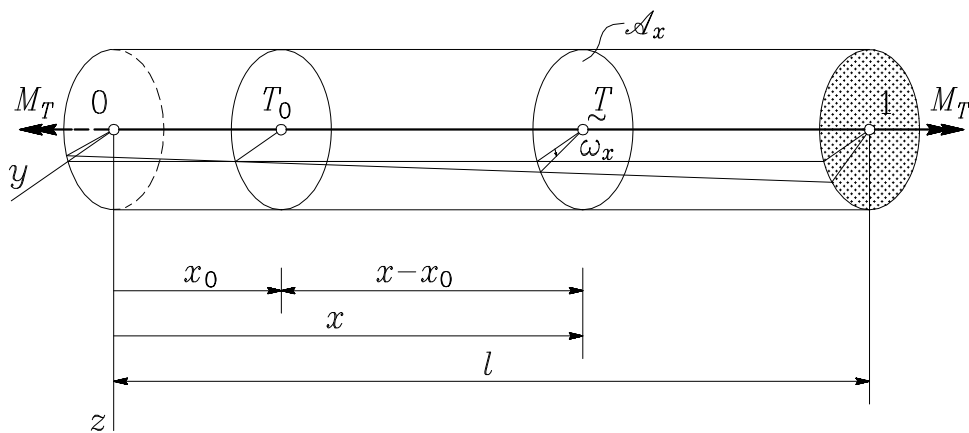


### 5.4 Enakomerna torzija ravnega linijskega nosilca

V tem razdelku obravnavamo torzijski del zunanje obtežbe, ki smo ga v dosedanji analizi mehanskega stanja linijskega nosilca izključili. Vendar se tokrat odpovemo povsem splošnemu načinu torzijske obtežbe in obravnavamo posebni primer, pri katerem je nosilec obtežen le v krajiščih s po velikosti enakima, po smeri pa nasprotnima točkovnima dvojicama  $M_T$  (slika 5.9). To pomeni, da je notranji torzijski moment  $M_x$  po celotni dožini nosilca enakomeren ( $M_x = M_T$ ). Od tod tudi ime primera – enakomerna torzija. Kot sledi iz enačb (5.26), obravnavana obtežba ustreza primeru, ko je plašč nosilca neobtežen ( $p_{nx} = p_{ny} = p_{nz} = 0$ ), prav tako pa ni specifične prostorninske obtežbe ( $v_x = v_y = v_z = 0$ ). Razen tega vzamemo, da v nobenem prečnem prerezu ni preprečena izbočitev. Obravnavani primer je v literaturi znan tudi pod imeni: čista, neovirana, Saint-Venantova torzija.



Slika 5.9

Kot osnovno predpostavko o deformiranju nosilca pri torzijski obtežbi spet vzamemo, da se velikost in oblika prečnega prereza v ravnini  $(y, z)$  med delovanjem obtežbe ne spreminjata.

Ker ni vzdolžne obtežbe in s tem tudi ne osne sile, lahko v skladu z

enačbo (5.71) zanemarimo tudi specifično spremembo dolžine v smeri vzdolžne osi.

$$\varepsilon_{yy} \approx \varepsilon_{zz} \approx \varepsilon_{yz} \approx 0 \quad \text{in} \quad \varepsilon_{xx} \approx 0. \quad (5.128)$$

Gre torej za primer deformacijskega stanja, pri katerem prevladujejo spremembe pravih kotov  $\varepsilon_{xy}$  in  $\varepsilon_{xz}$  v ravninah  $(x, y)$  in  $(x, z)$ . Koordinatni vektorji deformacij so tedaj

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_{xy} \mathbf{e}_y + \varepsilon_{xz} \mathbf{e}_z \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y = \varepsilon_{xy} \mathbf{e}_x \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z = \varepsilon_{xz} \mathbf{e}_x. \quad (5.129)$$

### Konstitucijske enačbe

Ob upoštevanju predpostavk (5.128) sledijo iz konstitucijskih enačb (4.9) naslednje enostavne zveze

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \quad (5.130)$$

$$\sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_{xx} \approx \sigma_{yy} \approx \sigma_{zz} \approx \sigma_{yz} \approx 0. \quad (5.131)$$

### Ravnotežne enačbe

Ravnotežne enačbe (4.1) se ob upoštevanju enačb (5.131) in predpostavke, da ni prostorninske obtežbe, glasijo

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (5.132)$$

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (5.133)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = 0. \quad (5.134)$$

Enačbi (5.133) in (5.134) povesta, da sta napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  neodvisni od vzdolžne koordinate  $x$ , kar je pri konstantnem torzijskem momentu tudi razumljivo

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(y, z) \quad \text{in} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}(y, z). \quad (5.135)$$

Iz enačb (5.130) sledi, da sta tudi deformaciji  $\varepsilon_{xy}$  in  $\varepsilon_{xz}$  le funkciji prereznih koordinat  $y$  in  $z$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}(y, z) \quad \text{in} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}(y, z). \quad (5.136)$$

Zapišimo še ravnotežne pogoje (4.3) za plašč  $\mathcal{S}_{pl}$ . Ker je plašč nosilca neobtežen, dobimo

$$\mathcal{S}_{pl} : \quad \sigma_{yx}e_{ny} + \sigma_{zx}e_{nz} = 0. \quad (5.137)$$

Upoštevali smo, da je nosilec valjaste ali prizmatične oblike, zato zunanja normala plašča  $\mathbf{e}_n$  nima komponente v smeri osi  $x$  ( $e_{nx} = 0$ ). Prav lahko je ugotoviti, da sta pri tem preostali dve ravnotežni enačbi na plašču  $\mathcal{S}_{pl}$  identično izpolnjeni.

Dodajmo še četrto od enačb (5.29). Ta enačba pove, kako je notranji torzijski moment  $M_x$ , ki smo ga določili iz ravnotežnega pogoja (5.33), izražen z napetostmi

$$M_x = \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x. \quad (5.138)$$

### Kinematične enačbe

Najbolj značilna kinematična količina pri torzijskem nosilcu je nedvomno torzijski zasuk  $\omega_x$ , to je zasuk prečnega prereza okrog vzdolžne osi nosilca. Ob predpostavki, da se prerez v svoji ravnini obnaša kot toga šipa, je zasuk  $\omega_x$  enak v vseh točkah prereza, torej se spreminja le v odvisnosti od koordinate  $x$ , glede na koordinati  $y$  in  $z$  pa je konstanten. Ker je torzijski notranji moment enakomeren po celotni dolžini nosilca, lahko sklepamo, da se tudi torzijski zasuk  $\omega_x$  enakomerno spreminja vzdolž nosilca. To pomeni, da lahko torzijski zasuk  $\omega_x$  zapišemo kot linearno funkcijo koordinate  $x$

$$\omega_x(x) = \omega_x^0 + \theta(x - x_0). \quad (T.13)$$

Konstanto

$$\theta = \frac{d\omega_x}{dx} \quad (T.14)$$

imenujemo *specifični torzijski zasuk*, saj pove, za koliko se nosilec na enoto dolžine zasuče okrog svoje vzdolžne osi.

Kakor sledi iz enačbe (T.13), smo z  $\omega_x^0$  označili torzijski zasuk referenčnega prereza pri  $x = x_0$ . Za referenčni prerez je smiselno izbrati prerez, za katerega vnaprej poznamo torzijski zasuk. Na *sliki T-1*, na primer, je prerez pri  $x = x_0$  torzijsko nevrtiljivo podprt, torej je  $\omega_x^0 = 0$ .

Ob upoštevanju predpostavke, da se prečni prerez v svoji ravnini obnaša kot toga šipa, se tudi pri določanju pomikov  $u_y$  in  $u_z$  izognemo reševanju kinematičnih enačb (2.184) v splošni obliki. V ta namen razstavimo vektor pomika  $\mathbf{u}$  poljubne točke prečnega prereza v vektor  $\mathbf{u}^*$ , ki leži v ravnini prečnega prereza, in v vektor  $u_x \mathbf{e}_x$ , ki predstavlja izbočitev

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^* &= u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Na enak način razstavimo pomik  $\underline{\mathbf{u}}$  težišča  $\underline{T}$  prečnega prereza

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}} &= u \mathbf{e}_x + \underline{\mathbf{u}}^* \\ \underline{\mathbf{u}}^* &= v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (5.145)$$

V ravnini prečnega prereza je

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega_x \mathbf{e}_x, \quad (5.146)$$

in pomik  $\mathbf{u}^*$  poljubne točke  $T(x, y, z)$ , ki je glede na težišče  $\underline{T}$  določena s krajevnim vektorjem  $\boldsymbol{\rho} = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ , izrazimo v skladu z enačbo (1.394)

$$\mathbf{u}^* = \underline{\mathbf{u}}^* + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\rho} = (v - z\omega_x) \mathbf{e}_y + (w + y\omega_x) \mathbf{e}_z. \quad (5.147)$$

Pri določitvi torzijskega zasuka  $\omega_x$  smo potihem domnevali, da se prerez zavrti okrog vzdolžne osi  $x$ , torej okrog težišča prereza  $\underline{T}$ . Vendar podrobnejša proučitev gibanja prereza kot toge šipe pokaže, da je takšna

domneva upravičena le pri dvojno simetričnih prerezih. Pri vseh drugih pa lahko v ravnini prečnega prereza najdemo posebno točko  $S(y_S, z_S)$ , ki ne sovпада s težiščem  $\mathcal{T}$ , in ki se pri torzijski obtežbi nosilca translatorno nič ne premakne. To pomeni, da se prečni prerez  $\mathcal{A}_x$  kot toga šipa zavrti za kot  $\omega_x$  okoli točke  $S$ , ki jo imenujemo *torzijsko središče prereza* in jo opredelimo z zahtevo, da je njen pomik  $\mathbf{u}^*$  enak nič

$$\mathbf{u}^*(S) = (v - z_S \omega_x) \mathbf{e}_y + (w + y_S \omega_x) \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad (5.148)$$

Enačba (5.148) je izpolnjena, če velja

$$v = z_S \omega_x \quad \text{in} \quad w = -y_S \omega_x. \quad (5.149)$$

Pomik  $\mathbf{u}^*$  poljubne točke prereza je tako

$$\mathbf{u}^* = -\omega_x (z - z_S) \mathbf{e}_y + \omega_x (y - y_S) \mathbf{e}_z. \quad (5.150)$$

Primerjava z enačbo (5.144) pokaže, da sta pomika  $u_y$  in  $u_z$  v prečnem prerezu  $\mathcal{A}_x$  linearni funkciji koordinat  $z$  oziroma  $y$

$$\begin{aligned} u_y &= -\omega_x (z - z_S) \\ u_z &= \omega_x (y - y_S). \end{aligned} \quad (5.151)$$

Vzdolžni pomik  $u_x$  nastopa v prvi, četrti in šesti od kinematičnih enačb (4.5). Iz prve sledi, da je izbočitev, ki jo opisuje ta pomik, neodvisna od vzdolžne koordinate  $x$ , torej  $u_x = u_x(y, z)$ . Ob upoštevanju zvez (5.128) in (5.151) sledi enaka ugotovitev tudi iz preostalih dveh kinematičnih enačb

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} &\quad \rightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_{xy} + \theta (z - z_S) \\ 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} &\quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 2\varepsilon_{xz} - \theta (y - y_S). \end{aligned} \quad (5.152)$$

Kakor lahko hitro preštejemo, določa mehansko stanje nosilca z enakomernim torzijskim momentom  $M_x$  devet količin: napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$ ,

deformaciji  $\varepsilon_{xy}$  in  $\varepsilon_{xz}$ , specifični torzijski zasuk  $\theta$ , torzijski zasuk  $\omega_x$  ter pomiki  $u_x$ ,  $u_y$  in  $u_z$ . Dobimo jih kot rešitve naslednjega sistema devetih enačb

$$\mathcal{A}_x : \quad M_x = \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x \quad (5.153)$$

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (5.154)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \quad (5.155)$$

$$\sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} \quad (5.156)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\varepsilon_{xy} + \theta (z - z_S) \quad (5.157)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = 2\varepsilon_{xz} - \theta (y - y_S) \quad (5.158)$$

$$\omega_x = \omega_x^0 + \theta (x - x_0) \quad (5.159)$$

$$u_y = -\omega_x (z - z_S) \quad (5.160)$$

$$u_z = \omega_x (y - y_S). \quad (5.161)$$

Pri reševanju sistema moramo upoštevati statični robni pogoj

$$\mathcal{S}_{pl} : \quad \sigma_{yx} e_{ny} + \sigma_{zx} e_{nz} = 0 \quad (5.162)$$

ter kinematične robne pogoje, ki so odvisni od načina podpiranja nosilca.

Če si sistem osnovnih enačb čiste torzije ogledamo nekoliko natančneje, vidimo, da ga lahko rešujemo v dveh delih: najprej iz prvih šestih enačb določimo napetosti, deformacije, pomik  $u_x$  in specifični torzijski zasuk  $\theta$ , nato pa iz zadnjih treh brez težav izračunamo še torzijski zasuk  $\omega_x$  in prečna pomika  $u_y$  in  $u_z$ . V nadaljevanju sta prikazana postopka reševanja osnovnih enačb čiste torzije z metodo pomikov in z metodo napetosti.

### Metoda pomikov

V skladu z osnovno idejo metode pomikov skušamo ravnotežno enačbo (5.154) izraziti s pomiki. V ta namen najprej uporabimo konstitucijski enačbi (5.155) in (5.156) in zapišemo enačbo (5.154) z deformacijami

$$\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} = 0. \quad (5.163)$$

Z enačbama (5.152) izrazimo deformaciji  $\varepsilon_{xy}$  in  $\varepsilon_{xz}$  s pomiki

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.164)$$

in ob upoštevanju enačb (5.151) sledi

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nabla_{yz}^2 u_x = 0. \quad (5.165)$$

Dobili smo Laméjevo enačbo za primer enakomerne torzije ravnega nosilca, ki pove, da je pomik  $u_x$  harmonična funkcija nad prečnim prerezom  $\mathcal{A}_x$ . Na prvi pogled ponuja metoda pomikov zelo ugodno rešitev, saj enačbi (5.165) zadošča vsaka harmonična funkcija. Vendar se reševanje zaplete pri robnem pogoju (5.162), ki ga s pomikom  $u_x$  izrazimo takole

$$\mathcal{L}_{pl} : \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} - \theta(z - z_S) \right] e_{ny} + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \theta(y - y_S) \right] e_{nz} = 0. \quad (5.166)$$

V robnem pogoju nastopata parcialna odvoda pomika  $u_x$ , razen tega pa tudi specifični torzijski zasuk  $\theta$ , ki ga moramo določiti iz pogoja, da je “ravnotežni” torzijski moment prereza  $\mathcal{A}_x$  enak “konstitucijskemu”

$$M_x = \int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x. \quad (5.167)$$

Po krajši izpeljavi lahko enačbo (5.167) zapišemo v naslednji obliki

$$M_x = 2G \int_{\mathcal{A}_x} \left( y \frac{\partial u_x}{\partial z} - z \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dA_x + 2G\theta (I_y + I_z). \quad (5.168)$$

Laméjevo enačbo (5.165) moramo torej reševati ob hkratnem upoštevanju robnega pogoja (5.166) in enačbe (5.168), kar je analitično mogoče narediti le pri krožnem prerezu, pri bolj splošnih oblikah prečnega prereza pa naletimo na hude računske težave. Zato se reševanju problema enakomerne torzije z metodo pomikov odpovemo in se v nadaljevanju posvetimo rešitvi z *metodo napetosti*, ki je, kakor bomo pokazali, veliko lažja.

### Metoda napetosti pri enakomerni torziji

Kakor smo ugotovili v 4. poglavju, je treba pri reševanju osnovnih enačb mehanskega stanja trdnega telesa z metodo napetosti vpeljati dodatne, kompatibilnostne pogoje, ki zagotavljajo enolično integrabilnost pomikov in zasukov iz kinematičnih enačb. V našem primeru so torzijski zasuk  $\omega_x$  in prečna pomika  $u_y$  in  $u_z$  vnaprej enolično določeni z enačbami (5.159) do (5.161). Za določitev vzdolžnega pomika  $u_x$  pa imamo dve enačbi, (5.157) in (5.158). Zato moramo enoličnost pomika  $u_x$  zagotoviti posebej. Ker je  $u_x = u_x(y, z)$ , je dovolj, če zahtevamo, da je integral popolnega diferenciala pomika  $u_x$  po poljubni sklenjeni krivulji  $\mathcal{C}$  znotraj prečnega prereza  $\mathcal{A}_x$  enak nič

$$\oint_{\mathcal{C}} du_x = 0 \quad (\mathcal{C} \in \mathcal{A}_x). \quad (5.169)$$

Parcialna odvoda pomika  $u_x$  po  $y$  in  $z$  izrazimo z enačbama (5.157) in (5.158) in dobimo

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} du_x &= \oint_{\mathcal{C}} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right) = \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \left\{ [2\varepsilon_{xy} + \theta(z - z_S)] dy + [2\varepsilon_{xz} - \theta(y - y_S)] dz \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.170)$$

Krivuljni integral na desni strani prevedemo z Greenovim izrekom v ploskovni integral po ploskvi  $\mathcal{A}_n$ , ki jo v prečnem prerezu  $\mathcal{A}_x$  ograjuje



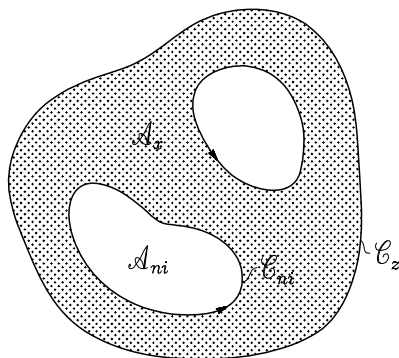
krivulja  $\mathcal{C}$ . Kompatibilnostni pogoj (5.169) preide tako v naslednjo obliko

$$\int_{\mathcal{A}_n} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \theta \right) dA_x = 0. \quad (5.171)$$

Pri enkrat sovisnih prečnih prerezih lahko poljubno krivuljo  $\mathcal{C}$  skrčimo na točko znotraj integracijskega območja  $\mathcal{A}_x$ . V tem primeru je potreben in zadosten pogoj za enoličnost pomika  $u_x$  kar

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \theta = 0. \quad (5.172)$$

Pri večkrat sovisnih prerezih z notranjimi odprtinami (slika 5.10) moramo za krivulje, ki obkrožajo notranje odprtine in jih torej ne moremo skrčiti na točko znotraj območja  $\mathcal{A}_x$ , izpolniti dodatne kompatibilnostne pogoje.



Slika 5.10

Dodatne kompatibilnostne pogoje praviloma zapišemo kar za mejne krivulje notranjih odprtin  $\mathcal{C}_{ni}$ . Za  $(m + 1)$ krat sovisen prečni prerez z  $m$  odprtinami dobimo

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} du_x = \oint_{\mathcal{C}_{ni}} \left\{ [2\varepsilon_{xy} + \theta(z - z_S)] dy + [2\varepsilon_{xz} - \theta(y - y_S)] dz \right\} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.173)$$

Dobljeno enačbo preuredimo

$$2 \oint_{\mathcal{C}_{ni}} (\varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz) + \theta \oint_{\mathcal{C}_{ni}} [(z - z_S) dy - (y - y_S) dz] = 0 \quad (5.174)$$

in drugi člen z Greenovim izrekom (5.93) prevedemo na ploskovni integral po območju notranje odprtine  $\mathcal{A}_{ni}$ , ki jo ograjuje krivulja  $\mathcal{C}_{ni}$ . Ploščino notranje odprtine  $\mathcal{A}_{ni}$  označimo z  $A_{ni}$  in dobimo

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} (\varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz) - \theta A_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.175)$$

V skladu z osnovno idejo metode napetosti izrazimo tudi kompatibilnostne enačbe z napetostmi. Ob upoštevanju konstitucijskih zvez (5.130) iz enačb (5.172) in (5.175) sledi

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - 2\theta G = 0 \quad (5.176)$$

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} (\sigma_{xy} dy + \sigma_{xz} dz) - 2\theta G A_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.177)$$

Navidez smo s tem nalogo še bolj zapletli, saj smo dobili dodatne enačbe. V resnici pa se nadaljnje reševanje problema znatno poenostavi, če vpeljemo *napetostno funkcijo*  $\varphi(y, z)$ , s katero izrazimo napetosti na naslednji način

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \theta G \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \sigma_{xz} &= -\theta G \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.178)$$

Z vstavitvijo tako definiranih napetosti v ravnotežni pogoj (5.154) se hitro izkaže, da je ta pogoj identično izpolnjen in ga v nadaljevanju ni več treba upoštevati. Kompatibilnostni pogoj (5.176) pa ob upoštevanju substitucije (5.178) preide v naslednjo obliko

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 0 \quad \text{ali} \quad \nabla_{yz}^2 \varphi + 2 = 0. \quad (5.179)$$

To je tako imenovana *Poissonova diferencialna enačba enakomerne torzije*, ki hkrati predstavlja ravnotežni in kompatibilnostni pogoj in jo rešujemo ob robnem pogoju (5.162). Tudi ta pogoj izrazimo z napetostno funkcijo  $\varphi$  in za plašč  $\mathcal{S}_{pl}$  dobimo

$$\sigma_{yx} e_{ny} + \sigma_{zx} e_{nz} = \theta G \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_{ny} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_{nz} \right) = 0. \quad (5.180)$$

Robni pogoj (5.180) je ugodno izraziti v naravnih koordinatah  $s$  in  $n$ , ki se nanašajo na medsebojno pravokotna bazna vektorja  $\mathbf{e}_s$  vzdolž tangente in  $\mathbf{e}_n$  vzdolž normale na mejno krivuljo  $\mathcal{C}_x$  (slika 5.7). Smerna kosinusa normale  $e_{ny}$  in  $e_{nz}$  izrazimo z enačbama (5.101), vstavimo v enačbo (5.180) in ob upoštevanju pravila za posredno odvajanje dobimo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \quad (5.181)$$

S tem smo robni pogoj (5.162) prevedli v zelo prikladno obliko, ki pove, da mora biti napetostna funkcija  $\varphi$  vzdolž mejne krivulje prečnega prereza konstantna. Pogoj velja tako za zunanjo mejno krivuljo kot tudi za mejne krivulje morebitnih notranjih odprtin. Pri tem so lahko konstantne vrednosti napetostne funkcije vzdolž posameznih mejnih krivulj različne. Za napetostno funkcijo na zunanji mejni krivulji  $\mathcal{C}_x$  praviloma privzamemo kar vrednost  $\varphi_z = 0$ . Kot kažeta enačbi (5.178), sta napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  izraženi z odvodi napetostne funkcije, zato poljubna izbira konstantne vrednosti napetostne funkcije na eni izmed mejnih krivulj nič ne vpliva na končne rezultate.

Pri enkrat sovisnih prečnih prerezih izraža Poissonova diferencialna enačba (5.179) potrebni in zadostni pogoj za enoličnost pomika  $u_x$ . Pri večkrat sovisnih prerezih pa moramo izpolniti še dodatne kompatibilnostne pogoje (5.177) za vsako od notranjih odprtin. Z napetostno funkcijo  $\varphi$  jih zapišemo takole

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right) - 2A_{ni} = 0. \quad (5.182)$$

Izraz v okroglem oklepaju pod integralom lahko ob upoštevanju enačb (5.101) še nadalje preoblikujemo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_{ny} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_{nz} \right) ds. \quad (5.183)$$

Parcialna odvoda, ki nastopata v gornji enačbi, sta komponenti gradienta  $\mathbf{f}$  skalarne polja  $\varphi(y, z)$

$$\mathbf{f} = f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z = \text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (5.184)$$

Enačbo skalarno pomnožimo z  $\mathbf{e}_n$  in po analogiji z enačbami (1.63) dobimo

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_n = f_y e_{ny} + f_z e_{nz} = f_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (5.185)$$

Dodatne kompatibilnostne pogoje (5.182) za večkrat sovisne prereze lahko sedaj zapišemo kot sledi

$$\oint_{\mathcal{C}_{ni}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + 2A_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.186)$$

Pri enkrat sovisnih prerezih dobimo napetostno funkcijo  $\varphi$  kot rešitev kompatibilnostne enačbe (5.179) ob robnem pogoju (5.181). Pri večkrat sovisnih prerezih upoštevamo še dodatne kompatibilnostne enačbe (5.186) in z njimi določimo vrednosti napetostne funkcije na robovih notranjih odprtin. V obeh primerih je očitno, da je funkcijska oblika napetostne funkcije  $\varphi$  nad prečnim prerezom odvisna le od njegove velikosti in oblike, nič pa od obtežbe, načina podpiranja in materialnih lastnosti nosilca. Napetostna funkcija  $\varphi$  je torej geometrijska karakteristika prečnega prereza, tako kot njegova ploščina, obseg, upogibni vztrajnostni momenti, lega težišča in podobno.

Preostane nam še določitev specifičnega torzijskega zasuka  $\theta$ . V ta namen zapišimo enačbo (5.153), ki predstavlja povezavo z zunanjo obtežbo, z napetostno funkcijo  $\varphi$

$$M_x = -\theta G \int_{\mathcal{A}_x} \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dA_x. \quad (5.187)$$

Če vpeljemo okrajšavo

$$I_x = - \int_{\mathcal{A}_x} \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dA_x, \quad (5.188)$$

dobimo zvezo med torzijskim momentom prereza  $M_x$  in specifičnim torzijskim zasukom  $\theta$  v preprosti obliki

$$M_x = \theta GI_x. \quad (5.189)$$

Z uporabo zveze (5.143) lahko sedaj zapišemo osnovno deformacijsko enačbo enakomerne torzije v naslednji obliki

$$\theta = \frac{d\omega_x}{dx} = \frac{M_x}{GI_x}. \quad (5.190)$$

Glede na podobnost dobljene enačbe z enačbama (5.77) in (5.78) imenujemo količino  $I_x$  *torzijski vztrajnostni moment prečnega prereza*  $\mathcal{A}_x$ . Oznaka je upravičena, saj iz enačbe (5.188) sledi, da je  $I_x$  odvisen le od velikosti in oblike prereza  $\mathcal{A}_x$ . Pri praktičnem delu bi bilo vrednotenje torzijskega vztrajnostnega momenta  $I_x$  iz enačbe (5.188) zamudno, še posebej pri večkrat sovisnih prerezih. Pomagamo si na naslednji način: v enačbi (5.188) upoštevamo pravilo za odvajanje produkta in enačbo zapišemo takole

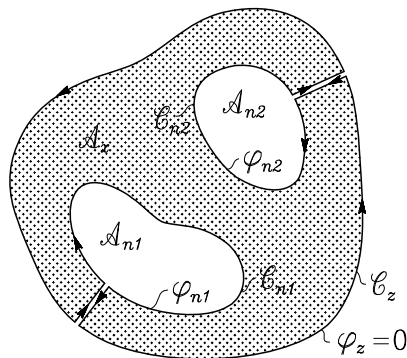
$$I_x = - \int_{\mathcal{A}_x} \left[ \frac{\partial}{\partial y}(y\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(z\varphi) \right] dA_x + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x. \quad (5.191)$$

Prvega od integralov na desni strani prevedemo z Greenovim izrekom (5.93) na integral po sklenjeni krivulji  $\mathcal{C}_x$ , ki ograjuje prečni prerez  $\mathcal{A}_x$ , in dobimo

$$I_x = \oint_{\mathcal{C}_x} [\varphi(z dy - y dz)] + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x. \quad (5.192)$$

Pri  $(m+1)$ -krat sovisnem prerezu sestavimo sklenjeno mejno krivuljo  $\mathcal{C}_x$  iz več delov, tako da z njo zajamemo celotno območje prečnega

prereza  $\mathcal{A}_x$  (slika 5.11). Integrali vzdolž ravnih odsekov integracijske poti, s katerimi pridemo z zunanje mejne krivulje na notranjo in nazaj, se odštejejo, saj integriramo isto funkcijo enkrat v eni, drugič pa v drugi smeri. Preostane nam torej integriranje po zunanji mejni krivulji  $\mathcal{C}_z$ , kjer ima napetostna funkcija konstantno vrednost  $\varphi_z$ , ter po notranjih mejnih krivuljah  $\mathcal{C}_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), kjer ima napetostna funkcija konstantne vrednosti  $\varphi_{ni}$



Slika 5.11

$$I_x = \varphi_z \oint_{\mathcal{C}_z} (z dy - y dz) + \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} \oint_{\mathcal{C}_{ni}} (z dy - y dz) + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x. \quad (5.193)$$

Kakor smo že omenili, privzamemo za napetostno funkcijo na zunanji mejni krivulji vrednost  $\varphi_z = 0$ , integrale vzdolž notranjih mejnih krivulj pa z Greenovim izrekom prevedemo na ploskovne integrale po notranjih odprtinah. Pri tem moramo v Greenovem izreku spremeniti predznak ploskovnega integrala, ker integriramo v sourni, torej “negativni” smeri. Tako dobimo končno formulo za računanje torzijskega vztrajnostnega momenta

$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} A_{ni}. \quad (5.194)$$

Kot vidimo, je torzijski vztrajnostni moment  $I_x$  enak dvojni prostornini območja, ki ga določa napetostna funkcija  $\varphi$  nad prečnim prerezom  $\mathcal{A}_x$ .

Zaporedje računskih postopkov pri reševanju problema enakomerne torzije po metodi napetosti je sedaj jasno pred nami: najprej ob upoštevanju robnih pogojev (5.181) iz Poissonove enačbe (5.179) določimo napetostno funkcijo  $\varphi(y, z)$ ; pri večkrat sovisnih prerezih moramo uporabiti še dodatne kompatibilnostne pogoje (5.186), ki nas pripeljejo do konstantnih vrednosti napetostne funkcije nad  $m$  notranjimi odprtini  $\varphi_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Sedaj lahko z enačbo (5.194) izračunamo torzijski vztrajnostni moment  $I_x$ , z enačbo (5.190) pa tudi specifični torzijski zasuk  $\theta$ . Izračunamo še parcialne odvode napetostne funkcije  $\varphi$  po koordinatah  $y$  in  $z$  ter po vstavitvi v enačbi (5.178) dobimo strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$ . Kotni deformaciji  $\varepsilon_{xy}$  in  $\varepsilon_{xz}$  določimo iz konstitucijskih enačb (5.130). Če se omejimo na dvojno simetrične prereze, pri katerih se torzijsko središče  $S$  ujema s težiščem  $\mathcal{T}$  ( $y_S = z_S = 0$ ), lahko z enačbama (5.157) in (5.158) določimo parcialna odvoda pomika  $u_x$  ter njegov popolni diferencial

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz. \quad (5.195)$$

Pomik  $u_x$  poljubne točke  $T$  prečnega prereza  $\mathcal{A}_x$  lahko sedaj izračunamo v odvisnosti od pomika  $u_x$  referenčne točke  $T_0$

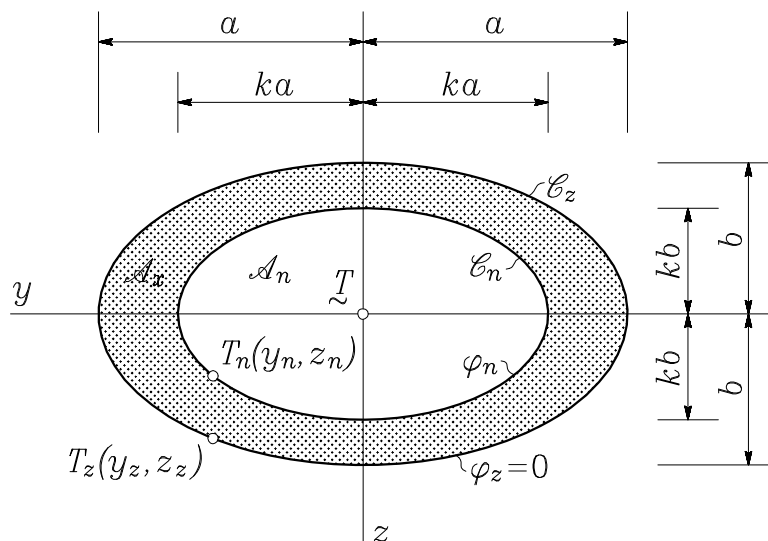
$$u_x(T) = u_x(T_0) + \int_{T_0}^T du_x. \quad (5.196)$$

Integral v gornji enačbi je nedvomno neodvisen od izbire integracijske poti med točkama  $T_0$  in  $T$ , saj smo z izpolnitvijo enačb (5.179) in (5.186) zagotovili enoličnost pomika  $u_x$ .

Ker poznamo specifični torzijski zasuk  $\theta$ , lahko iz enačb (5.159) do (5.161) brez težav določimo tudi torzijski zasuk  $\omega_x$  ter prečna pomika  $u_y$  in  $u_z$ .

**Enakomerna torzija nosilca z votlim eliptičnim prerezom**

Nosilec z eliptičnim ali krožnim prečnim prerezom je primer, pri katerem je mogoče poiskati analitično rešitev Poissonove diferencialne enačbe enakomerne torzije.



Slika Z-5.10 a

Vzemimo, da je zunanja mejna krivulja prereza elipsa  $\mathcal{E}_z$  s polosema  $a$  in  $b$  ( $a > b$ ), notranja mejna krivulja pa podobna elipsa  $\mathcal{E}_n$  s polosema  $ka$  in  $kb$  ( $0 \leq k < 1$ ) (slika Z-5.10 a). Enačbi mejnih krivulj sta tako

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z : \quad & \left(\frac{y_z}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_z}{b}\right)^2 = 1 \\ \mathcal{E}_n : \quad & \left(\frac{y_n}{ka}\right)^2 + \left(\frac{z_n}{kb}\right)^2 = 1. \end{aligned} \tag{a}$$

Za Poissonovo diferencialno enačbo enakomerne torzije (5.179)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 0 \tag{b}$$

je očitno, da lahko njeno splošno rešitev vedno poiščemo v obliki polinoma druge stopnje. V našem primeru jo glede na obliko prečnega



prereza vzamemo v naslednji obliki

$$\varphi(y, z) = C \left[ \left( \frac{y}{a} \right)^2 + \left( \frac{z}{b} \right)^2 - 1 \right], \quad (c)$$

kjer je  $C$  zaenkrat neznana konstanta. Z vstavitvijo drugih parcialnih odvodov funkcije  $\varphi$  v enačbo (b) dobimo

$$\frac{2C}{a^2} + \frac{2C}{b^2} + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (č)$$

in rešitev enačbe (b) je

$$\varphi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ \left( \frac{y}{a} \right)^2 + \left( \frac{z}{b} \right)^2 - 1 \right]. \quad (d)$$

Hitro se lahko prepričamo, da dobljena rešitev zadošča tudi robnim pogojem. Iz enačbe (5.181) sledi, da mora biti funkcija  $\varphi$  konstantna tako vzdolž zunanje mejne krivulje  $\mathcal{C}_z$  kakor tudi vzdolž notranje mejne krivulje  $\mathcal{C}_n$ . Vrednost napetostne funkcije na zunanjem robu dobimo z zapisom enačbe (d) v poljubni točki  $T_z(y_z, z_z)$

$$\varphi_z = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ \left( \frac{y_z}{a} \right)^2 + \left( \frac{z_z}{b} \right)^2 - 1 \right], \quad (e)$$

in zaradi prve od enačb (a) sledi

$$\varphi_z = 0, \quad (f)$$

kar smo že omenili kot najpreprostejšo možnost izbire vrednosti napetostne funkcije na zunanjem robu. Vrednost napetostne funkcije na notranjem robu prereza dobimo tako, da v rešitev (d) vstavimo koordinate točke  $T_n(y_n, z_n)$

$$\varphi_n = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ \left( \frac{y_n}{a} \right)^2 + \left( \frac{z_n}{b} \right)^2 - 1 \right]. \quad (g)$$

Ob upoštevanju druge od enačb (a) po krajši izpeljavi dobimo

$$\varphi_n = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1 - k^2). \quad (h)$$

Napetostna funkcija v obliki (d) je torej prava rešitev problema enakomerne torzije pri nosilcu z votlim eliptičnim prerezom. Primerjava enačbe (d) z enačbama (a) tudi pove, da so izohipse napetostne funkcije nad eliptičnim prerezom prav tako elipse.

Torzijski vztrajnostni moment prereza  $\mathcal{A}_x$  izračunamo z enačbo (5.194)

$$I_x = -2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ \frac{1}{a^2} \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x + \frac{1}{b^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x - \int_{\mathcal{A}_x} dA_x \right] + 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (1 - k^2) A_n. \quad (i)$$

Geometrijske karakteristike votlega eliptičnega prereza so

$$\begin{aligned} A_x &= \int_{\mathcal{A}_x} dA_x = \pi ab (1 - k^2) \\ A_n &= \int_{\mathcal{A}_n} dA_x = \pi ab k^2 \\ I_{yy} &= \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x = \frac{1}{4} \pi ab^3 (1 - k^4) \\ I_{zz} &= \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x = \frac{1}{4} \pi a^3 b (1 - k^4) \end{aligned} \quad (j)$$

in

$$I_x = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - k^4). \quad (k)$$

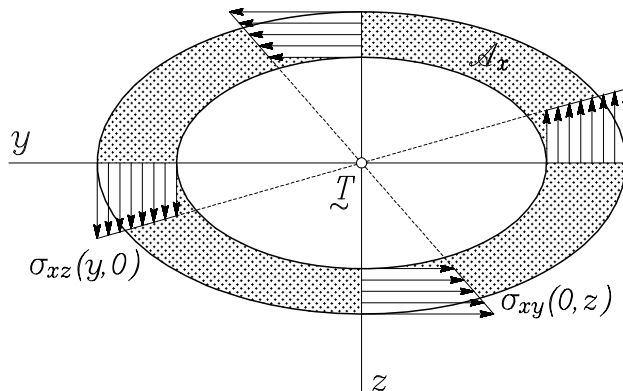
Specifični torzijski zasuk  $\theta$  določimo z enačbo (5.190)

$$\theta = M_x \frac{a^2 + b^2}{G \pi a^3 b^3 (1 - k^4)}, \quad (l)$$

strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  pa z enačbama (5.178)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= -\frac{2M_x}{\pi ab^3(1-k^4)} z \\ \sigma_{xz} &= \frac{2M_x}{\pi a^3b(1-k^4)} y.\end{aligned}\tag{m}$$

Enačbi povesta, da je strižna napetost  $\sigma_{xy}$  linearna glede na koordinato  $z$ , napetost  $\sigma_{xz}$  pa linearna glede na  $y$ .



Slika Z-5.10 b

Slika Z-5.10 b prikazuje potek strižnih napetosti vzdolž koordinatnih osi. Napetosti sta največji na robu, proti središču prereza pa se linearno zmanjšujeta. Če je prerez poln (brez notranje odprtine), je material v sredini bistveno manj izkoriščen kot na robu. Zato so pri torzijski obtežbi najbolj ekonomični nosilci z votlim prečnim prerezom in čim tanjšimi stenami (enocelični ali večcelični tankostenski nosilci). Če so stene tanke v primerjavi s siceršnjimi izmerami prereza, lahko zanemarimo spreminjanje strižne napetosti po debelini stene in računamo kar z enakomernim torzijskim strižnim tokom vzdolž srednje črte stene prereza. S preučevanjem opisanih nosilcev se ukvarja posebna veja konstrukcijske mehanike – teorija tankostenskih nosilcev.

Iz konstitucijskih enačb (5.130) določimo še kotni deformaciji  $\varepsilon_{xy}$  in  $\varepsilon_{xz}$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= -\frac{M_x}{G\pi ab^3(1-k^4)} z \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{M_x}{G\pi a^3b(1-k^4)} y.\end{aligned}\tag{n}$$

Določimo še izbočitev prečnega prereza, ki je izražena z vzdolžnim pomikom  $u_x$ . Ob upoštevanju enačb (5.195) in (5.196) dobimo

$$\begin{aligned}u_x(x, y, z) &= u_x(\mathcal{T}) + \int_0^y [2\varepsilon_{xy} + \theta(z - z_S)]_{z=0} dy + \\ &\quad \int_0^z [2\varepsilon_{xz} - \theta(y - y_S)] dz.\end{aligned}\tag{o}$$

Za referenčno točko smo izbrali kar težišče prečnega prereza  $\mathcal{T}(x, 0, 0)$ . Glede na dvojno simetrijo prereza  $\mathcal{A}_x$  vzamemo, da se točka  $\mathcal{T}$  nič ne pomakne v vzdolžni smeri, kar pomeni, da je  $u_x(\mathcal{T}) = 0$ . Razen tega se točka  $\mathcal{T}$  ujema s torzijskim središčem prereza  $S$ , zato je  $y_S = 0$  in  $z_S = 0$  in po vstavitvi zvez (l) in (n) sledi

$$u_x(x, y, z) = \frac{M_x}{G} \frac{(b^2 - a^2)}{\pi a^3 b^3 (1 - k^4)} yz.\tag{p}$$

Izbočitvena ploskev, ki jo opisuje enačba (p), je v diferencialni geometriji znana kot hiperbolični hiperboloid.

Končno si kot poseben primer oglejmo votli krožni prerez. Tedaj je  $a = b = r$  in iz enačb (d) do (n) sledi

$$\varphi = \frac{1}{2} (r^2 - y^2 - z^2)\tag{r}$$

$$\varphi_n = \frac{r^2}{2} (1 - k^2)\tag{s}$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{2} (1 - k^4)\tag{\check{s}}$$

$$\theta = \frac{M_x}{G\pi r^4(1-k^4)} \quad (t)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2M_x}{\pi r^4(1-k^4)} z \quad (u)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{2M_x}{\pi r^4(1-k^4)} y \quad (v)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{M_x}{G\pi r^4(1-k^4)} z \quad (z)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{M_x}{G\pi r^4(1-k^4)} y. \quad (\check{z})$$

Iz enačbe (p) pa sledi nekolikanj presenetljiva ugotovitev, da pri enakomerni torziji krožnega prereza ne pride do izbočitve ( $u_x = 0$ ).

### Enakomerna torzija nosilca z ozkim pravokotnim prečnim prerezom

V prejšnjem zgledu smo ugotovili, da so izohipse napetostne funkcije nad eliptičnim prečnim prerezom tudi elipse. Predstavljajmo si, da eliptični prečni prerez postopoma preoblikujemo v pravokotnega, tega pa še naprej, tako da postane višina prereza  $h$  veliko večja od njegove širine oziroma debeline  $\delta$  (slika Z-5.11 a). V tem primeru so izohipse praktično povsod razen v neposredni bližini krajših robov vzporedne z daljšo stranico prereza. To pomeni, da se napetostna funkcija v smeri višine prereza ne spreminja in v našem primeru lahko za pretežni del prereza vpeljemo poenostavitev

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (a)$$

Prva od enačb (5.178) pove, da na omenjenem območju ni strižne napetosti  $\sigma_{xy}$

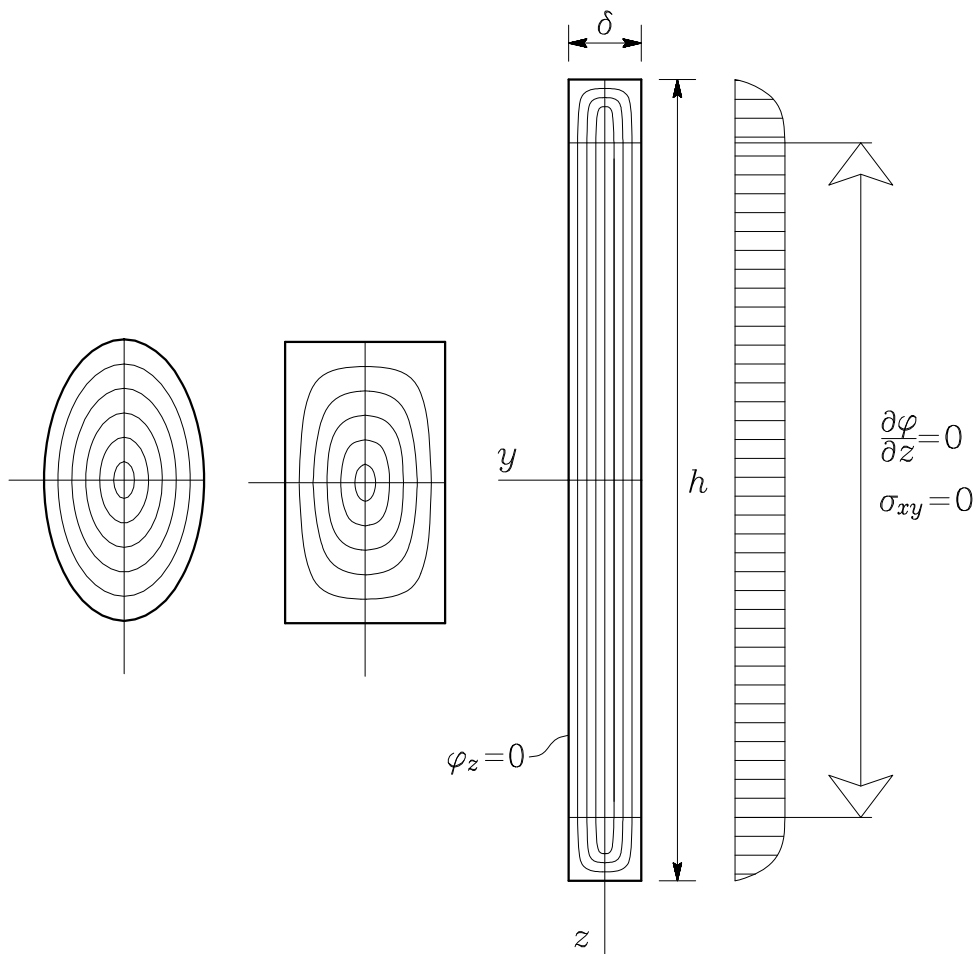
$$\sigma_{xy} = \theta G \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (b)$$

Poissonova diferencialna enačba (5.179) postane ob poenostavitvi (a) navadna diferencialna enačba drugega reda

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \quad (c)$$

s splošno rešitvijo

$$\varphi = -y^2 + C_1 y + C_2. \quad (\check{c})$$



Slika Z-5.11 a

Integracijski konstanti  $C_1$  in  $C_2$  določimo iz pogoja, da mora biti vrednost napetostne funkcije na robovih  $y = \pm\delta/2$  enaka nič

$$\varphi\left(y = -\frac{\delta}{2}\right) = \varphi\left(y = \frac{\delta}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{\delta^2}{4}. \end{aligned} \quad (d)$$

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe na pretežnem delu ozkega pravokotnega prereza je torej

$$\varphi = -y^2 + \frac{\delta^2}{4}. \quad (e)$$

Torzijski vztrajnostni moment  $I_x$  določimo z enačbo (5.194), kjer vzamemo  $dA_x = hdy$  in dobimo

$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x = 2h \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(-y^2 + \frac{\delta^2}{4}\right) dy \quad \rightarrow \quad I_x = \frac{1}{3} h\delta^3. \quad (f)$$

Specifični torzijski zasuk  $\theta$  je po enačbi (5.190)

$$\theta = \frac{3M_x}{Gh\delta^3}, \quad (g)$$

strižna napetost  $\sigma_{xz}$  pa po drugi od enačb (5.178)

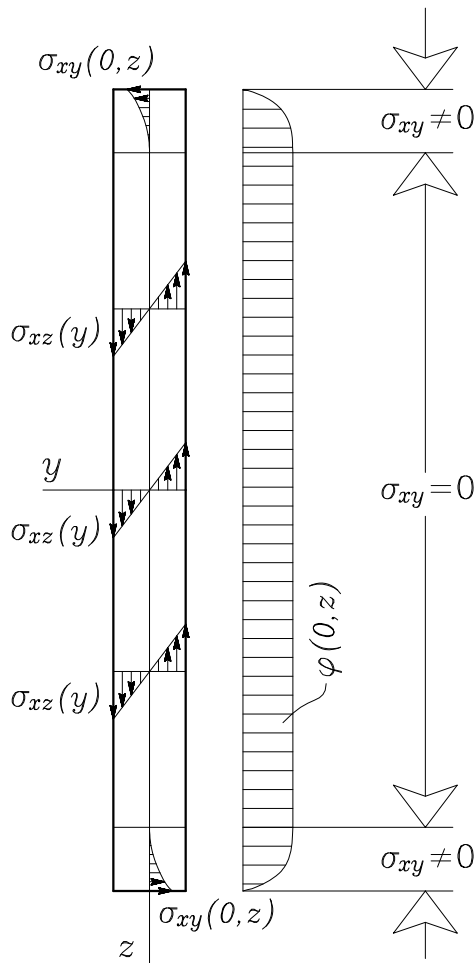
$$\sigma_{xz} = \frac{6M_x}{h\delta^3} y. \quad (h)$$

Napetost  $\sigma_{xz}$  je torej linearno razporejena po debelini prereza  $\delta$ . Največje vrednosti doseže na robovih ( $y = \pm\delta/2$ ) (slika Z-5.11 b)

$$\sigma_{xz}(y = \pm\delta/2) = \pm \frac{3M_x}{h\delta^2}. \quad (i)$$

Za kontrolo vstavimo dobljeno napetost  $\sigma_{xz}$  v enačbo (5.153). Ob predpostavki (b) dobimo

$$M_x = \int_{A_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x = \frac{6M_x}{h\delta^3} h \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} y^2 dy = \frac{M_x}{2}. \quad (j)$$



Slika Z-5.11 b

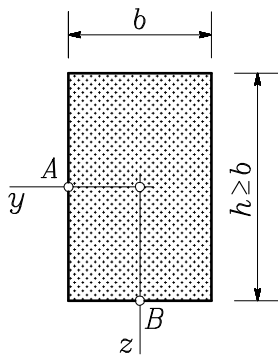
Rezultat je očitno protisloven, odgovor pa je skrit ravno v vplivu napetosti  $\sigma_{xy}$ , ki smo jih v dosedanjih izpeljavah zanemari-li. Teh napetosti ob privzeti poenostavitvi ne znamo določiti, vendar je jasno, da sta ob krajših robovih ozkega pravokotnega prereza prvi odvod napetostne funkcije po  $z$  in s tem tudi strižna napetost  $\sigma_{xy}$  različna od nič (slika Z-5.11 b). Kakor smo ugotovili že pri eliptičnem prerezu, so strižne napetosti na robovih, ki sta bolj oddaljena od težišča, manjše od tistih na "daljših" robovih in torej navadno niso merodajne za dimenzioniranje. Zaradi večje ročice glede na težišče prereza pa očitno ravno napetosti  $\sigma_{xy}$  na krajših robovih prispevajo manjkajočo polovico torzijskega momenta v prečnem prerezu.



### Enakomerna torzija nosilca s splošnim pravokotnim prečnim prerezom

Pri nosilcu s splošnim pravokotnim prečnim prerezom, ki ne ustreza predpostavki o ozkem pravokotnem prerezu, analitične rešitve problema enakomerne torzije niso znane. V literaturi pa najdemo različne numerične rešitve, izpeljane na primer s Fourierovimi vrstami, z metodo končnih diferenc ali z metodo končnih elementov. Na osnovi primerno natančnih numeričnih rezultatov so za praktično rabo pripravljene tabele koeficientov za razmeroma preprosto in hitro izvedenotenje najpomembnejših torzijskih količin v poljubnem pravokotnem prečnem prerezu.

Preglednica T-1



$$I_x = \eta \frac{hb^3}{3}$$

$$\tau_{max} = \sigma_{xz}(A) = \beta \frac{3M_x}{hb^2}$$

$$\tau^* = \sigma_{xy}(B) = \gamma \tau_{max}$$

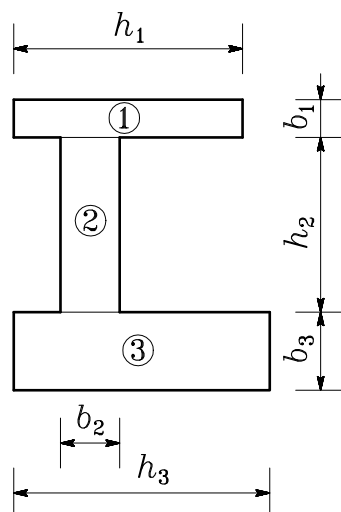
$h/b$	$\eta$	$\beta$	$\gamma$
1	0.423	1.603	1.000
1.5	0.588	1.443	0.859
2	0.687	1.355	0.795
2.5	0.747	1.292	0.766
3	0.789	1.248	0.753
4	0.843	1.182	0.745
6	0.897	1.115	0.743
8	0.921	1.086	0.742
10	0.939	1.065	0.742
$\infty$	1.000	1.000	0.742

V Preglednici T-1 so podani koeficienti, s katerimi glede na dejansko razmerje stranic pravokotnega prereza določimo torzijski vztrajnostni

moment  $I_x$ , največjo strižno napetost  $\tau_{max}$ , ki nastopa na sredini daljše starnice pravokotnika, in pripadajočo strižno napetost  $\tau^*$  na sredini krajše stranice. Pri tem sta koeficienta  $\eta$  in  $\beta$  korekcijska faktorja za določitev torzijskega vztrajnostnega momenta in največje strižne napetosti glede na vrednosti, ki bi ju dobili z uporabo formul za ozek pravokotni prerez.

### Odprt prečni prerez, sestavljen iz pravokotnih podprerezov

Pri praktičnem delu v konstrukcijski mehaniki imamo pogosto opraviti s prečnimi prerezi, sestavljenimi iz pravokotnih podprerezov. Kot primer vzemimo prečni prerez, sestavljen iz treh pravokotnih podprerezov, od katerih nobenega ne moremo obravnavati kot izrazito ozek pravokotnik (Slika T-9)



Slika T-9

Pri tem se postavi vprašanje, kako se celotni notranji torzijski moment  $M_x$  porazdeli med posamezne podpreze. Odgovor poiščemo ob upoštevanju osnovne predpostavke, da se prerez pri torzijski obremenitvi v svoji ravnini vrta okrog vzdolžne osi nosilca kot toga šipa. To

pomeni, da so specifični torzijski zasuki vsakega podprereza enaki torzijskemu zasuku prereza kot celote, torej so tudi enaki med seboj. Delež celotnega torzijskega momenta, ki jih prevzamejo posamezni podprezezi, označimo z  $M_x^{(1)}$ ,  $M_x^{(2)}$  in  $M_x^{(3)}$ , tako da je

$$M_x = M_x^{(1)} + M_x^{(2)} + M_x^{(3)}. \quad (T.91)$$

Če vzamemo, da so vsi podprezezi iz enakega materiala s strižnim modulom  $G$ , in zahtevamo, da so specifični torzijski zasuki  $\theta^{(1)}$ ,  $\theta^{(2)}$ ,  $\theta^{(3)}$  enaki med seboj, sledi

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} = \frac{M_x^{(1)}}{GI_x^{(1)}} = \theta & \quad \rightarrow \quad M_x^{(1)} = \theta GI_x^{(1)} \\ \theta^{(2)} = \frac{M_x^{(2)}}{GI_x^{(2)}} = \theta & \quad \rightarrow \quad M_x^{(2)} = \theta GI_x^{(2)} \\ \theta^{(3)} = \frac{M_x^{(3)}}{GI_x^{(3)}} = \theta & \quad \rightarrow \quad M_x^{(3)} = \theta GI_x^{(3)}. \end{aligned} \quad (T.92)$$

Pri tem je  $\theta$  specifični torzijski zasuk prereza kot celote

$$\theta = \frac{M_x}{GI_x}, \quad (T.93)$$

z  $I_x^{(1)}$ ,  $I_x^{(2)}$  in  $I_x^{(3)}$  pa smo označili torzijske vztrajnostne momente posameznih pravokotnih podprerezov. S tem iz enačbe (T.91) sledi

$$M_x = \theta G \left( I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} \right). \quad (T.94)$$

Primerjava z enačbo (T.93) pove, da je torzijski vztrajnostni moment sestavljenega prereza enak vsoti torzijskih vztrajnostnih momentov posameznih podprerezov

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)}. \quad (T.95)$$

Enačbe (T.92) lahko sedaj zapišemo takole

$$\begin{aligned} M_x^{(1)} &= M_x \frac{I_x^{(1)}}{I_x} \\ M_x^{(2)} &= M_x \frac{I_x^{(2)}}{I_x} \\ M_x^{(3)} &= M_x \frac{I_x^{(3)}}{I_x}. \end{aligned} \tag{T.96}$$

Dobljene enačbe kažejo, da se torzijski moment porazdeli po posameznih podprerezih v razmerju njihovih torzijskih vztrajnostnih momentov. V primeru, da bi bili podprerezi iz različnih materialov s strižnimi moduli  $G^{(1)}$ ,  $G^{(2)}$ ,  $G^{(3)}$ , bi s podobnim razmislekom kot zgoraj dobili

$$M_x = \theta \left( G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)} \right) \tag{T.97}$$

in porazdelitev torzijskega momenta  $M_x$  po podprerezih v razmerju njihovih torzijskih togosti

$$\begin{aligned} M_x^{(1)} &= M_x \frac{G^{(1)} I_x^{(1)}}{G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)}} \\ M_x^{(2)} &= M_x \frac{G^{(2)} I_x^{(2)}}{G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)}} \\ M_x^{(3)} &= M_x \frac{G^{(3)} I_x^{(3)}}{G^{(1)} I_x^{(1)} + G^{(2)} I_x^{(2)} + G^{(3)} I_x^{(3)}}. \end{aligned} \tag{T.98}$$

Praktični postopek pri določitvi torzijskih količin homogenega prereza, prikazanega na *sliki T-9*, bi torej začeli z določitvijo razmerij med daljšo in krajšo stranico za vsakega od podprerezov in odčitkom ustreznih koeficientov iz *preglednice T-1*

$$\begin{aligned}
 \text{podprez 1 : } \frac{h_1}{b_1} &\rightarrow \eta_1, \beta_1, \gamma_1 \\
 \text{podprez 2 : } \frac{h_2}{b_2} &\rightarrow \eta_2, \beta_2, \gamma_2 \\
 \text{podprez 3 : } \frac{h_3}{b_3} &\rightarrow \eta_3, \beta_3, \gamma_3
 \end{aligned} \tag{T.99}$$

Za razmerja, ki ne sovpadajo s podatki v preglednici, lahko z zadostno natančnostjo uporabimo linearno interpolacijo med podanimi vrednostmi.

V nadaljevanju izračunamo torzijske vztrajnostne momente posameznih podprezov in torzijski vztrajnostni moment prereza kot celote

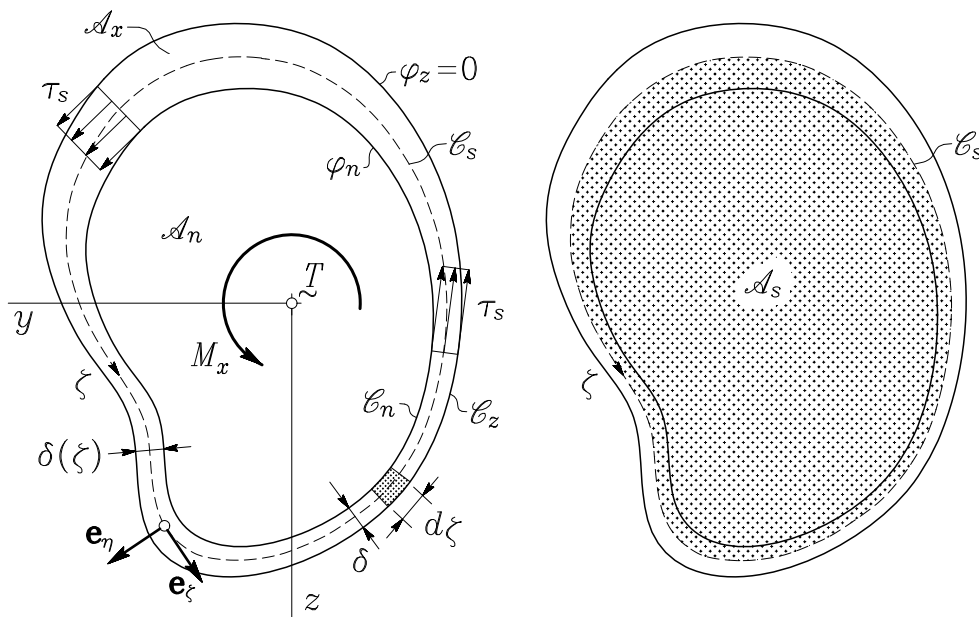
$$\begin{aligned}
 I_x^{(1)} &= \eta_1 \frac{h_1 b_1^3}{3} \\
 I_x^{(2)} &= \eta_2 \frac{h_2 b_2^3}{3} \quad \rightarrow \quad I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)}. \\
 I_x^{(3)} &= \eta_3 \frac{h_3 b_3^3}{3}
 \end{aligned} \tag{T.100}$$

S tem lahko iz enačbe (T.93) ali (T.97) izračunamo specifični torzijski zasuk  $\theta$ , iz enačb (T.96) ali (T.98) pa tudi deleže torzijskega momenta, ki jih prevzamejo posamezni podprezi. V naslednjem koraku pa izračunamo še največje strižne napetosti na sredini daljše stranice ter ustrezne strižne napetosti na sredini krajše stranice vsakega od podprezov

$$\begin{aligned}
 \tau_{max}^{(1)} &= \beta_1 \frac{3M_x^{(1)}}{h_1 b_1^3} \quad \rightarrow \quad \tau^{*(1)} = \gamma_1 \tau_{max}^{(1)} \\
 \tau_{max}^{(2)} &= \beta_2 \frac{3M_x^{(2)}}{h_2 b_2^3} \quad \rightarrow \quad \tau^{*(2)} = \gamma_2 \tau_{max}^{(2)} \\
 \tau_{max}^{(3)} &= \beta_3 \frac{3M_x^{(3)}}{h_3 b_3^3} \quad \rightarrow \quad \tau^{*(3)} = \gamma_3 \tau_{max}^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{T.101}$$

### Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim enoceličnim tankostenskim prečnim prereзом

Razporeditev strižnih napetosti pri čisti torziji votlega eliptičnega prereza kaže, da največje napetosti nastopajo na zunanjem robu prereza, material v notranjosti prereza pa je napetostno slabo izkoriščen. Zato je za prenašanje torzijske obtežbe ugodno izbirati zaprte tankostenske prereze, pri katerih je material nameščen čim bolj ob zunanjem robu prereza. O tankostenskem zaprtem prečnem prerezu govorimo v primeru, da je stena zaprtega prereza zelo tanka v primerjavi z drugimi dimenzijami prereza, na primer z njegovo višino ali širino. Na (sliki T-1) je prikazan tankostenski prerez  $\mathcal{A}_x$ , ki ga določata zunanja in notranja mejna krivulja  $\mathcal{C}_s$  in  $\mathcal{C}_n$ . Votli del prereza je označen z  $\mathcal{A}_n$ .



Slika T-1

Pri poljubno oblikovanem zaprtem profilu z neenakomerno debelino stene  $\delta$  je ugodno namesto kartezijskih prereznih koordinat  $(y, z)$  vpeljati "naravni" koordinati  $(\eta, \zeta)$ . Pri tem je  $\zeta$  ločna dolžina tako ime-

novane srednje črte prereza  $\mathcal{C}_s$ , ki poteka po sredini debeline stene in ograjuje srednjo ploskev  $\mathcal{A}_s$ . Koordinati  $\zeta$  sta v vsaki točki srednje črte prirejena medsebojno pravokotna enotska bazna vektorja  $\mathbf{e}_\eta$  in  $\mathbf{e}_\zeta$ , prvi v smeri normale in drugi v smeri tangente na srednjo črto. Po analogiji z ozkim pravokotnim prerezom lahko tedaj vzamemo, da se napetostna funkcija  $\varphi$  vzdolž srednje krivulje  $\mathcal{C}_s$ , torej v odvisnosti od koordinate  $\zeta$ , ne spreminja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0. \quad (T.1)$$

Pripadajoči strižni napetosti  $\sigma_{x\eta}$  in  $\sigma_{x\zeta}$  izrazimo z napetostno funkcijo  $\varphi$  po analogiji z enačbama (5.178)

$$\sigma_{x\eta} = \theta G \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \quad \text{in} \quad \sigma_{x\zeta} = -\theta G \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}. \quad (T.2)$$

Poissonova enačba čiste torzije se v koordinatah  $(\eta, \zeta)$  glasi

$$\mathcal{A}_x : \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + 2 = 0. \quad (T.3)$$

Ob upoštevanju poenostavitve (T.1) iz prve od enačb (T.2) sledi, da je  $\sigma_{x\eta} = 0$  povsod na tankostenskem prerezu, Poissonova enačba pa preide v navadno diferencialno enačbo drugega reda glede na koordinato  $\eta$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = -2. \quad (T.4)$$

Splošna rešitev te enačbe je

$$\varphi = -\eta^2 + C_1 \eta + C_2. \quad (T.5)$$

Integracijski konstanti  $C_1$  in  $C_2$  določimo iz pogoja, da mora biti vrednost napetostne funkcije na zunanjem robu prereza enaka nič, na notranjem robu pa enaka neki konstantni vrednosti  $\varphi_n$

$$\begin{aligned} \varphi \left( \eta = -\frac{\delta}{2} \right) &= \varphi_n \\ \varphi \left( \eta = \frac{\delta}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -\frac{\varphi_n}{\delta} \\ C_2 = \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4} \end{cases} \quad (T.6)$$

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe je torej

$$\varphi = -\eta^2 - \frac{\varphi}{\delta} \eta + \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4}. \quad (T.7)$$

Torzijski vztrajnostni moment  $I_x$  določimo z enačbo (5.194), kjer upoštevamo, da imamo samo eno notranjo odprtino s ploščino  $A_n$ , ki ji pripada konstantna vrednost napetostne funkcije  $\varphi_n$

$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \varphi_n A_n. \quad (T.8)$$

V prvem členu vzamemo  $dA_x = d\eta d\zeta$  ter integriramo po  $\zeta$  vzdolž sklenjene srednje črte  $\mathcal{C}_s$  in po  $\eta$  v mejah od  $-\delta/2$  do  $+\delta/2$

$$I_x = 2 \oint_{\mathcal{C}_s} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left( -\eta^2 - \frac{\varphi}{\delta} \eta + \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4} \right) d\eta d\zeta + 2 \varphi_n A_n. \quad (T.9)$$

Po izvednotenju integrala po debelini stene sledi

$$I_x = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta + \varphi_n \oint_{\mathcal{C}_s} \delta d\zeta + 2 \varphi_n A_n. \quad (T.10)$$

Integral v drugem členu predstavlja ploščino materialnega dela prereza  $A_x$

$$A_x = \oint_{\mathcal{C}_s} \delta d\zeta, \quad (T.11)$$

zato lahko pišemo

$$I_x = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta + 2 \varphi_n \left( A_n + \frac{A_x}{2} \right). \quad (T.12)$$

Pri tankostenskem prerezu je izraz v oklepaju praktično enak ploščini  $A_s$  srednje ploskve  $\mathcal{A}_s$ , vrednost integrala v prvem členu pa je odvisna od tretje potence majhne debeline stene  $\delta$  in je zato zanemarljivo majhna v primerjavi z vrednostjo drugega člena



$$A_s = A_n + \frac{A_x}{2} \quad \dots \quad \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta \ll 2 \varphi_n A_s. \quad (T.13)$$

Torzijski vztrajnostni moment zaprtega enoceličnega tenkostenskega prereza lahko torej dovolj natančno izračunamo s preprosto formulo

$$I_x = 2 \varphi_n A_s. \quad (T.14)$$

Seveda pa moramo najprej določiti vrednost napetostne funkcije  $\varphi_n$  na notranji konturi  $\mathcal{C}_n$ . V ta namen uporabimo dodatni kompatibilnostni pogoj (5.186) za prerez z eno notranjo odprtino, ki pa ga tokrat ob upoštevanju tankostenske narave nosilca zapišemo za srednjo krivuljo  $\mathcal{C}_s$  in glede na koordinatno bazo  $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$

$$\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta = -2 A_s. \quad (T.15)$$

Poudarili smo, da je pri integriranju po krivulji  $\mathcal{C}_s$  vseskozi  $\eta = 0$ . Z odvajanjem enačbe (T.7) dobimo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2\eta - \frac{\varphi_n}{\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\varphi_n}{\delta}. \quad (T.16)$$

Ker je  $\varphi_n$  konstanta, iz enačbe (T.15) sledi

$$\varphi_n \oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta} = 2 A_s \quad \rightarrow \quad \varphi_n = \frac{2 A_s}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}}. \quad (T.17)$$

Z vstavitvijo v enačbo (T.14) dobimo tako imenovano *2. Bredtovo formulo* za določitev torzijskega vztrajnostnega momenta zaprtega enoceličnega tenkostenskega prereza

$$I_x = \frac{4 A_s^2}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}}. \quad (T.18)$$

S tem lahko ob upoštevanju enačbe (5.190) določimo specifični torzijski zasuk  $\theta$

$$\theta = \frac{M_x}{4GA_s^2} \oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}. \quad (T.19)$$

Glavni cilj naloge pa je seveda določitev napetosti. Iz druge od enačb (T.2) in prve od enačb (T.16) sledi

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{M_x}{I_x} \left( 2\eta + \frac{\varphi_n}{\delta} \right). \quad (T.20)$$

Kakor vidimo, je strižna napetost  $\sigma_{x\zeta}$  linearna funkcija koordinate  $\eta$ , ki se na območju stene prereza spreminja v mejah od  $-\delta/2$  do  $+\delta/2$ . Največjo vrednost doseže na zunanjem, najmanjšo pa na notranjem robu prereza

$$\begin{aligned} \sigma_{x\zeta}^{max} &= \sigma_{x\zeta} \left( \eta = \frac{\delta}{2} \right) = \frac{M_x}{I_x} \left( \frac{\varphi_n}{\delta} + \delta \right) \\ \sigma_{x\zeta}^{min} &= \sigma_{x\zeta} \left( \eta = -\frac{\delta}{2} \right) = \frac{M_x}{I_x} \left( \frac{\varphi_n}{\delta} - \delta \right). \end{aligned} \quad (T.21)$$

Pri tankostenskem prerezu je jasno, da se robni vrednosti napetosti le malo razlikujeta med seboj. Zato pri praktičnih nalogah dosledno računamo kar z enakomerno povprečno vrednostjo strižne napetosti  $\bar{\sigma}_{x\zeta}$ , za katero običajno vpeljemo tudi preprostejšo oznako  $\tau_s$  (slika T-1)

$$\tau_s = \bar{\sigma}_{x\zeta} = \sigma_{x\zeta}(\eta = 0) \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{M_x \varphi_n}{\delta I_x}. \quad (T.22)$$

Za torzijski vztrajnostni moment  $I_x$  vstavimo izraz (T.14) in dobimo 1. *Bredtovo formulo* za strižno napetost v tanki steni zaprtega enoceličnega prereza

$$\tau_s = \frac{M_x}{2\delta A_s}. \quad (T.23)$$

Dobljena formula pove, da je strižna napetost v steni zaprtega prereza največja tam, kjer je debelina stene najmanjša. Če enačbo (T.23)

pomnožimo z  $\delta$ , dobimo tako imenovani *strižni tok*  $q_s$ , ki je enakomeren vzdolž celotne srednje krivulje prereza  $\mathcal{C}_s$

$$q_s = \delta \tau_s = \frac{M_x}{2 A_s} = \textit{konst.} \quad (T.24)$$

Opazimo lahko analogijo s tokom idealne tekočine po cevi spremenljivega prereza, pri čemer vlogo ploščine prereza prevzame debelina stene  $\delta$ , vlogo hitrosti pa torzijska strižna napetost  $\tau_s$ .

### Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim večceličnim tankostenskim prečnim prerezom

Podobno kot pri nosilcu z enoceličnim prečnim prerezom ravnamo tudi pri določitvi mehanskega stanja nosilca z večceličnim zaprtim tankostenskim prerezom pri čisti torzijski obtežbi. Oglejmo si primer prečnega prereza s tremi notranjimi odprtiniami (*slika T-2.a*).

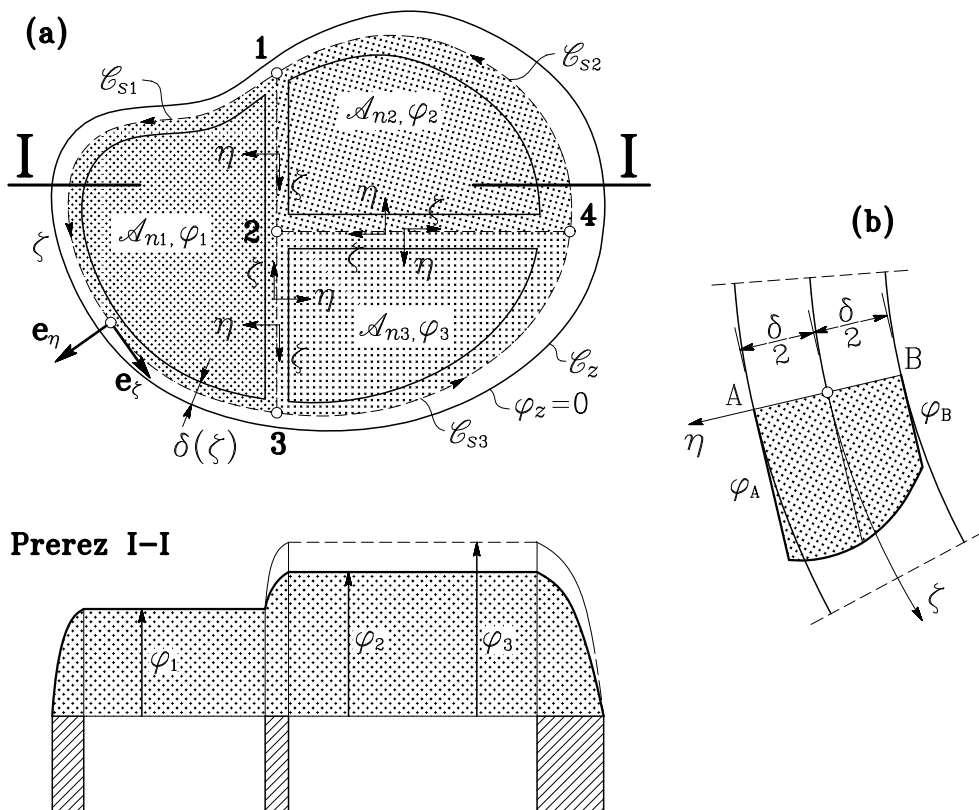
Sredinske črte obodne in notranjih sten tvorijo srednje krivulje  $\mathcal{C}_{s1}$ ,  $\mathcal{C}_{s2}$  in  $\mathcal{C}_{s3}$ , ki obkrožajo srednje ploskve nad posameznimi odprtiniami  $\mathcal{A}_{s1}$ ,  $\mathcal{A}_{s2}$  in  $\mathcal{A}_{s3}$  s ploščinami  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{s3}$ . Konstantne vrednosti napetostne funkcije nad konturami notranjih odprtin označimo s  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ .

Poissonovo diferencialno enačbo čiste torzije torej rešujemo ob enakih predpostavkah kot v prejšnjem primeru in dobimo tudi enako splošno rešitev

$$\varphi = -\eta^2 + C_1 \eta + C_2. \quad (T.25)$$

Pri določanju integracijskih konstant  $C_1$  in  $C_2$  moramo tokrat upoštevati, da sta pri notranjih stenah obe robni vrednosti napetostne funkcije različni od nič (*slika T-2.b*)

$$\begin{aligned} \varphi\left(\eta = -\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_B \\ \varphi\left(\eta = \frac{\delta}{2}\right) = \varphi_A \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \\ C_2 = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} + \frac{\delta^2}{4} \end{cases} \quad (T.26)$$



Slika T-2

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe je torej

$$\varphi = -\eta^2 + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \eta + \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} + \frac{\delta^2}{4} \quad (T.27)$$

s prvim odvodom po  $\eta$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2\eta + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta}. \quad (T.28)$$

Vrednosti napetostne funkcije nad notranjimi odprtinami  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  izračunamo iz dodatnih kompatibilnostnih enačb, ki jih zapišemo vzdolž

sklenjenih srednjih črt  $\mathcal{C}_{s1}$ ,  $\mathcal{C}_{s2}$ ,  $\mathcal{C}_{s3}$  okrog notranjih odprtin

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s1} \\ \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s2} \\ \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s3}. \end{aligned} \quad (T.29)$$

Nastopajoči prvi odvodi napetostne funkcije očitno niso gladke funkcije vzdolž srednjih krivulj. Zato srednje krivulje razdelimo na odseke, vzdolž katerih so integrandi gladke funkcije in krivuljne integrale po sklenjenih krivuljah izračunamo kot vsote integralov po posameznih odsekih. Začnimo s prvo od enačb (29). Na odseku od točke 1 do točke 3 je  $\varphi_A = \varphi_z = 0$  in  $\varphi_B = \varphi_1$ , na odseku  $\overline{32}$  je  $\varphi_A = \varphi_3$  in  $\varphi_B = \varphi_1$ , na odseku  $\overline{21}$  pa je  $\varphi_A = \varphi_2$  in  $\varphi_B = \varphi_1$ . Ob upoštevanju enačb (28) se prva od enačb (29) glasi

$$\int_1^3 \frac{0 - \varphi_1}{\delta} d\zeta + \int_3^2 \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\delta} d\zeta + \int_2^1 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta} d\zeta = -2 A_{s1}. \quad (30)$$

Podobno zapišemo tudi preostali dve dodatni kompatibilnostni enačbi in dobimo

$$\begin{aligned} \int_4^1 \frac{0 - \varphi_2}{\delta} d\zeta + \int_1^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\delta} d\zeta + \int_2^4 \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\delta} d\zeta &= -2 A_{s2} \\ \int_3^4 \frac{0 - \varphi_3}{\delta} d\zeta + \int_4^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\delta} d\zeta + \int_2^3 \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{\delta} d\zeta &= -2 A_{s3}. \end{aligned} \quad (31)$$

Ker so  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  konstantne vrednosti, po ureditvi in množenju z  $-1$

sledi

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_2 \int_2^1 \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_3 \int_3^2 \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s1} \\
 -\varphi_1 \int_1^2 \frac{d\zeta}{\delta} + \varphi_2 \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_3 \int_2^4 \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s2} \\
 -\varphi_1 \int_2^3 \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_2 \int_4^2 \frac{d\zeta}{\delta} + \varphi_3 \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s3}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Z vpeljavo okrajšav

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} & a_{12} &= - \int_2^1 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{13} &= - \int_3^2 \frac{d\zeta}{\delta} \\
 a_{21} &= - \int_1^2 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{22} &= \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{d\zeta}{\delta} & a_{24} &= - \int_2^4 \frac{d\zeta}{\delta} \\
 a_{31} &= - \int_2^3 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{32} &= - \int_4^2 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{33} &= \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{d\zeta}{\delta}
 \end{aligned} \tag{33}$$

ter

$$b_1 = 2 A_{s1} \quad b_2 = 2 A_{s2} \quad b_3 = 2 A_{s3} \tag{34}$$

lahko sistem (32) zapišemo v pregledni obliki

$$\begin{aligned}
 a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + a_{13} \varphi_3 &= b_1 \\
 a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + a_{23} \varphi_3 &= b_2 \\
 a_{31} \varphi_1 + a_{32} \varphi_2 + a_{33} \varphi_3 &= b_3.
 \end{aligned}$$

Tako smo dobili sistem linearnih algebrajskih enačb, iz katerega brez težav določimo konstantne vrednosti napetostne funkcije  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  in  $\varphi_3$ . Dobljene ugotovitve lahko posplošimo za primer tankostenskega prereza z  $N$  notranjimi odprtini. Tedaj lahko sistem kompatibilnostnih

enačb na kratko zapišemo z enačbo

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (35)$$

ali v matrični obliki

$$[a_{ij}] \{\varphi_j\} = \{b_i\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (36)$$

Koeficienti  $a_{ij}$  in desne strani  $b_i$  so podani z izrazi

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \oint_{\mathcal{C}_{si}} \frac{d\zeta}{\delta} \\ (i \neq j) \dots a_{ij} &= - \int_{l_{ij}} \frac{d\zeta}{\delta} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ b_i &= 2 A_{si}. \end{aligned} \quad (37)$$

Pri tem smo z  $l_{ij}$  označili skupni odsek srednjih krivulj  $\mathcal{C}_{si}$  in  $\mathcal{C}_{sj}$ , torej dolžino skupne stene med celicama  $i$  in  $j$ .

Z vstavitvijo rešitve za napetostno funkcijo (27) in izračunanih vrednosti napetostne funkcije nad notranjimi odprtinami  $\varphi_i$  v splošno enačbo za torzijski vztrajnostni moment (5.194) bi na podoben način kakor pri enoceličnem prerezu dobili

$$I_x = \frac{1}{3} \left( \oint_{\mathcal{C}_{sz}} \delta^3 d\zeta + \sum_{l_{ij}} \int \delta^3 d\zeta \right) + 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si}. \quad (T.38)$$

Prvi integral v okroglem oklepaju izvednotimo vzdolž sklenjene srednje krivulje  $\mathcal{C}_{sz}$  obodne stene. S tem prvi člen v enačbi (38) predstavlja prispevek obodne in notranjih sten kot odprtih ozkih profilov k torzijskemu vztrajnostnemu momentu prereza. Vendar lahko z enakim razmislekom kakor sicer pri tankostenskih zaprtih prerezih prvi člen v

izrazu za  $I_x$  zanemarimo v primerjavi z drugim in v praktičnih nalogah računamo s poenostavljeno formulo

$$I_x = 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si}. \quad (T.39)$$

Končno določimo še strižne napetosti. Iz druge od enačb (T.2) in prve od enačb (T.28) sledi

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{M_x}{I_x} \left( 2\eta - \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \right). \quad (T.40)$$

V praktičnih nalogah je pri tankostenskih zaprtih prerezih umestno računati kar s povprečno vrednostjo strižne napetosti  $\tau_s$

$$\tau_s = \bar{\sigma}_{x\zeta} = \sigma_{x\zeta}(\eta = 0) \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{M_x}{\delta I_x} (\varphi_B - \varphi_A). \quad (T.41)$$

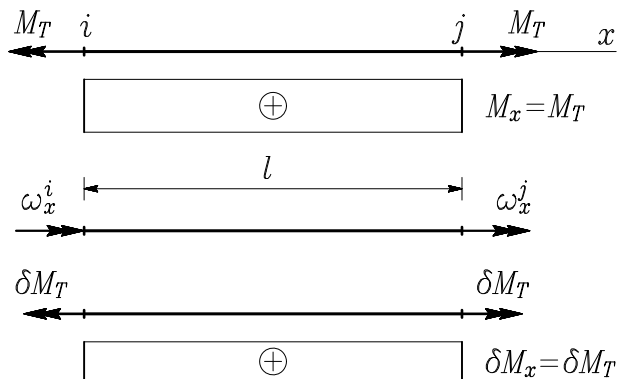
Za dimenzioniranje oziroma kontrolo torzijske nosilnosti prereza je praviloma merodajna največja vrednost strižne napetosti  $\tau_s$ . Da bi ugotovili, kolikšna je ta napetost in kje nastopa, moramo vzdolž vseh srednjih krivulj iz vrednotiti razmerje med razliko napetostnih funkcij na robovih  $\varphi_B - \varphi_A$  in debelino stene  $\delta$ .

### **Prispevek torzijskega momenta k dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil**

V razdelku 5.4 smo po metodi napetosti obravnavali primer čiste torzije ravnega nosilca. Gre torej za primer, ko je notranji torzijski moment  $M_x$  enakomeren po celotni dolžini nosilca, edina kinematična količina linijskega računskega modela, s katero imamo opraviti, pa je torzijski zasuk  $\omega_x$ . V praktičnih konstrukterskih nalogah gre v tem primeru praviloma za določanje razlik torzijskih zasukov na obeh koncih linijskega nosilca. Za boljše razumevanje si oglejmo linijski nosilec, ki je v



krajiščih obtežen z momentom  $M_T$  v smeri vzdolžne osi (slika ???).



Slika ???

V takem nosilcu nastopa le enakomeren notranji torzijski moment  $M_x = M_T$ . Vzemimo, da je torzijski zasuk v krajišču  $i$  enak  $\omega_x^i$ , torzijski zasuk v krajišču  $j$  pa  $\omega_x^j$ . Nosilec v krajiščih obtežimo z uravnoveženim virtualnim torzijskim momentom  $\delta M_T$  in zapišimo izrek o dopolnilnem virtualnem delu

$$\delta W^* = -\omega_x^i \delta M_T + \omega_x^j \delta M_T = \delta \bar{D}^*(\delta M_x), \quad ()$$

od koder sledi

$$(\omega_x^j - \omega_x^i) \delta M_T = \delta \bar{D}^*(\delta M_x). \quad ()$$

Pri tem je  $\delta M_x$  notranji torzijski moment, ki pripada virtualni obtežbi  $\delta M_T$ . Za razliko torzijskih zasukov vpeljemo oznako  $\Delta\omega_x = \omega_x^j - \omega_x^i$  in dobimo

$$\Delta\omega_x \delta M_T = \delta \bar{D}^*(\delta M_x). \quad ()$$

V obravnavanem primeru določata napetostno stanje poljubnega delca v prečnem prerezu strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$ , zato je pripadajoči delež dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil določen s formalno enakim izrazom kot prispevek prečnih sil pri upogibu

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \int_{\mathcal{V}} (2\varepsilon_{xy} \delta\sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xz} \delta\sigma_{xz}) dV. \quad ()$$

Napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  smo izrazili z napetostno funkcijo čiste torzije  $\varphi(y, z)$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \sigma_{xz} &= -\frac{M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y},\end{aligned}\quad ()$$

pripadajoči kotni deformaciji pa sta

$$\begin{aligned}2\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{M_x}{GI_x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G} = -\frac{M_x}{GI_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.\end{aligned}\quad ()$$

Virtualni napetosti  $\delta\sigma_{xy}$  in  $\delta\sigma_{xz}$  določimo analogno z enačbama ()

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{xy} &= \frac{\delta M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \delta\sigma_{xz} &= -\frac{\delta M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.\end{aligned}\quad ()$$

Izraze () in () vstavimo v enačbo () in po ureditvi dobimo

$$\delta\bar{D}^*(\delta M_x) = \int_0^l \frac{M_x \delta M_x}{GI_x^2} \int_{\mathcal{A}_x} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x dx. \quad ()$$

V Zgledu ??? pokažemo, da je integral po prečnem prerezu  $\mathcal{A}_x$ , ki nastopa v gornji enačbi, kar enak torzijskemu vztrajnostnemu momentu  $I_x$ , kakor smo ga izpeljali v razdelku 5.4???. Prispevek torzijskega momenta k dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil torej določimo z enačbo

$$\delta\bar{D}^*(\delta M_x) = \int_0^l \frac{M_x \delta M_x}{GI_x} dx. \quad ()$$

Ker sta tako notranji torzijski moment  $M_x$  kakor tudi  $\delta M_x$  konstantna vzdolž nosilca, sledi

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \frac{M_x \delta M_x}{GI_x} \int_0^l dx = \frac{l}{GI_x} M_x \delta M_x. \quad ()$$

V našem primeru je  $M_x = M_T$  in  $\delta M_x = \delta M_T$  in prispevek enakomernega torzijskega momenta k dopolnilnemu virtualnemu delu nosilca lahko zapišemo z enačbo

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \frac{l}{GI_x} M_T \delta M_T. \quad ()$$

Z oznako

$$k_T = \frac{GI_x}{l} \quad ()$$

vpeljemo tako imenovano *torzijsko togost nosilca*. Enačba () se s tem glasi

$$\delta \bar{D}^*(\delta M_x) = \frac{M_T \delta M_T}{k_T}. \quad ()$$

Če za virtualno obtežbo izberemo enotski torzijski moment  $\delta M_T = 1$ , iz enačbe () sledi

$$\Delta \omega_x = \frac{M_T}{k_T}. \quad ()$$

Pri reševanju praktičnih nalog v mehaniki nosilcev je pogosto tako, da poznamo torzijski zasuk v enem od krajišč nosilca. Če, na primer, poznamo zasuk  $\omega_x^i$ , izračunamo zasuk v krajišču  $j$  z enačbo

$$\omega_x^j = \omega_x^i + \Delta \omega_x = \omega_x^i + \frac{M_T}{k_T}. \quad ()$$

V primeru, da poznamo zasuk  $\omega_x^j$ , pa velja

$$\omega_x^i = \omega_x^j - \Delta \omega_x = \omega_x^j - \frac{M_T}{k_T}. \quad ()$$

## Prispevki linearno elastičnih vzmeti

V praktičnih konstruktorskih nalogah imamo večkrat opraviti s podajnimi podporami oziroma s podajnimi vezmi med posameznimi deli konstrukcije. Podajne podpore in vezi v računskem modelu konstrukcije običajno predstavimo z vzmetmi. Računski modeli vzmeti so lahko linearno ali nelinearno elastični, v posebnih primerih pa lahko vključujejo tudi plastične in viskozne lastnosti podpor in vezi. V našem primeru se omejimo na tri najbolj preproste, a tudi najpogosteje uporabljane vrste *linearno elastičnih vzmeti*. To so: *torzijska, osna ali linearna in spiralna ali polžasta vzmet*, za vse pa je značilno, da so vplivi, s katerimi vzmeti delujejo na elemente konstrukcije, proporcionalni značilnim deformacijam vzmeti.

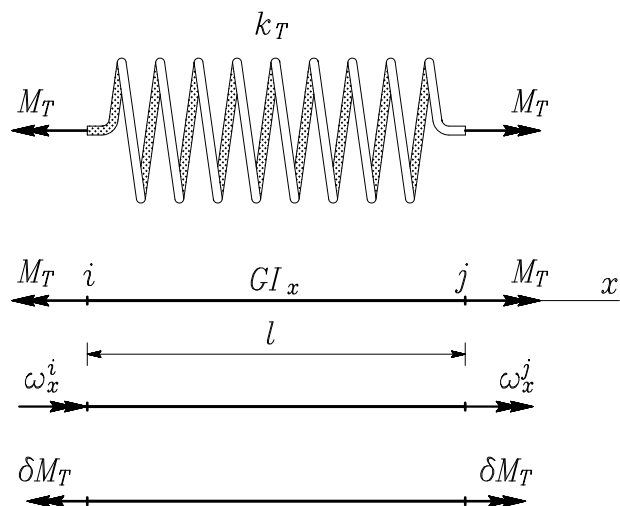
### Torzijska vzmet ( $V_T$ ):

Gre za primer, da se vpliv podpore ali sosednih delov konstrukcije prenaša na krajišče linijskega nosilca kot torzijski moment (*slika DVD-T*). Tedaj lahko torzijsko vzmet enakovredno nadomestimo z linijskim elementom, ki ima enako torzijsko togost kakor vzmet. Za ta primer smo dopolnilno virtualno delo, ki ga virtualna obtežba opravi pri deformiranju vzmeti, že določili v prejšnjem razdelku z enačbo ()

$$\delta \bar{D}^*(V_T) = \frac{M_T \delta M_T}{k_T}. \quad ()$$

Pri tem je  $k_T$  *konstanta torzijske vzmeti*, ki jo določimo z enačbo () kot torzijsko togost veznega elementa, kakor smo pokazali v prejšnjem razdelku. Druga možnost je, da konstanto  $k_T$  umerimo s poskusi ob upoštevanju enačbe ()

$$\Delta \omega_x = \frac{M_T}{k_T}. \quad ()$$



Slika ???

**Osna ali linearna vzmet ( $V_L$ ):**

Osna vzmet je vsakdanjemu razumevanju pojma vzmeti najbližji model podajne podpore ali vezi, pri katerem je sila, ki deluje v smeri osi vzmeti, proporcionalna njenemu raztežku ali skrčku. Podobno kakor torzijsko lahko tudi osno vzmet nadomestimo z linijskim elementom z enakovredno osno togostjo (slika DVD-O). V takem nosilcu nastopa le enakomerna osna sila  $N_x = P$ . Gre torej za čisto osno obtežbo nosilca, ki je povezana zgolj z vzdolžnima pomikoma krajišč  $u_i$  in  $u_j$ . Nosilec v krajiščih obtežimo z virtualnima vzdolžnima silama  $\delta P$  in zapišemo izrek o dopolnilnem virtualnem delu

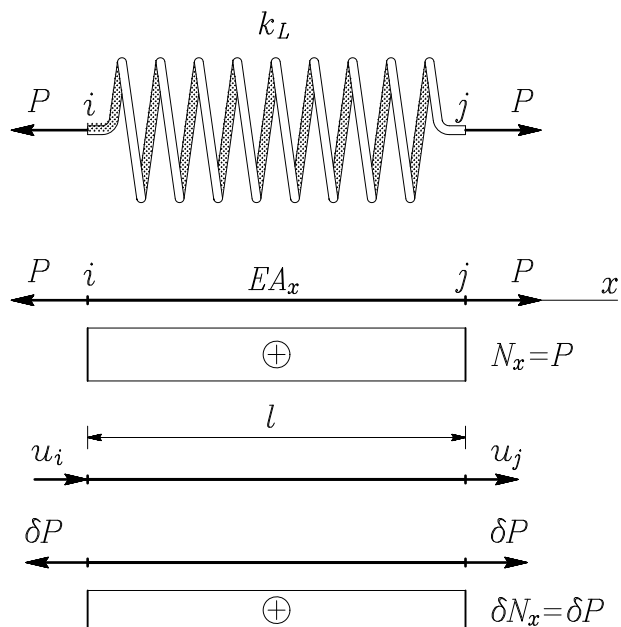
$$\delta W^* = -u_i \delta P + u_j \delta P = \delta \bar{D}^*(V_L), \quad ()$$

od koder sledi

$$(u_j - u_i) \delta P = \delta \bar{D}^*(V_L). \quad ()$$

Za razliko vzdolžnih pomikov vpeljemo oznako  $\Delta u = u_j - u_i$  in dobimo

$$\Delta u \delta P = \delta \bar{D}^*(V_L). \quad ()$$



Slika ???

V obravnavanem primeru vlada v nadomestnem nosilcu homogeno napetostno in deformacijsko stanje

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} \quad , \quad \varepsilon_{xx} = \frac{N_x}{EA_x} \quad \text{in} \quad \delta\sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x} \quad , \quad ()$$

pripadajoči delež dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil pa je

$$\delta\bar{D}^*(V_L) = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta\sigma_{xx} dV = \int_0^l \frac{N_x \delta N_x}{EA_x^2} \int_{\mathcal{A}_x} dA_x dx = \int_0^l \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} dx \quad . \quad ()$$

Pri tem je  $\delta N_x$  osna sila, ki pripada virtualni obtežbi  $\delta P$ . Ker sta dejanska in virtualna osna sila  $N_x$  in  $\delta N_x$  konstantni vzdolž nosilca, sledi

$$\delta\bar{D}^*(V_L) = \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} \int_0^l dx = \frac{l}{EA_x} N_x \delta N_x \quad . \quad ()$$

Izraz

$$k_L = \frac{EA_x}{l} \quad ()$$

imenujemo *konstanta osne ali linearne vzmeti*. V našem primeru je  $N_x = P$  in  $\delta N_x = \delta P$  in prispevek osne vzmeti k dopolnilnemu virtualnemu delu konstrukcije lahko zapišemo z enačbo

$$\delta \bar{D}^*(V_L) = \frac{P\delta P}{k_L} . \quad ()$$

Če za virtualno obtežbo izberemo enotsko virtualno silo  $\delta P = 1$ , iz enačbe () sledi, da je skrček oziroma raztezek osne vzmeti proporcionalen delujoči sili  $P$

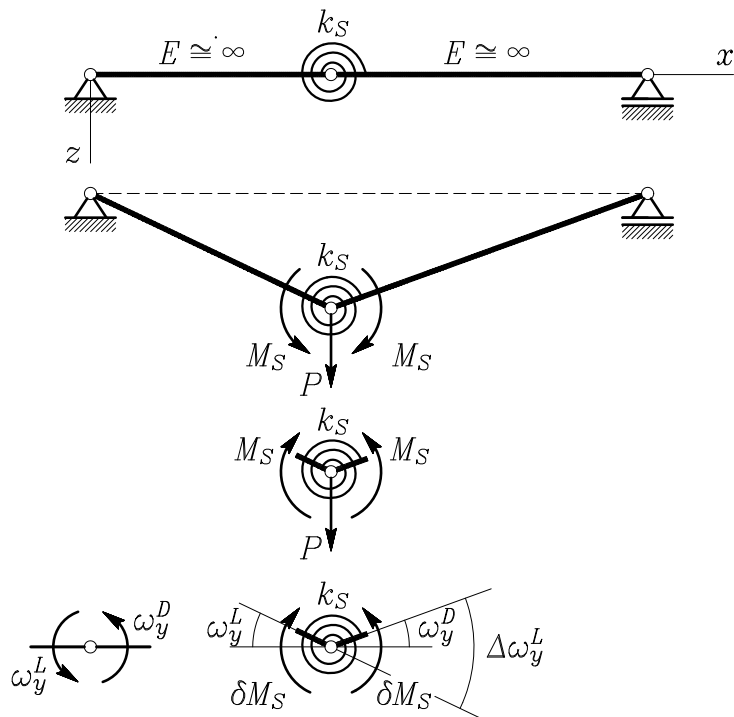
$$\Delta u = \frac{P}{k_T} , \quad ()$$

kar je v skladu s splošnim razumevanjem vloge vzmeti v konstrukciji.

### **Spiralna ali polžasta vzmet ( $V_S$ ):**

V praktičnih nalogah s področja mehanike konstrukcij pogosto naletimo na problem, da konstrukcijska izvedba stika med posameznimi elementi konstrukcije sicer zagotavlja enakost pomikov, v pogledu medsebojnih upogibnih zasukov pa stik ni povsem tog (primer: vijáčeni stiki jeklenih nosilcev, žebljani ali mozničeni stiki v lesenih konstrukcijah in podobno). V takih primerih lahko podajnost stika modeliramo z uvedbo *spiralne ali polžaste vzmeti*. Pri linearno elastičnih stikih je lastnost vzmeti podana s konstanto  $k_S$ , ki povezuje spremembo upogibnega zasuka z nastopajočim upogibnim momentom v stiku. Da bi določili delež dopolnilnega virtualnega dela, ki ga prispeva linearno elastična spiralna vzmet, si oglejmo prostoležeč nosilec, sestavljen iz dveh absolutno togih elementov, ki sta med seboj povezana s spiralno vzmetjo (*slika ???*). Če se nosilec iz kakršnega koli razloga (na primer zaradi delovanja navpične sile  $P$ ) premakne, deluje vzmet na oba ele-

menta nosilca s statičnim momentom  $M_S$ .



Slika ???

Za oba absolutno toga dela nosilca velja, da so pripadajoče deformacije  $\varepsilon_{xx}$  enake nič, zato je celotno dopolnilno virtualno delo notranjih sil prikazane konstrukcije zajeto zgolj v deležu spiralne vzmeti. Vzmet kot vezni element je v skladu z zakonom akcije in reakcije obtežena z enako velikima a nasprotno usmerjenima momentoma  $M_S$ . Vzmet obtežimo z virtualnima momentoma  $\delta M_S$  in zapišemo izrek o dopolnilnem virtualnem delu

$$\delta W^* = -\omega_y^L \delta M_S + \omega_y^D \delta M_S = \delta \bar{D}^*(V_S), \quad ()$$

od koder sledi

$$(\omega_y^D - \omega_y^L) \delta M_S = \delta \bar{D}^*(V_S). \quad ()$$



Za razliko zasukov vpeljemo oznako  $\Delta\omega_y = \omega_y^D - \omega_y^L$  in dobimo

$$\Delta\omega_y \delta M_S = \delta \bar{D}^*(V_S). \quad ()$$

Spiralno vzmet si lahko predstavljamo kot torzijsko vzmet z zelo majhno dolžino in s torzijsko togostjo  $k_S$ , ki jo opazujemo v smeri njene vzdolžne osi. Kakor smo ugotovili v razdelku o torzijski osi, je tedaj razlika zasukov sorazmerna statičnemu momentu, ki v krajiščih deluje v smeri osi vzmeti. V našem primeru je to moment  $M_S$ , tako da je

$$\Delta\omega_y = \frac{M_S}{k_S} \quad ()$$

in enačba () preide v naslednjo obliko

$$\delta \bar{D}^*(V_S) = \frac{M_S \delta M_S}{k_S}. \quad ()$$

Za vse tri obravnavane modele vzmeti smo torej ugotovili podobne zakonitosti: (i) sprememba značilne kinematične količine je sorazmerna ustrezni nastopajoči sili oziroma momentu, (ii) prispevek vzmeti k dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil je določen s produktom dejanske in virtualne sile oziroma dejanskega in virtualnega nastopajočega momenta, (iii) materialne in geometrijske lastnosti vzmeti so zajete v togostnih koeficientih  $k_T$ ,  $k_L$  in  $k_S$ , ki so pri linearno elastičnem materialu konstante.

### **Prispevek linearne spremembe temperature**

V razdelku ??? smo izpeljali enačbe, s katerimi upoštevamo vpliv spremembe temperature na pomike in notranje sile linijskega nosilca. Vzeli smo, da se temperatura v poljubnem prečnem prerezu  $\mathcal{A}_x(x)$  spreminja linearno v odvisnosti od prereznih koordinat  $y$  in  $z$

$$\Delta T(x, y, z) = \Delta T_x(x) + y \Delta T_y(x) + z \Delta T_z(x). \quad ()$$

Iz enačb (b) in (d) sledi, da lahko vzdolžno deformacijo  $\varepsilon_{xx}$  zapišemo takole

$$\varepsilon_{xx} = \left( \frac{N_x}{EA_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) - y \left( \frac{M_z}{EI_z} + \alpha_T \Delta T_y \right) + z \left( \frac{M_y}{EI_y} + \alpha_T \Delta T_z \right). \quad ()$$

Vzdolžna normalna napetost  $\delta\sigma_{xx}$ , ki pripada izbrani virtualni obtežbi, je določena z enačbo (1.117)

$$\delta\sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y}. \quad ()$$

Neumann-Duhamelove enačbe () povedo, da sprememba temperature vpliva le na normalne deformacije, v obravnavanem primeru torej le na deformacijo  $\varepsilon_{xx}$ . Dopolnilno virtualno delo notranjih sil tedaj izračunamo z enačbo ( )

$$\delta\bar{D}^*(\Delta T) = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta\sigma_{xx} dV. \quad ()$$

V to enačbo vstavimo izraza ( ) in ( )

$$\delta\bar{D}^*(\Delta T) = \int_{\mathcal{V}} \left[ \left( \frac{N_x}{EA_x} + \alpha_T \Delta T_x \right) - y \left( \frac{M_z}{EI_z} + \alpha_T \Delta T_y \right) + z \left( \frac{M_y}{EI_y} + \alpha_T \Delta T_z \right) \right] \left( \frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y} \right) dV, \quad ()$$

diferencial prostornine izrazimo s produktom diferenciala ploščine prečnega prereza in diferenciala dolžine ( $dV = dA_x dx$ ) in najprej opravimo integriranje po prečnem prerezu  $\mathcal{A}_x$ . Upoštevamo, da sta osi  $y$  in  $z$  težiščni in glavni vztrajnostni osi prereza  $\mathcal{A}_x$ , zato so deviacijski in oba statična momenta prereza enaki nič. Po nekoliko daljši, vendar preprosti izpeljavi dobimo

$$\delta\bar{D}^*(\Delta T) = \int_0^l \left( \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx + \int_0^l (\alpha_T \Delta T_x \delta N_x - \alpha_T \Delta T_y \delta M_z + \alpha_T \Delta T_z \delta M_y) dx. \quad (55)$$

Kakor vidimo, je vpliv spremembe temperature zajet v drugem členu izraza za dopolnilno virtualno delo notranjih sil, medtem ko smo prvi integral spoznali že v razdelku **xxx**. Opazimo lahko, da igrajo člani, ki vsebujejo parametre  $\Delta T_x$ ,  $\Delta T_y$ ,  $\Delta T_z$ , podobno vlogo kakor notranje sile  $N_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , ki zajemajo vpliv dejanske mehanske zunanje obtežbe nosilca. To je razumljivo, saj temperaturne spremembe predstavljajo zgolj eno od možnih oblik zunanje obtežbe nosilca.

### **Linijška konstrukcija, sestavljena iz $n$ linijskih elementov**

V primeru, da je obravnavana linijska konstrukcija sestavljena iz več elementov, določimo celotno dopolnilno virtualno delo notranjih sil kot vsoto prispevkov posameznih elementov.

$$\begin{aligned} \delta\bar{D}^* &= \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \left( \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx + \\ &\sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \left( \kappa_y \frac{N_y \delta N_y}{GA_x} + \kappa_z \frac{N_z \delta N_z}{GA_x} \right) dx + \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \frac{M_x \delta M_x}{GI_x} dx + \\ &\sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} (\alpha_T \Delta T_x \delta N_x - \alpha_T \Delta T_y \delta M_z + \alpha_T \Delta T_z \delta M_y) dx + \\ &\sum_{i=1}^m \frac{P_i \delta P_i}{k_{Li}} + \sum_{j=1}^p \frac{M_{Sj} \delta M_{Sj}}{k_{Sj}} + \sum_{k=1}^r \frac{M_{Tk} \delta M_{Tk}}{k_{Tk}}. \quad () \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je v konstrukciji  $m$  linearnih,  $p$  spiralnih in  $r$  torzijskih vzmeti.

### Zgled 5.6

Dokaži, da integral

$$J = \int_{\mathcal{A}_x} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x \quad ()$$

predstavlja torzijski vztrajnostni moment  $I_x$ , kakor smo ga izpeljali v razdelku 5.4???.

---

Ob upoštevanju pravila za odvajanje produkta lahko integral  $J$  zapišemo kot razliko dveh integralov

$$J = \int_{\mathcal{A}_x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dA_x - \int_{\mathcal{A}_x} \varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) dA_x. \quad ()$$

Člen v oklepaju v drugem integralu je zaradi enačbe (5.179) enak  $-2$ , prvi integral pa z Greenovim izrekom () prevedemo na krivuljni integral po mejni črti  $\mathcal{C}_x$  prečnega prereza. Tako dobimo

$$J = \oint_{\mathcal{C}_x} \left[ \left( -\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dy + \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz \right] dx + 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x \quad ()$$

oziroma

$$J = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \oint_{\mathcal{C}_x} \varphi \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right). \quad ()$$

Pri  $(m + 1)$ -krat sovisnem prerezu postopamo enako, kakor smo to naredili v razdelku 5.4???. Sklenjeno mejno krivuljo  $\mathcal{C}_x$  sestavimo iz več delov, tako da z njo zajamemo celotno območje prečnega prereza  $\mathcal{A}_x$  (slika 5.11). Integrali vzdolž ravnih odsekov integracijske poti, s katerimi pridemo z zunanje mejne krivulje na notranjo in nazaj, se odštejejo, saj integriramo isto funkcijo enkrat v eni, drugič pa v drugi smeri. Preostane nam torej integriranje po zunanji mejni krivulji  $\mathcal{C}_z$ ,

kjer ima napetostna funkcija konstantno vrednost  $\varphi_z$ , ter po notranjih mejnih krivuljah  $\mathcal{C}_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), kjer ima napetostna funkcija konstantne vrednosti  $\varphi_{ni}$

$$J = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + \oint_{\mathcal{C}_x} \varphi_z \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right) + \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} \oint_{\mathcal{C}_{ni}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz \right). \quad (4.666)$$

Pri tem smo integralom, ki nastopajo v vsoti v tretjem členu, spremenili predznak, ker gre za integriranje v sourni, torej "negativni" smeri. Za napetostno funkcijo  $\varphi_z$  na zunanji mejni krivulji  $\mathcal{C}_z$  praviloma privzamemo vrednost  $\varphi_z = 0$ , krivuljni integral v tretjem členu pa je zaradi enačbe (5.182??) enak  $2A_{ni}$ . Tako dobimo

$$J = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \sum_{i=1}^m \varphi_{ni} A_{ni}, \quad ()$$

to pa je izraz, ki smo ga v razdelku ??? izpeljali kot torzijski vztrajnostni moment  $I_x$  prečnega prereza nosilca. S tem smo dokazali enakost

$$\int_{\mathcal{A}_x} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dA_x = I_x, \quad ()$$

kar je zahtevala naša naloga.