

Robni pogoji so:

$$v(0) = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_0 = 0, \quad v(L) = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_L = 0$$

$$F_E = F_{\text{kr}(1)} = \frac{\pi^2 E I_z}{(0.5 L)^2}, \quad v = A \left(\cos \left(\frac{2 \pi x}{L} \right) - 1 \right).$$

B) V enem krajišču nosilca je preprečen prečni pomik ter predpisana vrednost za upogibni moment ($M_y = 0$), v drugem pa sta preprečena zasuk in prečni pomik.

Robni pogoji so:

$$v(0) = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_0 = 0, \quad v(L) = 0, \quad \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_L = 0$$

$$F_E = F_{\text{kr}(1)} = \frac{\pi^2 E I_z}{(0.7 L)^2}, \quad v = A [\sin k x - k L \cos k x + k (L - x)], \quad k L = 4.493.$$

C) V enem krajišču nosilca sta preprečena prečni pomik ter zasuk, v drugem krajišču pa sta upogibni moment M_y in prečna sila N_y enaka nič.

Robni pogoji so:

$$v(0) = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_L = 0, \quad \left. \frac{d^3 v}{dx^3} + k^2 \frac{dv}{dx} \right|_L = 0$$

$$F_E = F_{\text{kr}(1)} = \frac{\pi^2 E I_z}{(2 L)^2}, \quad v = A \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2 L} \right) - 1 \right).$$

Najmanjšo kritično silo za vse štiri prikazane primere, ki jih imenujemo **Eulerjevi uklonski primeri**, lahko zapišemo z eno enačbo

$$F_E = F_{\text{kr}(1)} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_u^2}, \quad (I_z = I_{\min}). \quad (6.90)$$

Z L_u je označena **uklonska dolžina** nosilca, ki predstavlja dolžino med dvema sosednjima prevojnima točkama

Iz enačbe za kritično silo F_E sledi, da je ta sila odvisna od geometrije nosilca in od oblike podpiranja I_{\min} , L_u in od vrste materiala E .

Pri obravnavanju ravnotežja nosilca na deformirani legi definiramo še **vitkost** nosilca λ in **varnost** nosilca V_E glede na nastop najmanjše kritične sile F_E . Vitkost λ je definirana z enačbo

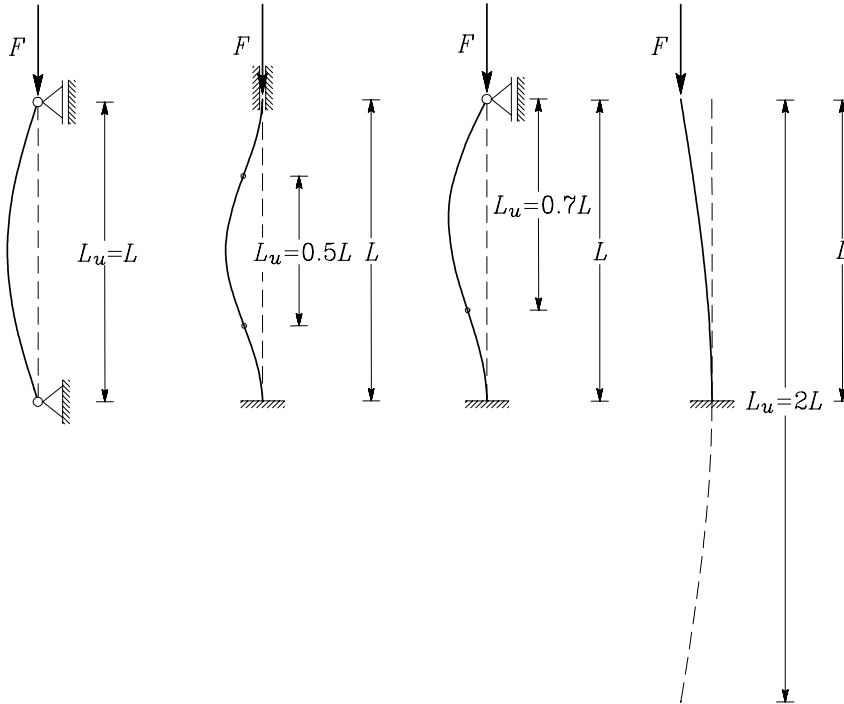
$$\lambda = \frac{L_u}{i_{\min}}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_x}}, \quad (6.91)$$



varnost V_E pa z enačbo

$$V_E = \frac{F_E}{F_{dej}} \quad (6.92)$$

Z A_x je označena ploščina prečnega prereza nosilca, količina i_{\min} je najmanjši vztrajnostni polmer, F_{dej} pa je velikost tlačne sile, ki na steber deluje.



Slika 6.20: Uklonske dolžine Eulerjevih uklonskih primerov

6.1.2 Togostna matrika linijskega elementa z ravno osjo po teoriji II. reda

Določimo togostno matriko $[k]$ linijskega elementa s konstantnim prečnim prerezom in z ravno osjo za primer ravninske konstrukcije v ravnini x, y .

Togostna matrika $[k]$ linijskega elementa je definirana z enačbo

$$\begin{bmatrix} [n_i] \\ [n_j] \end{bmatrix} = [k] \begin{bmatrix} [u_i] \\ [u_j] \end{bmatrix} \quad \text{ozioroma} \quad [n] = [k] [u]. \quad (6.93)$$

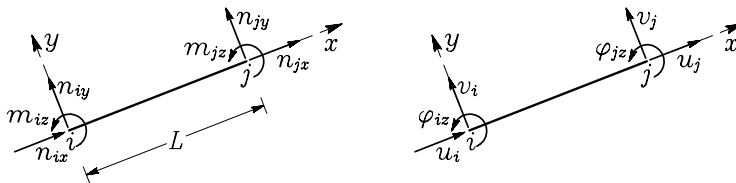
Z $[n_i]$ in $[n_j]$ označimo vozliščne sile

$$[n_i] = \begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ m_{iz} \end{bmatrix}, \quad [n_j] = \begin{bmatrix} n_{jx} \\ n_{jy} \\ m_{jz} \end{bmatrix}, \quad (6.94)$$



z $[u_i]$ in $[u_j]$ pa vozliščne pomike linijskega elementa (slika 6.21)

$$[u_i] = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ \varphi_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_{iz} \end{bmatrix}, \quad [u_j] = \begin{bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix}. \quad (6.95)$$



Slika 6.21: Vozlišče sile in vozliščni pomiki linijskega elementa v ravnini

Koeficiente togostne matrike $[k]$ določimo z integracijo ravnotežnih enačb (1.85)

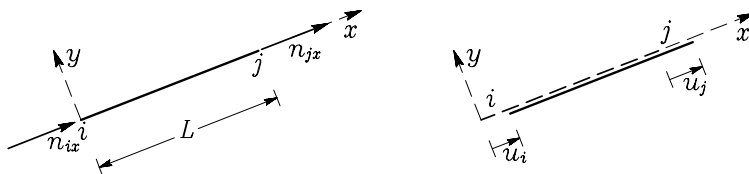
$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{E A_x}, \quad \frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{E I_z} \left(\mathcal{P}_Y - \frac{d\mathcal{M}_z}{dx} \right), \quad (6.96)$$

pri čemer upoštevamo ustrezne robne pogoje. S k^2 je označen izraz

$$k^2 = \frac{F}{E I_z}.$$

Povedati, da zanemariš ε_{xx} na pomik v in zasuk φ_z ! Drugače pa ne!

Določiti želimo zvezo med silama n_{ix} in n_{jx} ter pomikoma u_i in u_j na sliki 6.22.



Slika 6.22: Element obtežimo z vozliščnima silama n_{ix} in n_{iy} , vozlišči i in j pa premaknemo za u_i in u_j

Iskano zvezo dobimo, če rešimo prvo izmed diferencialno enačbo (6.96)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (6.97)$$

ob upoštevanju robnih pogojev

$$x = 0 : \quad u(0) = u_i, \quad x = L : \quad u(L) = u_j. \quad (6.98)$$



Enačbo (6.97) dvakrat integriramo

$$\frac{du}{dx} = A_1, \quad u = A_1 x + A_2 \quad (6.99)$$

in upoštevamo robna pogoja (6.98). Tako dobimo izraza za integracijski konstanti A_1 in A_2

$$A_1 = \frac{u_j - u_i}{L}, \quad A_2 = u_i \quad (6.100)$$

ter izraz za pomik u

$$u = \frac{u_j - u_i}{L} x + u_i. \quad (6.101)$$

Upoštevamo enačbo (glej (1.81))

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{E A_x} \quad (6.102)$$

ter prvi izmed enačb (6.99) in (6.100) in dobimo

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{N_x}{E A_x} \rightarrow N_x = \frac{E A_x}{L} (u_j - u_i). \quad (6.103)$$

Ker je osna sila $N_x = -n_{ix} = n_{iy}$ (slika 6.22), zapišemo iskani zvezi takole:

$$\boxed{n_{ix} = \frac{E A_x}{L} (u_i - u_j), \quad n_{jx} = -\frac{E A_x}{L} (u_i - u_j).} \quad (6.104)$$

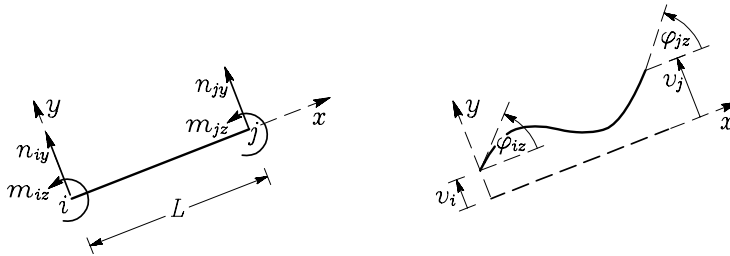
Mogoče takole:???

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{N}{E A_x} \rightarrow du = \frac{N}{E A_x} dx \rightarrow \\ \rightarrow u_j - u_i &= \int_0^L \frac{N}{E A_x} dx = \int_0^L \frac{H + V \varphi_z}{E A_x} dx \approx \int_0^L \frac{H}{E A_x} dx = \frac{H L}{E A_x}. \end{aligned}$$

Pri $x = 0$ je H enak $-n_{ix}$, pri $x = L$ pa je H enak n_{jx} . Sledi (6.104).

Določiti moramo še zvezo med silama n_{iy} , n_{jy} in momentoma m_{iz} , m_{jz} ter pomikoma v_i , v_j in zasukoma φ_{iz} , φ_{jz} za linijski element na sliki 6.23.





Slika 6.23: Element obtežimo z vozliščnima silama n_{iy} in n_{jy} ter vozliščnima momentoma m_{iz} in m_{jz} , vozlišči i in j pa premaknemo za v_i , v_j , φ_{iz} in φ_{jz}

Iskano zvezo dobimo, če integriramo drugo izmed enačbo (6.96)

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad k^2 = \frac{F}{E I_z}. \quad (6.105)$$

ob upoštevanju robnih pogojev

$$x = 0: \quad v(0) = v_i, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \varphi_{iz}, \quad x = L: \quad v(L) = v_j, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \varphi_{jz}. \quad (6.106)$$

Partikularni del rešitve $v_p = 0$, zato je

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4. \quad (6.107)$$

Integracijske konstante C_1 , C_2 , C_3 in C_4 določimo iz robnih pogojev tako, da izraz (6.107) vstavimo v (6.106) in iz štirih enačb izrazimo štiri konstante:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{k^2 L \cos(kL/2) - 2k \sin(kL/2)} \left(k \cos \frac{kL}{2} v_i - k \cos \frac{kL}{2} v_j + \right. \\ &\quad \left. + \left(kL \cos \frac{kL}{2} - \sin \frac{kL}{2} \right) \varphi_{iz} + \sin \frac{kL}{2} \varphi_{jz} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{2k^2 L \sin(kL/2) \cos(kL/2) - 4k \sin^2(kL/2)} \left(k(\cos kL - 1) v_i + k(1 - \cos kL) v_j + \right. \\ &\quad \left. + (kL \cos kL - \sin kL) \varphi_{iz} + (\sin kL - kL) \varphi_{jz} \right), \\ C_3 &= \frac{1}{kL \cos(kL/2) - 2 \sin(kL/2)} \left(-k \cos \frac{kL}{2} v_i + k \cos \frac{kL}{2} v_j - \sin \frac{kL}{2} \varphi_{iz} - \sin \frac{kL}{2} \varphi_{jz} \right), \\ C_4 &= \frac{1}{2k^2 L \sin(kL/2) \cos(kL/2) - 4k \sin^2(kL/2)} \left(k(\cos kL + kL \sin kL - 1) v_i + \right. \\ &\quad \left. + k(\cos kL - 1) v_j + (\sin kL - kL \cos kL) \varphi_{iz} + (kL - \sin kL) \varphi_{jz} \right). \end{aligned} \quad (6.108)$$



Izraze (6.108) smo določili s programom Mathematica z naslednjimi ukazi:

```
v[x_] = C1 Sin[k x] + C2 Cos[k x] + C3 x + C4 ;
res = Solve[{v[0]==vA, v'[0] == fiA, v[L] == vB, v'[L] == fiB},{C1,C2,C3,C4}];
Print[" C1 = ", Simplify[Expand[C1 /. res[[1]]]]];
Print[" C2 = ", Simplify[Expand[C2 /. res[[1]]]]];
Print[" C3 = ", Simplify[Expand[C3 /. res[[1]]]]];
Print[" C4 = ", Simplify[Expand[C4 /. res[[1]]]]];
```

Izraza za C_1 in C_3 v (6.108) množimo in delimo z $\sin(kL/2)$, upoštevamo zvezi

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha, \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) \quad (6.109)$$

ter vpeljemo oznako Δ za izraz

$$\Delta = 2 - 2 \cos kL - kL \sin kL. \quad (6.110)$$

Nato izraze za konstante C_1 do C_4 uredimo ter zapišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{k\Delta} [-k \sin kL v_i + k \sin kL v_j - (kL \sin kL + \cos kL - 1) \varphi_{iz} + (\cos kL - 1) \varphi_{jz}], \\ C_2 &= \frac{1}{k\Delta} [k(1 - \cos kL) v_i - k(1 - \cos kL) v_j + (\sin kL - kL \cos kL) \varphi_{iz} + \\ &\quad + (kL - \sin kL) \varphi_{jz}], \\ C_3 &= \frac{1}{\Delta} [k \sin kL v_i - k \sin kL v_j + (1 - \cos kL) \varphi_{iz} + (1 - \cos kL) \varphi_{jz}], \\ C_4 &= \frac{1}{k\Delta} [k(1 - \cos kL - kL \sin kL) v_i + k(1 - \cos kL) v_j - (\sin kL - kL \cos kL) \varphi_{iz} - \\ &\quad - (kL - \sin kL) \varphi_{jz}]. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Upogibni moment M_z ter silo V v smeri globalne? osi Y izrazimo z enačbama

$$M_z = E I_z \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad V = -E I_z \frac{d^3 v}{dx^3} - F \frac{dv}{dx}. \quad (6.112)$$

Upoštevamo, da za element na sliki 6.23 velja, da je $M_z(0) = -m_{iz}$, $M_z(L) = m_{jz}$, $V(0) = -n_{iy}$ in $V(L) = n_{jy}$ in dobimo

$$m_{iz} = -E I_z \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=0}, \quad m_{jz} = E I_z \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=L} \quad (6.113)$$



oziroma

$$\begin{aligned} n_{iy} = -V(0) &= E I_z \left. \frac{d^3 v}{dx^3} \right|_{x=0} + E I_z k^2 \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0}, \\ n_{jy} = V(L) &= -E I_z \left. \frac{d^3 v}{dx^3} \right|_{x=L} - E I_z k^2 \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L}. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Izračunamo odvode

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx + C_2, \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= -C_1 k^2 \sin kx - C_2 k^2 \cos kx, \\ \frac{d^3 v}{dx^3} &= -C_1 k^3 \cos kx + C_2 k^3 \sin kx \end{aligned}$$

in enačbi (6.113) in (6.114) izrazimo s konstantami C_1 do C_4 :

$$m_{iz} = E I_z k^2 C_2, \quad m_{jz} = -E I_z (C_1 k^2 \sin kL + C_2 k^2 \cos kL). \quad (6.115)$$

oziroma

$$n_{iy} = E I_z k^2 C_3, \quad n_{jy} = -E I_z k^2 C_3. \quad (6.116)$$

Konstante C_1 , C_2 in C_3 iz (6.111) vstavimo v (6.115) in (6.116), vpeljemo oznako

$$\omega = kL \quad (6.117)$$

ter po ureditvi zapišemo zvezo med vozliščnimi silami in momenti ter vozliščnimi pomiki in zasuki:

$$\begin{aligned} m_{iz} &= \frac{E I_z \omega}{L \Delta} \left(\frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) v_i - \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) v_j + (\sin \omega - \omega \cos \omega) \varphi_{iz} + (\omega - \sin \omega) \varphi_{jz} \right), \\ m_{jz} &= \frac{E I_z \omega}{L \Delta} \left(\frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) v_i - \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) v_j + (\omega - \sin \omega) \varphi_{iz} + (\sin \omega - \omega \cos \omega) \varphi_{jz} \right), \\ n_{iy} &= \frac{E I_z \omega}{L \Delta} \left(\frac{\omega^2}{L^2} \sin \omega v_i - \frac{\omega^2}{L^2} \sin \omega v_j + \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) \varphi_{iz} + \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) \varphi_{jz} \right), \\ n_{jy} &= \frac{E I_z \omega}{L \Delta} \left(-\frac{\omega^2}{L^2} \sin \omega v_i + \frac{\omega^2}{L^2} \sin \omega v_j - \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) \varphi_{iz} - \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) \varphi_{jz} \right). \end{aligned} \quad (6.118)$$

Tudi Δ izrazimo z ω po enačbi

$$\Delta = 2 - 2 \cos \omega - \omega \sin \omega.$$



Izraz za **togostno matriko** $[k]$ **elementa** na sliki 6.21 dobimo, če enačbe (6.104) in (6.118) zapišemo v matrični obliki:

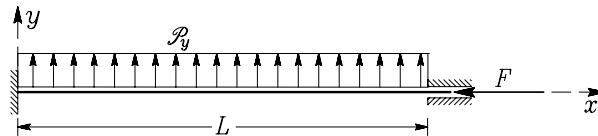
$$\begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ m_{iz} \\ n_{jx} \\ n_{jy} \\ m_{jz} \end{bmatrix} = \frac{E I_z \omega}{L} \Delta \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_x \Delta}{I_z \omega} & 0 & 0 & -\frac{A_x \Delta}{I_z \omega} & 0 & 0 \\ \frac{\omega^2}{L^2} \sin \omega & \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) & 0 & -\frac{\omega^2}{L^2} \sin \omega & \frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) \\ \sin \omega - \omega \cos \omega & 0 & -\frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) & \omega - \sin \omega \\ \frac{A_x \Delta}{I_z \omega} & 0 & 0 \\ \text{simetrija} & \frac{\omega^2}{L^2} \sin \omega & -\frac{\omega}{L} (1 - \cos \omega) \\ & \sin \omega - \omega \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_{iz} \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

Če je osna sila N_x natezna in ne tlačna, moramo v togostni matriki (6.119) funkciji \sin in \cos zamenjati s hiperboličnima funkcijama \sinh in \cosh .

Togostno matriko elementa, ki ima v vozlišču A ali B členek izpeljemo na enak način kot za obojestransko vpeti element.



Pri metodi pomikov moramo za obtežbo po elementu nadomestiti z ustreznimi silami v vozliščih. V nadaljevanju je prikazan račun vpliva prečne obtežbe (konstantne linijske obtežbe) q na vpetostna momenta M_A in M_B za obojestransko vpet nosilec (slika 6.24), ki je osno obtežen s tlačno silo F . (bi moralo biti narejeno v primeru 6.1????). Narediti še za poševno točkovno silo????



Slika 6.24: Nosilec je obtežen s konstantno linijsko obtežbo q

Ravnotežna enačba je:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\mathcal{P}_y}{E I_z}, \quad k^2 = \frac{F}{E I_z}. \quad (6.120)$$

Partikularni del rešitve $v_p = \mathcal{P}_y x^2 / (2 F)$, zato je

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 + \frac{\mathcal{P}_y x^2}{2 F}. \quad (6.121)$$

C_1, C_2, C_3 in C_4 so integracijske konstante, ki jih določimo iz robnih pogojev:

$$v(0) = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_0 = 0, \quad v(L) = 0, \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_L = 0. \quad (6.122)$$

Izraz (6.121) vstavimo v (6.122) in izračunamo konstante C_1, C_2, C_3 in C_4 :

$$C_1 = \frac{\mathcal{P}_y L}{2 k F}, \quad C_2 = \frac{\mathcal{P}_y L \operatorname{ctg}(kL/2)}{2 k F}, \quad C_3 = -\frac{\mathcal{P}_y L}{2 k F}, \quad C_4 = -\frac{\mathcal{P}_y L \operatorname{ctg}(kL/2)}{2 k F}. \quad (6.123)$$

Konstante (6.123) vstavimo v izraz (6.121) ter izračunamo vozliščna momenta m_{iz} in m_{jz} :

$$m_{iz} = -E I_z \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_0, \quad m_{jz} = E I_z \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_L. \quad (6.124)$$

Tako dobimo:

$$m_{iz} = -\frac{E I_z \mathcal{P}_y}{F} + \frac{E I_z kL \mathcal{P}_y \operatorname{ctg}(kL/2)}{2 F}, \quad m_{jz} = \frac{E I_z \mathcal{P}_y}{F} - \frac{E I_z kL \mathcal{P}_y \operatorname{ctg}(kL/2)}{2 F} \quad (6.125)$$

ali tudi takole:

$$m_{iz} = \frac{12}{k^2 L^2} \left(1 - \frac{kL}{2} \operatorname{ctg} \frac{kL}{2} \right) \frac{\mathcal{P}_y L^2}{12}, \quad m_{jz} = -m_{iz}.$$



7 Ravnotežje konzervativnega sistema

V tem poglavju izpeljemo pogoj za mirovanje konzervativnega sistema (telesa in obtežbe). Pogoj izpeljemo iz prvega zakona termodinamike. Pri izpeljavi definiramo potencialno energijo sistema. S pomočjo potencialne energije lahko ugotovimo vrsto ravnotežnega stanja, kar obravnavamo v poglavju 8. Stabilitet konzervativnih sistemov.

7.1 Prvi zakon termodinamike

Obravnavajmo elastično deformabilno telo, ki ga obtežujemo s površinsko \vec{p}_S in prostorninsko obtežbo \vec{v} . Za telo in obtežbo zapišimo prvi zakon termodinamike [†]

$$\Delta W_k + \Delta W_n = A + Q, \quad (7.1)$$

ki pravi, da je sprememba kinetične energije W_k in sprememba notranje energije W_n enaka dovedenemu delu A ter dovedeni toploti Q . Če se omejimo na primere, ko je deformiranje adiabatno, lahko telo sprejema ali oddaja le delo, ne pa tudi toplote. V tem primeru zapišemo enačbo (7.1) takole

$$\Delta W_k + \Delta W_n = A. \quad (7.2)$$

V primeru, da obtežbi \vec{p}_S in \vec{v} nanašamo na telo zelo počasi in so med deformiranjem telesa ves čas izpolnjeni ravnotežni pogoji, lahko kinetično energijo W_k zanemarimo. V tem primeru dobimo iz (7.2) **pogoj za mirovanje** sistema

$$\Delta W_n = A. \quad (7.3)$$

Enačbo (7.3) zapišemo tudi takole

$$\Delta W_n = W_{n2} - W_{n1} = A_{12}, \quad (7.4)$$

kjer je W_{n1} označena notranja energija telesa v času t_1 (stanje 1), W_{n2} pa notranja energija telesa v času t_2 (stanje 2), A_{12} pa delo, ki ga telo prejme pri prehodu iz stanja 1 v stanje 2. Pomike telesa v stanju 1 označimo z \vec{u}_1 , v stanju 2 pa z \vec{u}_2 . Delo A_{12} v tem primeru izračunamo z enačbo

$$A_{12} = \int_{\mathcal{S}_p} \left(\int_{\vec{u}_1}^{\vec{u}_2} \vec{p}_S \cdot d\vec{u} \right) dS + \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\vec{u}_1}^{\vec{u}_2} \vec{v} \cdot \delta\vec{u} \right) dV \quad (7.5)$$

[†] J. Strnad, Fizika, 1. del, Mehanika, toplota, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1995.



Če sta obtežbi \vec{p}_S in \vec{v} **konservativni**,[†] lahko prirastek dela površinske obtežbe $\vec{p}_S \cdot d\vec{u}$ ter prirastek dela prostorninske obtežbe $\vec{v} \cdot d\vec{u}$ zapišemo kot popolna diferenciala nekih funkcij argumenta \vec{u} , ki ju označimo z $G(\vec{u})$ in $g(\vec{u})$

$$\vec{p}_S \cdot d\vec{u} = -dG(\vec{u}), \quad \vec{v} \cdot d\vec{u} = -dg(\vec{u}). \quad (7.6)$$

Iz enačb (7.6) sledi zveza med funkcijo G in obtežbo \vec{p}_S , ter funkcijo g in obtežbo \vec{v}

$$\vec{p}_S = -\frac{\partial G}{\partial \vec{u}}, \quad \vec{v} = -\frac{\partial g}{\partial \vec{u}}. \quad (7.7)$$

Izraza (7.6) vstavimo v (7.5) in dobimo

$$A_{12} = - \int_{\mathcal{S}_p} \left(\int_{\vec{u}_1}^{\vec{u}_2} dG \right) dS - \int_{\mathcal{V}} \left(\int_{\vec{u}_1}^{\vec{u}_2} dg \right) dV = - \int_{\mathcal{S}_p} (G(\vec{u}_2) - G(\vec{u}_1)) dS - \int_{\mathcal{V}} (g(\vec{u}_2) - g(\vec{u}_1)) dV. \quad (7.8)$$

Vidimo, da je delo A_{12} odvisno le od stanj 1 in 2. Če desno stran enačbe (7.8) označimo z $-\Delta\Pi_z$, je

$$A_{12} = -\Delta\Pi_z \quad (7.9)$$

oziroma

$$\Delta\Pi_z = \int_{\mathcal{S}_p} (G(\vec{u}_2) - G(\vec{u}_1)) dS + \int_{\mathcal{V}} (g(\vec{u}_2) - g(\vec{u}_1)) dV. \quad (7.10)$$

Z $\Delta\Pi_z$ označimo spremembo potencialne energije Π_z zunanje obtežbe. Če sta obtežbi \vec{p}_S in \vec{v} neodvisni od pomika \vec{u} , iz (7.6) sledi

$$\vec{p}_S \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = -(G(\vec{u}_2) - G(\vec{u}_1)), \quad \vec{v} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = -(g(\vec{u}_2) - g(\vec{u}_1)). \quad (7.11)$$

V tem primeru zapišemo $\Delta\Pi_z$ takole ((7.11) vstavimo v (7.10))

$$\Delta\Pi_z = - \int_{\mathcal{S}_p} \vec{p}_S \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) dS - \int_{\mathcal{V}} \vec{v} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) dV. \quad (7.12)$$

Če (7.9) vstavimo v (7.4), zapišemo **pogoj za mirovanje** takole

$$\Delta W_n + \Delta\Pi_z = 0. \quad (7.13)$$

Pri deformiranju elastičnega telesa nastanejo v telesu napetosti oziroma notranje sile. Če velikost obtežbe, ki na deformirano telo deluje, počasi manjšamo, elastično telo vrne delo, ki ga je opravila zunanja

[†] Sistem je konservativen, če je delo pri deformiranju sistema vzdolž sklenjene poti enako nič. To pomeni, da je delo sil (notranjih in zunanjih) pri prehodu sistema iz stanja 1 v stanje 2 neodvisno od poti, po kateri sistem preide iz stanja 1 v stanje 2.



obtežba. Rečemo tudi, da je delo opravljeno v deformiranem telesu v obliki notranje energije. Sposobnost notranjih sil, da opravijo delo zaradi deformiranega stanja telesa, imenujemo **deformacijska energija**, ki jo označimo z U . Notranja energija W_n elastičnega telesa je deformacijska energija telesa

$$W_n = U. \quad (7.14)$$

Pogoj (7.13) za mirovanje telesa zapišemo tudi takole:

$$\Delta U + \Delta \Pi_z = \Delta(U + \Pi_z) = \Delta \Pi = \Pi_2 - \Pi_1 = 0. \quad (7.15)$$

Količina

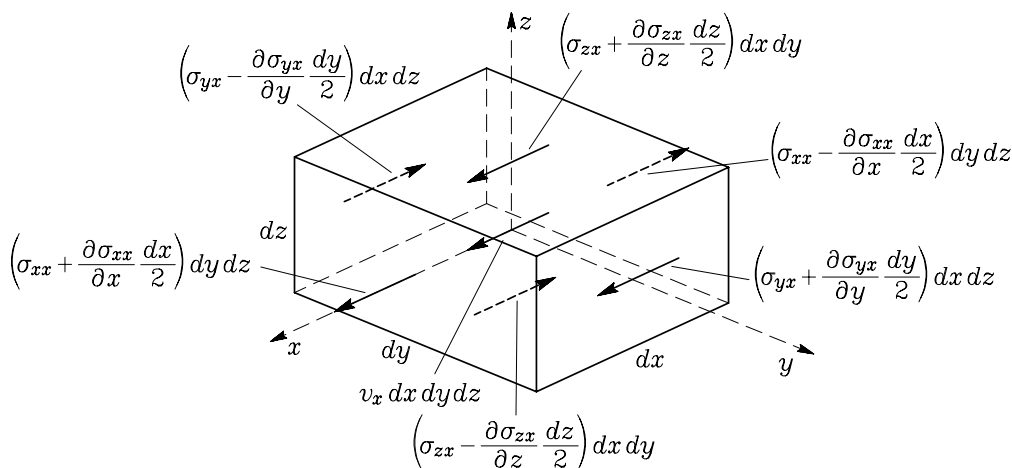
$$\Pi = U + \Pi_z \quad (7.16)$$

je **potencialna energija sistema**.

Pri deformiranju telesa iz stanja 1 v stanje 2 napetosti in deformacije naraščajo. Izraz ΔU za spremembo deformacijske energije dobimo, če izračunamo delo A_n notranjih sil na deformacijah, ki nastanejo pri prehodu telesa iz stanja 1 v stanje 2

$$\Delta U = A_n \rightarrow dU = dA_n. \quad (7.17)$$

Izračunajmo prirastek dA_n dela notranjih sil na diferencialnih pomikih, ki nastanejo pri deformiranju telesa. Zamislimo si, da iz obteženega telesa v okolici točke $T(x, y, z)$ izrežemo prizmo z robovi dx , dy in dz . Na stranske ploskve prizme delujejo notranje sile. Napetosti σ_{ij} v točki $T(x, y, z)$ razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli točke T in upoštevamo le linearne člene. Zaradi preglednosti so na sliki 7.1 narisane le notranje sile v smeri osi x .



Slika 7.1: Sile v smeri osi x , ki delujejo na prizmo dimenzij dx, dy, dz



Pomik v smeri x označimo z $u_x = u_x(x, y, z)$. Prirastek dela sil, ki delujejo v smeri osi x , je

$$\begin{aligned}
 dA_{xn} = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz d\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz d\left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) + \\
 & + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz d\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) - \left(\sigma_{yx} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz d\left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) + \\
 & + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dy dx d\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) - \left(\sigma_{zx} - \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dy dx d\left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) + \\
 & + v_x dx dy dz du.
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Ko upoštevamo, da je

$$\begin{aligned}
 d\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) &= du_x + d\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}, & d\left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) &= du_x - d\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}, \\
 d\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) &= du_x + d\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}, & d\left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) &= du_x - d\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}, \\
 d\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) &= du_x + d\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}, & d\left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) &= du_x - d\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \frac{dz}{2},
 \end{aligned}$$

dobimo

$$dA_{xn} = \left(\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + v_x \right) du_x + \sigma_{xx} d\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \sigma_{yx} d\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + \sigma_{zx} d\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \right) dV. \tag{7.19}$$

Za smeri y in z dobimo podobna izraza

$$dA_{yn} = \left(\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + v_y \right) du_y + \sigma_{xy} d\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \sigma_{yy} d\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \sigma_{zy} d\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \right) dV \tag{7.20}$$

in

$$dA_{zn} = \left(\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + v_z \right) du_z + \sigma_{xz} d\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \sigma_{yz} d\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + \sigma_{zz} d\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \right) dV. \tag{7.21}$$

Z u_y in u_z sta označena pomika v smeri osi y in z . Enačbe (7.19)–(7.21) seštejemo. Če upoštevamo ravnotežne pogoje za delec znotraj telesa, dobimo

$$\begin{aligned}
 dA_n = dA_{xn} + dA_{yn} + dA_{zn} = & \left(\sigma_{xx} d\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \sigma_{yy} d\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + \sigma_{zz} d\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \right. \\
 & + \sigma_{xy} \left(d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) + \sigma_{yz} \left(d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + d\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) \right) + \sigma_{zx} \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \right) \Big) dV = \\
 = & (\sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} 2 d\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} 2 d\varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} 2 d\varepsilon_{zx}) dV.
 \end{aligned} \tag{7.22}$$



Delo dA_n zapišimo še z vektorji napetosti in prirastki vektorjev deformacij

$$dA_n = (\vec{\sigma}_x \cdot d\vec{\varepsilon}_x + \vec{\sigma}_y \cdot d\vec{\varepsilon}_y + \vec{\sigma}_z \cdot d\vec{\varepsilon}_z) dV. \quad (7.23)$$

Iz (7.22) lahko izrazimo delo $d\mathcal{A}_n$, ki predstavlja prirastek dela dA_n na enoto prostornine. Če upoštevamo, da sta tenzorja napetosti in deformacij simetrična, dobimo

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_n = \frac{dA_n}{dV} &= \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} d\varepsilon_{xy} + \sigma_{yx} d\varepsilon_{yx} + \sigma_{yz} d\varepsilon_{yz} + \\ &+ \sigma_{zy} d\varepsilon_{zy} + \sigma_{zx} d\varepsilon_{zx} + \sigma_{xz} d\varepsilon_{xz} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Če so notranje sile konservativne, je izraz $\sum_i \sum_j \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$, $(i, j = x, y, z)$ popolni diferencial **specifične deformacijske energije** $\mathcal{U}(\varepsilon_{ij})$ z argumenti deformacij ε_{ij}

$$d\mathcal{A}_n = d\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}). \quad (7.25)$$

Enačbo (7.25) integriramo od deformacij $\varepsilon_{ij,1}$ stanja 1 do deformacij $\varepsilon_{ij,2}$ stanja 2

$$\int_{\varepsilon_{ij,1}}^{\varepsilon_{ij,2}} d\mathcal{A}_n = \int_{\varepsilon_{ij,1}}^{\varepsilon_{ij,2}} d\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}) \quad \rightarrow \quad \mathcal{A}_n = \mathcal{U}(\varepsilon_{ij,2}) - \mathcal{U}(\varepsilon_{ij,1}). \quad (7.26)$$

Če (7.26) integriramo po celem telesu, dobimo izraz ΔU za spremembo deformacijske energije telesa pri prehodu iz stanja 1 v stanje 2

$$\Delta U = \int_{\mathcal{V}} (\mathcal{U}(\varepsilon_{ij,2}) - \mathcal{U}(\varepsilon_{ij,1})) dV. \quad (7.27)$$

Če v (7.25) upoštevamo (7.24) ter pravilo za pisanje popolnega diferenciala funkcije $\mathcal{U}(\varepsilon_{ij})$, dobimo zvezo med napetostmi σ_{ij} in specifično deformacijsko energijo \mathcal{U}

$$\sum_i \sum_j \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (i, j = x, y, z). \quad (7.28)$$

Če (7.27) in (7.10) vstavimo v (7.15)

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Delta U + \Delta \Pi_z = \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\mathcal{U}(\varepsilon_{ij,2}) - \mathcal{U}(\varepsilon_{ij,1})) dV + \int_{\mathcal{S}_p} (G(\vec{u}_2) - G(\vec{u}_1)) dS + \int_{\mathcal{V}} (g(\vec{u}_2) - g(\vec{u}_1)) dV = 0, \end{aligned} \quad (7.29)$$

zapišemo potencialno energijo Π sistema takole

$$\Pi = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{U}(\varepsilon_{ij}) dV + \int_{\mathcal{S}_p} G(\vec{u}) dS + \int_{\mathcal{V}} g(\vec{u}) dV. \quad (7.30)$$



Pogoj za mirovanje $\Delta\Pi$ sistema za primer, da sta obtežbi \vec{p}_S in \vec{v} neodvisni od pomikov, zapišemo z enačbo (glej (7.12) in (7.13))

$$\Delta\Pi = \int_{\mathcal{V}} (\mathcal{U}(\varepsilon_{ij,2}) - \mathcal{U}(\varepsilon_{ij,1})) dV - \int_{\mathcal{S}_p} \vec{p}_S \cdot \vec{u} dS - \int_{\mathcal{V}} \vec{v} \cdot \vec{u} dV = 0. \quad (7.31)$$

V tem primeru zapišemo potencialno energijo Π sistema takole:

$$\Pi = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{U}(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{\mathcal{S}_p} \vec{p}_S \cdot \vec{u} dS - \int_{\mathcal{V}} \vec{v} \cdot \vec{u} dV. \quad (7.32)$$

Če upoštevamo zvezo med napetostmi in deformacijami za linearno elastični material

$$\vec{\sigma}_i = 2\mu \vec{\varepsilon}_i + \lambda I_{1\varepsilon} \vec{e}_i, \quad (i = x, y, z),$$

zapišemo prirastek specifičnega deformacijskega dela takole ($\sum_i \vec{e}_i \cdot d\vec{\varepsilon}_i = dI_{1\varepsilon}$, ($i = x, y, z$)):

$$d\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}) = 2\mu \sum_i \vec{\varepsilon}_i \cdot d\vec{\varepsilon}_i + \lambda I_{1\varepsilon} dI_{1\varepsilon}, \quad (i = x, y, z). \quad (7.33)$$

Z $dI_{1\varepsilon}$ je označena sprememba prve invariante tenzorja deformacij $dI_{1\varepsilon} = d\varepsilon_{xx} + d\varepsilon_{yy} + d\varepsilon_{zz}$. Enačbo (7.33) integriramo in dobimo celotno specifično deformacijsko energijo delca

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij}) = \mu \sum_i \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_i + \frac{\lambda}{2} I_{1\varepsilon}^2 = \mu \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} I_{1\varepsilon}^2, \quad (i, j = x, y, z). \quad (7.34)$$

Enačbo (7.34) lahko zapišemo tudi takole

$$\mathcal{U} = \sum_i \frac{\vec{\varepsilon}_i}{2} (2\mu \vec{\varepsilon}_i + \lambda I_{1\varepsilon} \vec{e}_i) = \frac{1}{2} \sum_i \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\varepsilon}_i, \quad (i, j = x, y, z). \quad (7.35)$$



8 Stabilnost konzervativnih sistemov

8.1 Stabilno in nestabilno ravnotežno stanje

Ločimo **stabilno** in **nestabilno** ravnotežno lego sistema oziroma konstrukcije. V primeru konservativnega sistema lahko ugotovimo vrsto ravnotežnega stanja z Lagrange-Dirichletovim izrekom:[†]

Ravnotežno stanje konservativnega sistema je stabilno, če ima potencialna energija v tej legi lokalni minimum.

Potencialna energija Π konservativnega sistema je za primer, ko sta obtežbi \vec{p}_S in \vec{v} neodvisni od pomikov, določena z enačbo (7.32)

$$\Pi = U + \Pi_z = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{U}(\vec{u}) dV - \int_{\mathcal{S}_p} \vec{p}_S \cdot \vec{u} dS - \int_{\mathcal{V}} \vec{v} \cdot \vec{u} dV = \Pi(\vec{u}). \quad (8.1)$$

Potencialna energija je odvisna od pomikov \vec{u} . Če v (8.1) vstavljamo razne funkcije za \vec{u} , dobimo za Π različne skalarne vrednosti. Π je torej funkcija funkcij ali **funkcional**. Določanje ekstremnih vrednosti funkcionalov obravnava **variacijski račun**.[‡]

Potencialna energija zapisana z enačbo (8.1) ustreza računskemu modelu telesa z zvezno razporejeno snovjo (kontinuumu). Značilnost kontinuuma je, da ima neskončno število prostostnih stopenj. Pri numeričnem reševanju nalog običajno uporabimo aproksimativne metode, s katerimi računski model telesa z neskončnim številom prostostnih stopenj prevedemo na model s končnim številom prostostnih stopenj. Takemu računskemu modelu rečemo **diskretni model**.

Potencialno energijo Π diskretnega sistema z n prostostnimi stopnjami lahko izrazimo s posplošenimi koordinatami q_i ($i = 1, \dots, n$)

$$\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n). \quad (8.2)$$

Vzemimo, da telo **poljubno** premaknemo iz **ravnotežne lege**, ki je določena s koordinatami q_i tako, da se koordinate q_i spremenijo za δq_i . Telo premaknemo skladno s podporami tako, da so spremembe

[†] C.L. Dym, Stability theory and its applications to structural mechanics, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.

[‡] F. Križanič, Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.



δq_i koordinat q_i **majhne**. Spremembe δq_i imenujemo tudi **variacije** koordinat q_i . Na mestu \mathcal{S}_u , kjer so pomiki predpisani, telesa ne moremo poljubno premakniti. Zato so variacije δq_i koordinat q_i na tem mestu enake nič.

Premaknjeno lego v okolici ravnotežne lege opišemo tako, da potencialno energijo Π razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog ravnotežne lege določene s koordinatami q_i , ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \Pi(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n) = & \Pi(q_1, \dots, q_n) + \sum_{p=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_p} \delta q_p + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_p \partial q_r} \delta q_p \delta q_r + \\ & + \frac{1}{3!} \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_p \partial q_r \partial q_s} \delta q_p \delta q_r \delta q_s + \dots \end{aligned} \quad (8.3)$$

Spremembo potencialne energije pri premaknitvi telesa iz ravnotežne lege označimo z $\Delta \Pi$

$$\Delta \Pi = \Pi(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n) - \Pi(q_1, \dots, q_n). \quad (8.4)$$

Če uporabimo oznake za prvo $\delta \Pi$, drugo $\delta^2 \Pi$, tretjo $\delta^3 \Pi$ in k -to $\delta^k \Pi$ variacijo potencialne energije

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_p} \delta q_p, \\ \delta^2 \Pi &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_p \partial q_r} \delta q_p \delta q_r, \\ \delta^3 \Pi &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_p \partial q_r \partial q_s} \delta q_p \delta q_r \delta q_s, \\ &\vdots \\ \delta^k \Pi &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n \dots \sum_{t=1}^n \frac{\partial^k \Pi}{\partial q_p \partial q_r \dots \partial q_t} \delta q_p \delta q_r \dots \delta q_t, \end{aligned} \quad (8.5)$$

zapišemo enačbo (8.3) v obliki

$$\Delta \Pi = \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots \quad (8.6)$$

V primeru mirovanja oziroma ravnotežja je sprememba potencialne energije $\Delta \Pi$ enaka nič (enačba (7.13))

$$\Delta \Pi = \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots = 0. \quad (8.7)$$

Ker so variacije δq_i majhne, so produkti δq_i variacij koordinat q_i v primerjavi z linearnimi členi δq_i zanemarljivi. Zato lahko drugo in višje variacije potencialne energije v enačbi (8.7) zanemarimo in



zapišemo **pogoj za ravnotežje** takole

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Pi}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (8.8)$$

Enačba (8.8) določa **izrek o stacionarni vrednosti potencialne energije**. Po Lagrange-Dirichletovem izreku (izrek velja za kontinuum in za diskretni model) je ravnotežno stanje konservativnega sistema stabilno, če ima potencialna energija v ravnotežni legi **lokalni minimum**. To pomeni, da lahko ugotovimo vrsto ravnotežja, če telo premaknemo iz ravnotežne lege in izračunamo, kako se je pri takem premiku spremenila potencialna energija Π . Če se je potencialna energija povečala, je ravnotežna lega **stabilna**

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \dots > 0. \quad (8.9)$$

Upoštevali smo, da je v ravnotežni legi $\delta\Pi = 0$. O vrsti ravnotežja (stabilno ali nestabilno) odloča prva od nič različna variacija potencialne energije. Če je prva od nič različna variacija pozitivna, je $\Delta\Pi$ pozitiven in je ravnotežna lega določena s koordinatami q_i **stabilna**.

V primeru linearno elastičnega materiala, majhnih deformacij in uporabe ravnotežnih pogojev na nedeformirani legi se izkaže, da je $\delta^2\Pi > 0$. Zato je v tem primeru ravnotežna lega, določena s pogojem $\delta\Pi = 0$, stabilna. Pri ugotavljanju vrste ravnotežja moramo upoštevati enačbe geometrijske nelinearnosti (glej poglavje 6).

8.2 Nekateri pojmi analize stabilnosti konstrukcij

Oglejmo si naslednje pojme povezane s stabilnostjo konstrukcij:

1. kritično ravnotežno stanje,
2. parameter obtežbe,
3. ravnotežna pot,
4. kritične točke,
5. preskok konstrukcije,
6. uklon konstrukcije in uklonske oblike.

Diskretni konservativni sistem je v ravnotežju, če je prva variacija potencialne energije enaka nič (enačba (8.8)). Lagrange-Dirichletov izrek pravi, da je ravnotežno stanje konservativnega sistema stabilno, če ima potencialna energija v ravnotežni legi glede na sosednje lege minimalno vrednost. Pogoja za stabilno oziroma nestabilno ravnotežje zapišemo takole

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{in} \quad \begin{cases} \Delta^2\Pi > 0, & \text{stabilno ravnotežno stanje,} \\ \Delta^2\Pi < 0, & \text{nestabilno ravnotežno stanje.} \end{cases} \quad (8.10)$$



1. Kritično ravnotežno stanje

Konservativni sistem ima **kritično ravnotežno stanje**, če sta prva in druga variacija potencialne energije enaka nič

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{in} \quad \delta^2\Pi = 0. \quad (8.11)$$

Če ima potencialna energija v okolici ravnotežne lege prvo in drugo variacijo enako nič, potem o stabilnosti oziroma nestabilnosti določajo višje variacije

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta^2\Pi = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\Pi = \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \frac{1}{4!}\delta^4\Pi + \dots \quad (8.12)$$

2. Parameter obtežbe

Pri analizi stabilnosti običajno vektor obtežbe $\{F\}$ izrazimo s **parametrom obtežbe** λ in referenčno obtežbo $\{F\}_{\text{ref}}$ z enačbo

$$\{F\} = \lambda \{F\}_{\text{ref}}. \quad (8.13)$$

Potencialno energijo Π konservativnega sistema zato zapišemo takole

$$\Pi = U(q_1, \dots, q_n) + \Pi_z(q_1, \dots, q_n, \lambda) = \Pi(q_1, \dots, q_n, \lambda). \quad (8.14)$$

Zadnjo enačbo lahko zapišemo še z referenčnim delom A_{ref}

$$\Pi = U(q_1, \dots, q_n) - \lambda A_{\text{ref}}(q_1, \dots, q_n). \quad (8.15)$$

3. Ravnotežna pot

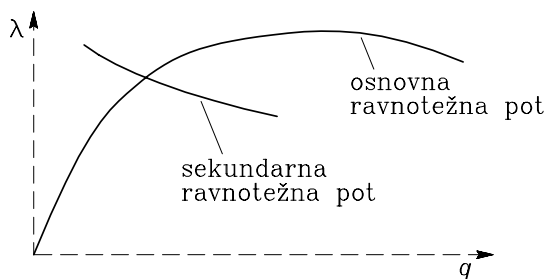
Ker so posplošene koordinate po definiciji linearno neodvisne, so neodvisne tudi variacije q_i ,[†] zato zapišemo enačbo (8.8) takole

$$\boxed{\frac{\partial \Pi(q_1, \dots, q_n, \lambda)}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n).} \quad (8.16)$$

Rešitev sistema enačb (8.16) je določena s funkcijami $q_i(\lambda)$, ki določajo **ravnotežno pot** (krivulja v n -dimenzionalnem prostoru). Ker s posplošenimi koordinatami q_i opišemo pomike, predstavljajo funkcije $q_i(\lambda)$ pomike v odvisnosti od obtežbe. Če poteka ravnotežna pot skozi točko $q_i = 0$ (točka v n -dimenzionalnem prostoru), je taka pot **osnovna ravnotežna** pot. V nasprotnem primeru je pot **sekundarna ravnotežna** pot. Na sliki 8.1 sta prikazani osnovna in sekundarna ravnotežna pot za sistem z eno prostostno stopnjo.

[†] M. Stanek, G. Turk, Statika II, FGG, Ljubljana, 1996.

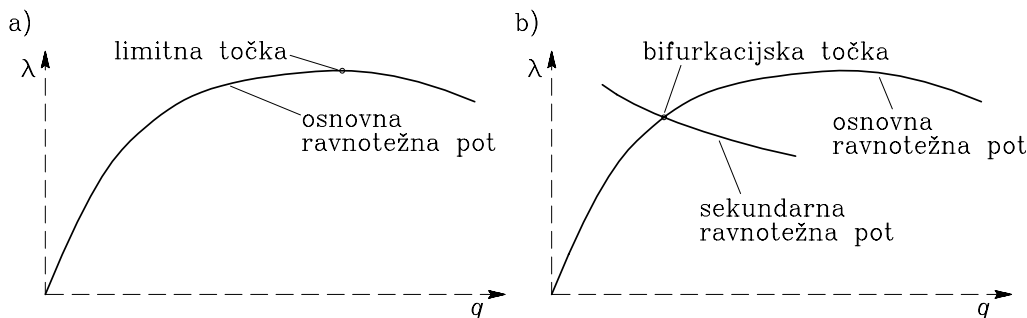




Slika 8.1: Osnovna in sekundarna ravnotežna pot

4. Kritične točke

Kritične točke delimo na **limitne** in **bifurkacijske**. Limitna točka je točka, v kateri doseže parameter obtežbe λ ekstremno vrednost. Bifurkacijska točka je točka, v kateri se sekata osnovna in sekundarna obtežna pot. Bifurkacija pomeni razvejišče. Na sliki 8.2a je prikazana limitna točka, na sliki 8.2b pa bifurkacijska točka za sistem z eno prostostno stopnjo.



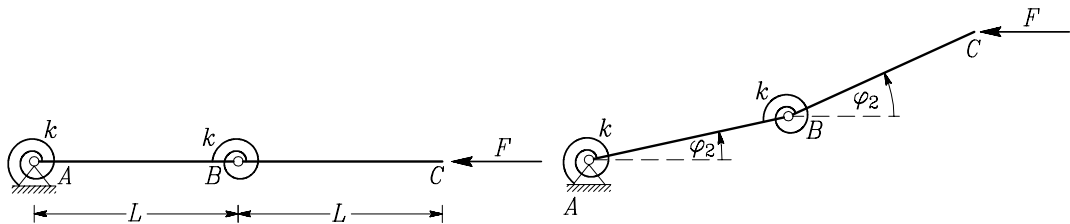
Slika 8.2: a) Limitna točka b) Bifurkacijska točka

5. Uklon konstrukcije in uklonske oblike

Analiziranje stabilnosti z lineariziranimi ravnotežnimi enačbami obravnava **linearna analiza stabilnosti**. Pri taki analizi upoštevamo, da so pomiki majhni in zato izrazimo potencialno energijo sistema tako, da upoštevamo le linearne in kvadratne člene, v katerih nastopajo posplošene koordinate (pomiki). V tem primeru so ravnotežne enačbe $\partial\Pi/\partial q_i$ **linearne**. (V primeru sem lineariziral ravnotežne enačbe!?) Taki analizi rečemo tudi **uklon konstrukcije**. Z linearno analizo lahko izračunamo bifurkacijske obtežbe ter pripadajoče uklonske oblike.

Primer 8.1 Določimo kritični sili in pripadajoči uklonski obliki za prikazano konstrukcijo, ki je sestavljena iz dveh togih palic AB in BC, ter dveh polžastih vzmeti s togostjo k (slika 8.3). Težo palic zanemari. Pri računu predpostavi, da sta zasuka φ_1 in φ_2 majhna. Uklonski obliki sistema z dvema prostostnima stopnjama izrazi z zasukoma φ_1 in φ_2 .





Slika 8.3: Geometrija in obtežba sistema

Deformacijska energija U konstrukcije je

$$U = \frac{1}{2} k (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k \varphi_2^2.$$

Potencialna energija zunanje sile F je

$$\Pi_z = -F [L (1 - \cos \varphi_1) + L (1 - \cos \varphi_2)].$$

Potencialna energija sistema je

$$\Pi = \frac{1}{2} k (\varphi_1^2 - 2 \varphi_1 \varphi_2 + 2 \varphi_2^2) - F L (2 - \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Pogoj za ravnotežje

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \delta \varphi_2 = 0$$

zapišemo takole

$$\delta \Pi = [k (\varphi_1 - \varphi_2) - F L \sin \varphi_1] \delta \varphi_1 + [-k (\varphi_1 - 2 \varphi_2) - F L \sin \varphi_2] \delta \varphi_2 = 0. \quad (8.17)$$

Ker sta variaciji $\delta \varphi_1$ in $\delta \varphi_2$ poljubni, dobimo naslednji ravnotežni enačbi (homogen sistem enačb)

$$\begin{aligned} k (\varphi_1 - \varphi_2) - F L \sin \varphi_1 &= 0, \\ -k (\varphi_1 - 2 \varphi_2) - F L \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ob predpostavki, da sta zasuka φ_1 in φ_2 majhna, upoštevamo, da je $\sin \varphi_1 \approx \varphi_1$ in dobimo sistem homogenih enačb

$$\begin{aligned} (k - F L) \varphi_1 - k \varphi_2 &= 0, \\ -k \varphi_1 + 2 k - F L \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (8.18)$$

ki predstavlja **problem lastnih vrednosti**. Za netrivialno rešitev homogenega sistema mora biti determinanta sistema enaka nič

$$\begin{vmatrix} k - F L & -k \\ -k & 2 k - F L \end{vmatrix} = F^2 - 3 \frac{k}{L} F + \left(\frac{k}{L} \right)^2 = 0.$$



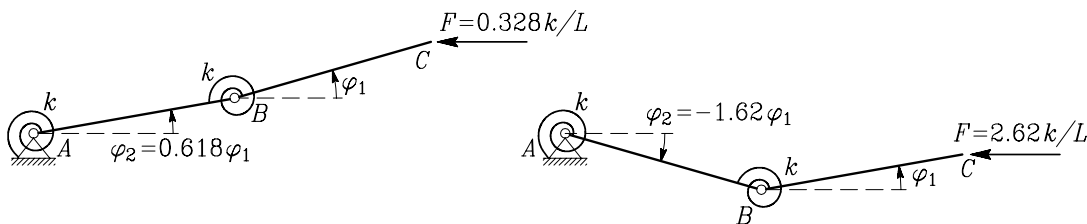
Korena te enačbe sta **lastni vrednosti** problema

$$F_1 = 0.382 \frac{k}{L}, \quad F_2 = 2.62 \frac{k}{L}.$$

Lastni vrednosti F_1 in F_2 sta **kritični** oziroma **uklonski sili**. Če lastni vrednosti F_1 in F_2 vstavimo v enačbi (8.18), dobimo **lastna vektorja**, ki predstavljata **uklonski obliki**, to je obe možni ravnotežni obliki konstrukcije

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 0.618 \varphi_1 && \text{ustreza sili } F_1, \\ \varphi_2 &= -1.62 \varphi_1 && \text{ustreza sili } F_2. \end{aligned}$$

Ustrezni uklonski obliki sta prikazani na sliki 8.4.

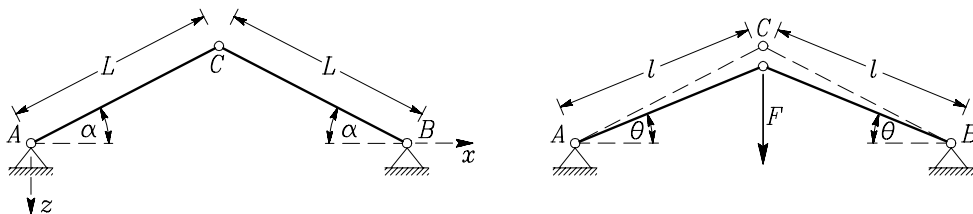


Slika 8.4: Uklonski obliki

Velikosti zasuka φ_1 ne poznamo. Iz primera sledi, da pri analiziranju uklona konstrukcije lahko izračunamo le velikosti kritičnih sil ter pripadajoče uklonske oblike. Določiti še vrsto ravnotežja!

6. Preskok konstrukcije

Obravnavajmo dve členkasto podprti in členkasto povezani palici dolžine L v ravnini x, z . Palici sta obteženi s silo F , katere velikost se spreminja (slika 8.5).



Slika 8.5: Začetna lega palic je določena s kotom α , trenutna lega pa s kotom θ

Zaradi delovanja sile F nastane v palicah tlačna osna sila, zaradi katere se dolžini palic zmanjšata. Če je kot α dovolj majhen, lahko nastopi primer, da se dolžini palic tako zmanjšata, da postane kot θ enak nič, še preden nastopi v palici Eulerjeva uklonska sila. V tem primeru pride do nestabilnosti zaradi **preskoka**



konstrukcije. Potencialno energijo sistema zapišemo v odvisnosti od kota θ takole

$$\Pi = 2 \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_p} E \varepsilon_{xx}^2 dV - F w = E \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 A L - F w = \frac{E A}{L} (\Delta L)^2 - F w = k (\Delta L)^2 - F w.$$

S k je označena togost palice $k = E A/L$, E je modul elastičnosti materiala, A pa ploščina prečnega prereza palice, \mathcal{V}_p pa območje ene palice. Sprememba dolžine ΔL palice in pomik w prijemališča sile F izrazimo s kotom θ

$$\Delta L = l - L = L \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} - 1 \right), \quad w = L (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \theta)$$

in dobimo

$$\Pi = k L^2 \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} - 1 \right)^2 - F L (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \theta). \quad (8.19)$$

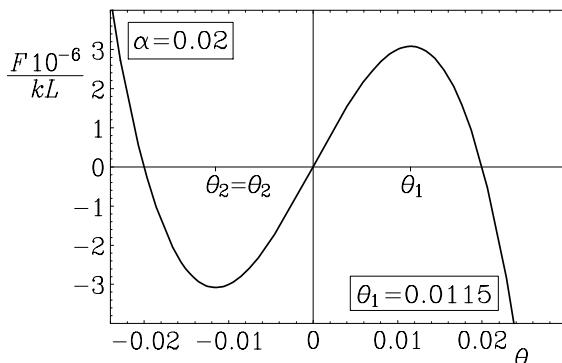
Pogoj za ravnotežje je

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad 2 k L^2 \cos \alpha \frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} - 1 \right) + F L \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \theta} = 0. \quad (8.20)$$

Iz (8.20) izrazimo silo F v odvisnosti od θ po enačbi

$$F = 2 k L \operatorname{tg} \theta (\cos \theta - \cos \alpha). \quad (8.21)$$

Graf $F(\theta)$ po enačbi (8.21) prikazujemo na sliki 8.6 (pri risanju slike upoštevamo dva primera: $\alpha = \pi/2$ in $\alpha = 0.02$).



Slika 8.6: Graf $F(\theta)$

Iz enačbe (8.21) izračunamo, da je F enaka nič za $\theta = 0$, $\theta = \alpha$ in $\theta = -\alpha$. Vrednosti kotov θ , pri kateri ima funkcija $F(\theta)$ ekstremne vrednosti dobimo iz pogoja $\partial F / \partial \theta = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 2 k L \frac{1}{\cos^2 \theta} (\cos \theta - \cos \alpha) - 2 k L \operatorname{tg} \theta \sin \theta = 0. \quad (8.22)$$



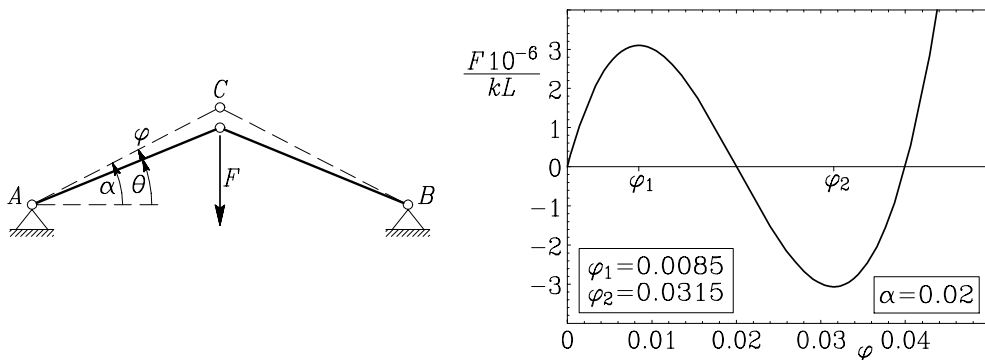
Iz enačbe $\partial F / \partial \theta = 0$ sledi

$$\cos \alpha - \cos^3 \theta = 0. \quad (8.23)$$

Realni rešitvi enačbe (8.23) sta:

$$\theta_1 = \text{Arccos}(\sqrt[3]{\cos \alpha}), \quad \theta_2 = -\text{Arccos}(\sqrt[3]{\cos \alpha}).$$

Če kot θ izrazimo s kotom φ po enačbi $\theta = \alpha - \varphi$, narišemo graf $F(\varphi)$ kot prikazujemo na sliki 8.7.



Slika 8.7: Graf $F(\varphi)$ za $\alpha = 0.02$

Vrednosti kotov φ , pri katerih ima $F(\varphi)$ ekstremne vrednosti označimo s φ_1 in φ_2

$$\varphi_1 = \alpha - \theta_1, \quad \varphi_2 = \alpha - \theta_2.$$

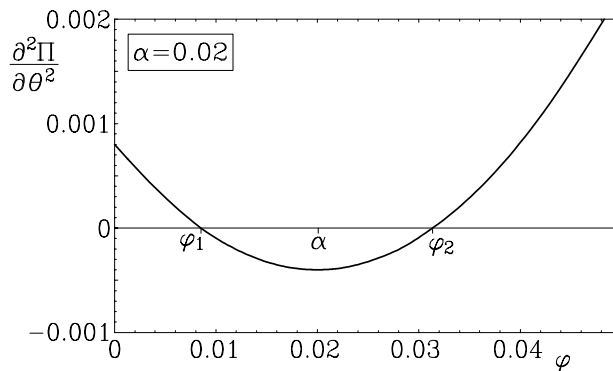
Vidimo, da obstajajo tri ravnotežne lege za $F = 0$: ($\theta = 0$, $\theta = \alpha$, $\theta = -\alpha$) oziroma ($\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = 2\alpha$). Vrsto ravnotežja ugotovimo, če izračunamo drugi odvod potencialne energije. Enačbo (8.20) odvajamo po θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = & 4kL^2 \cos^2 \alpha \frac{\text{tg}^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 2kL^2 \cos \alpha \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} - 1 \right) \frac{1}{\cos^3 \theta} - \\ & - 2kL^2 \cos \alpha \frac{\text{tg}^2 \theta}{\cos \theta} + 2FL \cos \alpha \frac{\text{tg} \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned} \quad (8.24)$$

in za F vstavimo (8.21)

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = \frac{2kL^2 \cos \alpha}{\cos^4 \theta} (\cos \alpha - \cos^3 \theta) \quad (8.25)$$

Če v (8.25) postavimo, da je $\partial^2 \Pi / \partial \theta^2 = 0$, dobimo enačbo (8.23). Zato ima funkcija $\partial^2 \Pi / \partial \theta^2$ enake ničle, kot funkcija $\partial F / \partial \theta$. Graf $\partial^2 \Pi / \partial \theta^2$ v odvisnosti od φ prikazujemo na sliki 8.8.

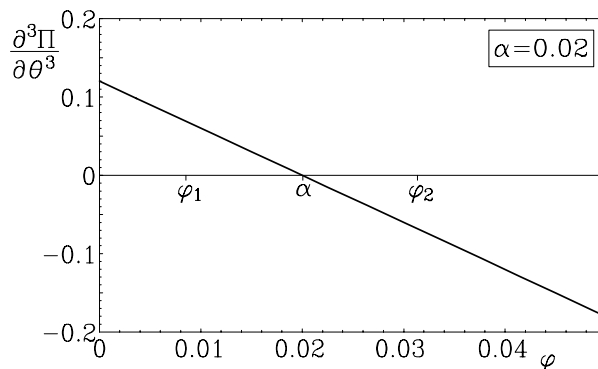
Slika 8.8: Graf $\partial^2\Pi/\partial\theta^2$ v odvisnosti od φ

Če je $\partial^2\Pi/\partial\theta^2$ pozitiven, ima Π minimalno vrednost, je ravnotežno stanje stabilno. Če pa je $\partial^2\Pi/\partial\theta^2$ negativen, ima Π maksimalno vrednost, je ravnotežno stanje nestabilno. Na sliki 8.7 je stabilno ravnotežno stanje označeno z neprekinjeno, nestabilno ravnotežno stanje pa s prekinjeno črto. Vidimo, da je ravnotežno stanje $F = 0$, $\theta = 0$ (oziroma $F = 0$, $\varphi = \alpha$) nestabilno. V točkah C in E je $\partial^2\Pi/\partial\theta^2$ enak nič. Če izračunamo tretji odvod potencialne energije po θ ($\partial^3\Pi/\partial\theta^3$), lahko narišemo graf $\partial^3\Pi/\partial\theta^3$ v odvisnosti od φ (slika 8.9). V ta namen (8.24) odvajamo po θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3\Pi}{\partial\theta^3} = & 6kL^2 \frac{\cos^2\alpha \operatorname{tg}\theta}{\cos^4\theta} - 10kL^2 \frac{\cos\alpha \operatorname{tg}\theta}{\cos^3\theta} + 16kL^2 \frac{\cos^2\alpha \operatorname{tg}\theta}{\cos^4\theta} + \\ & + 2kL^2 \left(4 \frac{\cos\alpha}{\cos\theta} - 1 \right) \frac{\cos\alpha \operatorname{tg}^3\theta}{\cos\theta} + 2FL \frac{\cos\alpha}{\cos^4\theta} + 4FL \frac{\cos\alpha \operatorname{tg}^2\theta}{\cos^2\theta} \end{aligned} \quad (8.26)$$

in za F vstavimo (8.21)

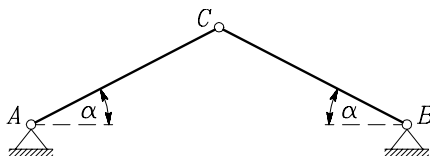
$$\frac{\partial^3\Pi}{\partial\theta^3} = 12kL^2 \cos^2\alpha \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^4\theta} - 6kL^2 \frac{\cos\alpha \operatorname{tg}\theta}{\cos\theta}. \quad (8.27)$$

Slika 8.9: Graf $\partial^3\Pi/\partial\theta^3$ v odvisnosti od φ 

V točkah C in E , to je pri $\varphi = \varphi_1$ in $\varphi = \varphi_2$, je tretji odvod potencialne energije različen od nič. Ker je to prvi odvod, pri katerem je potencialna energija različna od nič in ker je ta odvod neparen, sta točki C in E točki na sedlu. To pomeni, da Π nima minimalne vrednosti in sta ti točki nestabilni.

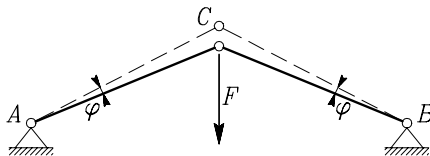
Pri delovanju sile na konstrukcijo, katere velikost narašča od vrednosti nič, nastopi lahko tudi primer, da konstrukcija pri mejni velikosti sile **preskoči** v novo ravnotežno lego. Silo, ki povzroči preskok konstrukcije, imenujemo **mejna sila**. (limitna?)

V nadaljevanju je prikazan primer, pri katerem konstrukcija pri mejni sili preskoči v novo lego. Opisana so tudi ravnotežna stanja, v katerih se konstrukcija pri dveh različnih vrstah obremenjevanja nahaja. Konstrukcija je sestavljena iz dveh členkasto podprtih in členkasto povezanih elastičnih palic, ki sta pred začetkom delovanja sile F nagnjeni za kot α (slika 8.10).



Slika 8.10: Začetna lega palic je določena s kotom α

Konstrukcijo obtežimo na dva načina. Pri prvem enakomerno večamo pomike in merimo pripadajočo silo. Pri drugem pa večamo silo in opazujemo pomike. Če palici obtežujemo s silo F v smeri navzdol, se naklon palic manjša (slika 8.11).

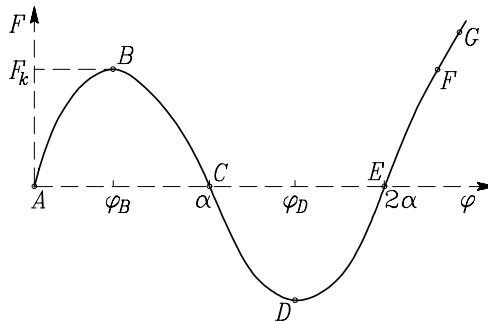


Slika 8.11: Lego palic pri delovanju sile F določa kot φ

Na sliki 8.12 je prikazana zveza med silo F in zasukom φ , če zasuk večamo in določamo pripadajočo velikost sile F , pri kateri se konstrukcija nahaja v ravnotežju.[†]

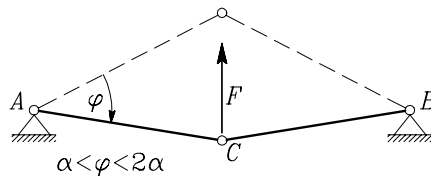
[†] J.M.T. Thompson, G.W. Hunt, A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, 1973.





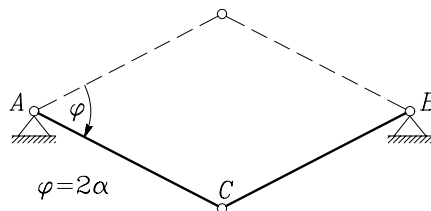
Slika 8.12: Obtežna pot za primer, če zasuk večamo in določamo pripadajočo ravnotežno silo

Del krivulje AB na sliki 8.12, ko se velikost sile povečuje od nič do mejne vrednosti F_k , predstavlja stabilna ravnotežna stanja. Ko kot φ preseže mejno vrednost φ_B , bo konstrukcija v ravnotežnem stanju, če se velikost sile manjša. Pri velikosti zasuka $\varphi = \alpha$ (točka C) je velikost sile F enaka nič. Pri nadaljnjem večanju kota φ bo konstrukcija v ravnotežju, če sila F deluje navzgor (slika 8.13).



Slika 8.13: Ko je $\alpha < \varphi < 2\alpha$, sila F zagotavlja ravnotežje, če deluje navzgor

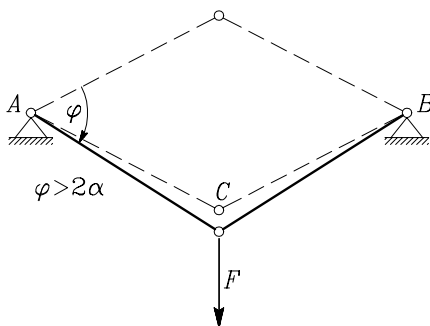
Pri vrednosti $\varphi = \varphi_D$, se absolutna vrednost sile F začne manjšati. Ko je kot φ enak 2α , je konstrukcija v ravnotežnem stanju, če je velikost sile F enaka nič (slika 8.14).



Slika 8.14: Ko je $\varphi = 2\alpha$, je velikost sile F enaka nič

Pri nadaljnjem večanju kota φ bo ravnotežje izpolnjeno, če sila F deluje navzdol (slika 8.15).

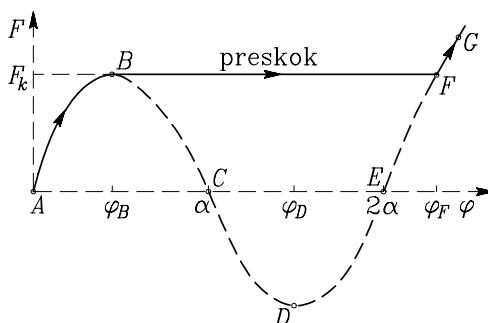




Slika 8.15: Ko je $\varphi > 2\alpha$, je konstrukcija v ravnotežnem stanju, če sila F deluje navzdol

Ta del ravnotežne poti je na sliki 8.11 označen s točkami E , F in G . V diagramu $F - \varphi$ predstavlja del krivulje BCD nestabilna ravnotežna stanja, preostali del (odseka AB in DG) pa stabilna ravnotežna stanja.

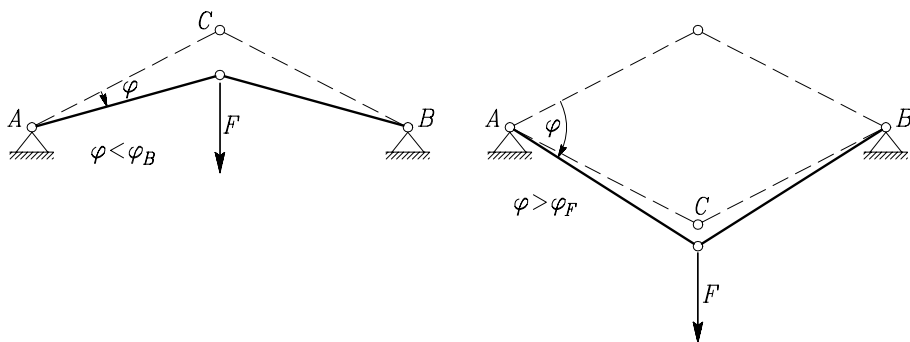
Če prikazani primer dveh med seboj členkasto povezanih palic obtežujemo tako, da sila F ves čas deluje navzdol in pri tem njena velikost narašča, se pojavi **preskok** konstrukcije (slika 8.16).



Slika 8.16: Pri naraščanju velikosti sile F pride do dinamičnega preskoka konstrukcije v novo lego

Ko doseže sila F mejno vrednost F_k ($\varphi = \varphi_B$), konstrukcija v trenutku preskoči v novo lego ($\varphi = \varphi_F$) (slika 8.17).





Slika 8.17: Ko φ doseže vrednost φ_B , konstrukcija preskoči v novo lego $\varphi = \varphi_F$

Z večanjem velikosti sile F je obtežna pot določena z delom krivulje FG (slika 8.16). Odseka AB in FG na sliki 8.16 določata stabilni ravnotežni poti.



Stvarno kazalo

Betti-Rayleighjev izrek, [361](#)

enakomerna torzija, [194](#)

 eliptični prerez, [213](#)

 metoda napetosti, [205](#)

 metoda pomikov, [201](#)

 pravokotni prerez, [220](#)

geometrijske karakteristike prečnega prereza, [22](#)

 deviacijski vztrajnostni moment, [22](#)

 preglednica za nekatere enostavne like, [26](#)

 statični moment, [22](#)

 težiščni vztrajnostni momenti, [26](#)

 vzporedna premaknitev koordinatnega sistema, [23](#)

 vztrajnostni moment, [22](#)

 zasuk koordinatnega sistema, [25](#)

Greenov izrek, [37](#)

izbočitvena funkcija, [202](#), [226](#)

izrek o virtualnih pomikih, [354](#)

izrek o virtualnih silah, [377](#)

jedro prečnega prereza, [104](#)

linijska momentna obtežba, [6](#)

linijska obtežba, [5](#)

linijski nosilec z ravno osjo, [1](#)

Maxwellov izrek, [361](#)

membranska analogija, [224](#)

metoda napetosti, [205](#)

metoda pomikov, [201](#), [276](#), [313](#)

