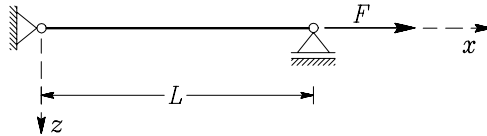


Ker je virtualna obtežba poljubna, je zadnja enačba izpolnjena le, če velja (glej primer 4.4)

$$\begin{aligned} 0 < x < L : \quad \frac{du}{dx} &= \frac{N_x}{E A_x}, \\ x = 0 : \quad u(0) &= u_0 = 0, \\ x = L : \quad u(L) &= u_L. \end{aligned}$$

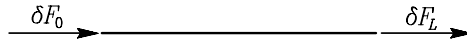
Dobili smo kinematični pogoj vzdolž osi nosilca zapisan z notranjo silo N_x in kinematična pogoja za krajna prereza nosilca.

Primer 4.8 Nosilec je obtežen z vodoravno silo F (slika 4.18). Zveza med napetostmi in deformacijami je nelinearna $\sigma_{xx} = E \sqrt{\varepsilon_{xx}}$ (E je konstanta). Določimo pomik delca pri $x = L$ v odvisnosti od sile F !



Slika 4.18: Prostoležeči nosilec je obtežen s točkovno silo F pri $x = L$

Virtualno obtežbo izberemo tako, da je $\delta F_L \neq 0$ in da je v ravnotežju (slika 4.19).



Slika 4.19: Virtualna obtežba je različna od nič le v krajnih prerezih

Upoštevamo, da je dopolnilno virtualno delo sile δF_0 enako nič, saj je pomik tam enak nič. Izrek o virtualnih silah zapišemo za obravnavani primer takole:

$$\delta F_L u_L = \int_V \delta \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV.$$

Upoštevamo, da je $N_x = F$ in $\sigma_{xx} = N_x/A_x = F/A_x$ in dobimo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}^2}{E^2} = \frac{F^2}{A_x^2 E^2}.$$

Ker morajo virtualne sile in napetosti zadoščati ravnotežnim pogojem, je $\delta N_x = \delta F_L$, napetost $\delta \sigma_{xx}$ pa $\delta \sigma_{xx} = \delta F_L/A_x$. Izrek o virtualnih silah je

$$\delta F_L u_L = \int_0^L \left[\int_{A_x} \delta \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dA_x \right] dx = \int_0^L \left[\int_{A_x} \frac{\delta F_L}{A_x} \frac{F^2}{A_x^2 E^2} dA_x \right] dx = \frac{F^2 L}{A_x^2 E^2} \delta F_L$$



oziroma

$$\delta F_L \left(u_L - \frac{F^2 L}{A_x^2 E^2} \right) = 0. \quad (4.99)$$

Ker je virtualna sila δF_L poljubna, je enačba (4.99) izpolnjena le, če je

$$u_L = \frac{F^2 L}{A_x^2 E^2}.$$

Iz prikazanega primera sledi, da z izrekom o virtualnih silah določamo pomike na mestu delovanja virtualne sile δF_L .



5 Uporaba izreka o virtualnih silah

V poglavju 4 smo izpeljali izreka o virtualnih pomikih in virtualnih silah. Oba sta zelo pomembna, saj lahko z njuno uporabo vpeljemo učinkovite metode za analizo deformiranja konstrukcij. V tem poglavju prikazujemo uporabo izreka o virtualnih silah.

Na začetku izpeljemo delo virtualnih napetosti na dejanskih deformacijah za upogib z osno silo, strig in torzijo. Te enačbe združimo v enačbo za delo virtualnih napetosti v linijskem elementu pri poljubni obtežbi. V naslednjem razdelku pokažemo, kako lahko računamo pomike v posameznih točkah statično določene konstrukcije. V tem razdelku je prikazanih dvajset računskih primerov z različnimi linijskimi konstrukcijami in obtežbami. V naslednjih treh razdelkih obravnavamo linearno elastične vzmeti, vpliv strižnih napetosti zaradi prečnih sil na pomike linijskega nosilca in določanje pomikov ukrivljenih statično določenih linijskih konstrukcij. V drugem delu tega poglavja določamo notranje sile in pomike statično nedoločenih linijskih konstrukcij z metodo sil.

5.1 Pomiki in zasuki posameznih točk statično določenih linijskih konstrukcij

5.1.1 Delo virtualnih napetosti za upogib z osno silo in temperaturno obtežbo

Izpeljimo izraz za delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za ravni linijski nosilec s konstantnim prečnim prerezom \mathcal{A}_x in dolžino L ! Predpostavimo, da je koordinatno izhodišče v težišču prečnega prereza in da osi y in z sovpadata z glavnima vztrajnostnima osema prečnega prereza. Pri določanju vpliva spremembe temperature ΔT upoštevajmo, da se sprememba temperature ΔT po prečnem prerezu \mathcal{A}_x nosilca linearno spreminja

$$\Delta T(x, y, z) = \Delta T_x(x) + \Delta T_y(x) y + \Delta T_z(x) z. \quad (5.1)$$

Delo izrazimo z notranjimi silami v nosilcu.

Pri izpeljavi izraza za delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah upoštevamo enake predpostavke, kot pri izpeljavi osnovnih enačb za ravni linijski nosilec (glej poglavje 1). Upoštevamo, da je



v nosilcu enoosno deformacijsko in napetostno stanje:

$$\varepsilon_{xx} \neq 0, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0, \quad (5.2)$$

$$\sigma_{xx} \neq 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (5.3)$$

Če v izrazu za vzdolžno deformacijo ε_{xx}

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha_T \Delta T$$

upoštevamo (5.1) in (5.3), dobimo izraz za vzdolžno deformacijo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_T (\Delta T_x + \Delta T_y y + \Delta T_z z). \quad (5.4)$$

Z α_T označujemo linearni temperaturni razteznostni koeficient. Merimo ga v (1/K) oziroma (1/°C). Z upoštevanjem naštetih predpostavk (enačbe (5.2), (5.3) in (5.4)) v izrazu za delo virtualnih napetosti (enačba (4.56)), zapišemo delo virtualnih napetosti v linijskem nosilcu za upogib z osno silo in temperaturno obtežbo takole:

$$\delta W_n^* = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} dV = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_T \Delta T \right) \delta \sigma_{xx} dV. \quad (5.5)$$

Normalno napetost σ_{xx} zaradi resnične obtežbe izrazimo z notranjimi silami N_x , M_y , M_z

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y, \quad (5.6)$$

normalno napetost $\delta \sigma_{xx}$ zaradi virtualne obtežbe pa z δN_x , δM_y in δM_z

$$\delta \sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x} + \frac{\delta M_y}{I_y} z - \frac{\delta M_z}{I_z} y. \quad (5.7)$$

V enačbi (5.5) upoštevamo izraze (5.4), (5.6) in (5.7) in dobimo delo virtualnih sil na resničnih pomikih izraženo z notranjimi silami

$$\begin{aligned} \delta W_n^* &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{E} \left(\frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \right) + \alpha_T (\Delta T_x + \Delta T_y y + \Delta T_z z) \right) \\ &\quad \left(\frac{\delta N_x}{A_x} + \frac{\delta M_y}{I_y} z - \frac{\delta M_z}{I_z} y \right) dV = \\ &= \int_0^L \left\{ \int_{\mathcal{A}_x} \left(\left(\frac{N_x}{E A_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) + \left(\frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) z - \left(\frac{M_z}{E I_z} - \alpha_T \Delta T_y \right) y \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\delta N_x}{A_x} + \frac{\delta M_y}{I_y} z - \frac{\delta M_z}{I_z} y \right) dA_x \right\} dx. \end{aligned}$$



V enačbah (5.6) in (5.7) smo upoštevali, da sta osi y in z **glavni vztrajnostni osi** v težišču prečnega prereza \mathcal{A}_x . Zato so statična momenta $S_y = \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x$ in $S_z = \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x$ ter deviacijski vztrajnostni moment $I_{yz} = - \int_{\mathcal{A}_x} y z dA_x$ enaki nič. Če pri integriranju po prečnem prerezu to upoštevamo, dobimo izraz za delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah naslednjo obliko:

$$\delta W_n^*(N_x, M_y, M_z, \Delta T) = \int_0^L \left(\left(\frac{N_x}{E A_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) \delta N_x + \left(\frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \delta M_y + \left(\frac{M_z}{E I_z} - \alpha_T \Delta T_y \right) \delta M_z \right) dx. \quad (5.8)$$

Ker smo upoštevali zvezo med napetostmi in deformacijami (enačba (5.4)), ter napetosti izrazili z notranjimi silami (enačbi (5.6) in (5.7)), je δW_n^* zapisano z notranjimi silami.

5.1.2 Delo virtualnih napetosti zaradi strižnih sil

Določimo delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah zaradi prečnih sil N_y in N_z ! Pri tem upoštevajmo, da vpliva na strižno napetost σ_{xy} le prečna sila N_y , na napetost σ_{xz} pa le prečna sila N_z (glej enačbi (1.136) in (1.137))

$$\sigma_{xy}(N_y) = - \frac{N_y S_z^*(y^*)}{h^*(y^*) I_z}, \quad \sigma_{xz}(N_z) = - \frac{N_z S_y^*(z^*)}{b^*(z^*) I_y}.$$

Delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah zaradi prečnih sil N_y in N_z je

$$\delta W_n^*(N_y, N_z) = \int_{\mathcal{V}} (2 \varepsilon_{xy} \delta \sigma_{xy} + 2 \varepsilon_{xz} \delta \sigma_{xz}) dV.$$

Če upoštevamo Hookov zakon

$$2 \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}, \quad 2 \varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G},$$

dobimo

$$\delta W_n^*(N_y, N_z) = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\sigma_{xy} \delta \sigma_{xy}}{G} + \frac{\sigma_{xz} \delta \sigma_{xz}}{G} \right) dV.$$

Napetosti zaradi prečnih sil δN_y in δN_z računamo po enakih enačbah, kot napetosti, ki jih povzroči resnična obtežba, saj morajo virtualne sile in napetosti zadoščati ravnotežnim pogojem

$$\delta \sigma_{xy}(\delta N_y) = - \frac{\delta N_y S_z^*(y^*)}{h^*(y^*) I_z}, \quad \delta \sigma_{xz}(\delta N_z) = - \frac{\delta N_z S_y^*(z^*)}{b^*(z^*) I_y}.$$



Tako dobimo

$$\begin{aligned}\delta W_n^*(N_y, N_z) &= \int_0^L \left(\int_{\mathcal{A}_x} \frac{1}{G} \left(\frac{N_y S_z^*(y^*)}{h^*(y^*) I_z} \frac{\delta N_y S_z^*(y^*)}{h^*(y^*) I_z} + \frac{N_z S_y^*(z^*)}{b^*(z^*) I_y} \frac{\delta N_z S_y^*(z^*)}{b^*(z^*) I_y} \right) dA_x \right) dx = \\ &= \int_0^L \left(\frac{N_y \delta N_y}{G A_x} \frac{A_x}{I_z^2} \int_{\mathcal{A}_x} \frac{[S_z^*(y^*)]^2}{[h^*(y^*)]^2} dA_x + \frac{N_z \delta N_z}{G A_x} \frac{A_x}{I_y^2} \int_{\mathcal{A}_x} \frac{[S_y^*(z^*)]^2}{[b^*(z^*)]^2} dA_x \right) dx.\end{aligned}$$

Če s κ_y in κ_z označimo **strižna oblikovna koeficienta** prečnega prereza

$$\kappa_y = \frac{A_x}{I_z^2} \int_{\mathcal{A}_x} \frac{[S_z^*(y^*)]^2}{[h^*(y^*)]^2} dA_x, \quad \kappa_z = \frac{A_x}{I_y^2} \int_{\mathcal{A}_x} \frac{[S_y^*(z^*)]^2}{[b^*(z^*)]^2} dA_x$$

in z A_y in A_z **strižna prereza**

$$A_y = \frac{A_x}{\kappa_y}, \quad A_z = \frac{A_x}{\kappa_z},$$

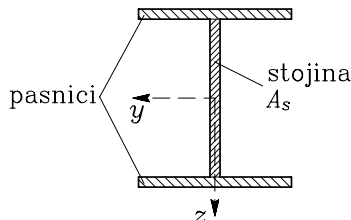
dobimo

$$\delta W_n^*(N_y, N_z) = \int_0^L \left(\frac{\kappa_y N_y \delta N_y}{G A_x} + \frac{\kappa_z N_z \delta N_z}{G A_x} \right) dx = \int_0^L \left(\frac{N_y \delta N_y}{G A_y} + \frac{N_z \delta N_z}{G A_z} \right) dx. \quad (5.9)$$

Večja sta strižna oblikovna koeficienta κ_y in κ_z , večji je vpliv prečnih sil na pomike.

Nekaj vrednosti za strižne oblikovne vrednosti:[†]

- prečni prerez pravokotne oblike: $\kappa_y = \kappa_z = 1.2$,
- prečni prerez okrogle oblike: $\kappa_y = \kappa_z = 10/9$,
- tankostenski prerez v obliki črke I: $\kappa_z \approx A_x/A_s$. A_x je ploščina prečnega prereza, A_s pa ploščina stojine prereza (slika 5.1).



Slika 5.1: Z A_s označimo ploščino stojine prereza

[†] M. Stanek, Trdnost – Izvlečki iz teorije in rešene naloge, FAGG, Univerza Edvarda Kardelja, Ljubljana, 1989.

5.1.3 Delo virtualnih napetosti zaradi torzijskega momenta

Določimo delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah pri enakomerni torziji

$$\delta W_n^*(M_x) = \int_V (2\varepsilon_{xy} \delta\sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xz} \delta\sigma_{xz}) dV!$$

Z upoštevanjem Hookovega zakona

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}$$

dobimo

$$\delta W_n^*(M_x) = \int_V \frac{1}{G} (\sigma_{xy} \delta\sigma_{xy} + \sigma_{xz} \delta\sigma_{xz}) dV.$$

Z G označimo strižni modul materiala. Pri enakomerni torziji lahko izrazimo napetosti σ_{xy} in σ_{xz} z napetostno funkcijo $\varphi(y, z)$ ([razdelek 2.3](#))

$$\sigma_{xy}(y, z) = \frac{M_x}{I_x} \frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial z}, \quad \sigma_{xz}(y, z) = -\frac{M_x}{I_x} \frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial y}.$$

I_x je torzijski vztrajnostni moment prečnega prereza. Napetosti zaradi virtualne obtežbe določimo po enačbah

$$\delta\sigma_{xy}(y, z) = \frac{\delta M_x}{I_x} \frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial z}, \quad \delta\sigma_{xz}(y, z) = -\frac{\delta M_x}{I_x} \frac{\partial\varphi(y, z)}{\partial y}.$$

Zato je

$$\delta W_n^*(M_x) = \int_V \frac{1}{G} \left(\frac{M_x \delta M_x}{I_x^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{M_x \delta M_x}{I_x^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right) dV$$

oziroma

$$\delta W_n^*(M_x) = \int_0^L \frac{M_x \delta M_x}{G I_x^2} \left\{ \int_{\mathcal{A}_x} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right) dA_x \right\} dx.$$

Integral po prečnem prerezu \mathcal{A}_x , ki nastopa v zavitem oklepaju, začasno označimo z I

$$I = \int_{\mathcal{A}_x} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right) dA_x = \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \varphi \right) - \varphi \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right) \right) dA_x.$$

Če upoštevamo Greenov integralni izrek – enačba (2.58) (\mathcal{C}_x je sklenjena krivulja)

$$\oint_{\mathcal{C}_x} (P_y dy + P_z dz) = \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) dA_x$$



in kompatibilnostno enačbo enakomerne torzije za integracijsko področje \mathcal{A}_x

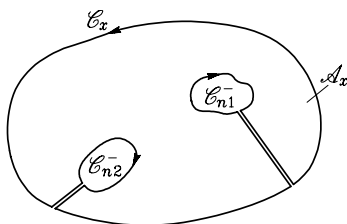
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 0,$$

dobimo

$$I = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \oint_{\mathcal{C}_z} \left(\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} dz - \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy \right) \right).$$

Za prečni prerez z N odprtinami je mejna črta \mathcal{C}_x (slika 5.2).

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_z \cup \mathcal{C}_{n1}^- \cup \dots \cup \mathcal{C}_{nN}^-.$$



Slika 5.2: Mejna črta \mathcal{C}_x prečnega prereza \mathcal{A}_x z dvema odprtinama

S \mathcal{C}_{ni}^- označimo mejno črto okrog odprtine A_{ni} v negativni (sourni) smeri. Tako dobimo

$$I = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \oint_{\mathcal{C}_z} \left(\varphi_z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} dz - \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy \right) \right) + \sum_{i=1}^N \oint_{\mathcal{C}_{ni}^-} \varphi_{ni} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dz}{d\zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dy}{d\zeta} \right) d\zeta.$$

Če upoštevamo, da je $\varphi_z = 0$ in enačbe (2.72), (2.73) in (2.77) v poglavju enakomerna torzija nosilca, sledi, da veljajo za mejne črte prečnega prereza \mathcal{C}_z in \mathcal{C}_{ni} ($d\eta = 0$), naslednji izrazi

$$\begin{aligned} dy &= e_{\zeta y} d\zeta = \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta = -\frac{\partial z}{\partial \eta} d\zeta \rightarrow \frac{dy}{d\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial \eta}, \\ dz &= e_{\zeta z} d\zeta = \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta = \frac{\partial y}{\partial \eta} d\zeta \rightarrow \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sledi

$$I = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \sum_{i=1}^N \varphi_{ni} \oint_{\mathcal{C}_{ni}^-} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) d\zeta = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \sum_{i=1}^N \varphi_{ni} \oint_{\mathcal{C}_{ni}^-} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\zeta.$$



Kompatibilnostni pogoji za mejne črte \mathcal{C}_{ni} so (enačba (2.81))

$$\mathcal{C}_{ni} : \oint_{\mathcal{C}_{ni}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\zeta = -2 A_{ni} \quad \rightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}_{ni}^-} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\zeta = 2 A_{ni}, \quad (i = 1, \dots, N).$$

Tako smo pokazali, da je integral I enak torzijskemu vztrajnostnemu momentu I_x

$$I = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \sum_{i=1}^N \varphi_{ni} A_{ni} \equiv I_x,$$

delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah pri enakomerni torziji pa

$$\delta W_n^*(M_x) = \int_0^L \frac{M_x \delta M_x}{G I_x} dx.$$

5.1.4 Delo virtualnih napetosti v linijskem elementu

Delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za linijski element dobimo, če seštejemo enačbe (5.8), (5.9) in (5.1.3)

$$\begin{aligned} \delta W_n^* = \int_0^L & \left(\left(\frac{N_x}{E A_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) \delta N_x + \frac{N_y \delta N_y}{G A_y} + \frac{N_z \delta N_z}{G A_z} + \frac{M_x \delta M_x}{G I_x} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \delta M_y + \left(\frac{M_z}{E I_z} - \alpha_T \Delta T_y \right) \delta M_z \right) dx. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Če je konstrukcija sestavljena iz večih linijskih elementov, izračunamo δW_n^* tako, da seštejemo delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za vse linijske elemente

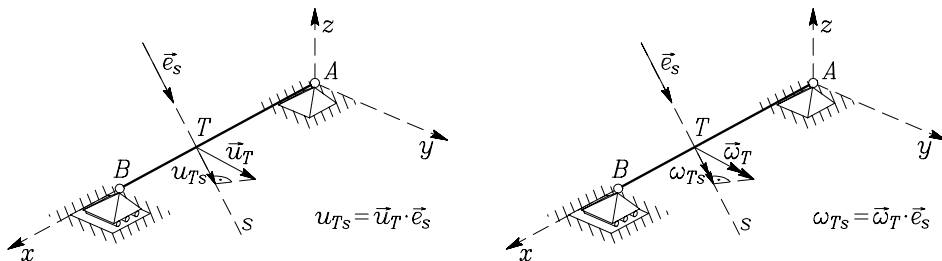
$$\begin{aligned} \delta W_n^* = \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} & \left(\left(\frac{N_x}{E A_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) \delta N_x + \frac{N_y \delta N_y}{G A_y} + \frac{N_z \delta N_z}{G A_z} + \frac{M_x \delta M_x}{G I_x} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \delta M_y + \left(\frac{M_z}{E I_z} - \alpha_T \Delta T_y \right) \delta M_z \right) dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Oznaka \sum_{el} pomeni, da moramo integrirati po vseh elementih konstrukcije. Enačba (5.12) predstavlja osnovno enačbo za račun pomikov konstrukcij, sestavljenih iz linijskih elementov.



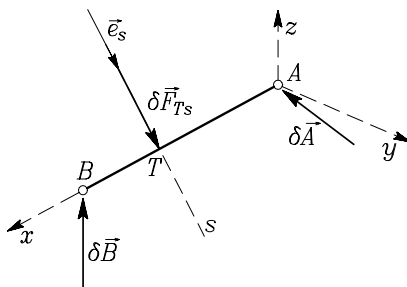
5.1.5 Določitev pomika in zasuka v točki na osi ravnega linijskega nosilca

Določiti želimo pomik $u_{Ts} = \vec{u}_T \cdot \vec{e}_s$ točke T v smeri enotskega vektorja \vec{e}_s ter zasuk $\omega_{Ts} = \vec{\omega}_T \cdot \vec{e}_s$ točke T okrog osi, ki je podana z enotskim vektorjem \vec{e}_s (slika 5.3).



Slika 5.3: u_{Ts} in ω_{Ts} sta projekciji pomika \vec{u}_T in zasuka $\vec{\omega}_T$ na premico s v smeri vektorja \vec{e}_s

Za določitev pomika u_{Ts} postavimo v točko T virtualno točkovno silo $\delta \vec{F}_{Ts} = \delta F_{Ts} \vec{e}_s$. Silo postavimo v smeri iskanega pomika, to je v smeri enotskega vektorja \vec{e}_s . Ker mora biti virtualna obtežba v ravnotežju, dobimo tudi pripadajoči reakciji $\delta \vec{A}$ in $\delta \vec{B}$ (slika 5.4).



Slika 5.4: Virtualna obtežba mora izpolnjevati ravnotežne pogoje

Nato uporabimo izrek virtualnih silah

$$\delta W_z^* = \delta W_n^*. \quad (5.13)$$

Ker je pomik $\vec{u}_A = \vec{0}$, pomik \vec{u}_B podpore B pa pravokoten na smer reakcije $\delta \vec{B}$, sta skalarna produkta $\delta \vec{A} \cdot \vec{u}_A$ in $\delta \vec{B} \cdot \vec{u}_B$ enaka nič. Delo virtualne obtežbe na resničnih pomikih je zato

$$\delta W_z^* = \delta \vec{F}_{Ts} \cdot \vec{u}_T = \delta F_{Ts} (\vec{e}_s \cdot \vec{u}_T) = \delta F_{Ts} u_{Ts}. \quad (5.14)$$

Ker je velikost δF_{Ts} virtualne sile $\delta \vec{F}_{Ts}$ **poljubna**, lahko vzamemo, da je $|\delta \vec{F}_{Ts}| = \delta F_{Ts} = 1.0$. Če upoštevamo še enačbo (5.13), sledi

$$u_{Ts} = \delta W_n^* (\delta F_{Ts} = 1.0). \quad (5.15)$$

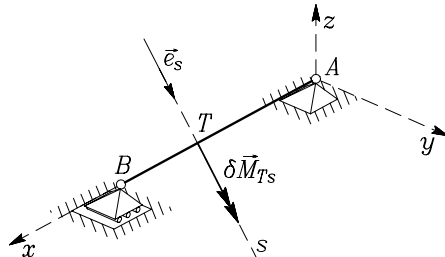
Pomik u_{Ts} dobimo s skalarnim množenjem vektorjev \vec{e}_s in \vec{u}_T

$$u_{Ts} = 1.0 |\vec{u}_T| \cos(\vec{e}_s, \vec{u}_T). \quad (5.16)$$



Zato pomeni morebitna negativna vrednost pomika u_{Ts} , da se točka T pomakne v nasprotni smeri, kot je smer vektorja \vec{e}_s oziroma v nasprotni smeri, kot je smer sile $\delta\vec{F}_{Ts}$.

Enačbo za račun zasuka ω_{Ts} okrog osi, ki je podana z enotskim vektorjem \vec{e}_s dobimo, če točko T obtežimo z virtualnim točkovnim momentom $\delta\vec{M}_{Ts} = \delta M_{Ts} \vec{e}_s$ (slika 5.5).



Slika 5.5: Virtualni moment $\delta\vec{M}_{Ts}$ postavimo v točko T v smeri enotskega vektorja \vec{e}_s

Zapišemo delo virtualne obtežbe na resničnih pomikih ter upoštevamo izrek o virtualnih silah (5.13)

$$\delta W_z^* = \delta\vec{M}_{Ts} \cdot \vec{\omega}_T = \delta M_{Ts} (\vec{e}_s \cdot \vec{\omega}_T) = \delta M_{Ts} \omega_{Ts}. \quad (5.17)$$

Ker je velikost δM_{Ts} poljubna, vzamemo $\delta M_{Ts} = 1.0$ in dobimo

$$\omega_{Ts} = \delta W_n^* (\delta M_{Ts} = 1.0). \quad (5.18)$$

Morebitna negativna vrednost ω_{Ts} pomeni, da ima resnični zasuk ω_{Ts} smer, ki je nasprotna od smeri virtualnega momenta $\delta\vec{M}_{Ts}$.

V nadaljevanju delo virtualne obtežbe na resničnih pomikih in notranje sile zaradi virtualne sile velikosti ena označimo s prečko. To pomeni, da pomik in zasuk neke točke na osi nosilca računamo po enačbah

$$\boxed{u_{Ts} = \delta\bar{W}_n^*, \quad \omega_{Ts} = \delta\bar{W}_n^*} \quad (5.19)$$

delo $\delta\bar{W}_n^*$ pa zapišemo takole:

$$\begin{aligned} \delta\bar{W}_n^* = \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} & \left(\left(\frac{N_x}{E A_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) \delta\bar{N}_x + \frac{N_y \delta\bar{N}_y}{G A_y} + \frac{N_z \delta\bar{N}_z}{G A_z} + \frac{M_x \delta\bar{M}_x}{G I_x} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \delta\bar{M}_y + \left(\frac{M_z}{E I_z} - \alpha_T \Delta T_y \right) \delta\bar{M}_z \right) dx, \end{aligned} \quad (5.20)$$

kjer so N_x , N_y , N_z , M_x , M_y in M_z notranje sile zaradi dejanske obtežbe, $\delta\bar{N}_x$, $\delta\bar{N}_y$, $\delta\bar{N}_z$, $\delta\bar{M}_x$, $\delta\bar{M}_y$ in $\delta\bar{M}_z$ pa notranje sile zaradi virtualne sile oziroma momenta velikosti ena.

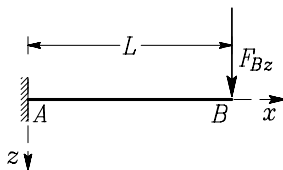
Pri izpeljavi izraza δW_n^* (enačba (5.11)) smo z začetnimi predpostavkami o deformacijah in privzeto



zvezo med napetostjo in deformacijo zanemarili vpliv strižne napetosti σ_{yy} in σ_{zz} (enačba (5.3)). To pomeni, da bomo pri določanju kinematičnih pogojev oziroma pomikov z izrekom o virtualnih silah zanemarili vpliv teh napetosti na pomike.

Pomik oziroma zasuk izbrane točke na osi linijskega nosilca izračunamo tako, da določimo delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah, ki ustreza obtežbi z virtualno silo $\delta F_{T_s} = 1$ oziroma z virtualnim momentom $\delta M_{T_s} = 1$, na mestu in v smeri iskanega pomika oziroma zasuka.

Primer 5.1 Določimo navpični pomik w_B in zasuk ω_{By} točke B na osi statično določenega linijskega previsnega nosilca (slika 5.6)! Pri računu zanemarimo vpliv prečne sile N_z .



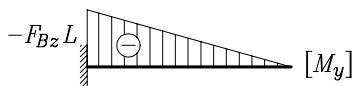
Slika 5.6: Konzolni nosilec obtežen s silo F_{Bz}

Delo $\delta \bar{W}_n^*$ je podano z enačbo (5.20). Ker vpliva prečne sile N_z ne upoštevamo in so vse druge notranje sile razen upogibnega momenta M_y enake nič, je $\delta \bar{W}_n^*$ enako

$$\delta \bar{W}_n^* = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx.$$

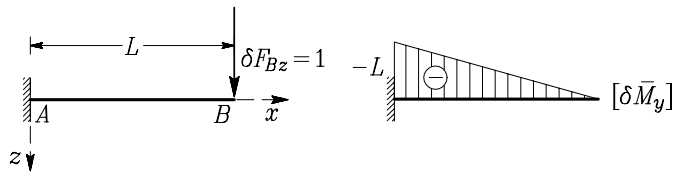
računati moramo upogibni moment M_y zaradi resnične obtežbe in upogibni moment $\delta \bar{M}_y$ zaradi virtualne obtežbe. Upogibni moment M_y zaradi sile F_{Bz} je (slika 5.7)

$$M_y = -F_{Bz} (L - x).$$



Slika 5.7: Potek upogibnega momenta M_y

Potrebujemo še upogibni moment $\delta \bar{M}_y$ zaradi virtualne sile. Za račun w_B navpičnega pomika točke B , postavimo v to točko virtualno silo $\delta F_{Bz} = 1$ v smeri iskanega pomika (slika 5.8).

Slika 5.8: Virtualna sila δF_{Bz} in potek upogibnega momenta $\delta \bar{M}_y$

Za tako obtežbo je upogibni moment $\delta \bar{M}_y$ enak

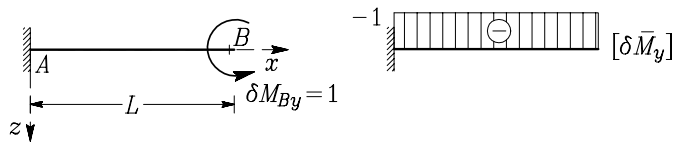
$$\delta \bar{M}_y = -(L - x).$$

Pomik w_B izračunamo po prvi izmed enačb (5.19):

$$w_B = \delta \bar{W}_n^* (\delta F_{Bz} = 1) = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx = \int_0^L \frac{F_{Bz} (L - x)^2}{E I_y} dx = \frac{F_{Bz} L^3}{3 E I_y}.$$

Pozitivni predznak pomeni, da ima pomik w_B isto smer, kot izbrana virtualna sila δF_{Bz} .

Zasuk ω_{By} točke B okrog y osi dobimo, če zapišemo izrek o virtualnih silah za primer obtežbe z virtualnim momentom δM_{By} , ki deluje v točki B in ima smer iskanega zasuca (slika 5.9).

Slika 5.9: Virtualni moment δM_{By} in potek upogibnega momenta $\delta \bar{M}_y$

Pri taki obtežbi je od nič različen le upogibni moment $\delta \bar{M}_y$ in je enak 1 po celi dolžini nosilca

$$\delta \bar{M}_y = 1.$$

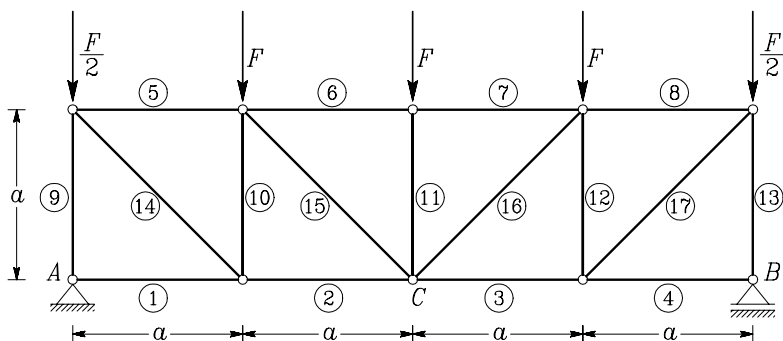
Zasuk ω_{By} točke B izračunamo po drugi izmed enačb (5.19):

$$\omega_{By} = \delta \bar{W}_n^* (\delta M_{By} = 1) = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx = \int_0^L \frac{-F_{Bz} (L - x) \cdot 1}{E I_y} dx = -\frac{F_{Bz} L^2}{2 E I_y}.$$

Negativni predznak pomeni, da ima zasuk ω_{By} točke B nasprotno smer, kot je smer izbranega virtualnega momenta δM_{By} .

Primer 5.2 Za prikazano paličje z uporabo izreka o virtualnih silah določimo navpični pomik točke C ter vodoravni pomik točke B (slika 5.10)! Zunanja obtežba je sestavljena iz petih enakih sil $F = 150 \text{ kN}$. Prečni prerez in material je za vse palice enak: $A_x = 39.6 \text{ cm}^2$ in $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$. Razdalja a je enaka 2 m.





Slika 5.10: Paličje, obteženo z navpičnimi silami

Ker je v palici edina od nič različna notranja količina osna sila, ki je vzdolž palice konstantna, se izraz za račun pomika v izbranem vozlišču zelo poenostavi

$$w = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{N_i \delta \bar{N}_i}{E_i A_{xi}} dx = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \delta \bar{N}_i}{E_i A_{xi}} \int_0^{L_i} dx = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \delta \bar{N}_i L_i}{E_i A_{xi}},$$

kjer z n označimo število palic v paličju, z E_i elastični modul, z A_{xi} ploščino prečnega prereza, z L_i pa dolžino palice i . Z N_i in $\delta \bar{N}_i$ označimo osno silo v palici i zaradi zunanje obtežbe in zaradi virtualne sile. Če imajo vse palice enak prerez in so iz enakega materiala, sledi

$$w = \frac{1}{EA_x} \sum_{i=1}^n N_i \delta N_i L_i.$$

Velikosti notranjih sil zaradi zunanje obtežbe in zaradi virtualnih obtežbe $\delta F_{Cz} = 1.0$ in $\delta F_{Bx} = 1.0$ prikazujemo v preglednici 5.1. Tudi vsoto $\sum_i N_i \delta \bar{N}_i L_i$ izračunamo v preglednici 5.1.



Tabela 5.1: Notranje sile v palicah ter vsota produktov $N_i \delta N_i L_i$

Palica	L_i	N_i	$\delta \bar{N}_i (\delta F_{Cz} = 1)$	$N_i \delta \bar{N}_i L_i$	$\delta \bar{N}_i (\delta F_{Bx} = 1)$	$N_i \delta \bar{N}_i L_i$
1	a	$0.0 F$	0.0	$0.00 F a$	1.0	$0.0 F a$
2	a	$1.5 F$	0.5	$0.75 F a$	1.0	$1.5 F a$
3	a	$1.5 F$	0.5	$0.75 F a$	1.0	$1.5 F a$
4	a	$0.0 F$	0.0	$0.00 F a$	1.0	$0.0 F a$
5	a	$-1.5 F$	-0.5	$0.75 F a$	0.0	$0.0 F a$
6	a	$-2.0 F$	-1.0	$2.00 F a$	0.0	$0.0 F a$
7	a	$-2.0 F$	-1.0	$2.00 F a$	0.0	$0.0 F a$
8	a	$-1.5 F$	-0.5	$0.75 F a$	0.0	$0.0 F a$
9	a	$-2.0 F$	-0.5	$1.00 F a$	0.0	$0.0 F a$
10	a	$-1.5 F$	-0.5	$0.75 F a$	0.0	$0.0 F a$
11	a	$-1.0 F$	0.0	$0.00 F a$	0.0	$0.0 F a$
12	a	$-1.5 F$	-0.5	$0.75 F a$	0.0	$0.0 F a$
13	a	$-2.0 F$	-0.5	$1.00 F a$	0.0	$0.0 F a$
14	$a\sqrt{2}$	$1.5\sqrt{2} F$	$0.5\sqrt{2}$	$1.5\sqrt{2} F a$	0.0	$0.0 F a$
15	$a\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2} F$	$0.5\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2} F a$	0.0	$0.0 F a$
16	$a\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2} F$	$0.5\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2} F a$	0.0	$0.0 F a$
17	$a\sqrt{2}$	$1.5\sqrt{2} F$	$0.5\sqrt{2}$	$1.5\sqrt{2} F a$	0.0	$0.0 F a$
Σ				$16.16 F a$		$3.0 F a$

Navpični pomik točke C je (glej preglednico 5.1):

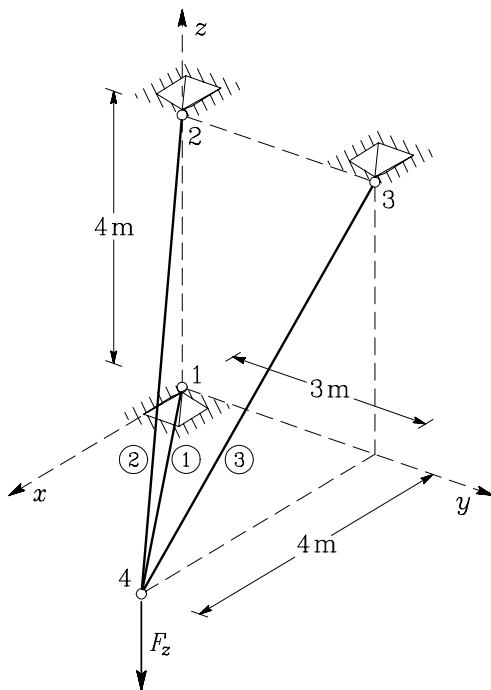
$$w_C = \frac{1}{E A_x} \sum_i N_i \delta \bar{N}_i L_i = \frac{16.16 \cdot 150 \cdot 200}{21000 \cdot 39.6} = 0.58 \text{ cm},$$

vodoravni pomik točke B pa

$$u_B = \frac{1}{E A_x} \sum_i N_i \delta \bar{N}_i L_i = \frac{3.0 \cdot 150 \cdot 200}{21000 \cdot 39.6} = 0.11 \text{ cm}.$$

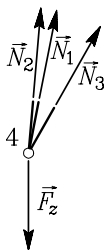


Primer 5.3 Za prostorsko paličje na sliki 5.11 določimo navpični pomik prijemališča sile $F_z = -8 \text{ kN}$! Ploščina A_x prečnega prereza palic je 2 cm^2 , modul elastičnosti E pa 200000 kN/cm^2 .



Slika 5.11: Paličje je sestavljeno iz treh palic

Notranje sile v palicah izračunamo iz ravnotežnih pogojev za sile v vozlišču prijemališča sile F_z (slika 5.12).



Slika 5.12: Na vozlišče 4 delujejo tri neznane in ena znana sila

Silo \vec{N} , ki učinkuje vzdolž premice, podane s točkama $T_I(x_I, y_I, z_I)$ in $T_{II}(x_{II}, y_{II}, z_{II})$ in ima smer od T_I proti T_{II} , zapišemo z enačbo:

$$\vec{N} = \frac{N}{d} [(x_{II} - x_I) \vec{e}_x + (y_{II} - y_I) \vec{e}_y + (z_{II} - z_I) \vec{e}_z].$$



Z N je označena velikost sile \vec{N} , z d pa razdalja med točkama T_I in T_{II} . Označimo z d_1 razdaljo od točke 1 do točke 4, z d_2 razdaljo od točke 2 do 4 in z d_3 razdaljo od točke 3 do 4 (slika 5.11). Razdalje d_1 do d_3 so:

$$d_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}, \quad d_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{41} \text{ m}, \quad d_3 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ m}.$$

Notranje sile v konstrukciji zaradi sile F_z izračunamo iz ravnotežnih pogojev za izrezano vozlišče 4 (slika 5.12). Sile \vec{N}_1 , \vec{N}_2 in \vec{N}_3 zapišemo z enačbami:

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 &= \frac{N_1}{5} (-4 \vec{e}_x, -3 \vec{e}_y), \\ \vec{N}_2 &= \frac{N_2}{\sqrt{41}} (-4 \vec{e}_x, -3 \vec{e}_y, 4 \vec{e}_z), \\ \vec{N}_3 &= \frac{N_3}{4\sqrt{2}} (-4 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_z) = \frac{N_3}{\sqrt{2}} (-1 \vec{e}_x + 1 \vec{e}_z).\end{aligned}$$

Ravnotežni pogoji so:

$$\begin{aligned}\sum x = 0 : \quad & -N_1 \frac{4}{5} - N_2 \frac{4}{\sqrt{41}} - N_3 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \\ \sum y = 0 : \quad & -N_1 \frac{3}{5} - N_2 \frac{3}{\sqrt{41}} = 0, \\ \sum z = 0 : \quad & N_2 \frac{4}{\sqrt{41}} + N_3 \frac{1}{\sqrt{2}} - 8 = 0.\end{aligned}$$

Rešitev ravnotežnih enačb je:

$$N_1 = -10 \text{ kN}, \quad N_2 = 2\sqrt{41} = 12.81 \text{ kN}, \quad N_3 = 0 \text{ kN}.$$

Notranje sile zaradi $\delta F_z = -1$ v vozlišču 4 izračunamo na enak način in dobimo:

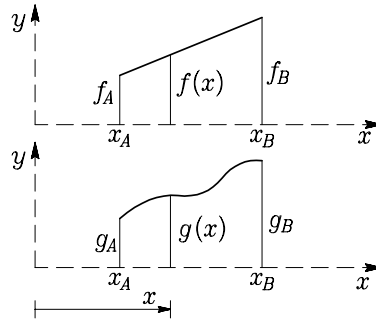
$$\delta \vec{N}_1 = -1.25 \text{ kN}, \quad \delta \vec{N}_2 = 0.25\sqrt{41} = 12.81 \text{ kN}, \quad \delta \vec{N}_3 = 0 \text{ kN}.$$

Navpični pomik u_{4z} točke 4 je:

$$u_{4z} = \frac{1}{E A_x} \sum_{i=1}^3 N_i \delta N_i L_i = \frac{10 \cdot 1.25 \cdot 500 + 2\sqrt{41} \cdot 0.25\sqrt{41} \cdot 100\sqrt{41}}{200000 \cdot 2} = 0.048 \text{ cm}.$$

Primer 5.4 Izpeljimo izraz za integral produkta funkcij $f(x)$ in $g(x)$ na intervalu od x_A do x_B . Pri tem upoštevajmo, da je funkcija $f(x)$ linearna. Integrali produktov takih funkcij nastopajo v izrazu (5.11) oziroma (5.20) za delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah. Notranje sile $\delta \vec{N}_x$, $\delta \vec{N}_y$, $\delta \vec{N}_z$, $\delta \vec{M}_x$, $\delta \vec{M}_y$ in $\delta \vec{M}_z$ zaradi točkovne virtualne sile so odsekoma linearne, notranje sile N_x , N_y , N_z , M_x , M_y in M_z zaradi zunanje obtežbe pa so poljubne funkcije odvisne od x (slika 5.13).





Slika 5.13: Funkcija $f(x)$ je linearna, funkcija $g(x)$ je poljubna

Linearno funkcijo $f(x)$ lahko zapišemo v obliki

$$f(x) = mx + n,$$

kjer sta m in n konstanti. Iskani integral označimo z I

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x) g(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} (mx + n) g(x) dx = m \int_{x_A}^{x_B} x g(x) dx + n \int_{x_A}^{x_B} g(x) dx. \quad (5.21)$$

Prvi integral v enačbi (5.21) predstavlja statični moment S_g lika, ki ga določa funkcija $g(x)$ in x os na intervalu od x_A do x_B glede na os, ki poteka skozi točko $x = 0$ in je pravokotna na os x , drugi integral pa je ploščina A_g istega lika

$$I = m S_g + n A_g. \quad (5.22)$$

Statični moment S_g lika je produkt abcise težišča x_{Tg} lika in ploščine A_g [†]

$$S_g = x_{Tg} A_g. \quad (5.23)$$

Enačbo (5.23) vstavimo v (5.22) in dobimo

$$I = A_g (m x_{Tg} + n). \quad (5.24)$$

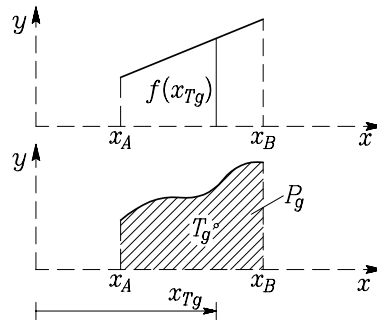
Izraz $m x_{Tg} + n$ predstavlja vrednost linearne funkcije f pri $x = x_{Tg}$, to je $f(x_{Tg})$. Dobili smo enačbo

$$I = A_g f(x_{Tg}), \quad (5.25)$$

ki pove, da je vrednost integrala produkta linearne funkcije $f(x)$ in poljubne funkcije $g(x)$ na intervalu od x_A do x_B enaka produktu ploščine A_g lika $g(x)$ na intervalu od x_A do x_B in vrednosti funkcije $f(x_{Tg})$ na mestu težišča lika, ki ga določa funkcija $g(x)$ (slika 5.14).

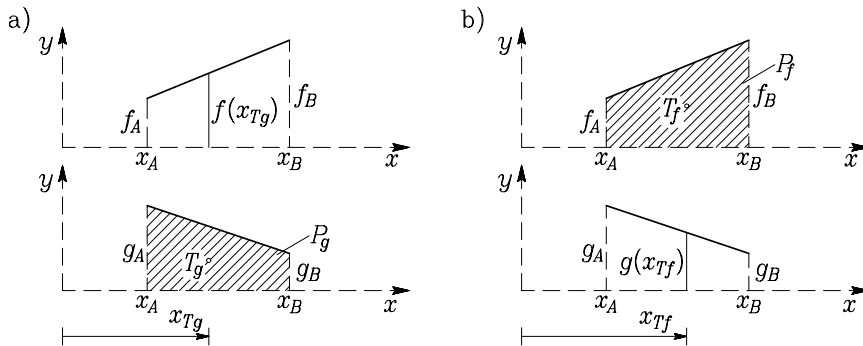
[†] M. Stanek, G. Turk, Statika I, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 1996





Slika 5.14: Integral $\int_A^B f(x) g(x) dx$ je enak produktu ploščine A_g in vrednosti linearne funkcije $f(x_{Tg})$

Sedaj si oglejmo še primer, ko sta obe funkciji $f(x)$ in $g(x)$ **linearni** (slika 5.15).



Slika 5.15: Če sta obe funkciji linearni,
a) določimo ploščino pod funkcijo $g(x)$, ali
b) ploščino pod funkcijo $f(x)$ – primer b)

V tem primeru lahko sami izberemo, za katero funkcijo bomo izračunali ploščino in težišče

$$I = A_g f(x_{Tg}) = A_f g(x_{Tf}). \quad (5.26)$$

Če linearni funkciji $f(x)$ in $g(x)$ izrazimo z robnimi vrednostmi, sledi

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x) g(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} \left(f_A + \frac{f_B - f_A}{L} x \right) \left(g_A + \frac{g_B - g_A}{L} x \right) dx.$$

Po integriranju in upoštevanju, da je $L = x_B - x_A$, dobimo

$$I = \frac{L}{6} [f_A (2g_A + g_B) + f_B (2g_B + g_A)]. \quad (5.27)$$

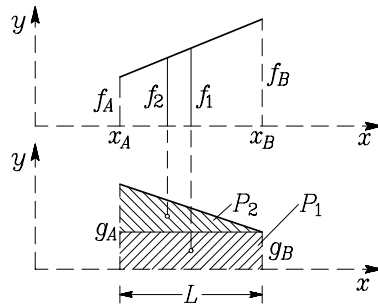
Funkcijo $g(x)$ lahko zapišemo kot vsoto konstantne in linearne funkcije $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ (slika 5.16). Integral I je v tem primeru enak

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x) g(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x) g_1(x) dx + \int_{x_A}^{x_B} f(x) g_2(x) dx = A_1 f_1 + A_2 f_2. \quad (5.28)$$

Pri tem smo z A_1 , f_1 , A_2 in f_2 označili naslednje izraze:

$$A_1 = g_A L, \quad f_1 = f_A + \frac{f_B - f_A}{2}, \quad A_2 = \frac{g_B - g_A}{2} L, \quad f_2 = f_A + \frac{2(f_B - f_A)}{3},$$

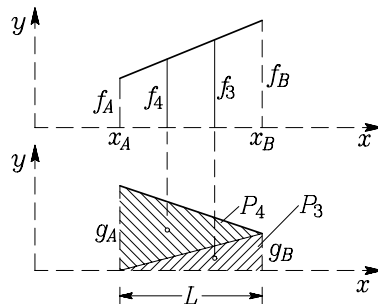
katerih pomen prikazujemo na sliki 5.16.



Slika 5.16: Območje, ki ga določa funkcija $g(x)$, razdelimo na pravokotnik in trikotnik

Če funkcijo $g(x)$ zapišemo kot vsoto dveh linearnih funkcij $g(x) = g_3(x) + g_4(x)$ (slika 5.17), izračunamo integral takole:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x) g_3(x) dx + \int_{x_A}^{x_B} f(x) g_4(x) dx = A_3 f_3 + A_4 f_4. \quad (5.29)$$



Slika 5.17: Območje, ki ga določa funkcija $g(x)$, razdelimo na dva trikotnika



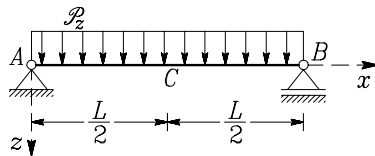
Z A_3 , f_3 , A_4 in f_4 označujemo naslednje izraze:

$$A_3 = \frac{g_A L}{2}, \quad f_3 = f_A + \frac{f_B - f_A}{3}, \quad A_4 = \frac{g_B L}{2}, \quad f_4 = f_A + \frac{2(f_B - f_A)}{3},$$

katerih pomen prikazujemo na sliki 5.17.

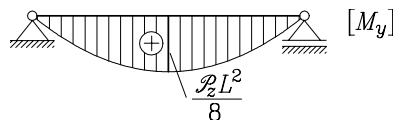
V vseh prikazanih primerih (enačbe (5.27), (5.28), (5.29)) je vrednost integrala I enaka, kar lahko bralec sam preveri.

Primer 5.5 Določimo zasuk ω_{Ay} točke A in pomik w_C točke C na prostoležečem nosilcu (slika 5.18)! Vpliv prečne sile N_z zanemarimo.



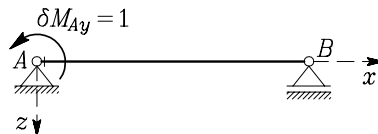
Slika 5.18: Prostoležeči nosilec je obtežen s konstantno linijsko obtežbo

Diagram upogibnih momentov zaradi konstantne linijske obtežbe \mathcal{P}_z je prikazan na sliki 5.19.



Slika 5.19: Diagram upogibnega momenta zaradi \mathcal{P}_z

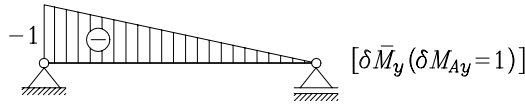
Za račun zasuka ω_{Ay} obtežimo točko A z virtualnim momentom $\delta M_{Ay} = 1$ (slika 5.20).



Slika 5.20: Virtualni moment δM_{Ay} postavimo v isto točko, za katero določamo zasuk

Pripadajoči diagram upogibnih momentov prikazujemo na sliki 5.21.

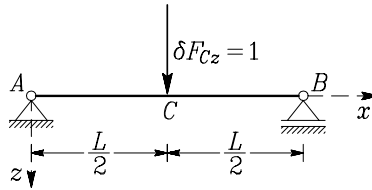


Slika 5.21: Diagram upogibnih momentov zaradi $\delta M_{Ay} = 1$

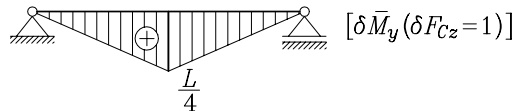
Zasuk točke A izračunamo po enačbah (5.19) in (5.20):

$$\omega_{Ay} = \int_0^L \frac{M_y \delta M_y}{E I_y} dx = \frac{1}{E I_y} \underbrace{\frac{\mathcal{P}_z L^2}{8} \frac{2}{3} L}_{\text{ploščina parabole}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\text{vrednost linearne funkcije pod težiščem parabole}} = -\frac{\mathcal{P}_z L^3}{24 E I_y}.$$

Za račun pomika u_{Cz} obtežimo točko C z virtualno silo $\delta F_{Cz} = 1$ (slika 5.22).

Slika 5.22: Virtualno silo δF_{Cz} postavimo v tisto točko, za katero pomik določamo

Pripadajoči diagram upogibnih momentov prikazujemo na sliki 5.23.

Slika 5.23: Diagram upogibnih momentov zaradi $\delta F_{Cz} = 1$

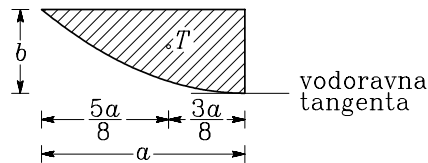
Ker funkcija $\delta \bar{M}_y$ pri $x = L/2$ spremeni naklon, moramo integral, s katerim izračunamo pomik u_{Cz}

$$u_{Cz} = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx$$

izračunati posebej na odseku od 0 do $L/2$ in posebej na odseku od $L/2$ do L . Zaradi simetrije diagramov $[M_y]$ in $[\delta \bar{M}_y]$ je dovolj, če določimo vrednost integrala na odseku 0 do $L/2$ in rezultat pomnožimo z dva. Težiše x_p in ploščina A_p **polovice** kvadratne parabole (slika 5.24) sta določeni z enačbama (glej preglednico 1.1)

$$x_p = \frac{3a}{8}, \quad A_p = \frac{2ab}{3}.$$





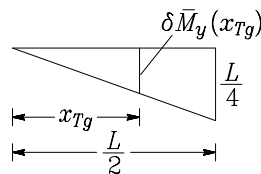
Slika 5.24: Težišče polovice kvadratne parabole

Velikost $\delta \bar{M}_y(x_{Tg})$ virtualnega momenta pri (glej slika 5.24)

$$x_{Tg} = \frac{5a}{8} = \frac{5L}{8 \cdot 2} = \frac{5L}{16}$$

izračunamo iz podobnosti trikotnikov na sliki 5.25:

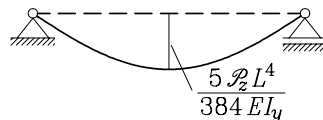
$$\frac{\delta \bar{M}_y(x_{Tg})}{x_{Tg}} = \frac{L/4}{L/2} \rightarrow \delta \bar{M}_y(x_{Tg}) = \frac{5L}{32}.$$

Slika 5.25: Velikost virtualnega momenta $\delta \bar{M}_y$ pri razdalji x_{Tg}

Pomik u_{Cz} na sredini nosilca je

$$u_{Cz} = \frac{2}{EI_y} \underbrace{\frac{\mathcal{P}_z L^2}{8} \frac{2L}{3}}_{\text{ploščina parabole}} \cdot \underbrace{\frac{5L}{32}}_{\text{vrednost linearne funkcije pod težiščem parabole}} = \frac{5}{384} \frac{\mathcal{P}_z L^4}{EI_y}.$$

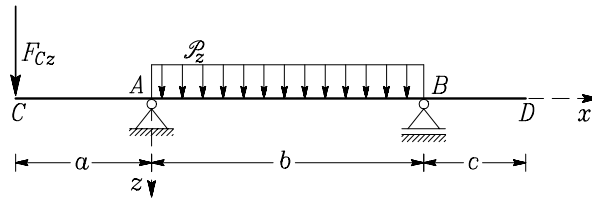
Na sliki 5.26 prikazujemo deformirano lega konstrukcije.



Slika 5.26: Deformirana lega konstrukcije

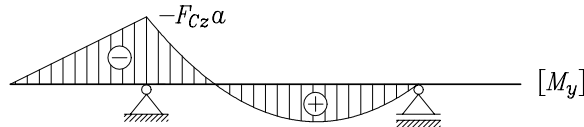


Primer 5.6 Določimo navpični pomik točke D za nosilec na sliki 5.27. Vpliv prečne sile N_z zanemarimo.



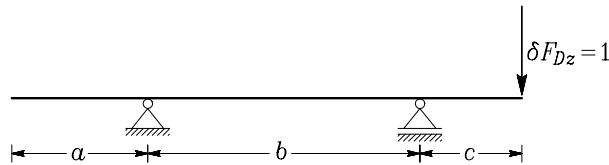
Slika 5.27: Prostoležeči nosilec s previsoma

Diagram upogibnih momentov $[M_y]$ od zunanje obtežbe F_{Cz} in \mathcal{P}_z je prikazan na sliki 5.28.



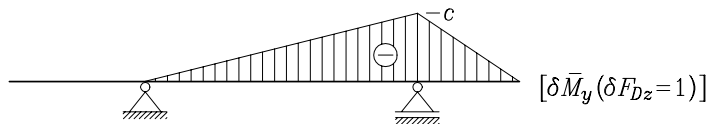
Slika 5.28: Diagram upogibnih momentov zaradi zunanje obtežbe

Za račun pomika w_D postavimo v točko D virtualno silo $\delta F_{Dz} = 1$ (slika 5.29).



Slika 5.29: Virtualna obtežba za račun navpičnega pomika točke D

Pripadajoči diagram upogibnih momentov $[\delta \bar{M}_y]$ prikazujemo na sliki 5.30.



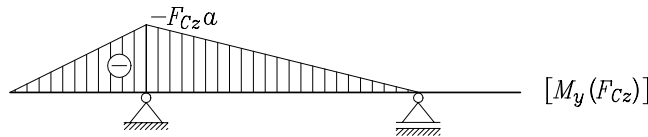
Slika 5.30: Diagram upogibnih momentov zaradi virtualne sile

Iz prikazanih diagramov lahko ugotovimo, da bi bilo določanje ploščine in težišča diagrama $[M_y]$ zapleteno. Reševanje naloge se poenostavi, če upoštevamo **princip superpozicije**, ki velja za majhne pomike in za linearno elastični material. Princip superpozicije omogoča, da lahko pomik neke točke konstrukcije zaradi vpliva skupine sil izračunamo kot vsoto pomikov te točke zaradi vpliva vsake posamezne sile. V obravnavanem primeru zapišemo princip superpozicije takole

$$w_D = w_D(F_{Cz}) + w_D(\mathcal{P}_z).$$

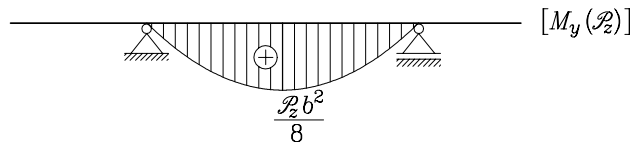


Določiti moramo torej diagrame notranjih sil za vsako obtežbo posebej. Diagram upogibnega momenta M_y zaradi sile F_{Cz} je prikazan za sliki 5.31.



Slika 5.31: Diagram upogibnega momenta zaradi sile F_{Cz}

Diagram M_y zaradi zvezne linijske obtežbe \mathcal{P}_z je prikazan na sliki 5.32.



Slika 5.32: Diagram upogibnega momenta zaradi linijske obtežbe \mathcal{P}_z

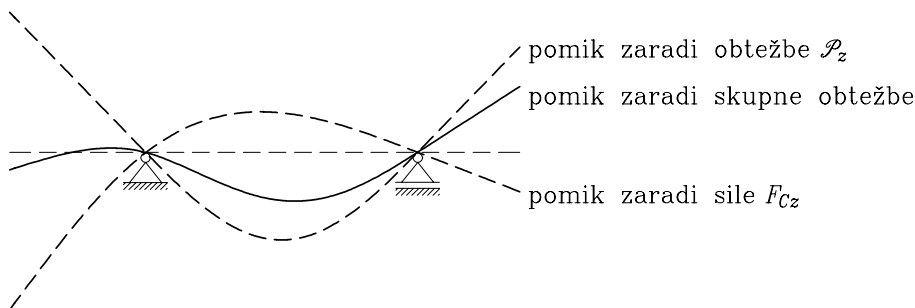
Z upoštevanjem teh diagramov pomika $w_D(F_{Cz})$ in $w_D(\mathcal{P}_z)$ enostavno izračunamo

$$w_D(F_{Cz}) = \frac{1}{E I_y} \underbrace{\frac{F_{Cz} a b}{2}}_{\text{ploščina } M_y(F)} \cdot \underbrace{\frac{c}{3}}_{\text{vrednost } \delta \bar{M}_y \text{ v težišču } M_y(F)}, \quad w_D(\mathcal{P}_z) = -\frac{1}{E I_y} \underbrace{\frac{\mathcal{P}_z b^2}{8} \frac{2}{3} b}_{\text{ploščina } M_y(\mathcal{P}_z)} \cdot \underbrace{\frac{c}{2}}_{\text{vrednost } \delta \bar{M}_y \text{ v težišču } M_y(\mathcal{P}_z)}.$$

Pomik točke D dobimo, če upoštevamo zakon superpozicije

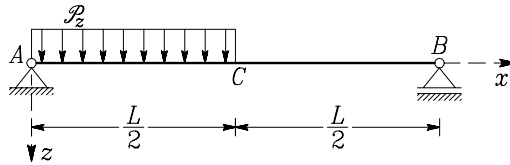
$$w_D = w_D(F_{Cz}) + w_D(\mathcal{P}_z) = \frac{b c}{24 E I_y} (4 F_{Cz} a - \mathcal{P}_z b^2).$$

V primeru, da ne znamo določiti ploščine in težišča diagrama $[M_y]$ tudi ob upoštevanju principa superpozicije, integriramo produkt funkcij M_y in $\delta \bar{M}_y$ analitično. Deformirano lego konstrukcije prikazujemo na sliki 5.33.



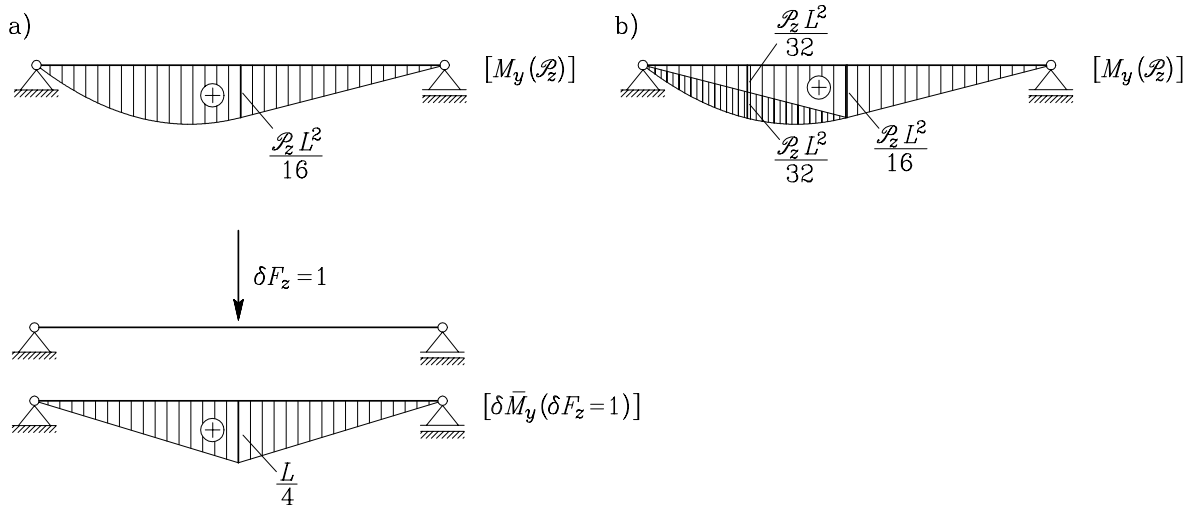
Slika 5.33: Deformirana lega konstrukcije zaradi sile F_{Cz} , obtežbe \mathcal{P}_z in skupne obtežbe

Primer 5.7 Leva polovica prostoležečega nosilca je obtežena z enakomerno linijsko obtežbo \mathcal{P}_z . Določimo navpični pomik w_C točke C (slika 5.34)! Vpliv prečnih sil na pomike zanemarimo, $E I_y = \text{konst.}$



Slika 5.34: Konstantna linijska obtežba deluje le na levo polovico nosilca

Diagrama upogibnih momentov zaradi \mathcal{P}_z in zaradi $\delta F_z = 1$ podajamo na sliki 5.35).



Slika 5.35: Diagrama M_y in δM_y

Vzdolž leve polovice nosilca integriramo produkt funkcij

$$M_y = \frac{3 \mathcal{P}_z L}{8} - \frac{\mathcal{P}_z x^2}{2}$$

in

$$\delta \bar{M}_y = \frac{x}{2},$$

za desno stran pa lahko uporabimo enačbo (5.24)

$$w_T = \frac{1}{E I_y} \int_0^{L/2} \left(\frac{3 \mathcal{P}_z L}{8} - \frac{\mathcal{P}_z x^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx + \frac{1}{E I_y} \frac{\mathcal{P}_z L^2}{16} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{4} = \frac{5 \mathcal{P}_z L^4}{768 E I_y}. \quad (5.30)$$



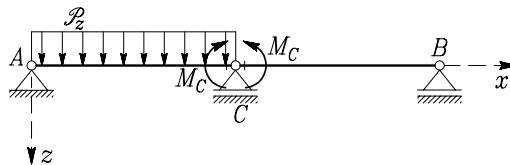
Kljub temu, da izgleda, kot da naloge ne moremo rešiti z uporabo enačbe (5.24), lahko diagram na sliki 5.35a razdelimo na linearni in kvadratni del kot kaže slika 5.35b in z upoštevanjem principa superpozicije problem hitro rešimo

$$w_T = \frac{1}{E I_y} \left[\frac{\mathcal{P}_z L^2}{16} \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2L}{3} \right) \cdot 2 + \frac{\mathcal{P}_z L^2}{32} \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{L}{4} \right] = \frac{5 \mathcal{P}_z L^4}{768 E I_y},$$

kar je enak rezultat, kot smo ga dobili z integriranjem produkta M_y in $\delta \bar{M}_y$ (enačba (5.30)). Vrednost $\mathcal{P}_z L^2/32$, ki pripada kvadratnemu delu diagrama izračunamo tako, kot da imamo prostoležeči nosilec dolžine $L/2$, obtežen z enakomerno obtežbo preko celotne dolžine

$$\frac{\mathcal{P}_z (L/2)^2}{8} = \frac{\mathcal{P}_z L^2}{32}.$$

Pokažimo zakaj lahko del nosilca, ki je obtežen z enakomerno obtežbo, obravnavamo kot prostoležeči nosilec. Konstrukcijo na sliki 5.34 spremenimo tako, da v točko C vstavimo členek za zasuke (upogibni členek) in ga tako podpremo, da preprečuje navpični pomik (slika 5.36).



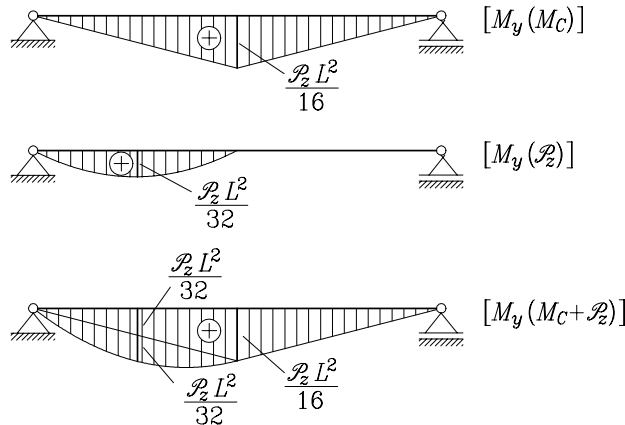
Slika 5.36: Spremenjena, vendar enakovredna konstrukcija

Ker smo v točki C vpeljali členek, smo morali na spremenjeno konstrukcijo dodati momentno obtežbo M_C . Ker konstrukcija na sliki 5.36 v točki C ni podprta, je reakcija $C_z = 0$. Druge reakcije in moment M_C izračunamo iz ravnotežnih pogojev:

$$A_x = 0, \quad A_z = -\frac{3 \mathcal{P}_z L}{8}, \quad B_z = -\frac{\mathcal{P}_z L}{8}, \quad M_C = -\frac{\mathcal{P}_z L^2}{16}.$$

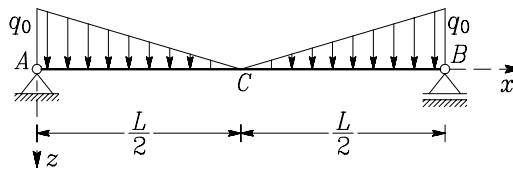
Diagrami momentov so taki, kot na sliki 5.35, pri čemer momentni diagram na levi strani nosilca določimo kot vsoto momentov zaradi obtežbe M_C in momenta zaradi enakomerne obtežbe \mathcal{P}_z (slika 5.37).





Slika 5.37: Določitev momenta s superpozicijo vpliva obtežb P_z in M_C

Primer 5.8 Določimo navpični pomik točke C (slika 5.38)! Nalogo rešujemo z izrekom o virtualnih silah. Upoštevajmo, da je $E I_y$ konstanta, vpliv prečnih sil pa zanemarimo.



Slika 5.38: Na nosilec deluje linijska obtežba trikotne oblike

Pomik določimo po enačbi

$$w = \int_0^L \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} dx.$$

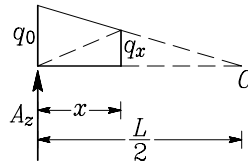
Reakcija A_z je

$$A_z = -\frac{q_0 L}{2} \frac{1}{2} = -\frac{q_0 L}{4}.$$

Vrednost linijske obtežbe $q_x(x)$ pri poljubnem x določimo s slike 5.39:

$$\frac{q_x}{L/2 - x} = \frac{q_0}{L/2} \rightarrow q_x = \frac{2 q_0}{L} \left(\frac{L}{2} - x \right).$$

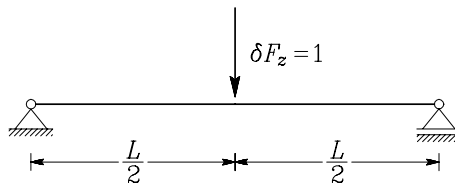


Slika 5.39: Trapezno obtežbo na dolžini x razdelimo na dva trikotnika

Upogibni moment na intervalu $0 \leq x \leq L/2$ zaradi zunanje obtežbe je

$$M_y = \frac{q_0 L}{4} x - \frac{q_0 x}{2} \frac{2}{3} x - \frac{2 q_0}{L} \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{x}{2} \frac{x}{3} = \frac{q_0 L}{4} x - \frac{q_0 x^2}{2} + \frac{q_0 x^3}{3 L}.$$

Za račun navpičnega pomika v točki C , na to mesto postavimo virtualno silo $\delta F_z = 1$ (slika 5.40).

Slika 5.40: Virtualno silo $\delta F_z = 1.0$ postavimo v točko, katere pomik želimo določiti

Upogibni moment za levo polovico nosilca zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$ je

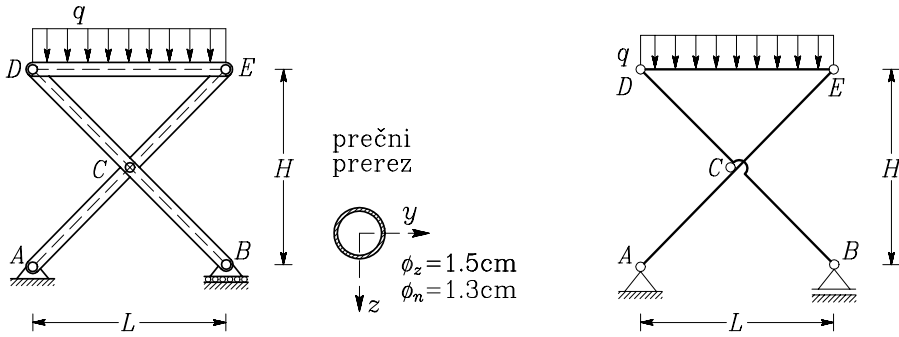
$$\delta \bar{M}_y = \frac{1}{2} x.$$

Funkcija $M_y(x)$ je kubična parabola. Ploščine lika pod kubično parabolo in lege težišča ne poznamo, zato bomo pomik w_C določili z integriranjem produkta $M_y \delta \bar{M}_y$. Ker sta funkciji M_y in $\delta \bar{M}_y$ simetrični, integriramo le do polovice nosilca, rezultat pa množimo z dva

$$\begin{aligned} w_C &= 2 \frac{1}{E I_y} \int_0^{L/2} \left(\frac{q_0 L x}{4} - \frac{q_0 x^2}{2} + \frac{q_0 x^3}{3 L} \right) \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{E I_y} \left(\frac{q_0 L x^3}{4 \cdot 3} - \frac{q_0 x^4}{2 \cdot 4} + \frac{q_0 x^5}{3 L \cdot 5} \right) \Big|_0^{L/2} = \frac{3 q_0 L^4}{640 E I_y}. \end{aligned}$$

Primer 5.9 Na stojalu za perilo sušite perilo s težo $G = 100 \text{ N}$ (slika 5.41). Teža je enakomerno porazdeljena po dolžini vodoravnega nosilca. Prečni prerez palic ima obliko krožnega kolobarja z zunanjim premerom $\phi_z = 1.5 \text{ cm}$ in notranjim premerom $\phi_n = 1.3 \text{ cm}$. Elastični modul je $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$. Vez v točki C je taka, da dovoljuje medsebojna zasuka nosilcev AE in BD , preprečuje pa njihove medsebojne pomike. Izračunajmo navpični pomik v točki E ! Širina in višina stojala sta enaki $L = H = 1 \text{ m}$.





Slika 5.41: Stojalo za perilo

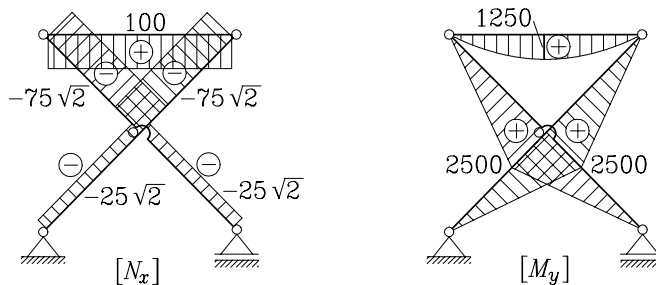
Enakomerna obtežba q na zgornji nosilec je

$$q = \frac{G}{L} = \frac{100}{100} = 1 \text{ N/cm.}$$

Ploščino in vztrajnostni moment prečnega prereza izračunamo po enačbah

$$A_x = \frac{\phi_z^2 - \phi_n^2}{4} \pi = 0.4398 \text{ cm}^2, \quad I_y = \frac{\phi_z^4 - \phi_n^4}{64} \pi = 0.1083 \text{ cm}^4.$$

Diagrama notranjih sil zaradi zunanje obtežbe prikazujemo na sliki 5.42.



Slika 5.42: Osnova sila in upogibni moment zaradi zunanje obtežbe

Za določitev navpičnega pomika v točki E v to točko postavimo navpično silo $\delta F_z = 1$. Diagrama notranjih sil zaradi te sile prikazujemo na sliki 5.43.

