1.

UVOD V ENERGIJSKE METODE V MEHANIKI KONSTRUKCIJ

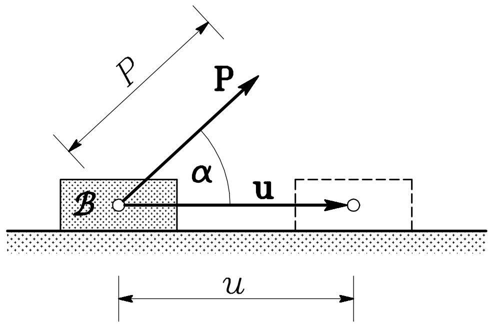
V osnovnem tečaju mehanike trdnih teles smo izpeljali sistem petnajstih osnovnih enačb, s katerimi lahko načeloma določimo napetosti, deformacije in pomike poljubnega linearno elastičnega izotropnega telesa pri omejenih geometrijskih spremembah, če le poznamo njegove geometrijske in materialne lastnosti, način podpiranja ter velikost in način delovanja zunanje obtežbe. Kakor vemo, je omenjeni sistem sestavljen iz treh parcialnih diferencialnih enačb ravnotežja, šestih parcialnih diferencialnih kinematičnih enačb ter šestih linearnih algebrajskih konstitucijskih enačb. Še posebej reševanje parcialnih diferencialnih enačb je težavno opravilo, že pri nekoliko bolj splošnih primerih geometrije in zunanje obtežbe pa praktično sploh ni mogoče dobiti analitičnih rešitev.

Reševanje številnih mehanskih problemov si lahko občutno olajšamo z uporabo tako imenovanih *energijskih metod*, utemeljenih na fizikalnih zakonitostih energijskega stanja telesa.

1.1 Fizikalna definicija mehanskega dela

Spomnimo se, kako je mehansko delo definirano v elementarni fiziki. Če na trdno telo $\mathcal{B}$ deluje konstantna sila $\mathbf{P}$ in se pri tem telo premakne v novo lego tako, kakor to določa vektor pomika $\mathbf{u}$ *(slika 1.1)*, je opravljeno mehansko delo D določeno s skalarnim produktom

$$D = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = P\, u \cos\alpha\,. \tag{1.1}$$



Slika 1.1

Če na telo deluje še konstantna dvojica **M** in telo razen translatornega pomika **u** doživi tudi zasuk $\boldsymbol{\omega}$, je mehansko delo določeno z vsoto

$$D = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} \,. \tag{1.2}$$

Pri tem smo poudarili, da sta sila **P** in dvojica **M** konstantna vektorja, torej se med premikom in zasukom telesa ne spreminjata ne po velikosti ne po smeri. Z drugimi besedami to pomeni, da sta sila **P** in dvojica **M** neodvisni od pomika **u** in zasuka $\boldsymbol{\omega}$.

1.2 Deformacijsko delo (deformacijska energija)

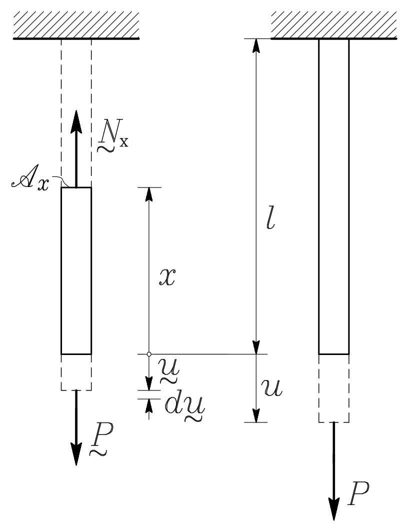
V mehaniki trdnih teles je bolj običajno, da se deformacije telesa razvijajo v odvisnosti od delujoče zunanje obtežbe. Kot zgled določimo mehansko delo, ki ga opravi natezna vzdolžna sila $\underset{\sim}{P}$ na koncu enakomerno debele palice med tem, ko se palica iz začetnega nedeformiranega stanja podaljša za u *(slika 1.2)*. Začetna dolžina palice je l, ploščina njenega prečnega prereza pa je A_x. Vzemimo še, da je palica izdelana iz linearno elastičnega materiala z modulom elastičnosti E in da so deformacije dovolj majhne, da lahko uporabimo enačbe elementarne teorije linijskega nosilca, kakršne smo izpeljali v 5. poglavju knjige *Mehanika trdnih teles*.

Kot izhodišče vzemimo, da je poljuben del palice v *ravnotežju*. Edina notranja sila v prerezu $\mathscr{A}_x$ je osna sila $\underset{\sim}{N}_x$, ki je v ravnotežnem stanju po velikosti enaka obtežbi $\underset{\sim}{P}$ in je očitno konstantna po celotni dolžini palice

$$\underset{\sim}{N}_x = \underset{\sim}{P}\,. \tag{1.3}$$

Tedaj je pomik $\underset{\sim}{u}$ na koncu palice enak spremembi dolžine palice $\underset{\sim}{\Delta l}$ in je premosorazmeren delujoči navpični sili $\underset{\sim}{P}$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\Delta l} = \frac{l}{EA_x}\,\underset{\sim}{N}_x = \frac{l}{EA_x}\,\underset{\sim}{P} \qquad \to \qquad u = \frac{l}{EA_x}\,P\,. \tag{1.4}$$



Slika 1.2

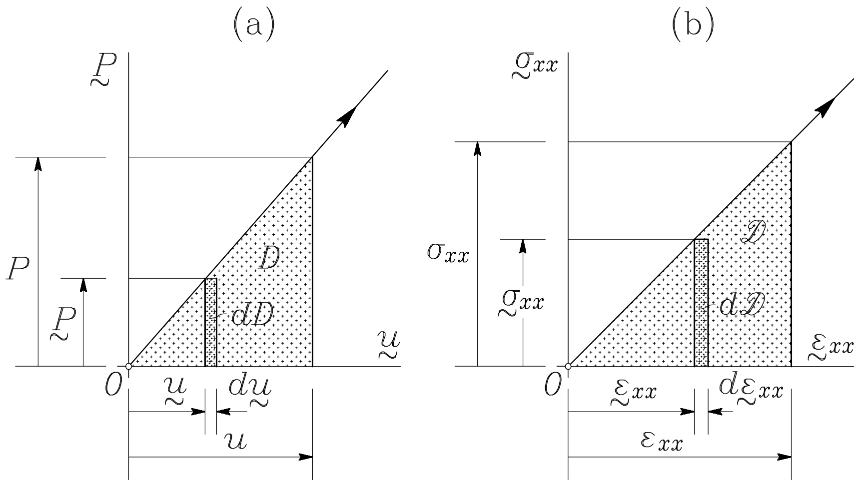
V tem primeru torej delujoča sila $\underset{\sim}{P}$

$$\underset{\sim}{P} = \frac{EA_x}{l}\,\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{P}\,(\underset{\sim}{u}) \tag{1.5}$$

ni konstantna, temveč se linearno spreminja od vrednosti 0, ki ustreza nedeformiranemu stanju palice ($\underset{\sim}{u} = 0$), do vrednosti P, ki ustreza končni deformirani obliki pri pomiku u na koncu palice

$$P = \frac{EA_x}{l}\,u\,. \tag{1.6}$$

Zato mehanskega dela, ki ga opravi sila $\underset{\sim}{P}$ med deformiranjem palice, ne moremo izračunati neposredno z enačbo (1.1). To enačbo pa lahko uporabimo, če doseženi pomik $\underset{\sim}{u}$ povečamo za infinitezimalni prirastek $d\underset{\sim}{u}$ in vzamemo, da je na tem infinitezimalno majhnem pomiku sila $\underset{\sim}{P}$ konstantna.



Slika 1.3

Prirastek mehanskega dela dD je tedaj *(slika 1.3.a)*

$$dD = \underset{\sim}{P}\, d\underset{\sim}{u}\,, \tag{1.7}$$

celotno mehansko delo D na intervalu $0 \leq \underset{\sim}{u} \leq u$ pa dobimo z integriranjem

$$D = \int_0^u dD = \int_0^u \underset{\sim}{P}\, d\underset{\sim}{u} = \frac{EA_x}{l} \int_0^u \underset{\sim}{u}\, d\underset{\sim}{u} = \frac{EA_x}{2l}\, u^2\,. \tag{1.8}$$

Tako smo celotno opravljeno mehansko delo izrazili s končno doseženim pomikom u

$$D = \frac{EA_x}{2l}\, u^2\,. \tag{1.9}$$

Ob uporabi enačbe (1.6) dobimo zelo poučen zapis

$$D = \frac{1}{2}\, P\, u\,, \tag{1.10}$$

ki pove, da je mehansko delo, ki ga sila $\underset{\sim}{P}$ opravi na intervalu $0 \leq \underset{\sim}{u} \leq u$, po vrednosti enako ploščini trikotnika, ki ga v diagramu $\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{P}$ določata končni vrednosti u in P *(slika 1.3.a)*.

V obravnavanem preprostem primeru lahko enačbo (1.10) zapišemo tudi drugače. Ker je $P = \sigma_{xx} A_x$ in $u = \Delta l = \varepsilon_{xx}\, l$, dobimo

$$D = \frac{1}{2} A_x l\, \sigma_{xx}\, \varepsilon_{xx}\,. \tag{1.11}$$

Pri tem smo s σ_{xx} označili vzdolžno normalno napetost, z ε_{xx} pa specifično spremembo dolžine v vzdolžni smeri, ki sta v našem primeru enakomerni po celotni dolžini palice. Produkt $V = A_x l$ predstavlja prostornino palice, tako da je

$$D = \frac{1}{2} V\, \sigma_{xx}\, \varepsilon_{xx}\,. \tag{1.12}$$

Če upoštevamo, da je pri linearno elastičnem materialu zveza med deformacijo ε_{xx} in napetostjo σ_{xx} podana s Hookovim zakonom $\sigma_{xx} = E\, \varepsilon_{xx}$, lahko opravljeno mehansko delo izrazimo v odvisnosti od končne dosežene vzdolžne deformacije

$$D = \frac{1}{2} EV\, \varepsilon_{xx}^2\,. \tag{1.13}$$

Rezultat kaže, da se je vloženo mehansko delo porabilo za deformiranje palice. Zato ga pogosto imenujemo tudi *deformacijsko delo*. Dobljeno zvezo lahko razumemo tudi tako, da se je vloženo mehansko delo naložilo v palici v obliki tako imenovane *deformacijske energije*.

Zaradi kasnejših posplošitev je ugodno vpeljati pojem *specifično deformacijsko delo* oziroma *specifična deformacijska energija* $\mathscr{D}$. To je deformacijska energija, ki se pri deformiranju naloži v enoti prostornine telesa. V našem primeru je specifična deformacijska energija

$$\mathscr{D} = \frac{D}{V} = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\, \varepsilon_{xx} = \frac{E}{2}\, \varepsilon_{xx}^2\,. \tag{1.14}$$

Kakor vidimo, lahko tudi specifično deformacijsko energijo $\mathscr{D}$, ki se naloži v enoti prostornine telesa, predstavimo s ploščino trikotnika, ki ga v diagramu $\underset{\sim}{\sigma}_{xx} - \underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}$ določata končno doseženа deformacija ε_{xx} in pripadajoča napetost σ_{xx} *(slika 1.3.b)*

Prirastek $d\mathscr{D}$ specifične deformacijske energije pri spremembi deformacije za $d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}$ je tedaj

$$d\mathscr{D} = \underset{\sim}{\sigma}_{xx}\, d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx} = E\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\, d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\,, \tag{1.15}$$

celotno specifično deformacijsko energijo, ki se naloži v palici, pa izračunamo z integriranjem tega prirastka v mejah od 0 do ε_{xx}

$$\mathscr{D} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} d\mathscr{D} = E\int_0^{\varepsilon_{xx}} \underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\; d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx} = \frac{E}{2}\,\varepsilon_{xx}^2\,. \tag{1.16}$$

Celotna deformacijska energija deformirane palice je določena z integralom specifične deformacijske energije po prostornini palice. V splošnem je specifična deformacijska energija funkcija točke, v našem primeru pa je, tako kot napetosti in deformacije, enakomerna po vsej palici. Zato dobimo

$$D = \int_{\mathscr{V}} \mathscr{D}\, dV = \mathscr{D}\int_{\mathscr{V}} dV = \mathscr{D}\, V = \frac{1}{2}\, EV\, \varepsilon_{xx}^2\,. \tag{1.17}$$

Rezultat se seveda ujema z enačbo (1.13). Zlahka se prepričamo, da dobimo enak rezultat tudi z integriranjem prirastka celotnega deformacijskega dela dD v mejah od 0 do ε_{xx}

$$dD = V\, d\mathscr{D} = V\underset{\sim}{\sigma}_{xx}\, d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx} = EV\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\, d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\,, \tag{1.18}$$

$$D = EV\int_0^{\varepsilon_{xx}} \underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\; d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{2}\, EV\, \varepsilon_{xx}^2\,. \tag{1.19}$$

Iz primerjave enačbe (1.7) z enačbo (1.18) sledi

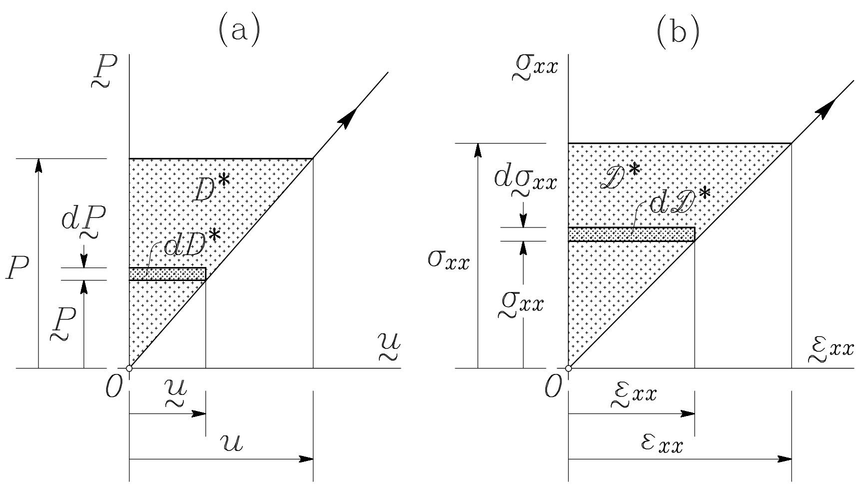
$$dD = \underset{\sim}{P}\, d\underset{\sim}{u} = V\underset{\sim}{\sigma}_{xx}\, d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\,. \tag{1.20}$$

Dobljena enakost pove, da je prirastek mehanskega dela, ki ga zunanja sila $\underset{\sim}{P}$ opravi na prirastku pomika $d\underset{\sim}{u}$, enaka prirastku deformacijskega dela, ki ga napetost $\underset{\sim}{\sigma}_{xx}$ opravi na prirastku deformacije $d\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}$.

1.3 Dopolnilno deformacijsko delo (dopolnilna deformacijska energija)

V dosedanjih izvajanjih smo za neodvisno spremenljivko izbrali pomik $\underset{\sim}{u}$ oziroma deformacijo $\underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}$. Ker imamo opraviti z linearno elastičnim materialom, dobimo enak rezultat tudi v primeru, da za neodvisno spremenljivko izberemo silo $\underset{\sim}{P}$ in pomik $\underset{\sim}{u}$ izrazimo z enačbo (1.4) kot funkcijo te sile

$$\underset{\sim}{u} = \frac{l}{EA_x}\,\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{u}\,(\underset{\sim}{P})\,. \tag{1.21}$$



Slika 1.4

Če silo $\underset{\sim}{P}$ povečamo za infitezimalni prirastek $d\underset{\sim}{P}$, dobimo pripadajoči prirastek mehanskega dela kot produkt prirastka sile $d\underset{\sim}{P}$ in konstantnega pomika $\underset{\sim}{u}$ *(slika 1.4.a)*

$$dD^* = \underset{\sim}{u}\,d\underset{\sim}{P}\,. \tag{1.22}$$

Vpeljali smo novo oznako za prirastek mehanskega dela dD^*, da bi ga razlikovali od prirastka dD, ki smo ga dobili kot delo, ki ga sila $d\underset{\sim}{P}$ opravi na prirastku pomika $\underset{\sim}{u}$. Celotno mehansko delo D^* na intervalu $0 \leq \underset{\sim}{P} \leq P$ dobimo z integriranjem

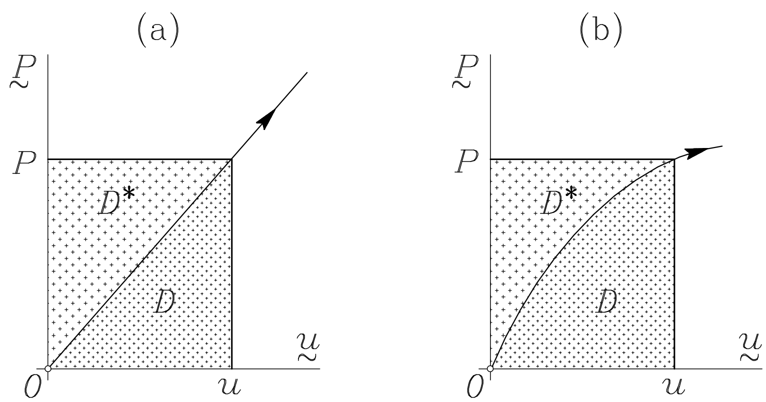
$$D^* = \int_0^P dD^* = \int_0^P \underset{\sim}{u}\, d\underset{\sim}{P} = \frac{l}{EA_x} \int_0^P \underset{\sim}{P}\, d\underset{\sim}{P}$$

$$D^* = \frac{l}{2EA_x}\, P^2 \,. \tag{1.23}$$

S *slik 1.4.a* in *1.5.a* lahko razberemo, da delo D^* dopolni deformacijsko delo D do vrednosti, ki bi jo dobili, če bi z enačbo (1.1) izračunali mehansko delo konstantne sile P na neodvisnem pomiku u

$$D + D^* = P\, u \,. \tag{1.24}$$

Zato vrednost D^* imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno deformacijsko delo*. Kakor smo že omenili, je pri linearno elastičnem materialu dopolnilno deformacijsko delo D^* enako deformacijskemu delu D. Pri nelinearno elastičnem materialu pa vrednosti D in D^* nista enaki *(slika 1.5.b)*.



Slika 1.5

Podobno kakor v prejšnjem primeru lahko vpeljemo *prirastek specifičnega dopolnilnega deformacijskega dela* $d\mathscr{D}^*$

$$d\mathscr{D}^* = \underset{\sim}{\varepsilon}_{xx}\, d\underset{\sim}{\sigma}_{xx} = \frac{1}{E}\underset{\sim}{\sigma}_{xx}\, d\underset{\sim}{\sigma}_{xx} \tag{1.25}$$

ter celotno specifično dopolnilno deformacijsko delo $\mathscr{D}^*$, ki se v obliki specifične dopolnilne deformacijske energije naloži v palici *(slika 1.4.b)*

$$\mathscr{D}^* = \int_0^{\sigma_{xx}} d\mathscr{D}^* = \frac{1}{E}\int_0^{\sigma_{xx}} \underset{\sim}{\sigma}_{xx}\, d\underset{\sim}{\sigma}_{xx} = \frac{1}{2E}\,\sigma_{xx}^2\,. \tag{1.26}$$

Celotno dopolnilno deformacijsko delo deformirane palice pa je

$$D^* = \int_{\mathscr{V}} \mathscr{D}^*\, dV = \mathscr{D}^*\, V = \frac{V}{2\,E}\,\sigma_{xx}^2\,, \tag{1.27}$$

kjer smo spet upoštevali, da je pri zgolj osno obteženi palici specifično dopolnilno deformacijsko delo enakomerno po celotni prostornini palice.

1.4 Castiglianov izrek

Z enačbama (1.9) in (1.23) smo za linearno elastično telo izrazili deformacijsko delo D in dopolnilno deformacijsko delo D^* s končno doseženim pomikom u oziroma s končno doseženo silo P

$$D = \frac{EA_x}{2l}\,u^2 \tag{1.28}$$

$$D^* = \frac{l}{2EA_x}\,P^2\,. \tag{1.29}$$

Odvajajmo enačbo (1.28) po pomiku u in enačbo (1.29) po sili P ter upoštevajmo zvezi (1.16) in (1.4); tako dobimo

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \frac{EA_x}{l}\,u = P \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial P} = \frac{l}{EA_x}\,P = u\,. \tag{1.31}$$

Rezultata sta v skladu s *Castiglianovim izrekom*, ki pravi, da je pri linearno elastičnem materialu odvod deformacijskega dela po pomiku enak pripadajoči sili, odvod dopolnilnega deformacijskega dela po sili pa pripadajočemu pomiku †. Pri tem je pomembno, da gre za pomik prijemališča sile v smeri njenega delovanja.

Podobno pravilo lahko izpeljemo za odvode specifičnega deformacijskega dela. Brez posebnega truda se namreč lahko prepričamo, da velja

$$\frac{\partial \mathscr{D}}{\partial \varepsilon_{xx}} = E\,\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial \mathscr{D}^*}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \varepsilon_{xx}\,. \tag{1.33}$$

Castiglianov izrek v obliki (1.32) ali (1.33) je pomemben predvsem kot ugotovitev, da pri linearno elastičnem telesu lahko najdemo tako funkcijo deformacije $\mathscr{D}(\varepsilon_{xx})$ da njen odvod po deformaciji ε_{xx} enolično določa ustrezno napetost σ_{xx}, oziroma tako funkcijo napetosti $\mathscr{D}^*(\sigma_{xx})$, da je njen odvod po σ_{xx} enak deformaciji ε_{xx}.

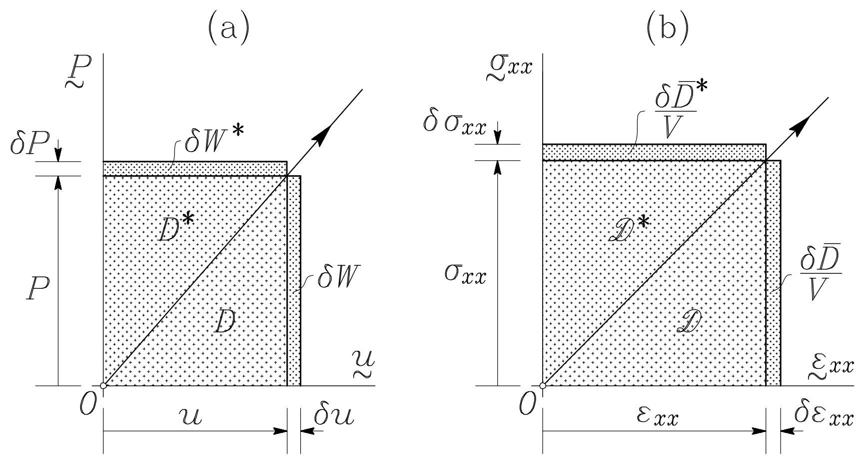
1.5 Virtualno delo. Izrek o virtualnih pomikih

V dosedanjih izpeljavah smo imeli opravka z energijskimi količinami, ki imajo razviden fizikalni pomen in jih je mogoče vsaj posredno tudi izmeriti. V nadaljevanju pa bomo vpeljali pojma *virtualno delo* in *dopolnilno virtualno delo*, ki sta v svojem bistvu zgolj formalni matematični količini, vendar ju izračunamo podobno kakor prirastka deformacijskega oziroma dopolnilnega deformacijskega dela.

Znova vzemimo, da je opazovana natezna palica v ravnotežju, ko nanjo deluje zunanja sila P. Pomik obteženega prostega konca palice je tedaj

† Prvi del izreka velja tudi za nelinearno elastično telo, drugi del pa le za linearno elastično telo.

$\Delta l = u$. Sedaj pa si zamislimo, da se prosti konec palice premakne še za poljubno, vendar dovolj majhno vrednost δu v smeri delovanja sile P *(slika 1.6.a)*.



Slika 1.6

Poudarimo, da gre za namišljen, *virtualen* pomik, ki ni v nikakršni zvezi z dejansko obtežbo P. Zato lahko po vzorcu enačbe (1.7) izračunamo namišljeno mehansko delo, ki ga zunanja sila P opravi na virtualnem pomiku δu. Dobljeno količino imenujemo *virtualno delo zunanje sile* in jo označimo z δW

$$\delta W = P\,\delta u\,. \tag{1.34}$$

V ravnotežnem stanju palice je sila P uravnotežena z normalno napetostjo σ_{xx} v prečnem prerezu, tako da je $P = A_x\sigma_{xx}$. Virtualni pomik δu pa naj bo z virtualno deformacijo $\delta\varepsilon_{xx}$ povezan s kinematičnim pogojem

$$\delta\varepsilon_{xx} = \frac{\delta\Delta l}{l} = \frac{\delta u}{l}\,. \tag{1.35}$$

Za virtualni pomik, ki ustreza enačbi (1.35) in kinematičnim robnim pogojem, pravimo, da je *kinematično dopusten* ali *kinematično možen*. Enačbo (1,34) lahko sedaj zapišemo takole

$$\delta W = A_x\sigma_{xx}\cdot l\delta\varepsilon_{xx} = V\,\sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\,, \tag{1.36}$$

Na desni strani enačbe (1.36) je virtualno delo izraženo z napetostmi, torej z notranjo specifično površinsko obtežbo. Tako izraženo virtualno delo imenujemo *virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta\bar{D}$

$$\delta\bar{D} = V\,\sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\,, \tag{1.37}$$

S primerjavo enačb (1.34), (1.36) in (1.37) dobimo tako imenovani *izrek o virtualnem delu* ali *izrek o virtualnih pomikih*, ki pove, da je v ravnotežnem stanju telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil

$$\delta W = \delta\bar{D}\,. \tag{1.38}$$

Za praktično delo v mehaniki je bolj koristna naslednja oblika izreka o virtualnih pomikih:

Če je pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil, je telo v ravnotežju.

Izrek o virtualnem delu torej predstavlja drugačen zapis ravnotežnih enačb. Glede na to, da so ravnotežne enačbe v svoji izvorni obliki parcialne diferencialne enačbe, je zapis v obliki izreka o virtualnem delu pogosto znatno bolj ugoden.

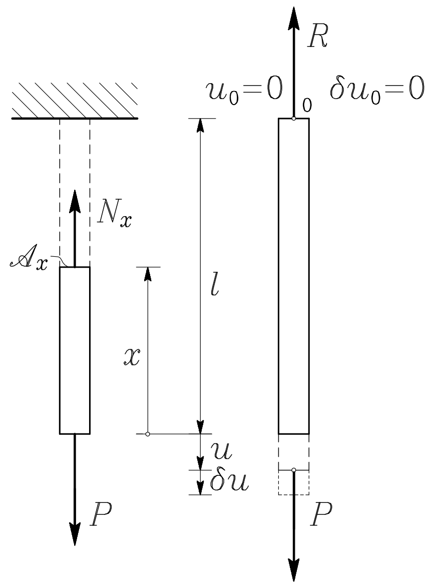
Delovanje izreka o virtualnem delu si oglejmo kar na primeru natezne palice, s katero se v tem poglavju že ves čas ukvarjamo *(slika 1.7)*. Virtualno delo zunanjih sil je v tem primeru

$$\delta W = P\,\delta u\,. \tag{1.39}$$

Pri tem smo upoštevali, da v podpori 0 na palico sicer deluje reakcija R, vendar je njeno virtualno delo enako nič. Virtualni pomiki morajo namreč zadoščati kinematičnim robnim pogojem, zato je $\delta u_0 = 0$.

Virtualno delo notranjih sil izrazimo ob upoštevanju enačbe (1.37) takole

$$\delta\bar{D} = V\,\sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx} = l A_x \sigma_{xx}\frac{\delta u}{l}\,. \tag{1.40}$$



Slika 1.7

Ker je $A_x \sigma_{xx} = N_x$, lahko pišemo

$$\delta \bar{D} = N_x \, \delta u \tag{1.41}$$

in iz izreka o virtualnem delu sledi

$$\delta W = \delta \bar{D} \qquad \rightarrow \qquad (P - N_x) \, \delta u = 0 \, . \tag{1.42}$$

Virtualni pomik δu je poljuben, zato je enačba (1.42) izpolnjena le tedaj, ko velja

$$P - N_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_x = P \, . \tag{1.43}$$

V enačbi (1.43) zlahka prepoznamo ravnotežni pogoj za poljuben del opazovane palice, kar potrjuje ugotovitev, da izrek o virtualnem delu nadomešča ravnotežne pogoje.

1.6 Dopolnilno virtualno delo. Izrek o virtualnih silah

Drug pomemben in koristen izrek spoznamo, če prosti konec opazovane palice, ki se je pod vplivom sile P premaknil v vzdolžni smeri za u, obtežimo z virtualno silo δP *(slika 1.6.a)*. Virtualna sila je neodvisna od dejanske obtežbe in pomikov, zato lahko po zgledu enačbe (1.22) izračunamo delo δW^*, ki ga ta sila opravi na dejanskem pomiku u. To delo imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo zunanje sile*

$$\delta W^* = u\,\delta P\,. \tag{1.44}$$

Tokrat je u dejanski pomik, ki je z dejansko deformacijo ε_{xx} povezan s kinematičnim pogojem $u = l\varepsilon_{xx}$. $\delta\sigma_{xx}$ pa je *statično dopustna* virtualna vzdolžna normalna napetost, kar pomeni, da je napetost $\delta\sigma_{xx}$ povezana z virtualno silo δP z ravnotežnim pogojem

$$\delta\sigma_{xx} = \frac{\delta P}{A_x}\,. \tag{1.45}$$

S tem lahko dopolnilno virtualno delo zapišemo takole *(slika 1.6.b)*

$$\delta W^* = l\varepsilon_{xx}\cdot A_x\delta\sigma_{xx} = V\varepsilon_{xx}\delta\sigma_{xx}\,. \tag{1.46}$$

Izraz na desni strani enačbe (1.45) imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta\bar{D}^*$

$$\delta\bar{D}^* = V\,\varepsilon_{xx}\,\delta\sigma_{xx}\,. \tag{1.47}$$

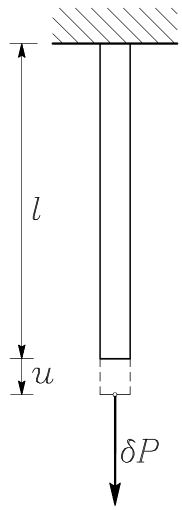
Enakost, ki sledi iz enačb (1.44), (1.46) in (1.47), imenujemo *izrek o dopolnilnem virtualnem delu* oziroma *izrek o virtualnih silah*

$$\delta W^* = \delta\bar{D}^*\,. \tag{1.48}$$

Glede na potek izpeljave lahko izrek o dopolnilnem virtualnem delu povzamemo takole:

Če je pri statično dopustni virtualni obtežbi izpolnjen izrek o dopolnilnem virtualnem delu, tedaj sta dejanska deformacija in dejanski pomik povezana s kinematičnim pogojem.

Uporabo izreka o dopolnilnem virtualnem delu si spet oglejmo na primeru natezne palice *(slika 1.8)*.



Slika 1.8

Ob upoštevanju enačb (1.44) do (1.47) in izreka (1.48) sledi

$$u\,\delta P = l\,A_x\,\varepsilon_{xx}\,\frac{\delta P}{A_x}$$

in po ureditvi

$$(u - l\,\varepsilon_{xx})\;\delta P = 0\,. \tag{1.49}$$

Ker je δP poljubna virtualna sila, je enačba (1.49) izpolnjena le, če je izraz v oklepaju enak nič. Tedaj velja

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u}{l}\,, \tag{1.50}$$

kar je dokaz, da dejanski pomik u in vzdolžna deformacija ε_{xx} zadoščata kinematičnemu pogoju obravnavanega preprostega primera. Še bolj koristno ugotovitev ponuja naslednji zapis izreka o dopolnilnem virtualnem delu

$$\delta W^* = u\,\delta P = \delta\,\bar{D}^*\,, \tag{1.51}$$

kjer vzamemo enotsko virtualno silo $\delta P = 1$

$$\delta P = 1 \qquad \rightarrow \qquad u = \delta\,\bar{D}^*\,. \tag{1.52}$$

To pomeni, da je v primeru, da za virtualno silo izberemo velikost 1, vrednost pripadajočega dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil $\delta\,\bar{D}^*$ že kar enaka velikosti pomika v prijemališču in v smeri delovanja privzete virtualne sile. Ta ugotovitev ima daljnosežne in zelo ugodne posledice pri vrsti nalog, pri katerih je treba določiti pomike ali zasuke posameznih diskretnih točk konstrukcijskih elementov. Za opazovano palico bi ob upoštevanju znanih enačb nosilca dobili

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N_x}{EA_x} \qquad \text{in} \qquad \delta\sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x}\,, \tag{1.53}$$

tako da je

$$u = \delta\bar{D}^* = l\,A_x\,\frac{N_x}{EA_x}\,\frac{\delta N_x}{A_x}$$

in po ureditvi

$$u = l\,\frac{N_x\,\delta N_x}{EA_x} = l\,\frac{N_x(P)\,\delta N_x(\delta P = 1)}{EA_x}\,. \tag{1.54}$$

Poudarili smo, da je N_x dejanska osna sila v palici, ki se pojavi zaradi delovanja zunanje obtežbe P, δN_x pa je osna sila, ki pripada enotski virtualni sili $\delta P = 1$. V našem primeru je $N_x = P$ in $\delta N_x = 1$ in iz enačbe (1.54) sledi

$$u = P\,\frac{l}{EA_x}\,, \tag{1.55}$$

kar se ujema z enačbo (1.4).