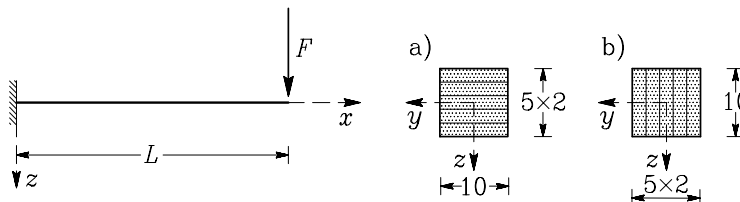
Slika 5.43: Osná sila in upogibni moment zaradi virtualne sile δF_z

Navpični pomik v točki E določimo z integracijo enačbe

$$\begin{aligned}
 w_E &= \sum_{\text{el}} \int_{L_i} \left(\frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{E A_x} \left(1 \cdot 100 \cdot 100 + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 75 \cdot \sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right) + \\
 &+ \frac{1}{E I_y} \left(\frac{2500 \cdot 50 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 \cdot 2 \right) = 0.0031 + 2.7203 = 2.7 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Relativni vpliv osnih sil na pomik v točki E je zelo majhen, saj znaša le 0.12 % od skupnega pomika. Pomik v točki E se zgodi skoraj izključno zaradi upogibanja nosilcev, medtem ko je vpliv osnih deformacij zanemarljiv. Zato pri računu velikokrat vpliv osnih sil na pomike zanemarimo.

Primer 5.10 Konzola je sestavljena iz petih lesenih desk debeline 2 cm in širine 10 cm. V prvem primeru so deske postavljene vodoravno, v drugem pa navpično (slika 5.44). Izračunajmo največjo normalno napetost $\sigma_{xx, \max}$ v konzoli! Točkovna sila na koncu konzole, katere vpliv se enakomerno razdeli na vseh pet desk, je enaka 1 kN. Dolžina konzole je enaka $L = 1$ m. Izračunajmo tudi povprečnega prostega konca konzole! Elastični modul je $E = 2000 \text{ kN/cm}^2$. Vpliv prečnih sil zanemarimo!



Slika 5.44: Konzolo sestavlja pet desk, ki so položene vodoravno oziroma navpično

Račun največje normalne napetosti

Največjo normalno napetost v konzoli izračunamo z enačbo

$$\sigma_{xx,\max} = \frac{|M_y|_{\max}}{I_y} |z|_{\max} = \frac{F L |z|_{\max}}{I_y}.$$

Če so deske položene vodoravno, je največja normalna napetost enaka

$$\sigma_{xx,\max}^a = \frac{1 \cdot 100 \cdot 1}{5 \cdot 6.66} = 3 \text{ kN/cm}^2.$$

Upoštevali smo, da je

$$I_{y1} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6.66 \text{ cm}^4, \quad I_y = 5 I_{y1} \quad |z|_{\max} = 1 \text{ cm}.$$

Za navpično položene deske je največja normalna napetost bistveno manjša kot v primeru vodoravno položenih desk

$$\sigma_{xx,\max}^b = \frac{1 \cdot 100 \cdot 5}{5 \cdot 166.66} = 0.6 \text{ kN/cm}^2.$$

Upoštevali smo

$$I_{y1} = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166.66 \text{ cm}^4, \quad I_y = 5 I_{y1}, \quad |z|_{\max} = 5 \text{ cm}.$$

Razmerje med največjimi normalnimi napetostmi za oba primera je

$$\frac{\sigma_{xx,\max}^a}{\sigma_{xx,\max}^b} = \frac{3}{0.6} = 5.$$

Če deske postavimo navpično, so pri isti obtežbi napetosti 5 krat manjše.

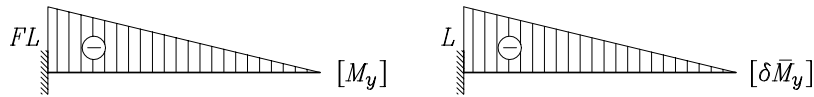
Račun povesa prostega konca konzole

Na prostem koncu konzole postavimo virtualno silo $\delta F = 1$, ki deluje v smeri osi z . Pomik w_T izračunamo po enačbi

$$w_T = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx.$$

Diagrama upogibnih momentov M_y in $\delta \bar{M}_y$ prikazujemo na sliki 5.45.



Slika 5.45: Upogibni moment M_y zaradi sile F in zaradi virtualne sile $\delta F = 1$

Pomik w_T izračunamo z integracijo produkta $M_y \delta \bar{M}_y$ po enačbi (5.24)

$$w_T = \frac{1}{E I_y} F L \frac{L}{2} \frac{2L}{3} = \frac{F L^3}{3 E I_y}.$$

Pomik na koncu vodoravno položenih desk je

$$w_T^a = \frac{1 \cdot 100^3}{3 \cdot 2000 \cdot 5 \cdot 6.66} = 5 \text{ cm}.$$

Če so deske položene navpično, je pomik bistveno manjši

$$w_T^b = \frac{1 \cdot 100^3}{3 \cdot 2000 \cdot 5 \cdot 166.66} = 0.2 \text{ cm}.$$

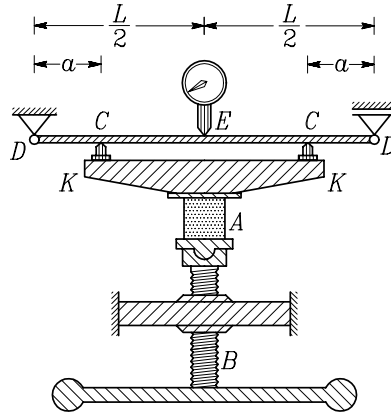
Razmerje med pomikoma je

$$\frac{w_T^a}{w_T^b} = 25.$$

Če deske postavimo navpično, je pomik 25 krat manjši, kot če jih postavimo vodoravno. Vidimo, da je navpična postavitve ugodnejša tako glede na največje napetosti, kot tudi glede na pomik na koncu konzole.

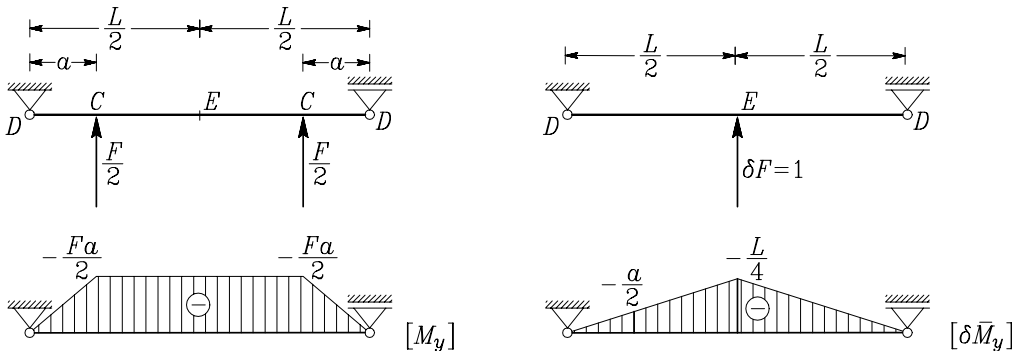
Primer 5.11 S prikazano napravo merimo silo F , ki se preko vijaka B prenaša na preizkušanelec A (slika 5.46). Silo merimo z velikostjo pomika jeklenega nosilca $D-D$ v točki E . Sila se na nosilec $D-D$ prenaša preko togega nosilca $K-K$. Določimo razdaljo a od podpore D do prijemališča sile K na nosilec $D-D$, da bo pri sili $F = 5 \text{ kN}$ upogib nosilca v točki E enak 1 mm ? Nosilec $D-D$ ima širino 6 cm , višino 4 cm , dolžino 1 m , modul elastičnosti materiala pa je 20000 kN/cm^2 .





Slika 5.46: Velikost sile izračunamo iz velikosti pomika nosilca $D-D$ v točki E

Računski model ter diagrama upogibnih momentov zaradi sile F in virtualne sile $\delta F_z = 1$ prikazujemo na sliki 5.47.



Slika 5.47: Diagram upogibnega momenta v nosilcu $D-D$ zaradi sil $F/2$ in $\delta F = 1$

Pomik w_T na sredini nosilca $D-D$ določimo z enačbo

$$w_T = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx.$$

Za obravnavani primer dobimo:

$$E I_y w_T = 2 \frac{F a}{2} \frac{a}{2} \frac{2}{3} \frac{a}{2} + 2 \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{L}{4} \right) \left(\frac{L}{2} - a \right) \frac{F a}{2} = -\frac{F a^3}{12} + \frac{F L^2 a}{16}.$$

Iz zadnje enačbe moramo določiti a , zato jo preoblikujemo takole:

$$a^3 - \frac{3}{4} L^2 a + \frac{12}{F} E I_y w_T = 0.$$



Vztrajnostni moment pravokotnega prečnega prereza nosilca $D-D$ je

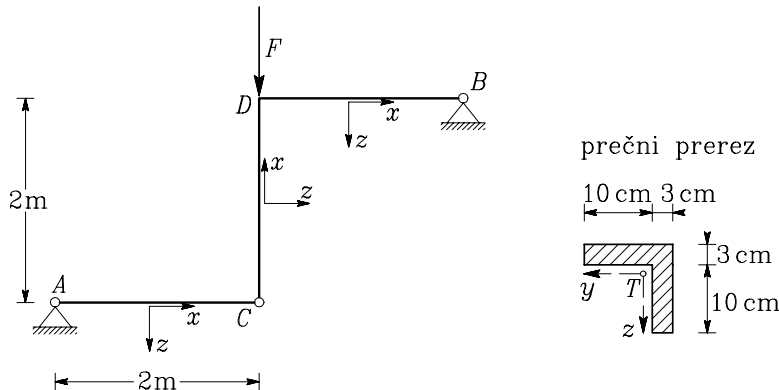
$$I_y = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4.$$

Ob upoštevanju podatkov dobimo

$$a^3 - \frac{3}{4} 100^2 a + \frac{12}{5} 2 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 0.1 = 0 \rightarrow a^3 - 7500 a + 153600 = 0.$$

To nelinearno enačbo rešimo numerično in dobimo $a = 21.8758 \text{ cm}$. Uporabimo lahko različne programe (Mathematica, Matlab, Excel, ...)†

Primer 5.12 Določimo navpični pomik točke D statično določene konstrukcije na sliki 5.48! Velikost sile je $F = 10 \text{ kN}$, modul elastičnosti materiala je $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$. Pri računu upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na deformiranje konstrukcije. Dimenzije konstrukcije prikazujemo na sliki 5.48.



Slika 5.48: Geometrijski podatki o konstrukciji ter lega in smer sile F

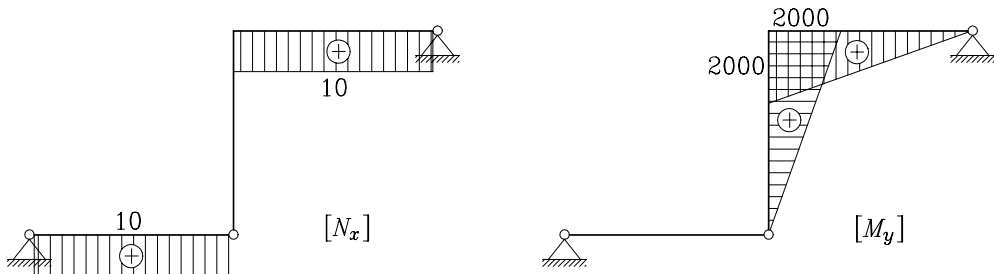
Enačbo za računanje pomika oziroma zasuka smo izpeljali ob predpostavki, da sta osi y in z glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza. V obravnavanem primeru glavni vztrajnostni osi oklepata z osema y in z kot 45° , saj tudi simetrijska os prereza oklepa z osema y in z kot 45° . Če želimo nalogo rešiti, moramo izračunati upogibne momente glede na glavni vztrajnostni osi.

Oсно silo in upogibni moment glede na os y zaradi sile F prikazujemo na sliki 5.49.

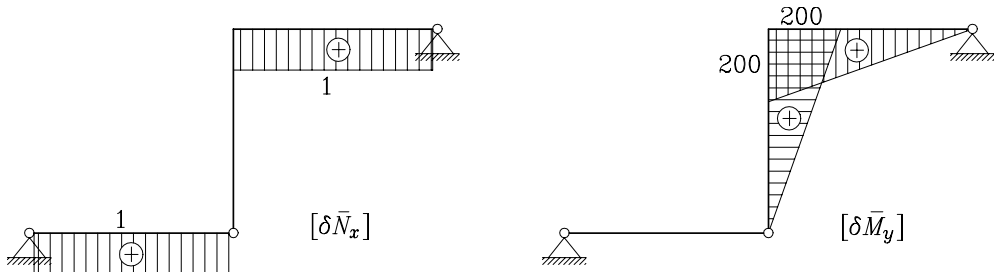
† Ničle polinoma, določene z računalniškim programom Mathematica:

```
FindRoot[a^3-7500a+153600==0,{a,25}]
{a -> 21.8758}
```

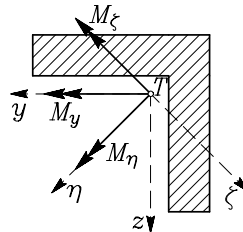


Slika 5.49: Osna sila in upogibni moment glede na os y

V točko D postavimo virtualno silo $\delta F = 1$, ki deluje v enaki smeri, kot sila F . Podobno izračunamo diagrama δN_x in $\delta \bar{M}_y$ zaradi sile $\delta F_z = 1$ (slika 5.50).

Slika 5.50: Osna sila in upogibni moment glede na os y zaradi $\delta F_z = 1$

Glavni vztrajnostni osi η in ζ sta glede na os y zasukani za 45° oziroma 225° . Upogibni moment zaradi sile F glede na ti osi dobimo tako, da M_y projiciramo na osi η in ζ (slika 5.51).

Slika 5.51: Upogibni moment moramo izračunati glede na glavni vztrajnostni osi η in ζ

V tem primeru izračunamo pomik w_D po enačbi

$$w_D = \int_0^L \left(\frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} + \frac{M_\eta \delta \bar{M}_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \delta \bar{M}_\zeta}{E I_\zeta} \right) dx.$$



Geometrijske lastnosti prečnega prereza so:

$$A_x = 69 \text{ cm}^2, \quad I_y = I_z = 995.663 \text{ cm}^4, \quad I_{yz} = 551.087 \text{ cm}^4,$$

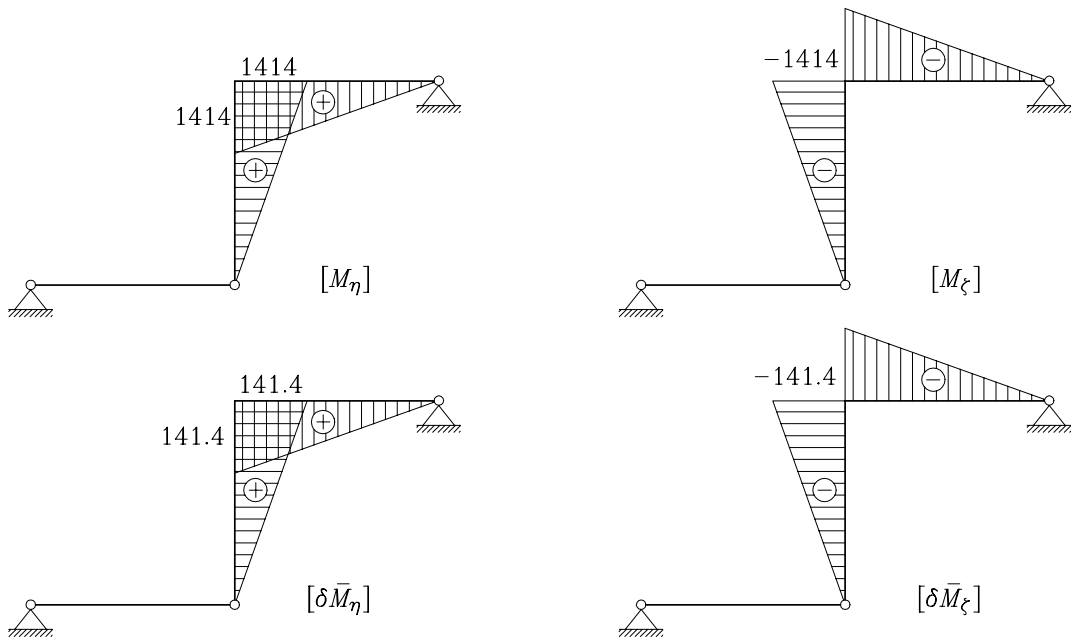
$$\operatorname{tg} 2 \alpha_g = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \rightarrow \alpha_g = 45^\circ,$$

$$I_\eta = 1546.750 \text{ cm}^4, \quad I_\zeta = 444.576 \text{ cm}^4.$$

Upogibna momenta v točki D glede na osi η in ζ sta:

$$M_\eta = M_y \cos 45^\circ = 1414 \text{ kNcm}, \quad M_\zeta = -M_y \cos 45^\circ = -1414 \text{ kNcm}.$$

Diagrama M_η in M_ζ zaradi sile F ter $\delta \bar{M}_\eta$ in $\delta \bar{M}_\zeta$ zaradi sile $\delta F_z = 1$ prikazujemo na sliki 5.52.



Slika 5.52: Upogibna momenta M_η in M_ζ ter $\delta \bar{M}_\eta$ in $\delta \bar{M}_\zeta$ (v kNcm)

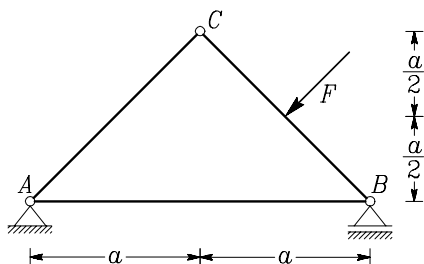
Pomik w_D je:

$$w_D = \frac{1}{E A_x} (10 \cdot 200 \cdot 1 \cdot 2) + \frac{1}{E I_\eta} \left(\frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2 \right) + \frac{1}{E I_\zeta} \left(\frac{1414 \cdot 200}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 141.4 \cdot 2 \right) = 0.0029 + 0.8620 + 2.9991 = 3.86 \text{ cm}.$$

Tudi v tem primeru je del pomika zaradi osne deformacije zelo majhen v primerjavi z delom zaradi upogiba, saj znaša le 0.075% skupnega pomika.

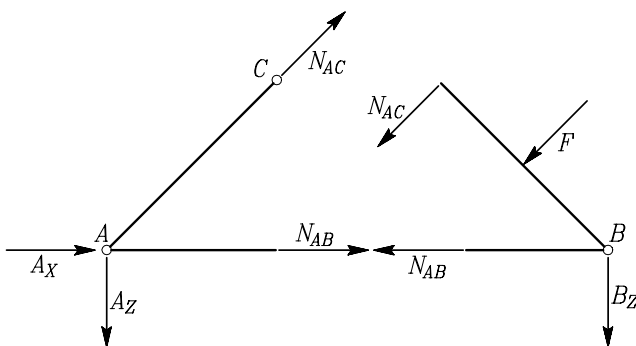


Primer 5.13 Določimo diagrame notranjih sil ter navpični pomik točke C za konstrukcijo na sliki 5.53! Velikost sile F je 10 kN, razdalja a je enaka 10 m. Količine E , I_y in A_x so konstante. Upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na pomike!



Slika 5.53: Ker sila F ni v vozlišču, v delu CB nastopijo tudi upogibni momenti in prečne sile

Konstrukcija je statično določena. Reakcije izračunamo iz ravnotežnih pogojev. Notranje sile izračunamo, če konstrukcijo razdelimo na dva dela in upoštevamo, da sta v palicah od nič različni le osni sili N_{AB} in N_{AC} (slika 5.54).



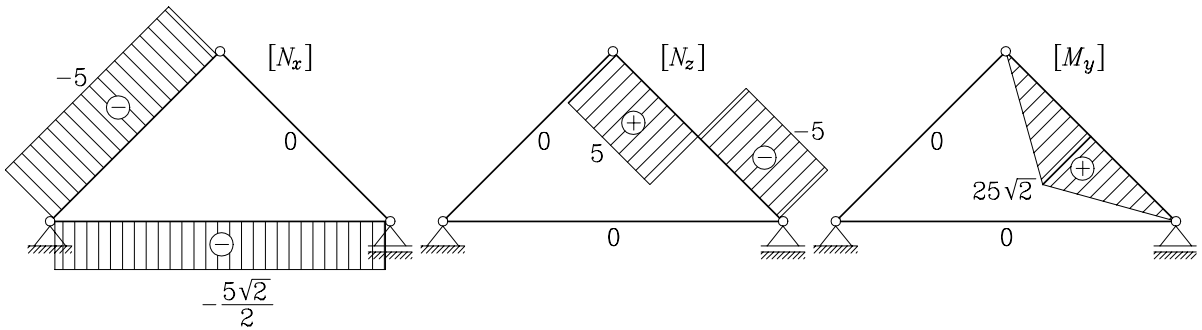
Slika 5.54: Za račun notranjih sil konstrukcijo razdelimo na dva dela

Reakcije in osni sili so:

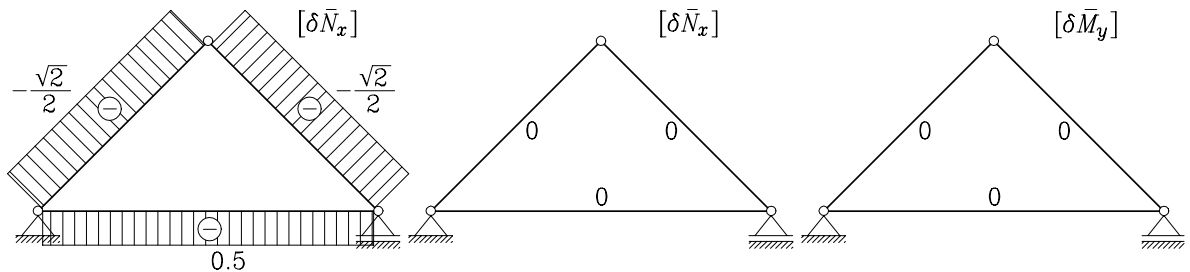
$$\begin{aligned} A_x &= 7.071 \text{ kN}, & A_z &= -3.536 \text{ kN}, \\ B_z &= -3.536 \text{ kN}, \\ N_{AB} &= -3.536 \text{ kN}, & N_{AC} &= -5 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Diagrame notranjih sil zaradi zunanje sile F prikazujemo na sliki 5.55.



Slika 5.55: Osná sila, prečna sila in upogibni moment zaradi sile F

Na sliki 5.56 prikazujemo notranje sile zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$.

Slika 5.56: Notranje sile zaradi sile $\delta F_z = 1$

Ker so od nič različne notranje sile zaradi virtualne obtežbe le osna sila (slika 5.56), navpični pomik prijemališča sile F izračunamo po poenostavljeni enačbi

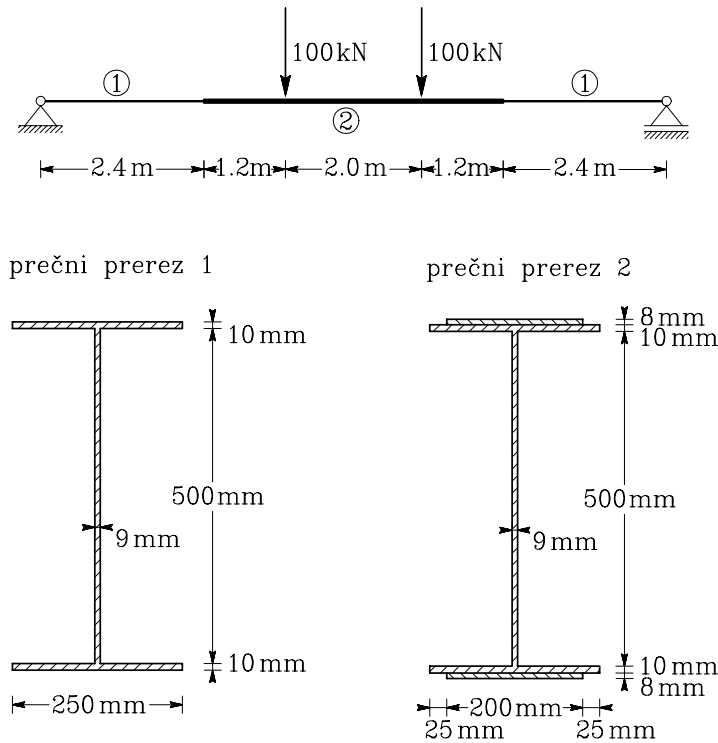
$$w_C = \int_0^L \frac{N_x \delta \bar{N}_x}{E A_x} dx.$$

Za obravnavani primer dobimo:

$$w_C = \frac{1}{E A_x} \left(5 \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 \cdot 2 a \cdot 0.5 \right) = \frac{14.645}{E A_x}.$$



Primer 5.14 Določimo največji povos na sliki 5.57 prikaznega nosilca! Modul elastičnosti E je 210 GPa.



Slika 5.57: Prečni prerez nosilca ni povsod enak

Zaradi simetrične obtežbe je vodoravna reakcija v levi podpori enaka nič. Zato so simetrične tudi reakcije in lahko rečemo, da sta simetrični tako obtežba kot oblika konstrukcije. Največji pomik nastane na sredini konstrukcije. Izračunamo ga po enačbi

$$w = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx,$$

kjer smo vpliv prečnih sil zanemarili. Izračunati moramo vztrajnostna momenta za oba prečna prereza

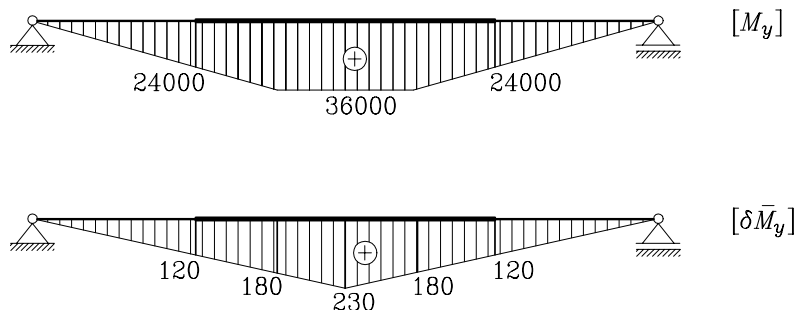
$$I_{y1} = \frac{25 \cdot 52^3}{12} - \frac{24.1 \cdot 50^3}{12} = 41891.67 \text{ cm}^4$$

in

$$I_{y2} = I_{y1} + 2 \left(\frac{20 \cdot 0.8^3}{12} + 26.4^2 \cdot 20 \cdot 0.8 \right) = 64196.09 \text{ cm}^4.$$



Na sliki 5.58 prikazujemo diagrama upogibnih momentov zaradi zunanje obtežbe in zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$, ki jo postavimo na sredino nosilca, saj je zaradi simetrije pomik tam največji.



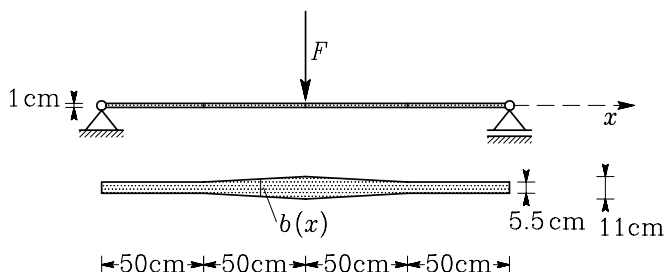
Slika 5.58: Upogibni moment zaradi zunanje obtežbe in zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$

Upogibna momenta na sliki 5.58 sta zapisana v kNcm, zato tudi elastični modul zapišimo v ustreznih enotah $E = 210 \text{ GPa} = 210 \text{ GN/m}^2 = 210 \cdot 10^6 \text{ kN}/(10^4 \text{ cm}^2) = 21000 \text{ kN/cm}^2$.

Največji navpični pomik izračunamo

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{E I_{y1}} \left(\frac{240 \cdot 24000}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 120 \right) \cdot 2 + \frac{1}{E I_{y2}} \left[\frac{120 \cdot 24000}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 120 + \frac{1}{3} \cdot 180 \right) \cdot 2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{120 \cdot 36000}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 120 + \frac{2}{3} \cdot 180 \right) \cdot 2 + 100 \cdot 36000 \left(180 + \frac{230}{2} \right) \cdot 2 \right] = \\
 &= \frac{4.608 \cdot 10^8}{21000 \cdot 41891.67} + \frac{2.5704 \cdot 10^9}{21000 \cdot 64196.09} = 0.524 + 1.907 = 2.43 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Primer 5.15 Določimo največji pomik in največjo vzdolžno normalno napetost na sliki 5.59 prikazanega nosilca! Posebnost obravnavanega nosilca je, da se širina pravokotnega prečnega prereza na delu nosilca linearno spreminja. Pomik določimo z uporabo izreka o virtualnih silah. Sila in modul elastičnosti sta $F = 100 \text{ N}$ in $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$.



Slika 5.59: Širina nosilca se na delu nosilca linearno spreminja



Zaradi simetrije nosilca in obtežbe dobimo največji pomik na sredini nosilca pri $x = 1.0$ m. Funkciji M_y in $\delta \bar{M}_y$ sta simetrični, zato je

$$w = 2 \int_0^{L/2} \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx, \quad I_y = I_y(x)$$

Upogibna momenta na levi polovici nosilca zaradi zunanje in virtualne obtežbe sta

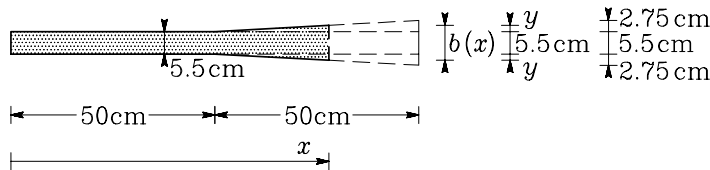
$$M_y = \frac{F}{2} x, \quad \delta \bar{M}_y = \frac{x}{2}.$$

Vztrajnostna momenta sta

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 50 : \quad I_y &= \frac{5.5 \cdot 1^3}{12}, \\ 50 \leq x \leq 100 : \quad I_y &= \frac{b(x)1^3}{12} = \frac{5.5 x}{12 \cdot 50}, \end{aligned}$$

saj se širina nosilca vzdolž osi x spreminja po naslednji enačbi (slika 5.60):

$$\frac{y}{x-50} = \frac{2.75}{50}, \quad y = \frac{2.75}{50}(x-50), \quad b(x) = 5.5 + 2y = \frac{5.5 x}{50}.$$



Slika 5.60: Širina nosilca se za $50 \leq x \leq 100$ linearno spreminja

Pomik točke C je

$$\begin{aligned} w &= 2 \int_0^{50} \frac{F x}{2} \frac{x}{2} \frac{12}{5.5 E} dx + 2 \int_{50}^{100} \frac{F x}{2} \frac{x}{2} \frac{12 \cdot 50}{5.5 x E} dx = \\ &= \frac{6 F}{5.5 E} \cdot \frac{1}{3} \cdot 50^3 + \frac{300 F}{5.5 E} \cdot \frac{1}{2} \cdot (100^2 - 50^2) = 0.22 + 0.97 = 1.19 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Največjo normalno napetost določimo ločeno za oba intervala. Na intervalu $0 \leq x \leq 50$ cm mesto največje normalne napetosti sovpada z mestom največje upogibne napetosti

$$\sigma_{xx, \max} = \frac{M_{y, \max}}{I_y} z_{\max} = \frac{F x_{\max} 12}{2 \cdot 5.5} \cdot 0.5$$



Pri $x = 50$ cm dobimo:

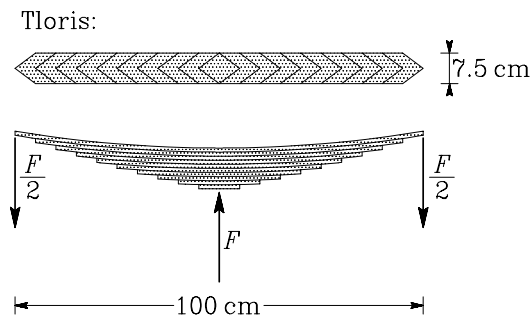
$$x = 50 \text{ cm} : \quad \sigma_{xx, \max} = \frac{0.1 \cdot 50 \cdot 12}{2 \cdot 5.5} \cdot 0.5 = 2.73 \text{ kN/cm}^2.$$

Na intervalu $50 \leq x \leq 100$ cm napetosti določimo tako, da v izraz za normalne napetosti vstavimo izraza za M_y in I_y , medtem ko je z_{\max} konstanten ($z_{\max} = 0.5$ cm):

$$\sigma_{xx, \max} = \frac{F x}{2} \frac{12 \cdot 50}{5.5 x} \cdot 0.5 = \frac{0.1 \cdot 12 \cdot 50 \cdot 0.5}{11} = 2.73 \text{ kN/cm}^2.$$

Napetost σ_{xx} se na intervalu $50 \leq x \leq 100$ ne spreminja.

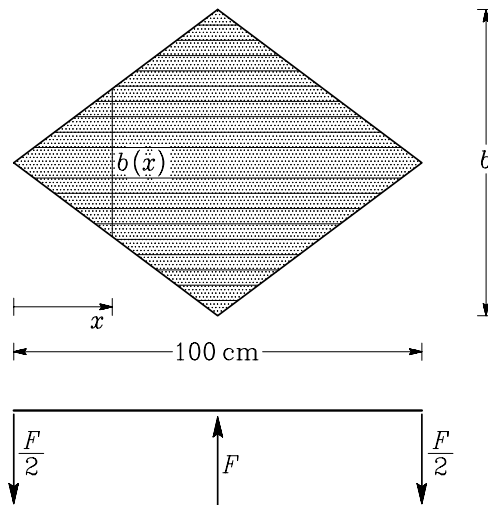
Primer 5.16 Listnata vzmet ima enako robno napetost v vseh prerezih in predstavlja nosilec idealne oblike glede robnih normalnih napetosti. Na sliki 5.61 je sestavljena iz 10 trakov širine 7.5 cm in debeline 10 mm. Dolžina vzmeti $L = 100$ cm, dopustna normalna napetost $\sigma_{xx, \text{dop}} = 40 \text{ kN/cm}^2$. Jeklo vzmeti ima modul elastičnosti $E_j = 20000 \text{ kN/cm}^2$. Določimo nosilnost vzmeti (dopustno silo F) ter upogib w_F na sredini razpona zaradi sile F ! Pri računu zanemarimo začetno ukrivljenost osi nosilca, ki je računski model vzmeti, ter trenje med listi vzmeti.



Slika 5.61: Listnata vzmet sestavljena iz 10 listov

Računski model prikazujemo na sliki 5.62.



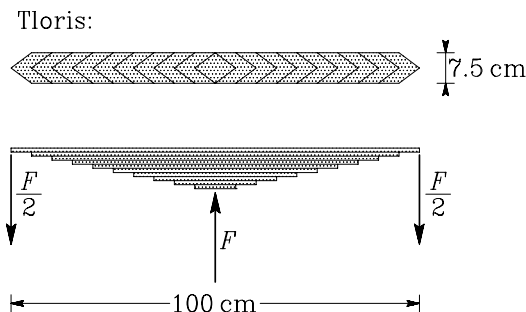


Slika 5.62: Računski model listnate vzmeti

Pokažimo, da največja vzdolžna normalna napetost σ_{xx} ni odvisna od koordinate x .

$$b(x) = \frac{2b}{L}x, \quad W_y = \frac{y h^2}{6}, \quad \sigma_{xx, \max} = \frac{M_y(x)}{W_y(x)} = \frac{A x 6 L}{2 b x h^2} = \frac{6 A L}{2 b h^2} = \frac{M_y(L/2)}{W_y(L/2)}.$$

Če ploščo na sliki 5.62 razrežemo in trakove položimo kot kaže slika 5.63, dobimo listnato vzmet.



Slika 5.63: Vztrajnostni moment in napetost σ_{xx} se ne spremenita, če ploščo razrežemo in liste položimo, kot kaže slika

Dopustna sila

Dopustno silo izračunamo iz enačbe za določitev normalne napetosti:

$$\sigma_{xx}(x) = \sigma_{xx}(L/2) \leq \sigma_{xx, \text{dop}} \quad \rightarrow \quad \frac{M_y(L/2)}{W_y(L/2)} \leq \sigma_{xx, \text{dop}}.$$



Iz slike 5.63 vidimo, da je največja širina b računskega modela vzmeti enaka $b = 10 \cdot 7.5 = 75$ cm. Širina nosilca se vzdolž osi spreminja po enačbi $b(x) = 2b x/L$. Ker je

$$M_y(L/2) = \frac{F L}{4}, \quad W_y(L/2) = \frac{b h^2}{6},$$

sledi

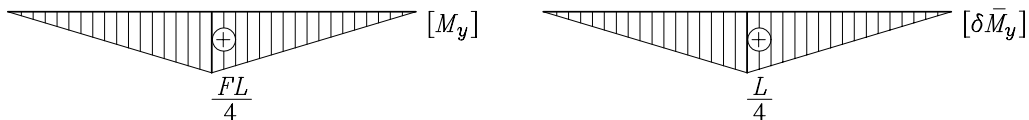
$$F \leq \frac{2 b h^2 \sigma_{xx, \text{dop}}}{3 L} = \frac{2 \cdot 75 \cdot 1^2 \cdot 40}{3 \cdot 100} = 20 \text{ kN}.$$

Navpični pomik na sredini razpona

Pomik določimo po enačbi

$$w_F = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx.$$

Diagrama M_y in $\delta \bar{M}_y$ prikazujemo na sliki 5.64.



Slika 5.64: Upogibna momenta M_y in $\delta \bar{M}_y$

Zaradi simetrije diagramov in konstantnega materiala lahko zapišemo

$$w_F = \frac{2}{E} \int_0^{L/2} \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{I_y} dx.$$

Ker se prečni prerez vzdolž osi x spreminja, zapišemo integrand v odvisnosti od spremenljivke x in ga integriramo. Ker je

$$M_y(x) = \frac{F x}{2}, \quad \delta M_y(x) = \frac{x}{2}, \quad I_y(x) = \frac{b(x) h^3}{12} = \frac{b h^3 x}{6 L},$$

sledi

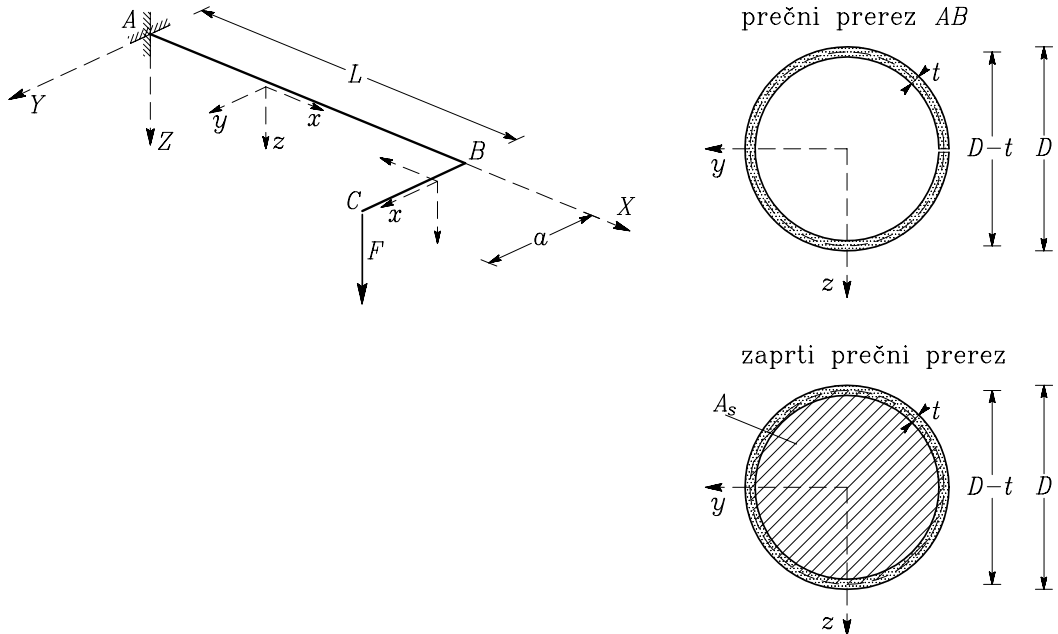
$$w_F = \frac{2}{E} \int_0^{L/2} \frac{F x}{2} \frac{x}{2} \frac{6 L}{b h^3 x} dx = \frac{F}{E} \frac{3 L}{b h^3} \int_0^{L/2} x dx$$

Po integriranju dobimo

$$w_F = \frac{3 F L^3}{8 b h^3 E} = \frac{3 \cdot 20 \cdot 100^3}{8 \cdot 75 \cdot 1^3 \cdot 20000} = 5 \text{ cm}.$$



Primer 5.17 Konstrukcija na sliki 5.65 je sestavljena iz dveh elementov z odprtim tankostenskim prečnim prerezem. Določimo velikost sile F tako, da bo največja strižna napetost enaka dopustni strižni napetosti $\tau_{\text{dop}} = 10 \text{ kN/cm}^2$. Določimo tudi, za koliko se sila F lahko poveča, če stik zavarimo tako, da dobimo elementa z zaprtim tankostenskim prerezem. Pri tem predpostavimo, da nastane v elementih enakomerna torzija. Izračunajmo tudi navpični pomik w_C točke C za sili, ki ustrezata odprtemu oziroma zaprtemu prečnemu prerezu. Elastični modul E materiala je 24000 kN/cm^2 , strižni modul G je 10000 kN/cm^2 , vztrajnostni moment I_{y2} elementa 2 je 5000 cm^4 , dolžina $L = 1.5 \text{ m}$ in dolžina $a = 0.5 \text{ m}$. Zunanji premer D prečnega prereza je 30 cm , debelina t stene prečnega prereza pa 1.5 cm .



Slika 5.65: Elementa imata odprti oziroma zaprti prečni prerez

Račun dopustne sile za primer, ko ima element AB odprt prečni prerez

Torzijski vztrajnostni moment nosilca z odprtim tankostenskim prečnim prerezem izračunamo z enačbo $2r = D - t = 30 - 1.5 = 28.5 \text{ cm}$ (glej (2.139))

$$I_x = \int_{\mathcal{L}_s} \frac{t^3}{3} d\zeta = \frac{t^3}{3} L_s = \frac{1.5^3}{3} 2\pi r = 100.727 \text{ cm}^4.$$

\mathcal{L}_s predstavlja integracijsko območje pri integriranju vzdolž srednje črte, L_s pa je dolžina srednje črte tankostenskega prečnega prereza. Silo $F_{1,\text{dop}}$ izračunamo iz pogoja, da je največja strižna napetost $\sigma_{x\zeta,\text{max}}$ manjša od dopustne strižne napetosti τ_{dop}

$$\sigma_{x\zeta,\text{max}} \leq \tau_{\text{dop}}.$$



Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi (glej enačbo (2.138))

$$\sigma_{x\zeta, \max} = \frac{|M_x|_{\max}}{I_x} t_{\max}.$$

Upoštevamo, da je $|M_x|_{\max} = F_{1, \text{dop}} a$ in dobimo

$$\frac{F_{1, \text{dop}} a}{I_x} t_{\max} \leq \tau_{\text{dop}}.$$

Iz zadnje enačbe izračunamo $F_{1, \text{dop}}$:

$$F_{1, \text{dop}} \leq \frac{\tau_{\text{dop}} I_x}{a t_{\max}} = \frac{10 \cdot 100.727}{50 \cdot 1.5} = 13.43 \text{ kN}.$$

Račun dopustne sile za primer, ko imat element AB zaprt prečni prerez

Ploščino A_s odprtine do srednje črte zaprtega tankostenskega prečnega prereza izračunamo z enačbo

$$A_s = \frac{\pi \cdot 28.5^2}{4} = 637.94 \text{ cm}^2.$$

Silo $F_{2, \text{dop}}$ izračunamo iz pogoja, da je največja strižna napetost $\sigma_{x\zeta, \max}$ manjša od dopustne strižne napetosti τ_{dop}

$$\sigma_{x\zeta, \max} \leq \tau_{\text{dop}}.$$

Največjo strižno napetost izračunamo po enačbi (glej enačbo (2.150a))

$$\sigma_{x\zeta, \max} = \frac{|M_x|_{\max}}{2 A_s t_{\min}}.$$

Upoštevamo, da je $|M_x|_{\max} = F_{2, \text{dop}} a$ in dobimo

$$\frac{F_{2, \text{dop}} a}{2 A_s t_{\min}} \leq \tau_{\text{dop}}.$$

Iz zadnje enačbe izračunamo $F_{2, \text{dop}}$:

$$F_{2, \text{dop}} \leq \frac{\tau_{\text{dop}} 2 A_s t_{\min}}{a} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 637.94 \cdot 1.5}{50} = 382.764 \text{ kN}.$$

Nosilec z zaprtim tankostenskim prečnim prerezom lahko obtežimo z 28.5-krat večjo silo kot nosilec z odprtim tankostenskim prečnim prerezom

$$F_{2, \text{dop}} = 28.50 F_{1, \text{dop}}.$$

Izpeljemo lahko, da je razmerje med dopustnima silama za odprti in zaprti prečni prerez v obliki kolo-barja enako

$$\frac{F_{2, \text{dop}}}{F_{1, \text{dop}}} = \frac{3 r}{t}.$$

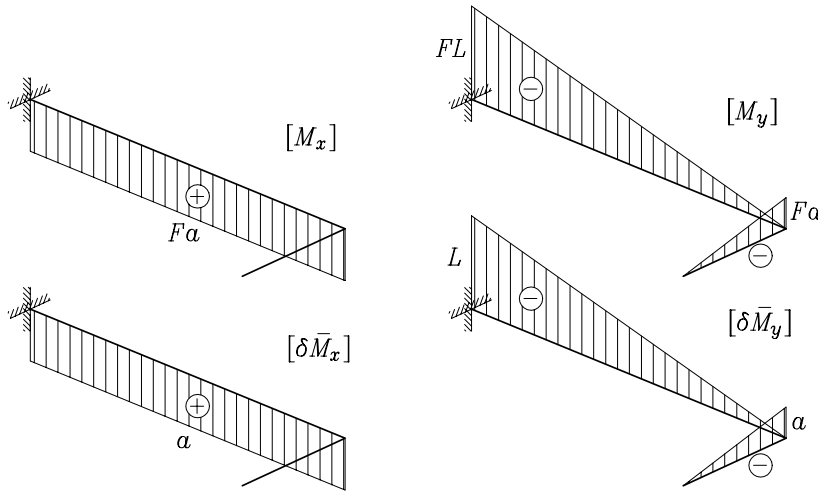


Račun pomika točke C

Pomik w_C izračunamo po enačbi

$$w_C = \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} \left(\frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} + \frac{M_x \delta \bar{M}_x}{G I_x} \right) dx.$$

Na sliki 5.66 prikazujemo torzijski moment M_x in upogibni moment M_y zaradi sile F ter torzijski moment $\delta \bar{M}_x$ in upogibni moment $\delta \bar{M}_y$ zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$.



Slika 5.66: Upogibni in torzijski moment zaradi sile F in virtualne sile $\delta F_z = 1$

Nosilec z odprtim prečnim prerezom ($F_{1,\text{dop}} = 13.43 \text{ kN}$)

Za račun pomika moramo izračunati vztrajnostni moment I_{y1} prečnega prereza nosilca AB

$$I_{y1} = \frac{\pi}{64} [D^4 - (D - 2t)^4] = 13673.73 \text{ cm}^4.$$

Tako dobimo

$$w_C = \frac{1}{E I_{y1}} \frac{F_{1,\text{dop}} L L}{2} \frac{2 L}{3} + \frac{1}{E I_{y2}} \frac{F_{1,\text{dop}} a a}{2} \frac{2 a}{3} + \frac{1}{G I_x} F_{1,\text{dop}} a L a = 0.0507 + 5.0 = 5.0507 \text{ cm}.$$

Delež pomika zaradi upogiba je veliko manjši od deleža zaradi torzije. Nosilci z odprtim tankostenskim prečnim prerezom slabo prevzamejo torzijsko obtežbo.

Nosilec z zaprtim prečnim prerezom ($F_{2,\text{dop}} = 382.764 \text{ kN}$)

Za račun pomika moramo izračunati torzijski vztrajnostni moment I_x zaprtega tankostenskega prečnega



prereza nosilca AB (glej enačbo (2.150b))

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{t}} = \frac{4 \cdot 637.94^2}{\frac{\pi \cdot 28.5}{1.5}} = 27271.92 \text{ cm}^4.$$

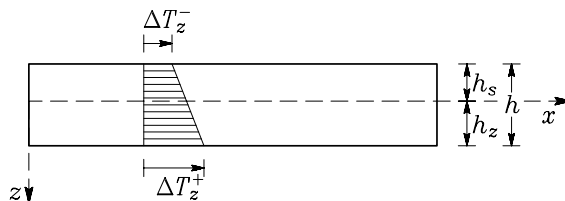
Tako dobimo

$$w_C = \frac{F_{2,\text{dop}}}{3 E} \left(\frac{L^3}{I_{y1}} + \frac{a^3}{I_{y2}} \right) + \frac{F_{2,\text{dop}} L a^2}{G I_x} = 1.445 + 0.526 = 1.971 \text{ cm}.$$

Pomik zaradi torzije je manjši od pomika zaradi upogiba. Nosilci z zaprtim tankostenskim prečnim prerezom so primerni za prevzem torzijske obtežbe. Kljub temu, da smo konstrukcijo z odprtim prečnim prerezom obremenili kar z 28.5 krat manjšo silo kot nosilec z zaprtim prerezom, so pomiki pri odprtem prerezu več kot 2.5 krat večji.

Primer 5.18 Izrazimo ΔT_x in ΔT_z v enačbi (5.1) za primer nosilca v ravnini x, z ! V tem primeru je sprememba temperature ΔT neodvisna od koordinate y ($\Delta T_y = 0$). Višino nosilca označimo s h .

Spremembo temperature na spodnji strani nosilca ($z = h_s$) označimo z ΔT_z^+ , spremembo temperature na zgornji strani nosilca ($z = -h_z$) pa z ΔT_z^- (slika 5.67).



Slika 5.67: Po višini nosilca predpostavimo linearen potek spremembe temperature ΔT

Predpostavimo, da se temperatura linearno spreminja vzdolž koordinate z . To je primerna predpostavka, če obravnavamo stacionarno stanje, ko se temperatura s časom ne spreminja. Sprememba temperature je v tem primeru določena z izrazom

$$\Delta T = \Delta T_x + \Delta T_z z$$

Izraza za ΔT_x in ΔT_z dobimo, če upoštevamo robna pogoja na spodnji in zgornji strani nosilca

$$\begin{aligned} z = h_s : \quad \Delta T &\equiv \Delta T_z^+ = \Delta T_x + \Delta T_z h_s, \\ z = -h_z : \quad \Delta T &\equiv \Delta T_z^- = \Delta T_x - \Delta T_z h_z. \end{aligned}$$

Ko enačbi rešimo, dobimo

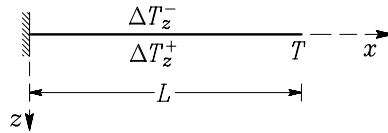
$$\Delta T_x = \Delta T_z^+ - \frac{h_s(\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-)}{h}, \quad \Delta T_z = \frac{1}{h}(\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-).$$



Če sta razdalji h_s in h_z enaki, sta izraza za določitev ΔT_x in ΔT_z preprostejša

$$\Delta T_x = \frac{1}{2}(\Delta T_z^+ + \Delta T_z^-), \quad \Delta T_z = \frac{1}{h}(\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-). \quad (5.31)$$

Primer 5.19 Na spodnji strani previsnega linijskega nosilca nastane sprememba temperature $\Delta T_z^+ = 10^\circ\text{C}$, na zgornji strani pa $\Delta T_z^- = 30^\circ\text{C}$. Vzemimo, da se ΔT_z^+ in ΔT_z^- vzdolž osi nosilca ne spreminjata. Dolžina nosilca $L = 100\text{ cm}$, višina nosilca $h = 10\text{ cm}$, plošina prečnega prereza $A_x = 10\text{ cm}^2$, vztrajnostni moment površine prečnega prereza pa $I_y = 100\text{ cm}^4$. Modul elastičnosti materiala $E = 10000\text{ kN/cm}^2$, temperaturni razteznostni koeficient pa $\alpha_T = 10^{-5}\text{ (1/}^\circ\text{C)}$ (slika 5.68). Izračunajmo pomika u_T in w_T ter zasuk $\omega_T \equiv \omega_{Ty}$ točke T pri $x = L$. Določimo tudi potek notranjih sil!

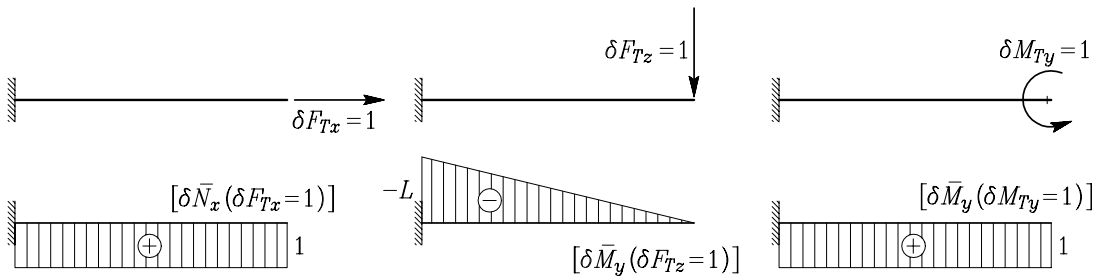


Slika 5.68: Nosilec v ravnini x, z izpostavimo spremembi temperature ΔT

Konstanti ΔT_x in ΔT_z izračunamo po enačbi (5.31):

$$\Delta T_x = \frac{10 + 30}{2} = 20^\circ\text{C}, \quad \Delta T_z = \frac{10 - 30}{10} = -2^\circ\text{C/cm}.$$

Za račun pomikov u_T in w_T ter zasuka ω_T moramo izračunati notranje sile, za virtualni sili $\delta F_{Tx} = 1$ in $\delta F_{Tz} = 1$ in za virtualni moment $\delta M_{Ty} = 1$ (slika 5.69).



Slika 5.69: Notranje sile zaradi virtualne obtežbe

Ker so notranje sile zaradi resnične obtežbe enake nič, računamo $\delta \bar{W}_n^*$ po enačbi (glej (5.20))

$$\delta \bar{W}_n^*(\Delta T) = \int_0^L \alpha_T (\Delta T_x \delta \bar{N}_x + \Delta T_z \delta \bar{M}_y) dx.$$



Pri določitvi integralov upoštevamo, da so α_T , ΔT_x in ΔT_z konstante. Zato pomik u_T izračunamo tako, da ploščino diagrama $\delta \bar{N}_x (\delta F_{Tx} = 1)$ zaradi virtualne sile $\delta F_{Tx} = 1$ pomnožimo s konstantama α_T in ΔT_x ,

$$u_{Tx} = u_T = \alpha_T \Delta T_x \int_0^L \delta \bar{N}_x dx = 0.00001 \cdot 20 \cdot 100 \cdot 1 = 0.02 \text{ cm}.$$

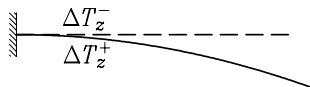
Vidimo, da ΔT_z ne vpliva na pomik u_T . Pomik w_T izračunamo tako, da ploščino diagrama $\delta \bar{M}_y (\delta F_{Tz} = 1)$ zaradi virtualne sile $\delta F_{Tz} = 1$ pomnožimo s konstantama α_T in ΔT_z ,

$$u_{Tz} = w_T = \alpha_T \Delta T_z \int_0^L \delta \bar{M}_y dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot \frac{-100 \cdot 100}{2} = 0.1 \text{ cm}.$$

Vidimo, da na w_T ne vpliva sprememba temperature ΔT_x ampak samo ΔT_z . Zasuk ω_T izračunamo tako, da ploščino diagrama $\delta \bar{M}_y (\delta M_{Ty} = 1)$ zaradi virtualnega momenta $\delta M_{Ty} = 1$ pomnožimo s konstantama α_T in ΔT_z

$$\omega_T = \alpha_T \Delta T_z \int_0^L \delta \bar{M}_y dx = 0.00001 \cdot (-2) \cdot 100 \cdot 1 = -0.002 \text{ rad} = -0.115^\circ.$$

Iz ravnotežnih pogojev za obravnavani primer sledi, da so notranje sile enake nič. Velja splošno pravilo, da sprememba temperature v **statično določenih konstrukcijah** povzroči deformacije ne pa tudi notranjih sil. Deformirano lego obravnavanega nosilca prikazujemo na sliki 5.70, kjer je merilo pomikov bistveno večje kot merilo, v katerem je narisana konstrukcija.



Slika 5.70: Statično določeni linijski nosilec se ob spremembi temperature deformira

Primer 5.20 Določimo vodoravni pomik na koncu previsnega nosilca, ki se segreje za

$$\Delta T_x(x) = 50 + 10x \quad [^\circ\text{C}],$$

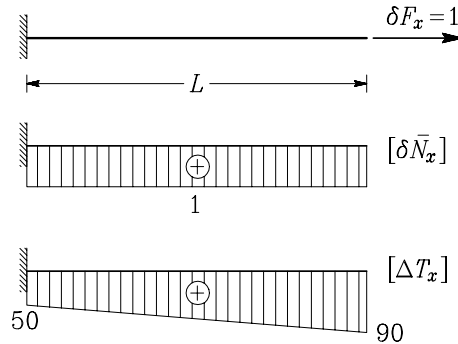
kjer moramo razdaljo x podajati v m! Dolžina nosilca je $L = 4 \text{ m}$, temperaturni razteznostni koeficient pa je $\alpha_T = 1.2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$.

Pomik u_T na koncu nosilca izračunamo z izrekom o virtualnih silah

$$u_T = \int_0^L \alpha_T \Delta T_x \delta \bar{N}_x dx.$$



Diagrama temperaturne spremembe ΔT_x in osne sile $\delta \bar{N}_x$ zaradi vodoravne virtualne sile $\delta F_x = 1$ v točki T prikazujemo na sliki 5.71.



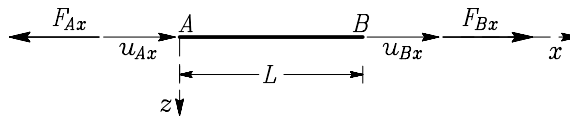
Slika 5.71: Diagrama ΔT_x in $\delta \bar{N}_x$

Sedaj lahko zapišemo enačbo za račun vodoravnega pomika

$$u_T = \alpha_T \frac{50 + 90}{2} L \cdot 1 = 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{50 + 90}{2} \cdot 4 = 0.0034 \text{ m} = 0.34 \text{ cm}.$$

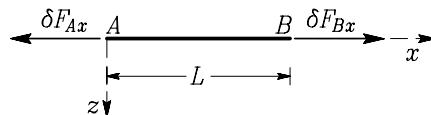
5.1.6 Delo virtualnih napetosti v linearno elastičnih vzmeteh

Določimo delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za ravni linijski nosilec s konstantnim prečnim prerezom \mathcal{A}_x in dolžino L , ki je v krajišču A obtežen s silo F_{Ax} , v krajišču B pa s silo F_{Bx} ! Sili F_{Ax} in F_{Bx} sta enako veliki in nasproti usmerjeni (slika 5.72). Delo δW_n^* izrazimo s pomikoma u_{Ax} in u_{Bx} krajišč nosilca.



Slika 5.72: Nosilec je obtežen v krajiščih s silama F_{Ax} in F_{Bx}

Da bi δW_n^* izrazili s pomikoma krajišč nosilca u_{Ax} in u_{Bx} postavimo v krajna prereza virtualni sili δF_{Ax} in δF_{Bx} , ki sta enaki po velikosti in nasproti usmerjeni (slika 5.73).



Slika 5.73: Nosilec je obtežen v krajišču A s silo δF_{Ax} , v krajišču B pa s silo δF_{Bx}



Delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah izrazimo s pomikoma u_{Ax} in u_{Bx} , če za obravnavani primer v izreku o virtualnih silah δW_z^* izrazimo s silama δF_{Ax} in δF_{Bx}

$$\delta W_n^* = \delta W_z^* = \delta F_{Bx} u_{Bx} - \delta F_{Ax} u_{Ax}.$$

Ker je osna sila δN_x zaradi virtualne obtežbe enaka

$$\delta N_x = \delta F_{Ax} = \delta F_{Bx},$$

sledi

$$\delta W_n^* = \delta N_x (u_{Bx} - u_{Ax}).$$

Prikazani element lahko predstavlja **linijsko vzmet**, ki jo shematično narišemo na sliki 5.74.



Slika 5.74: Linijska vzmet

Če vpeljemo oznaki

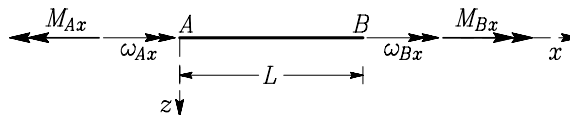
$$\delta N_x \equiv \delta N_v, \quad \Delta u_v \equiv u_{Bx} - u_{Ax},$$

dobimo

$$\delta W_n^* = \delta N_v \Delta u_v.$$

Pri tem je δN_v notranja sila v vzmeti zaradi virtualne obtežbe, Δu_v pa sprememba dolžine vzmeti zaradi resnične obtežbe.

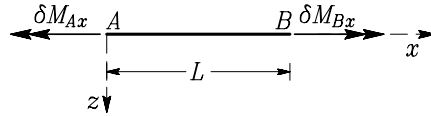
Določimo delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za ravni linijski nosilec s konstantnim prečnim prerezom \mathcal{A}_x in dolžino L , ki je v krajišču A obtežen s torzijskim momentom M_{Ax} , v krajišču B pa s torzijskim momentom M_{Bx} . Torzijska momenta M_{Ax} in M_{Bx} sta enako velika in nasproti usmerjena (slika 5.75). Delo δW_n^* izrazimo s torzijskima zasukoma ω_{Ax} in ω_{Bx} krajišč nosilca.



Slika 5.75: Nosilec je obtežen v krajiščih s torzijskima momentoma M_{Ax} in M_{Bx}

Da bi δW_n^* izrazili z zasukoma krajnih prerezov nosilca ω_{Ax} in ω_{Bx} , postavimo v krajna prereza virtualna torzijska momenta δM_{AX} in δM_{BX} , ki sta enaka po velikosti in nasproti usmerjena (slika 5.76).





Slika 5.76: Nosilec je obtežen v krajišču A z virtualnim torzijskim momentom δM_{Ax} , v krajišču B pa z virtualnim torzijskim momentom δM_{Bx}

Delo δW_n^* določimo tako, da v izreku o virtualnih silah δW_z^* izrazimo z momentoma δM_{Ax} in δM_{Bx}

$$\delta W_n^* = \delta W_z^* = \delta M_{Bx} \omega_{Bx} - \delta M_{Ax} \omega_{Ax}.$$

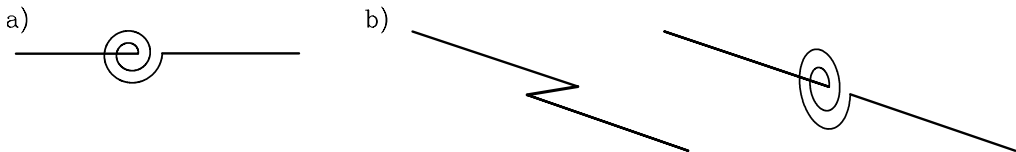
Ker je notranji torzijski moment δM_x zaradi virtualne obtežbe enak δM_{Ax} oziroma δM_{Bx}

$$\delta M_x = \delta M_{Ax} = \delta M_{Bx},$$

sledi

$$\delta W_n^* = \delta M_x (\omega_{Bx} - \omega_{Ax}).$$

Prikazani element lahko predstavlja **torzijsko vzmet**. Prečno povezavo dveh linijskih nosilcev s torzijsko vzmetjo prikazujemo na sliki 5.77.



Slika 5.77: Torzijska vzmet: a) v ravnini b) v prostoru

Z oznakama

$$\delta M_x \equiv \delta M_v, \quad \Delta \omega_v \equiv \omega_{Bx} - \omega_{Ax},$$

dobimo

$$\delta W_n^* = \delta M_v \Delta \omega_v.$$

Z δM_v označujemo notranji torzijski moment v vzmeti zaradi virtualne obtežbe, $\Delta \omega_v$ pa predstavlja spremembo zasuka torzijske vzmeti zaradi resnične obtežbe.

V primeru, da je v konstrukciji n_v osnih in m_v torzijskih vzmeti, je delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah v vseh vzmeteh enako

$$\delta W_n^* = \sum_{i=1}^{n_v} \delta N_{vi} \Delta u_{vi} + \sum_{j=1}^{m_v} \delta M_{vj} \Delta \omega_{vj}.$$

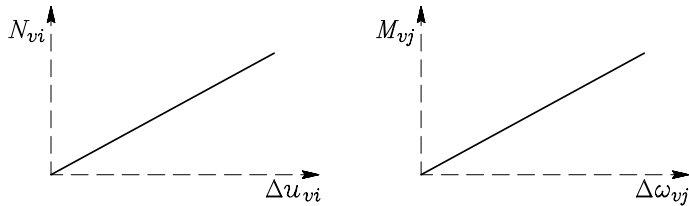
Če so vzmeti **linearno elastične**, lahko izrazimo notranjo silo N_{vi} oziroma notranji moment M_{vj} vzmeti s togostnima koeficientoma k_{vi} in $k_{\varphi j}$ (slika 5.78)

$$N_{vi} = k_{vi} \Delta u_{vi}, \quad M_{vj} = k_{\varphi j} \Delta \omega_{vj},$$



kjer togost vzmeti lahko izrazimo z enačbama

$$k_{vi} = \frac{E_i A_{xi}}{L_i}, \quad k_{\varphi j} = \frac{G_j I_{xj}}{L_j}.$$



Slika 5.78: Linearne elastične vzmeti

V tem primeru je delo δW_n^* v vseh vzmeteh enako

$$\delta W_n^* = \sum_{i=1}^{n_v} \frac{N_{vi}}{k_{vi}} \delta N_{vi} + \sum_{j=1}^{m_v} \frac{M_{vj}}{k_{\varphi j}} \delta M_{vj}. \quad (5.32)$$

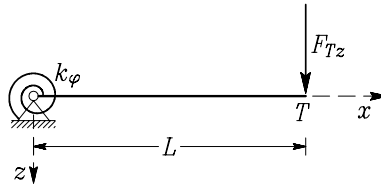
Delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za konstrukcijo sestavljeno iz linijskih elementov in vzmeti dobimo, če seštejemo enačbe (5.11) in (5.32):

$$\begin{aligned} \delta W_n^* = & \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} \left(\left(\frac{N_x}{E A_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) \delta N_x + \frac{N_y \delta N_y}{G A_y} + \frac{N_z \delta N_z}{G A_z} + \frac{M_x \delta M_x}{G I_x} + \right. \\ & + \left(\frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \delta M_y + \left(\frac{M_z}{E I_z} - \alpha_T \Delta T_y \right) \delta M_z \Big) dx + \\ & + \sum_{i=1}^{n_v} \frac{N_{vi}}{k_{vi}} \delta N_{vi} + \sum_{j=1}^{m_v} \frac{M_{vj}}{k_{\varphi j}} \delta M_{vj}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Če ima virtualna sila oziroma virtualni moment velikost ena, potem količine δW_n^* , δN_x , δN_y , δN_z , δM_x , δM_y , δM_z , δN_{vi} in δM_{vj} označimo s prečko in dobimo:

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} u_{Ts} \\ \omega_{Ts} \end{matrix} \right\} = \delta \bar{W}_n^* = & \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} \left(\left(\frac{N_x}{E A_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) \delta \bar{N}_x + \frac{N_y \delta \bar{N}_y}{G A_y} + \frac{N_z \delta \bar{N}_z}{G A_z} + \frac{M_x \delta \bar{M}_x}{G I_x} + \right. \\ & + \left(\frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \delta \bar{M}_y + \left(\frac{M_z}{E I_z} - \alpha_T \Delta T_y \right) \delta \bar{M}_z \Big) dx + \\ & + \sum_{i=1}^{n_v} \frac{N_{vi}}{k_{vi}} \delta \bar{N}_{vi} + \sum_{j=1}^{m_v} \frac{M_{vj}}{k_{\varphi j}} \delta \bar{M}_{vj}. \end{aligned} \quad (5.34)$$





Slika 5.79: Konzola je vpeta s torzijsko linearno elastično vzmetjo

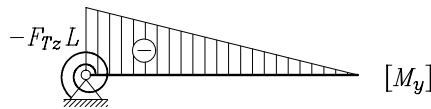
Primer 5.21 Za nosilec na sliki 5.79 določimo navpični pomik w_T točke T zaradi sile F_{Tz} ! Vzmet je linearno elastična. Vpliv prečne sile N_z zanemarimo.

Če prečno silo N_z zanemarimo, izračunamo pomik w_T po enačbi

$$w_T = \delta \bar{W}_n^* (\delta F_{Tz} = 1.0) = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx + \frac{M_v}{k_{\varphi}} \delta \bar{M}_v.$$

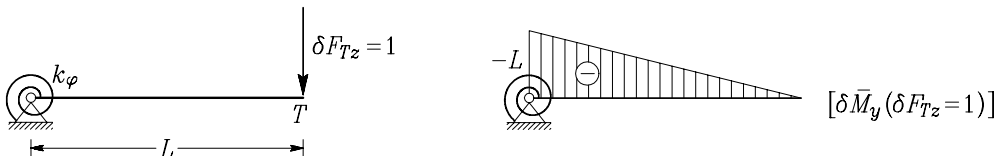
Upogibni moment v nosilcu in v vzmeti zaradi resnične obtežbe prikazujemo na sliki 5.80

$$M_v = -F_{Tz} L.$$

Slika 5.80: Upogibni moment zaradi sile F_{Tz}

Upogibni moment v nosilcu in v vzmeti zaradi virtualne sile δF_{Tz} v točki T prikazujemo na sliki 5.81

$$\delta \bar{M}_v = -L.$$

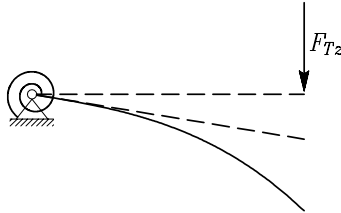
Slika 5.81: Upogibni moment zaradi virtualne sile $\delta F_{Tz} = 1$

Navpični pomik točke T je

$$w_T = \frac{1}{E I_y} \frac{F_{Tz} L}{2} \frac{L}{3} L + \frac{F_{Tz} L}{k_{\varphi}} L = \frac{F_{Tz} L^3}{3 E I_y} + \frac{F_{Tz} L^2}{k_{\varphi}}.$$

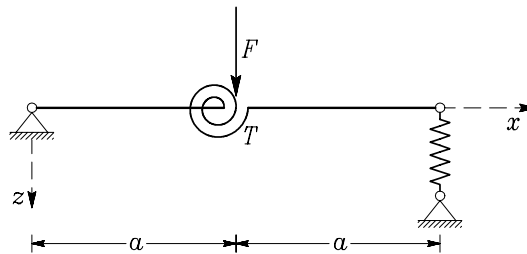


Pomik osi nosilca je sestavljen iz pomika zaradi upogiba nosilca in iz pomika zaradi zasuka elastične podpore. Na sliki 5.82 prikazujemo pomik nosilca zaradi zasuka elastične podpore in zaradi upogiba nosilca. Izpeljani izrazi veljajo le za majhne pomike, zato moramo poudariti, da je merilo pomikov zaradi preglednosti povečano.



Slika 5.82: Navpični pomik nosilca

Primer 5.22 Določimo navpični pomik točke T . Vzmeti sta linearno elastični (slika 5.83).

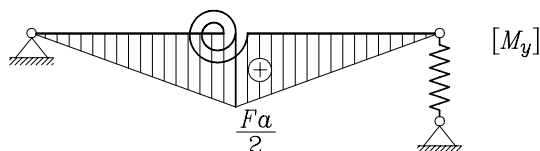


Slika 5.83: Konstrukcija je sestavljena iz dveh nosilcev in dveh vzmeti

Pomik določimo z izrekom o virtualnih silah po enačbi (5.34), kjer upoštevamo, da sta od nič različna le prečna sila in upogibni moment v nosilcu in sila oziroma moment v vzmeteh. Ker vpliv prečne sile zanemarimo, je:

$$w_T = \int_0^{2a} \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{EI_y} dx + \frac{N_v \delta \bar{N}_v}{k_x} + \frac{M_v \delta \bar{M}_v}{k_\phi}.$$

Notranje sile zaradi zunanje obtežbe prikazujemo na sliki 5.84.

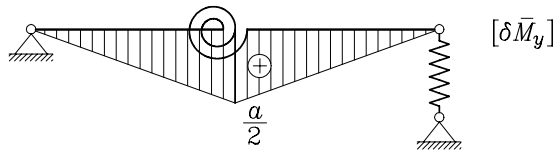


Slika 5.84: Diagram upogibnega momenta zaradi zunanje obtežbe



Oсна sila in upogibni moment v vzmeteh sta: $N_v = -F/2$ in $M_v = P a/2$.

Notranje sile zaradi virtualne obtežbe $\delta F_z = 1$ prikazujemo na sliki 5.85.



Slika 5.85: Diagram upogibnega momenta zaradi virtualne sile

Oсна sila in upogibni moment v vzmeteh zaradi virtualne sile sta: $\delta \bar{N}_v = -1/2$ in $\delta \bar{M}_v = a/2$.

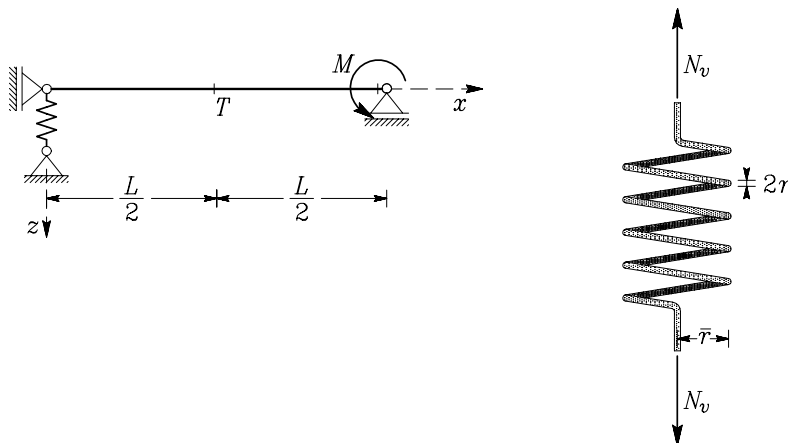
Navpični pomik točke T je

$$w_T = \frac{1}{E I_y} \frac{F a}{2} \frac{a}{2} \frac{2}{3} \frac{a}{2} + \frac{F/2}{k_x} \frac{1}{2} + \frac{F a/2}{k_\varphi} \frac{a}{2}$$

in po preureditvi enačbe dobimo

$$w_T = F \left(\frac{a^3}{6 E I_y} + \frac{1}{4 k_x} + \frac{a^2}{4 k_\varphi} \right).$$

Primer 5.23 Določimo število navojev n gosto navite vzmeti na sliki 5.86 tako, da bo navpični pomik w_T točke T enak 1 cm.



Slika 5.86: Prostoležeči nosilec je v enem krajišču podprt z gosto navito vzmetjo

Spremembo dolžine Δu_v gosto navite vzmeti, ki je osno obtežena z natezno ali tlačno silo F , izračunamo po enačbi (glej primer 5.29)

$$\Delta u_v = \frac{4 \bar{r}^3 n N_v}{G r^4}, \quad (5.35)$$



kjer je \bar{r} polmer vzmeti, r polmer žice vzmeti, G strižni modul jekla, N_v pa osna sila v vzmeti.

Dolžina nosilca je $L = 1.0$ m, modul elastičnosti nosilca je $E_n = 20000$ kN/cm², vztrajnostni moment nosilca je $I_n = 54$ cm⁴, obtežba pa je $M = 2$ kNm. Polmer vzmeti $\bar{r} = 5.0$ cm, polmer žice vzmeti $r = 0.771$ cm, strižni modul jekla G je 8000 kN/cm².

Ker je togost razmerje med silo v vzmeti in spremembo dolžine ($k_v = N_v / \Delta u_v$), sledi iz enačbe (5.35), da je togost enaka

$$k_v = \frac{G r^4}{4 \bar{r}^3 n}.$$

Pomik izračunamo po enačbi (5.34)

$$w_T = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx + \frac{N_v \delta \bar{N}_v}{k_v}.$$

Diagrama notranjih sil zaradi zunanje obtežbe in zaradi obtežbe z virtualno silo $\delta F_z = 1$ prikazujemo na sliki 5.87.



Slika 5.87: Upogibni moment zaradi zunanje obtežbe M in zaradi $\delta F_z = 1$

Oсна sila N_v v vzmeti zaradi obtežbe M je $-M/L$, zaradi virtualne obtežbe pa $\delta N_v = -0.5$. Pomik w_T je

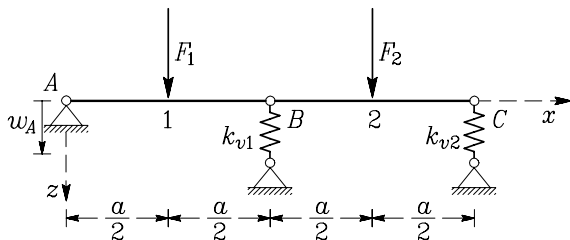
$$w_T = \frac{1}{E_n I_n} L \frac{L}{4} \frac{1}{2} \frac{M}{2} + \frac{M}{2L} \frac{4 \bar{r}^3 n}{G r^4} = \frac{M L^2}{16 E_n I_n} + \frac{2 M \bar{r}^3 n}{G L r^4}.$$

Število potrebnih navojev n je

$$n = \left(w_T - \frac{M L^2}{16 E_n I_n} \right) \frac{G L r^4}{2 M \bar{r}^3} = \left(1 - \frac{200 \cdot 100^2}{16 \cdot 20000 \cdot 54} \right) \frac{8000 \cdot 100 \cdot 0.771^4}{2 \cdot 200 \cdot 5^3} = 5.$$



Primer 5.24 Podan je pomik w_A podpore A na sliki 5.88. Izračunajmo pomik w_1 na mestu delovanja sile F_1 !

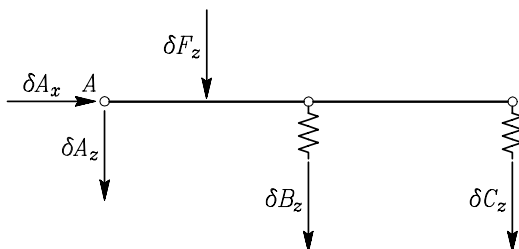


Slika 5.88: Poleg obtežbe s silama upoštevamo še pomik podpore

Konstrukcija je statično določena. Pomik podpore nima vpliva na notranje sile statično določene konstrukcije, vpliva pa na pomike take konstrukcije. Pomik v določeni točki določimo z izrekom o virtualnih silah

$$\delta W_z^* = \delta W_n^*.$$

Konstrukcijo v prijemališču sile F_1 obtežimo z virtualno silo $\delta F_z = 1$ (slika 5.89).



Slika 5.89: Virtualna obtežba $\delta F_z = 1$ ter ustrezne reakcije

Ker ima podpora predpisan pomik v navpični smeri, opravi delo δW_z^* tudi reakcija δA_z , ki jo izrazimo z virtualno silo $\delta F_z = 1$ takole:

$$\delta A_z a + \delta F_z \frac{a}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \delta A_z = -\frac{\delta F_z}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Delo δW_z^* zapišemo z enačbo

$$\delta W_z^* = \delta A_z w_A + \delta F_z w_1 = -\frac{1}{2} w_A + w_1,$$

delo δW_n^* pa zapišemo v tem primeru takole:

$$\delta W_n^* = \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx + \sum_{i=1}^2 \frac{N_{vi}}{k_{vi}} \delta \bar{N}_{vi}.$$

