamo iz enačbe (6.41)

$$V = -\frac{dM_z}{dx} + H \frac{dv}{dx} - \mathcal{M}_Z = -\frac{d}{dx} \left(E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + H \frac{dv}{dx} - \mathcal{M}_Z. \quad (6.46)$$

V nadaljevanju obravnavajmo primer, ko je prečni prerez \mathcal{A}_x konstanten, sila H pa **tlačna in konstantna**

$$H = -F = \text{konst.} \quad (6.47)$$

Takrat dobi enačba (6.45) obliko

$$E I_z \frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2 v}{dx^2} = \mathcal{P}_Y - \frac{d\mathcal{M}_Z}{dx}, \quad (6.48)$$

enačba (6.46) obliko

$$V = -E I_z \frac{d^3 v}{dx^3} - F \frac{dv}{dx} - \mathcal{M}_Z, \quad (6.49)$$

enačba (6.43) pa se ne spremeni. Z oznako

$$k^2 = \frac{F}{E I_z} \quad (6.50)$$

zapišemo enačbo (6.48) takole:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{E I_z} \left(\mathcal{P}_Y - \frac{d\mathcal{M}_Z}{dx} \right). \quad (6.51)$$

Enačba (6.51) je linearna diferencialna enačba četrtega reda za pomik $v(x)$. Splošna rešitev linearne enačbe (6.51) je vsota rešitve v_h homogene diferencialne enačbe

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (6.52)$$

in partikularne rešitve v_p , ki je odvisna od desne strani enačbe (6.51)

$$v = v_h + v_p. \quad (6.53)$$



Rešitev v_h ima obliko [†]

$$v_h = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D = A \sin \sqrt{\frac{F}{E I_z}} x + B \cos \sqrt{\frac{F}{E I_z}} x + Cx + D. \quad (6.54)$$

A , B , C in D so integracijske konstante, ki jih določimo iz robnih pogojev. Da je izraz (6.54) res rešitev diferencialne enačbe (6.52) se prepričamo tako, da rešitev (6.54) štirikrat odvajamo

$$\frac{d^2 v_h}{dx^2} = -A k^2 \sin kx - B k^2 \cos kx, \quad \frac{d^4 v_h}{dx^4} = A k^4 \sin kx + B k^4 \cos kx \quad (6.55)$$

in izraza za drugi in četrti odvod vstavimo v diferencialno enačbo (6.52)

$$A k^4 \sin kx + B k^4 \cos kx + k^2 (-A k^2 \sin kx - B k^2 \cos kx) = 0 \rightarrow 0 \equiv 0. \quad (6.56)$$

Vidimo, da pomik v_h po enačbi (6.54) zadošča diferencialni enačbi (6.52). Rešitev homogene diferencialne enačbe velja za nosilec, ki je obtežen le v krajiščih. Partikularni del rešitve v_p mora zadoščati nehomogeno diferencialno enačbo (6.51) (glej primer 6.2).

Račun pomikov nosilca po teoriji drugega reda računamo po enačbi (6.51) ali pa po enačbi (6.43). Enačba (6.51) je bolj splošna, z njo lahko računamo pomike statično določenih in statično nedoločenih nosilcev. Dovolj je, da poznamo zunanjo obtežbo. Upogibnega momenta M_z pri statično nedoločenih nosilcih ne poznamo. Enačba (6.43) pa je preprostejša in je primerna za račun pomikov statično določenih nosilcev, pri katerih poznamo potek M_z .

Enačbe **linearno elastične teorije** mehanike trdnih teles za ravni linijski nosilec dobimo iz enačb (6.31) do (6.37), ki ustrezajo teoriji drugega reda, če zanemarimo vse nelinearne člene $H dv/dx$, $V du/dx$, $V \varphi_z$ in upoštevamo, da je $H \equiv N_x$ in $V \equiv N_y$. Tako dobimo znane enačbe (glej poglavje 1)

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_{xx}, \quad (6.57)$$

$$\frac{dv}{dx} = \varphi_z, \quad (6.58)$$

$$\frac{dN_x}{dx} + \mathcal{P}_x = 0, \quad (6.59)$$

$$\frac{dN_y}{dx} + \mathcal{P}_y = 0, \quad (6.60)$$

$$\frac{dM_z}{dx} + N_y + \mathcal{M}_z = 0, \quad (6.61)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N_x}{E A_x}, \quad (6.62)$$

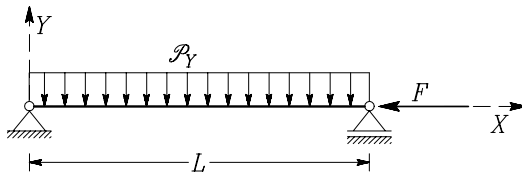
$$\frac{d\varphi_z}{dx} = \frac{M_z}{E I_z}. \quad (6.63)$$

Poudarimo še, da pri upoštevanju geometrijske nelinearnosti **zakon superpozicije ne velja več**.

[†] I.N. Bronštejn, K.A. Semendjajev, G. Musiol, H. Mühlig, Matematični priročnik, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1997.



Primer 6.2 Za prostoležeči nosilec na sliki 6.10, ki je obtežen s tlačno osno silo F ter z enakomerno linijsko obtežbo \mathcal{P}_Y , izračunajmo pomik v na sredini nosilca ($x = L/2$).



Slika 6.10: Nosilec je obtežen s tlačno osno silo F in s prečno obtežbo \mathcal{P}_Y

V nadaljevanju prikazujemo reševanje naloge po teoriji drugega reda. Ravnotežna enačba teorije drugega reda ima za obravnavani primer obliko (enačba (6.51))

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\mathcal{P}_Y}{E I_z}, \quad k^2 = \frac{F}{E I_z}. \quad (6.64)$$

Rešitev za pomik v_p mora zadoščati enačbi (6.64) in ima naslednjo obliko

$$v_p = \frac{\mathcal{P}_Y x^2}{2 F}, \quad (6.65)$$

celotni pomik v pa zapišemo takole (enačbi (6.53) in (6.54)):

$$v = v_h + v_p = A \sin k x + B \cos k x + C x + D + \frac{\mathcal{P}_Y x^2}{2 F}. \quad (6.66)$$

Da je (6.66) rešitev enačbe (6.64) se lahko prepričamo tako, da rešitev (6.65) štirikrat odvajamo in drugi in četrti odvod vstavimo v enačbo (6.64). Če je enačba (6.64) identično izpolnjena, je rešitev (6.65) pravilna.

Konstante A , B , C in D izračunamo iz robnih pogojev. V obeh podporah sta pomik v in upogibni moment M_z enaka nič. Upogibni moment M_z izrazimo s pomikom v po enačbi (6.43):

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad v(0) = 0, \quad \left. \frac{M_z}{E I_z} \right|_0 &= \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_0 = 0, \\ x = L : \quad v(L) = 0, \quad \left. \frac{M_z}{E I_z} \right|_L &= \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_L = 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Ko upoštevamo izraz (6.66), enačbe (6.67) dobijo naslednjo obliko

$$\begin{aligned} B + D &= 0, \\ -B k^2 + \frac{\mathcal{P}_Y}{F} &= 0, \\ A \sin k L + B \cos k L + C L + D + \frac{\mathcal{P}_Y L^2}{2 F} &= 0, \\ -A k^2 \sin k L - B k^2 \cos k L + \frac{\mathcal{P}_Y}{F} &= 0. \end{aligned} \quad (6.68)$$



To je sistem štirih linearnih enačb za A , B , C in D . Rešitev enačb (6.68) je

$$A = \frac{\mathcal{P}_Y}{F} \frac{1 - \cos kL}{k^2 \sin kL}, \quad B = \frac{\mathcal{P}_Y}{k^2 F}, \quad C = -\frac{\mathcal{P}_Y L}{2F}, \quad D = -\frac{\mathcal{P}_Y}{k^2 F}. \quad (6.69)$$

Pomik poljubne točke na osi prostoležečega nosilca po teoriji drugega dobimo, če (6.69) vstavimo v (6.66)

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathcal{P}_Y}{F k^2} \left(\frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin kx + \cos kx - 1 \right) - \frac{\mathcal{P}_Y}{2F} x (L - x) = \\ &= \frac{\mathcal{P}_Y}{E I_z k^4} \left(\operatorname{tg} \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right) - \frac{\mathcal{P}_Y}{2 E I_z k^2} x (L - x). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Upoštevali smo, da je $(1 - \cos \alpha) / \sin \alpha = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Če uporabimo oznako

$$f = \frac{kL}{2} = \sqrt{\frac{F}{E I_z}} \frac{L}{2} = \sqrt{\frac{F}{F_E}} \frac{\pi}{2}, \quad (6.71)$$

kjer smo s F_E označili **kritično silo**

$$F_E = \frac{\pi^2 E I_z}{L^2}, \quad (6.72)$$

dobimo

$$v = \frac{\mathcal{P}_Y L^4}{16 E I_z f^4} \left(\operatorname{tg} f \sin \frac{2f}{L} x + \cos \frac{2f}{L} x - 1 \right) - \frac{\mathcal{P}_Y L^2}{8 E I_z f^2} x (L - x). \quad (6.73)$$

Največji pomik nastane na sredini nosilca ($x = L/2$). Označimo ga z δ

$$\delta = \frac{5 \mathcal{P}_Y L^4}{384 E I_z} \frac{12}{5 f^4} \left(\frac{2(1 - \cos f)}{\cos f} - f^2 \right) = \frac{5 \mathcal{P}_Y L^4}{384 E I_z} \left(\frac{12(2 \sec f - f^2 - 2)}{5 f^4} \right). \quad (6.74)$$

Zasuk φ_z je

$$\varphi_z = \frac{dv}{dx} = \frac{\mathcal{P}_Y}{F k} \left(\frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \cos kx - \sin kx \right) - \frac{\mathcal{P}_Y}{2F} (L - 2x),$$

upogibni moment M_z je

$$M_z = E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\mathcal{P}_Y E I_z}{F} \left(-\frac{1 - \cos kL}{\sin kL} \sin kx - \cos kx + 1 \right).$$

Za račun osne sile N_x in prečne sile N_y potrebujemo sili H in V (enačba (6.21)). V obravnavanem primeru je $H = -F$ in $V = \mathcal{P}_Y (L/2 - x)$.

Pomik δ na sredini nosilca po **linearni teoriji** je

$$\delta = \frac{5 \mathcal{P}_Y L^4}{384 E I_z}.$$



Upoštevamo oznako za Eulerjevo silo in zapišemo

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{384} \frac{\mathcal{P}_Y L}{F_E} \pi^2.$$

Za konstantno razmerje prečne in vzdolžne obtežbe je

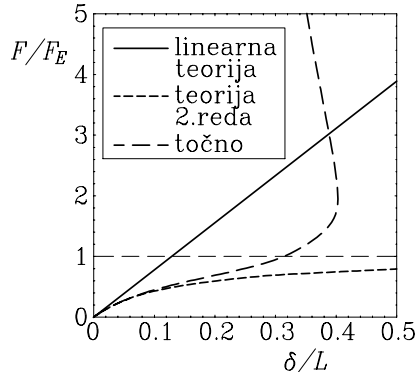
$$\frac{\mathcal{P}_Y L}{F} = 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_Y L = F$$

in zato lahko pišemo

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5 \pi^2}{384} \frac{F}{F_E}.$$

Na sliki 6.11 je prikazana zveza med silo F/F_E in pomikom δ/L , ki jo dobimo, če rešimo točne enačbe ravnega nosilca (enačbe (6.23) do (6.29)). F je tlačna sila v smeri osi nosilca, F_E je kritična ali Eulerjeva sila. Na isti sliki prikazujemo tudi rezultate po teoriji drugega reda in rezultate po linearni teoriji.

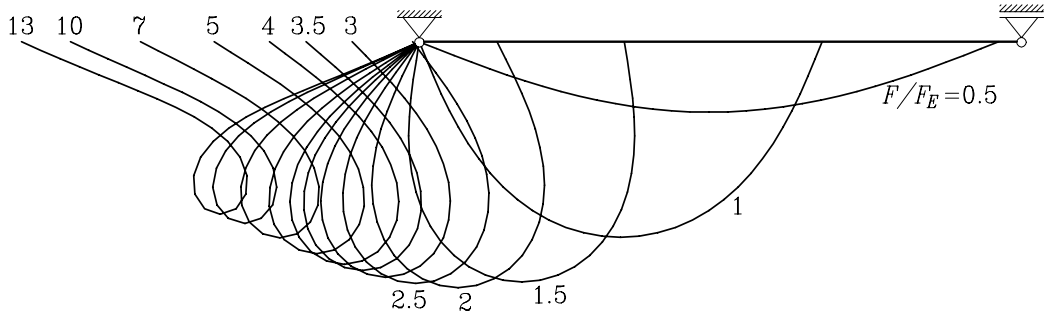
Vidimo, da daje linearna teorija dobre rezultate le za zelo majhne vrednosti F/F_E . Rezultati po teoriji drugega reda so natančnejši, a le do razmerja $F/F_E \approx 0.5$. Vendar pa tudi rezultat po točnih enačbah velja le za elastičen material ($E = \text{konst.}$). Ker se večina realnih materialov obnaša elastično le pri majhnih deformacijah, dobimo točno rešitev sila–pomik le, če upoštevamo tudi materialno nelinearnost in pri krhkih materialih (npr. beton) še nastajanje razpok.



Slika 6.11: Prečni pomik na sredini nosilca po treh različnih teorijah

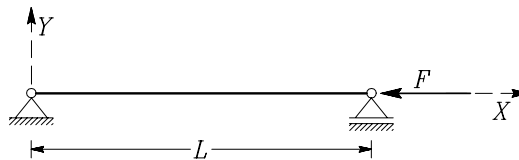
Pri računu krivulje $F/F_E - \delta/L$ na sliki 6.11 smo upoštevali, da sila F in zvezna linijska obtežba \mathcal{P}_Y tako naraščata, da je razmerje med prečno obtežbo $\mathcal{P}_Y L$ in silo F konstantno in enako ena. Rezultati so bili izračunani z računalniškim programom PLASTELA.[†] Na sliki 6.12 je prikazana še deformirana lega nosilca za različne velikosti razmerij obtežbe: $F/F_E = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$.

[†] M. Saje, A variational principle for finite planar deformation of straight slender elastic beams, Int. J. Solids Struct., 26, 887–900, 1990.



Slika 6.12: Deformirane lege nosilca za štiri različne stopnje obtežbe

Primer 6.3 Izračunajmo ravnotežna stanja členkasto podprtega linijskega nosilca dolžine $L = 1$ m, ki je v pomični podpori obtežen s tlačno silo F (slika 6.13). Nalogo rešimo po teoriji 2. reda (enačba (6.51)) in po točnih enačbah. Prečni prerez nosilca je kvadrat s stranico 0.1 m.



Slika 6.13: Linijski nosilec je obtežen s tlačno silo F vzdolž osi nosilca.

A) Reševanje po teoriji drugega reda

V obravnavanem primeru je desna stran ravnotežne enačbe (6.51) za račun pomikov v enaka nič

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0.$$

Zato je partikularni del v_p rešitve za v enak nič in je

$$v = v_h = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$$

Robni pogoji so (pomik in upogibni moment v podpori sta nič):

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad v(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_0 = 0 &\rightarrow B = 0, \quad D = 0, \\ x = L : \quad v(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_L = 0 &\rightarrow A \sin kL = 0, \quad A \sin kL + CL = 0. \end{aligned} \quad (6.75)$$



Rešitev enačb (6.75) je

$$A \sin kL = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0.$$

Enačba $A \sin kL = 0$ je izpolnjena, če je $A = 0$ ali, če je $kL = n\pi$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. To pomeni, da se nosilec nahaja v ravnotežju, če so pomiki v enaki nič ($A = B = C = D = 0$) ali pa, če je

$$A \neq 0 \quad \text{in} \quad k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (6.76)$$

V primeru, da je $A \neq 0$, ima izraz za pomik v , ki ustreza ravnotežnemu stanju, naslednjo obliko

$$v = A \sin kx = A \sin \frac{n\pi}{L} x = A \sin \sqrt{\frac{F}{EI_z}} x. \quad (6.77)$$

Deformirana lega nosilca ima v primeru **ravnotežja** obliko sinusa. Če je $A = 0$ ali $n = 0$, je nosilec raven za poljubno velikost sile F . Če vzamemo za n najmanjšo pozitivno vrednost, pri kateri je nosilec v ravnotežju v deformirani obliki, dobimo

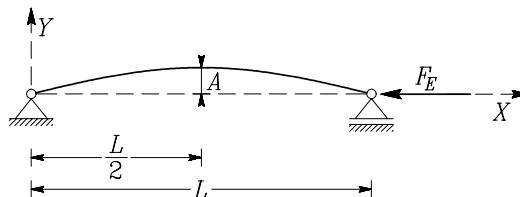
$$n = 1 \quad \rightarrow \quad kL = \sqrt{\frac{F}{EI_z}} L = \pi \quad (6.78)$$

Iz enačbe (6.78) lahko izračunamo najmanjšo velikost sile F , pri kateri se nosilec lahko nahaja v ravnotežju v deformirani legi. To silo označimo s F_E ali s $F_{kr(1)}$ in jo imenujemo **kritična** ali **uklonska** sila

$$F_E = F_{kr(1)} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}. \quad (6.79)$$

Deformirana oblika nosilca, ki ustreza ravnotežju pri $n = 1$ je prikazana na sliki 6.14

$$v = A \sin \frac{\pi}{L} x. \quad (6.80)$$



Slika 6.14: Ravnotežna oblika nosilca za $F = F_E$

Ugotovimo lahko, da velikosti pomika v ne moremo izračunati, ker ne poznamo vrednosti za konstanto A . To je posledica uporabe enačbe (6.51), ki ustreza predpostavki majhnih deformacij in dejstva, da na nosilec deluje le sila v smeri njegove osi. V primeru, ko na nosilec deluje tudi prečna obtežba, lahko velikost pomikov izračunamo tudi po enačbi (6.51) (glej primer 6.2).

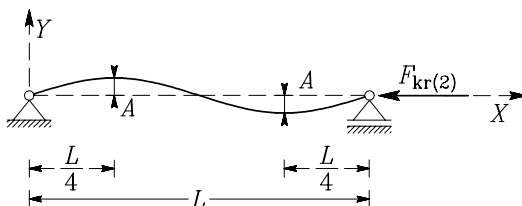
Iz rezultata (6.76) sledi, da se nosilec lahko nahaja v ravnotežju le v ravni (neupognjeni) obliki, če je $F < F_E$. Zato predstavlja sila F_E **mejno** silo za ravnotežje za ravno oziroma upognjeno obliko nosilca. Če bi v enačbi (6.76) vzeli za $n = 2, 3, \dots$, bi dobili množico kritičnih obtežb $F_{kr(i)}$, pri katerih je obravnavani nosilec v ravnotežnem stanju v upognjeni obliki. Za $n = 2$ dobimo

$$k L = \sqrt{\frac{F_{kr(2)}}{E I_z}} L = 2 \pi \rightarrow F_{kr(2)} = \frac{4 \pi^2 E I_z}{L^2} = 4 F_E. \quad (6.81)$$

Pripadajoča deformirana lega je podana z izrazom

$$v = A \sin \frac{2 \pi}{L} x \quad (6.82)$$

in je prikazana na sliki 6.15.



Slika 6.15: Uklonska oblika za kritično silo $F_{kr(2)}$

B) Rešitev naloge po točni enačbi (6.19)

Točna enačba ima obliko

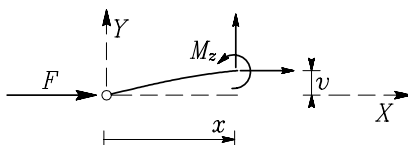
$$\frac{d\varphi_z}{ds} = \frac{M_z}{E I_z (1 + D_{xx}^0)}. \quad (6.83)$$

Če zanemarimo spremembo dolžine, dobimo

$$\frac{d\varphi_z}{ds} = \frac{M_z}{E I_z}. \quad (6.84)$$

Ravnotežna enačba za del nosilca v deformirani legi je (slika 6.16)

$$M_z = -F v. \quad (6.85)$$



Slika 6.16: Ravnotežno enačbo zapišemo za del nosilca v deformirani legi



Enačbo (6.85) vstavimo v enačbo (6.84) in dobimo

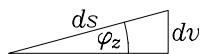
$$E I_z \frac{d\varphi_z}{ds} + F v = 0. \quad (6.86)$$

Po odvajanju enačbe (6.86) po koordinati s in upoštevanju zveze (glej sliko 6.17)

$$\frac{dv}{ds} = \sin \varphi_z \quad (6.87)$$

dobi ravnotežna enačba naslednjo obliko

$$E I_z \frac{d^2 \varphi_z}{ds^2} + F \sin \varphi_z = 0. \quad (6.88)$$



Slika 6.17: Zveza med zasukom φ_z in pomikom v

Rešitev enačbe (6.88) podaja Wang.[†] Izraz za upogib δ na sredini nosilca v odvisnosti od razmerja F/F_E je (F_E je Eulerjeva sila, kot α določa zasuk krajišč nosilca – slika 6.16).

$$F_E = \frac{\pi^2 E I_z}{L^2}, \quad \frac{\delta}{L} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \sqrt{\frac{F}{F_E}}}. \quad (6.89)$$

Tabela 6.1: Rešitev diferencialne enačbe (6.88) ter zveza med F/F_E in δ/L

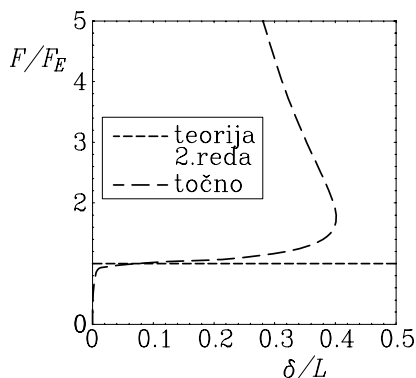
α	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
F/F_E	1.015	1.063	1.152	1.293	1.518	1.884	2.541	4.029	9.116
δ/L	0.110	0.211	0.296	0.359	0.396	0.402	0.375	0.313	0.211
δ/L	0.110	0.204	0.292	0.356	0.394	0.400	0.374	0.311	0.210

V preglednici 6.1 prikazujemo normirane pomike δ/L nosilca na sredini (pri $x = L/2$) pri različnih stopnjah obtežbe F/F_E . Rezultate, dobljene z enačbo (6.89), primerjamo z vrednostmi, ki smo jih izračunali s programom PLASTELA.[†] Pri uporabi programa PLASTELE smo morali upoštevati, da konstrukcija v začetni legi ni povsem ravna (upoštevamo imperfekcijo). Predpostavili smo, da ima konstrukcija v začetni legi sinusno obliko, kjer je največje odstopanje od premice enako 10^{-4} m.

Na sliki 6.18 je prikazana zveza med F/F_E in δ/L .

[†] C.-T. Wang, Applied Elasticity, str. 217–222, McGraw–Hill, 1953.

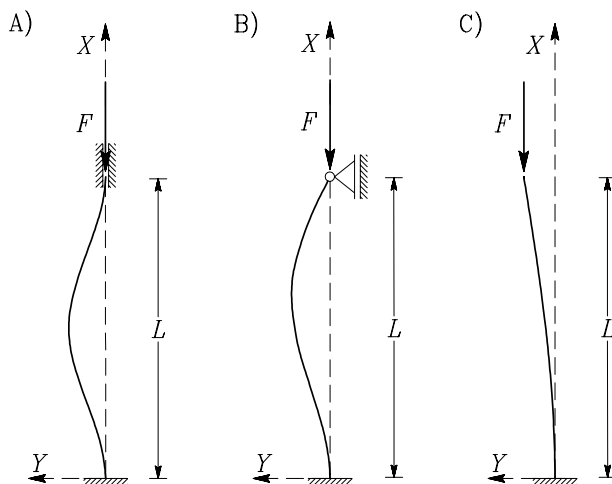
[†] M. Saje, A variational principle for finite planar deformation of straight slender elastic beams, Int. J. Solids Struct., 26, 887–900, 1990.



Slika 6.18: Zveza med pomikom na sredini nosilca in obtežbo za velike pomike

Za $F/F_E < 1$ je možna le neukriviljena ravnotežna lega. Pri $F/F_E = 1$ nastopi razvejišče (glej poglavje 8). Obtežna pot AB za neukriviljeni nosilec predstavlja nestabilna ravnotežna stanja. Obtežna pot AC predstavlja stabilna ravnotežna stanja ukrivljenega nosilca. Največji prečni pomik nastopi, ko doseže obtežba F/F_E vrednost približno 1.7. Pri nadaljnjem naraščanju obtežbe, se pomik na sredini nosilca počasi zmanjšuje. To je posledica dejstva, ker se pri velikih zasukih krajišč nosilca (kota α) tlačna sila spremeni v natezno (glej sliko 6.18).

Na podoben način, kot smo določili kritično silo F_E za členkasto podprti nosilec, lahko izračunamo kritične sile za naslednje tri primere (slika 6.19).



Slika 6.19: Različno podprti tlačno obremenjeni linijski nosilci

Zapišimo le rezultate za najmanjšo kritično silo in pripadajočo deformirano obliko nosilca:

A) V obeh krajiščih nosilca sta preprečena zasuka in prečna pomika

