1.

NEKAJ MALEGA O UPORABI VARIACIJSKEGA RAČUNA V MEHANIKI KONSTRUKCIJ

Najmanj trije pomembni razlogi govorijo v prid uporabi variacijskega računa v mehaniki zveznih teles:

- *Z metodami variacijskega računa je možno obravnavati energijske ekstreme, ki predstavljajo enega od temeljev teoretične fizike.*
- *Iz variacijskih principov je možno izpeljati diferencialne enačbe in pripadajoče robne pogoje številnih mehanskih problemov.*
- *Na rešitvah variacijskih problemov utemeljene računske metode so najmočnejše orodje pri formulaciji približnih teorij in ustreznih numeričnih postopkov za reševanje praktičnih inženirskih problemov.*

1.1 Osnovni izrek variacijskega računa

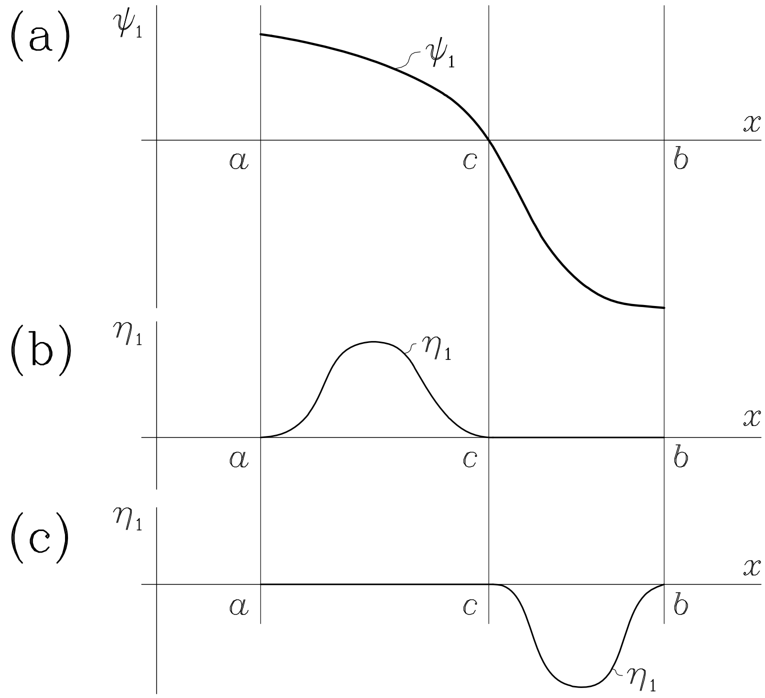
Poglavje o variacijskem računu začnimo s tako imenovanim *osnovnim izrekom (lemmo) variacijskega računa:*

Lemma. *Naj bo* $\phi_i(x),\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ $n-$*terica zveznih funkcij na odprtem intervalu* $[a, b\,]$. *Če je enačba*

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \phi_i(x)\, \eta_i(x)\, dx = 0 \tag{1.1}$$

izpolnjena za katerokoli $n-$*terico poljubnih zveznih in zvezno odvedljivih funkcij* $\eta_i(x),\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ *na* $[a, b\,]$, *so vse funkcije* ϕ_i *enake nič povsod na* $[a, b\,]$.

Izrek dokažemo posredno. Kot izhodišče predpostavimo, da so vsaj nekatere od funkcij ϕ_i različne od nič, na primer funkcija ϕ_1, za katero vzamemo, da je na podintervalu $[a, c]$ pozitivna, na podintervalu $[c, b]$ pa negativna *(slika 1.1-a)*.



Slika 1.1

Ker so funkcije η_i poljubne, vzemimo, da je $\eta_2 = \eta_3 = \ldots = \eta_n = 0$. Vsota v enačbi (1.1) ima tedaj en sam člen

$$I = \int_a^b \phi_1(x)\,\eta_1(x)\,dx \tag{1.2}$$

Ker je tudi η_1 poljubna zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, jo izberemo tako, da je *(slika 1.1-b)*

$$\eta_1 = \begin{cases} > 0 & \text{pri} \quad a \leq x \leq c \\ = 0 & \text{pri} \quad c < x \leq b\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

Enačba (1.2) je tedaj

$$I = \int_a^c \phi_1(x)\, \eta_1(x)\, dx > 0\,, \tag{1.4}$$

kar pa je v nasprotju z zahtevo (1.1). Da bi bila enačba (1.1) izpolnjena, mora očitno biti $\phi_1 = 0$ na podintervalu $a \leq x \leq c$. Sedaj vzamemo drugačno izbiro funkcije η_1, in sicer *(slika 1.1-c)*

$$\eta_1 \;=\; \begin{cases} = 0 & \text{pri} \quad a \leq x < c \\ < 0 & \text{pri} \quad c \leq x \leq b \end{cases} \tag{1.5}$$

in dobimo

$$I = \int_c^b \phi_1(x)\, \eta_1(x)\, dx > 0\,. \tag{1.6}$$

Enačba (1.1) je izpolnjena le, če je $\phi_1 = 0$ na $c \leq x \leq b$. Kakor vidimo, mora biti $\phi_1 = 0$ povsod na intervalu $[a, b\,]$. Podobno tudi za vse preostale funkcije ϕ_2, ϕ_3, ..., ϕ_n ugotovimo, da morajo biti enake nič povsod na $[a, b\,]$. Zato velja

$$\phi_1 = \phi_2, = \;\ldots\; = \phi_n = 0 \quad \text{povsod na} \quad [a, b\,]\,. \tag{1.7}$$

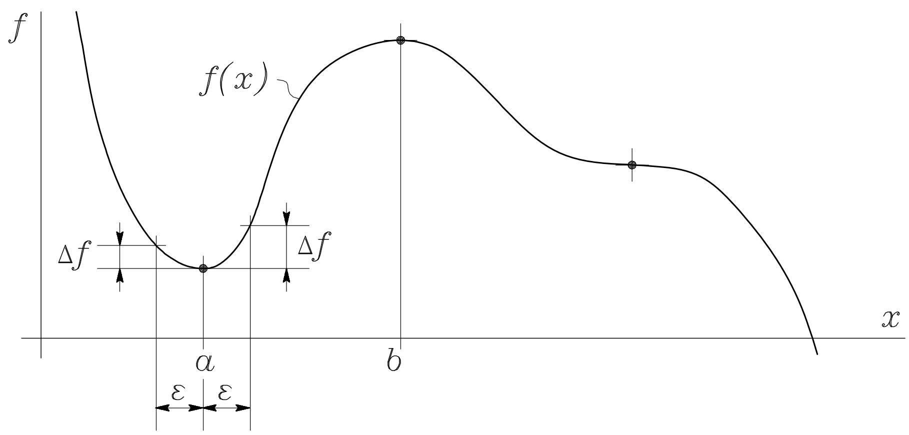
S tem je osnovni izrek variacijskega računa dokazan.

1.2 Ekstremi funkcije ene spremenljivke

Za uvod in boljše razumevanje osnov variacijskega računa se najprej spomnimo, kako iščemo ekstreme funkcij v matematični analizi. Vzemimo zvezno in dovoljkrat zvezno odvedljivo funkcijo ene spremenljivke $f(x)$ in opazujmo njeno sliko v koordinatnem sistemu *(slika 1.2)*. Po definiciji ima funkcija v točki $x = a$ lokalni minimum, če zavzame v neki okolici te točke samo večje vrednosti. V tem primeru je možno najti tako pozitivno število h, da je

$$\Delta f(a) = f(a + \varepsilon) - f(a) > 0 \tag{1.8}$$

za vsak ε, ki zadošča neenačbi $|\varepsilon| < h$. Podobno definiramo lokalni maksimum, le da tedaj funkcija $f(x)$ povsod v okolici točke a zavzame manjše vrednosti kakor v točki $x = a$.



Slika 1.2

Vse vrednosti x iz okolice h imenujemo *dopustne vrednosti* spremenljivke x. Ker smo se s tem omejili na zadostno bližino točke a, gre dejansko za *lokalni* ali *relativni* ekstrem funkcije. V točkah, ki so bolj oddaljene od točke a, ima funkcija lahko še druge lokalne ekstreme. Za lokalni ekstrem v točki a torej velja

$$\varepsilon \gtrless 0 \qquad \begin{cases} \Delta f(a) > 0 & \ldots \quad \text{lokalni minimum} \\ \Delta f(a) < 0 & \ldots \quad \text{lokalni maksimum.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Z razvojem funkcije $f(a + \varepsilon)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke a dobimo

$$f(a+\varepsilon) = f(a) + \frac{\varepsilon}{1\,!}\, f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\, f''(a) + \frac{\varepsilon^3}{3\,!}\, f'''(a) + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k\,!}\, f^{(k)}(a) + \ldots\,, \tag{1.10}$$

tako da je

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a+\varepsilon) - f(a) \\ &= \frac{\varepsilon}{1\,!}\, f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\, f''(a) + \frac{\varepsilon^3}{3\,!}\, f'''(a) + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k\,!}\, f^{(k)}(a) + \ldots\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Če naj ima funkcija $f(x)$ v točki $x = a$ ekstrem, mora biti sprememba $\varDelta f$ vedno pozitivna ali vedno negativna, ne glede na to, ali se iz točke a premaknemo za majhno vrednost ε v pozitivni ali v negativni smeri. V izrazu na desni strani enačbe (1.11) lahko izberemo tako majhen ε, da bo linearni člen tega izraza večji od vsote vseh preostalih členov, kar pomeni, da bo linearni člen določal predznak celotne desne strani in s tem tudi spremembe $\varDelta f$. Vzemimo, da je $f'(a) > 0$. Tedaj bo pri $\varepsilon > 0$ sprememba $\varDelta f$ pozitivna, pri $\varepsilon < 0$ pa negativna. To pa je v nasprotju s pravkar ugotovljeno zahtevo, da mora biti v točki ekstrema sprememba funkcije $\varDelta f$ neodvisna od predznaka ε. Ker pa je po drugi strani ε poljubna od nič različna vrednost, ki zadošča neenačbi $|\varepsilon| < h$, lahko kot potreben pogoj za nastop ekstrema v točki a izluščimo zahtevo, da mora biti prvi odvod funkcije $f(x)$ v točki a enak nič

$$f'(a) = 0\,. \tag{1.12}$$

Razlika $\varDelta f$ je sedaj

$$\varDelta f = \frac{\varepsilon^2}{2\,!}\,f''(a) + \frac{\varepsilon^3}{3\,!}\,f'''(a) + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k\,!}\,f^{(k)}(a) + \ldots\,, \tag{1.13}$$

Po enaki logiki kot zgoraj lahko sklepamo, da bo pri dovolj majhnem ε v vsoti na desni strani prevladal člen z drugim odvodom, ki pa tokrat ni odvisen od predznaka ε. Pri $f''(a) > 0$ bo torej $\varDelta f > 0$, pri $f''(a) < 0$ pa $\varDelta f < 0$ in iz zapisa (1.9) sledi

$$\begin{array}{lcl} f''(a) > 0 & \ldots & \text{lokalni minimum} \\ f''(a) < 0 & \ldots & \text{lokalni maksimum.} \end{array} \tag{1.14}$$

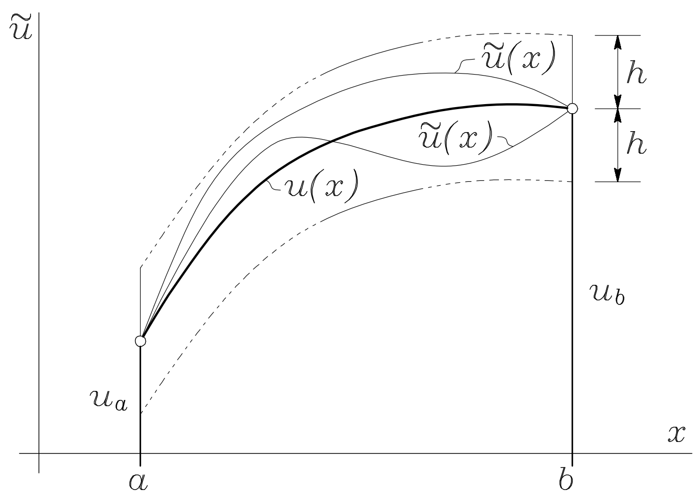
Funkcija $f(x)$ ima torej lahko ekstreme le v točkah, v katerih je njen prvi odvod enak nič. Predznak drugega odvoda pa pove naravo ekstrema: če je drugi odvod pozitiven, ima funkcija minimum, če je negativen, pa maksimum. Omenimo še možnost, da je drugi odvod $f''(a)$ enak nič. Tedaj ima funkcija $f(x)$ v točki a *prevoj* ali *inflekcijsko točko*.

1.3 Osnovni problem variacijskega računa. Minimizacija funkcionala

S podobnim razmislekom kot v prejšnjem razdelku se lotimo precej težje naloge, pri kateri pa nimamo opravka s funkcijo ene spremenljivke, temveč s tako imenovanim *funkcionalom*. V svojem izvornem pomenu je funkcional "*funkcija funkcij*". Kot osnovni primer si oglejmo funkcional J

$$J = \int_a^b F(\widetilde{u}, \widetilde{u}', x)\, dx\,, \tag{1.15}$$

kjer so $\widetilde{u}(x)$ in $\widetilde{u}'(x)$ zvezne in zvezno odvedljive funkcije na intervalu $[a, b\,]$, F pa je znana zvezna in zvezno odvedljiva funkcija argumentov $\widetilde{u}(x)$, $\widetilde{u}'(x), x$ za vse $x \in [a, b\,]$ *(slika 1.3)*.



Slika 1.3

Razen tega za funkcije $\widetilde{u}(x)$ zahtevamo, da na robovih intervala zavzamejo predpisane vrednosti

$$\widetilde{u}(a) = u_a \qquad \text{in} \qquad \widetilde{u}(b) = u_b\,. \tag{1.16}$$

Variacijski problem je zastavljen takole: med vsemi funkcijami $\widetilde{u}(x)$, ki zadoščajo pogojem zveznosti in robnima pogojema (1.16), poiščimo tisto posebno funkcijo $u(x)$, pri kateri doseže funkcional (1.15) ekstremno vrednost. To funkcijo imenujemo *ekstremala*. Podobno kot pri funkciji ene spremenljivke se tudi tokrat omejimo na zadosti majhno okolico ekstremale. To z drugimi besedami pomeni, da iščemo ekstremalo med funkcijami, ki zadoščajo neenačbi

$$|\widetilde{u}(x) - u(x)| < h\,, \tag{1.17}$$

za vse $x \in [a, b\,]$, pri čemer je h poljubno, dovolj majhno pozitivno število. Funkcije, $\widetilde{u}(x)$, ki zadoščajo pogojem zveznosti, robnima pogojema (1.16) in neenačbi (1.17) imenujemo *dopustne* ali *poskusne funkcije (slika 1.3)*

Tudi definicija ekstrema funkcionala je podobna kot pri funkciji ene spremenljivke: funkcional ima pri funkciji $u(x)$ lokalni minimum, če za njegovo spremembo ΔJ velja

$$\Delta J = J(\widetilde{u}) - J(u) > 0 \tag{1.18}$$

za katerokoli izmed dopustnih funkcij $\widetilde{u}$. Podobno definiramo lokalni maksimum, če je $\Delta J < 0$ pri vseh dopustnih funkcijah $\widetilde{u}$. V mehaniki imamo običajno opraviti z variacijskimi problemi, pri katerih iščemo lokalne minimume funkcionalov, zato se v nadaljevanju ukvarjamo le z iskanjem takih funkcij, ki dani funkcional minimizirajo.

Kako poiskati ekstremalo $u(x)$, ki minimizira funkcional J? Lahko bi, na primer, izbirali različne funkcije $\widetilde{u}$, izračunali vrednost funkcionala za vsako od njih, tabelirali dobljene vrednosti in ugotovili, pri kateri izbiri bi bila vrednost funkcionala najmanjša. Taka pot bi bila seveda zelo zamudna in nezanesljiva. Izkaže se, da je problem mogoče rešiti na neprimerno elegantnejši način.

Poljubno izmed dopustnih funkcij $\widetilde{u}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo ekstremale u in neke dodatne funkcije η

$$\widetilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon\eta(x)\,. \tag{1.19}$$

Pri tem je $\eta(x)$ poljubna zvezna in dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$, ki na robovih intervala zavzame vrednost nič

$$\eta(a) = \eta(b) = 0\,. \tag{1.20}$$

Tedaj je tudi

$$\widetilde{u}'(x) = u'(x) + \varepsilon\eta'(x)\,. \tag{1.21}$$

Tako dobljena funkcija $\widetilde{u}$ pripada poljubno majhni okolici $h > 0$, če je le funkcija $\eta(x)$ na intervalu $[a, b]$ omejena tako, da velja neenačba $|\varepsilon\eta| < h$ za vse $x \in [a, b]$. Kakor vidimo, funkcija $\eta(x)$ določa obliko poskusne funkcije $\widetilde{u}(x)$, konstanta ε pa njeno "oddaljenost" od ekstremale. Pri katerikoli izbiri oblikovne funkcije $\eta(x)$ dobimo ekstremalo obravnavanega variacijskega problema tako, da vzamemo $\varepsilon = 0$

$$u = \widetilde{u}(\varepsilon = 0)\,. \tag{1.22}$$

Ob upoštevanju enačb (1.15), (1.19) in (1.21) lahko pišemo

$$J = J(\widetilde{u}) = J(u + \varepsilon\eta) = \int_a^b F(u + \varepsilon\eta,\, \widetilde{u}' + \varepsilon\eta',\, x)\, dx\,. \tag{1.23}$$

Pri izbrani obliki oblikovne funkcije $\eta(x)$ je torej vrednost funkcionala J odvisna le od amplitude ε

$$J(\widetilde{u}) = J(\varepsilon) \qquad \rightarrow \qquad J(u) = J\,|_{\varepsilon=0} \tag{1.24}$$

in ob upoštevanju enačbe (1.18) lahko pišemo

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J\,|_{\varepsilon=0}\,. \tag{1.25}$$

Tako smo variacijski problem prevedli na problem določitve lokalnega ekstrema funkcije ene spremenljivke, kakršnega smo obravnavali v prejšnjem razdelku. Tako kot v prejšnjem razdelku razvijemo funkcional $J(\varepsilon)$ v Taylorjevo vrsto okrog vrednosti $\varepsilon = 0$

$$J(\varepsilon) = J\,|_{\varepsilon=0} + \varepsilon\, \frac{dJ}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\, \frac{d^2J}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^3}{3!}\, \frac{d^3J}{d\varepsilon^3}\bigg|_{\varepsilon=0} + \ldots\,. \tag{1.26}$$

Enačba (1.25) je sedaj

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(\varepsilon) - J\,\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \varepsilon\,\frac{dJ}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\,\frac{d^2J}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^3}{3!}\,\frac{d^3J}{d\varepsilon^3}\bigg|_{\varepsilon=0} + \ldots\,. \qquad (1.27)\end{aligned}$$

S podobnim sklepanjem kot pri funkciji ene spremenljivke lahko kot potreben pogoj za nastop lokalnega ekstrema funkcionala vpeljemo zahtevo, da je koeficient pri ε enak nič

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0\,. \qquad (1.28)$$

Pravimo, da ima funkcional J tedaj, ko je izpolnjen pogoj (1.28), *stacionarno vrednost*. Ker smo pogoj (1.28) zapisali pri vrednosti $\varepsilon = 0$, smo s tem izmed vseh dopustnih funkcij $\widetilde{u}$ izbrali ravno ekstremalo $u = \widetilde{u}(\varepsilon = 0)$. Zato lahko pogoj (1.28) za stacionarno vrednost funkcionala vzamemo kot izhodišče za določitev ekstremale u. Upoštevajoč enačbo (1.15) lahko funkcional J odvajamo po parametru ε in dobimo

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F\left(\widetilde{u}, \widetilde{u}', x\right)\, dx\,\bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}'}\frac{\partial \widetilde{u}'}{\partial \varepsilon}\right) dx\,\bigg|_{\varepsilon=0} = 0\,. \qquad (1.29)\end{aligned}$$

Integral v gornji enačbi moramo izvrednotiti pri vrednosti $\varepsilon = 0$. Enačbi (1.19) in (1.21) kažeta, da je tedaj

$$\varepsilon = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} \widetilde{u} = u & & \widetilde{u}' = u' \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \varepsilon} = \eta & \text{in} & \dfrac{\partial \widetilde{u}'}{\partial \varepsilon} = \eta'\,. \end{array}\right. \qquad (1.30)$$

Enačbo (1.29) lahko sedaj zapišemo takole

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}\,\eta'\right) dx = 0\,. \qquad (1.31)$$

Drugi člen integranda integriramo po delih

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'}\,\eta'\,dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\,\eta\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta\,dx \tag{1.32}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=b} \eta(b) \; - \; \left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=a} \eta(a) + \\ \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] \eta\,dx = 0\,. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Ob upoštevanju lastnosti (1.20) se enačba (1.33) poenostavi

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right] \eta\,dx = 0\,. \tag{1.34}$$

Ker je $\eta(x)$ poljubna zvezna funkcija na $[a, b\,]$, lahko ob upoštevanju *osnovnega izreka variacijskega računa* ugotovimo, da je pogoj (1.34) izpolnjen le tedaj, če je izraz v oglatem oklepaju enak nič povsod na $[a, b\,]$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0\,. \tag{1.35}$$

To je znana *Euler–Lagrangeva enačba*. V splošnem gre za navadno diferencialno enačbo drugega reda. Ker je $F = F\,[u(x), u'(x), x]$, jo namreč v razviti obliki zapišemo takole

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial x} - \frac{du}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u} - \frac{d^2 u}{dx^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u'} = 0\,. \tag{1.36}$$

Rešitve u dobljene enačbe so ekstremale obravnavanega variacijskega problema. Kakor vemo, vsebuje splošna rešitev diferencialne enačbe drugega reda dve integracijski konstanti

$$u = u(x, C_1, C_2)\,, \tag{1.37}$$

ki ju določimo iz pogojev (1.16). Variacijski problem smo torej prevedli na reševanje navadne diferencialne enačbe drugega reda ob začetnih pogojih (1.16), kar je v matematičnem pogledu razmeroma preprosta naloga.

Naravni robni pogoji

Zaradi boljšega razumevanja in kasnejše rabe se za trenutek vrnimo k enačbi (1.33) in vzemimo, da vrednosti iskane funkcije u in s tem tudi oblikovne funkcije η v krajiščih intervala niso predpisane. To pomeni, da lahko funkcija η v točkah $x = a$ in $x = b$ zavzame poljubni vrednosti $\eta(a) = \eta_a$ in $\eta(b) = \eta_b$, če je le $|\varepsilon\eta_a| < h$ in $|\varepsilon\eta_b| < h$. Ker sta η_a in η_b poljubni, lahko izberemo $\eta_a = 0$ in $\eta_b = 0$ in kot potreben pogoj za nastop ekstrema dobimo že znano Euler–Lagrangevo enačbo (1.35). Enačba (1.33) je tedaj

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=b} \eta_b - \left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=a} \eta_a = 0 \tag{1.38}$$

in mora biti izpolnjena pri poljubni izbiri robnih vrednosti η_a oziroma η_b. Če, na primer, izberemo $\eta_a \neq 0$ in $\eta_b = 0$, dobimo pogoj

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=a} = 0\,, \tag{1.39}$$

če izberemo $\eta_a = 0$ in $\eta_b \neq 0$, pa iz enačbe (1.38) sledi

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=b} = 0\,. \tag{1.40}$$

Pogoja (1.39) in (1.40), ki morata biti izpolnjena, če vrednosti iskane funkcije u v krajiščih intervala niso predpisane, imenujemo *naravna robna pogoja*. Pomen naravnih robnih pogojev bomo bolj podrobno spoznali pri praktični uporabi variacijskih principov v konstrukcijski mehaniki.

Funkcionali z več neodvisnimi funkcijami

Kakor je bilo omenjeno na začetku, smo v tem razdelku obravnavali najenostavnejši variacijski problem, pri katerem je bila vrednost funkcionala odvisna od ene same neznane funcije $u(x)$ in njenega prvega odvoda $u'(x)$. V mehaniki imamo pogosto opraviti s funkcionali, v katerih nastopa več funkcij pa tudi njihovi višji odvodi. Na kratko si najprej oglejmo primer, da je funkcional odvisen od n funkcij $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_n$ in njihovih prvih odvodov $\widetilde{u}_1{}', \widetilde{u}_2{}', \ldots, \widetilde{u}_n{}'$

$$J = \int_a^b F(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_n,\ \widetilde{u}_1{}', \widetilde{u}_2{}', \ldots, \widetilde{u}_n{}',\ x)\, dx\,, \tag{1.41}$$

V tem primeru sestavljajo množico dopustnih oziroma poskusnih funkcij vse zvezno odvedljive $n-$terice funkcij $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_n$, ki v krajiščih intervala zavzamejo predpisane vrednosti

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}_1(a) = u_a^{(1)}, \quad \widetilde{u}_2(a) = u_a^{(2)}, \quad \ldots \quad \widetilde{u}_n(a) = u_a^{(n)} \\ &\widetilde{u}_1(b) = u_b^{(1)}, \quad \widetilde{u}_2(b) = u_b^{(2)}, \quad \ldots \quad \widetilde{u}_n(b) = u_b^{(n)}\,. \end{aligned} \tag{1.42}$$

V tem primeru pravimo, da ima funkcional J pri $n-$terici funkcij $u_1, u_2, \ldots, u_n$ lokalni minimum v okolici h, če obstoji táko pozitivno število h, da velja

$$J(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_n) - J(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geq 0 \tag{1.43}$$

za vse $n-$terice $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \ldots, \widetilde{u}_n$, ki ustrezajo pogojem

$$|\widetilde{u}_1 - u_1| < h\,, \quad |\widetilde{u}_2 - u_2| < h\,, \quad \ldots \quad |\widetilde{u}_1 - u_1| < h \tag{1.44}$$

pri vseh $x \in [a, b\,]$.

Oglejmo si funkcional $J(\widetilde{u}_1, u_2, \ldots, u_n)$. Ker funkcije $u_2, \ldots, u_n$ že pripadajo $n-$terici, pri kateri ima funkcional J lokalni ekstrem, je jasno, da mora biti $\widetilde{u}_1 = u_1$, da bo imel funkcional res lokalni ekstrem. Pogoj, ki ga mora v ta namen izpolnjevati funkcija $u_1(x)$, smo izpeljali pri osnovnem primeru variacijskega računa in ga imenovali Euler- Lagrangeva diferencialna enačba

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial {u_1}'}\right) = 0\,. \tag{1.45}$$

Na podoben način izpeljemo še preostalih $n-1$ enačb za funkcije $u_2,\, u_3,\, \ldots,\, u_n$. Tako skupaj s prvo dobimo sistem n diferencialnih enačb za funkcije $u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n$, pri katerih ima funkcional J lokalni ekstrem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial {u_1}'}\right) &= 0\\
\frac{\partial F}{\partial u_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial {u_2}'}\right) &= 0\\
&\vdots\\
\frac{\partial F}{\partial u_n} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial {u_n}'}\right) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Problem ekstremizacije funkcionala, odvisnega od $n-$terice funkcij $\widetilde{u}_1,\, \widetilde{u}_2,\, \ldots,\, \widetilde{u}_n$, smo torej prevedli na reševanje sistema n diferencialnih enačb drugega reda. V splošni rešitvi nastopa $2n$ integracijskih konstant, ki jih določimo tako, da so izpolnjeni pogoji (1.42).

Funkcionali z višjimi odvodi

Kakor smo omenili, v funkcionalih razen prvega pogosto nastopajo tudi višji odvodi iskanih funkcij. Kot primer si oglejmo funkcional, ki vsebuje prvi, drugi in tretji odvod

$$J = \int_a^b F(\widetilde{u}, \widetilde{u}', \widetilde{u}'', \widetilde{u}''',\, x)\, dx\,, \tag{1.47}$$

Kakor v razdelku **1.3** se tudi v tem primeru določitve ekstremale $u(x)$ lotimo tako, da vpeljemo enoparametrično družino poskusnih funkcij $\widetilde{u}(x)$

$$\widetilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{1.48}$$

le da je tokrat $\eta(x)$ poljubna zvezna in štirikrat zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$. Njeni odvodi so

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}'(x) &= u'(x) + \varepsilon\eta'(x) \\
\widetilde{u}''(x) &= u''(x) + \varepsilon\eta''(x) \\
\widetilde{u}'''(x) &= u'''(x) + \varepsilon\eta'''(x) \,.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Z enakim razmislekom kot v razdelku **1.3** pridemo do potrebnega pogoja za nastop ekstrema funkcionala J

$$\left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F\left(\widetilde{u}, \widetilde{u}', \widetilde{u}'', \widetilde{u}''', \, x\right)\, dx \Bigg|_{\varepsilon=0} = 0\,. \tag{1.51}$$

Od tod sledi

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\,\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}\,\eta' + \frac{\partial F}{\partial u''}\,\eta'' + \frac{\partial F}{\partial u'''}\,\eta''' \right) dx = 0\,. \tag{1.52}$$

Člene z odvodi integriramo po delih

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'}\,\eta'\, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\,\eta\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta\, dx \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u''}\,\eta''\, dx = {} & \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\,\eta'\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\eta'\, dx = \\
& \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\,\eta'\right]_a^b - \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\eta\right]_a^b + \\
& \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\eta\, dx
\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'''}\,\eta'''\,dx = {} & \left[\frac{\partial F}{\partial u'''}\,\eta''\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\eta''\,dx = \\
& \left[\frac{\partial F}{\partial u'''}\,\eta''\right]_a^b - \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\eta'\right]_a^b + \\
& \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\eta'\,dx = \\
& \left[\frac{\partial F}{\partial u'''}\,\eta''\right]_a^b - \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\eta'\right]_a^b + \\
& \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\eta\right]_a^b - \int_a^b \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\eta\,dx
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

Enačba (1.52) preide s tem v naslednjo obliko

$$
\begin{aligned}
& \left[\left\{\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\right\}\eta\right]_a^b + \\
& \left[\left\{\frac{\partial F}{\partial u''} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\right\}\eta'\right]_a^b + \left[\frac{\partial F}{\partial u'''}\,\eta''\right]_a^b + \\
& \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right)\right]\eta\,dx = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

Ne glede na to, ali so vrednosti funkcije u v krajiščih intervala $[a, b]$ predpisane ali ne, lahko kot eno od možnih izbir robnih vrednosti oblikovne funkcije vzamemo, da so vrednosti funkcije η in njenih odvodov v krajiščih $x = a$ in $x = b$ vse enake nič

$$
\begin{aligned}
\eta(a) = \eta'(a) = \eta''(a) = 0 \\
\eta(b) = \eta'(b) = \eta''(b) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.57}
$$

Kakor vidimo, mora biti tedaj integral v enačbi (1.46) enak nič in iz osnovnega izreka variacijskega računa sledi Euler-Lagrangeva enačba obravnavanega variacijskega problema

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial u'''}\right) = 0\,. \tag{1.58}$$

Opisana izbira robnih vrednosti oblikovne funkcije η dejansko pomeni, da so v krajiščih intervala predpisane vrednosti iskane funkcije $u(x)$ in njenih prvih in drugih odvodov. Vsota preostalih členov v enačbi (1.56) pa mora biti enaka nič tudi v primeru, da vrednosti u, u' in u'' in s tem tudi η, η' in η'' v krajiščih intervala niso predpisane. Kakor smo videli v osnovnem primeru, morajo biti tedaj v točkah $x = a$ in $x = b$ izpolnjeni naravni robni pogoji. To pomeni, da morajo biti v krajiščih enaki nič izrazi, s katerimi so v enačbi (1.56) pomnožene krajiščne vrednosti oblikovne funkcije in njenih odvodov. Pogoj (1.56) za ekstrem funkcionala lahko torej v celoti izpolnimo na enega od dveh možnih načinov, in sicer tako, da je v krajiščih $x = a$ oziroma $x = b$

predpisana vrednost u ali $\dfrac{\partial F}{\partial u'} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u''}\right) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u'''}\right) = 0$

predpisana vrednost u' ali $\dfrac{\partial F}{\partial u''} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u'''}\right) = 0$

predpisana vrednost u'' ali $\dfrac{\partial F}{\partial u'''} = 0\,.$

Euler-Lagrangevo enačbo (1.35), ki smo jo izpeljali kot potreben pogoj za ekstrem funkcionala, v katerem nastopajo prvi, drugi in tretji odvodi iskane funkcije u, zlahka posplošimo za primer, da v funkcionalu nastopa prvih p odvodov funkcije u. Euler-Lagrangeva enačba funkcionala

$$J = \int_a^b F(\widetilde{u}, \widetilde{u}', \widetilde{u}'', \ldots, u^{(p)}, x)\, dx\,, \tag{1.59}$$

je tako

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial F}{\partial u^{(i)}}\right) = 0\,. \tag{1.60}$$

Upoštevaje dosedanje ugotovitve lahko na kratko zapišemo tudi Euler-Lagrangeve enačbe za primer, da je funkcional odvisen od n funkcij in njihovih prvih p odvodov

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{\partial F}{\partial u_j^{(i)}} \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{1.61}$$

1.4 Variacije. Operator delta

V tem poglavju ves čas govorimo o variacijskih problemih, pojma variacije pa doslej še nismo podrobneje opredelili. Vendar že ime pove, da gre pri variacijah za majhne spremembe količin. Tako smo ekstremalo funkcionala iskali med dopustnimi oziroma poskusnimi funkcijami, za katere smo vzeli, da se le malo razlikujejo (variirajo) od ekstremale. V enačbi (1.19) označimo razliko $\varepsilon\eta(x)$ med poskusno funkcijo in ekstremalo z δu in jo imenujemo *variacija iskane funkcije* u

$$\delta u = \delta\left[u(x)\right] = \varepsilon\eta(x) = \widetilde{u}(x) - u(x)\,. \tag{1.62}$$

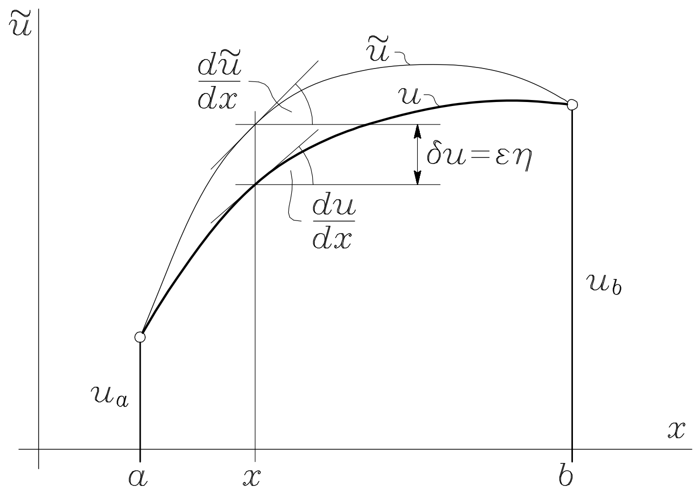
Poudarili smo, da gre za majhno spremembo funkcije u pri konstantni vrednosti neodvisne spremenljivke x *(slika 1.4)*. Variacija δu torej ni povezana s prirastkom neodvisne spremenljivke dx. Glede na različne poskusne funkcije $\widetilde{u}$ ima lahko iskana funkcija u v isti točki x različne variacije δu. Z oznako δ smo vpeljali tako imenovani *operator delta*, ki iskani funkciji $u(x)$ v točki $x = konst.$ priredi variacijo $\delta u(x)$. Podobno definiramo variacijo $\delta u'$ prvega odvoda funkcije u kot razliko

$$\delta u' = \delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d\widetilde{u}}{dx} - \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\widetilde{u} - u\right)\,. \tag{1.63}$$

Ob upoštevanju definicije (1.62) sledi pomembna zveza

$$\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d\left(\delta u\right)}{dx}\,, \tag{1.64}$$

ki pove, da je variacija prvega odvoda enaka prvemu odvodu variacije iskane funkcije pri $x = konst$. Pravimo, da je operator δ komutativen z diferencialnim operatorjem (d/dx). Ugotovitev lahko smiselno uporabimo tudi pri višjih odvodih.



Slika 1.4

Z obratnim sklepanjem pa lahko brez posebnega dokaza zapišemo zakon komutativnosti v integralni obliki, na primer

$$\delta \int_a^b u\, dx = \int_a^b \delta u\, dx\,. \tag{1.65}$$

Da bi podrobneje opredelili pojem *variacije funkcionala*, se vrnimo k enačbi (1.27), s katero smo zapisali spremembo vrednosti funkcionala, če ga izračunamo pri poljubni od poskusnih funkcij $\widetilde{u}$ glede na ekstremno vrednost, ki jo funkcional doseže pri ekstremali u

$$\Delta J = \varepsilon \left.\frac{dJ}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left.\frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left.\frac{d^3 J}{d\varepsilon^3}\right|_{\varepsilon=0} + \ \ldots\ . \tag{1.66}$$

Člene na desni strani enačbe (1.66) po vrsti imenujemo *prva, druga, tretja, ... variacija* funkcionala J in jih izrazimo z operatorjem δ

$$\delta J = \varepsilon \, \frac{dJ}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} , \qquad \delta^2 J = \frac{\varepsilon^2}{2!} \, \frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}\bigg|_{\varepsilon=0} , \qquad \delta^3 J = \frac{\varepsilon^3}{3!} \, \frac{d^3 J}{d\varepsilon^3}\bigg|_{\varepsilon=0} , \; \ldots \, . \tag{1.67}$$

Enačba (1.66) se s tem glasi

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \delta^3 J + \ldots \, , \tag{1.68}$$

pogoj (1.28) za ekstrem funkcionala pa lahko sedaj ob upoštevanju prve od enačb (1.67) zapišemo takole

$$\delta J = \varepsilon \, \frac{dJ}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \, \varepsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial u'} \, \varepsilon \eta' \right) \, dx = 0 \, . \tag{1.69}$$

Pri tem smo upoštevali, da je ε poljubna od nič različna vrednost. Zaradi enačb (1.19) in (1.21) je dalje

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} \, \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \, \delta u' \right) \, dx = 0 \, . \tag{1.70}$$

Izraz v oklepaju pod integralom proglasimo za *prvo variacijo* funkcije F

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \, \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \, \delta u' \, . \tag{1.71}$$

Upoštevajoč enačbo (1.15) preide pogoj za ekstrem v naslednjo preprosto obliko

$$\delta J = \delta \int_a^b F \, dx = \int_a^b \delta F \, dx = 0 \, , \tag{1.72}$$

ki pokaže, da je mogoče pravilo komutativnosti (1.65) posplošiti tudi na variacije funkcionalov.

Enačbe (1.69) do (1.72) nas pripeljejo do novega pogleda na pogoje za ekstremizacijo funkcionala. Enačba (1.69) pove, da ima lahko funkcional J ekstrem le pri taki izbiri funkcije u, da je njegova *prva variacija* δJ enaka nič. Pravimo, da ima tedaj funkcional stacionarno vrednost. Nedvoumno je definiran tudi pojem *prva variacija*: to je *linearni del spremembe vrednosti funkcionala pri poljubni dopustni* *funkciji* $\widetilde{u}$ *glede na vrednost pri ekstremali* u. Spomnimo se, da je zahteva $\delta J = 0$ le potreben pogoj za ekstrem. Naravo ekstrema (ali gre za minimum ali maksimum) določa druga ali višje variacije. Enačbe (1.70) do (1.72) pokažejo, kako izračunamo prvo variacijo funkcionala: po enakem pravilu kot popolni (totalni) diferencial izračunamo prvo variacijo δF podintegralske funkcije F in jo integriramo na intervalu $[a, b]$. Pri tem se moramo zavedati pomenske razlike med popolnim diferencialom in variacijo. Popolni diferencial pomeni spremembo funkcije več spremenljivk, če se neodvisne spremenljivke spremenijo za poljubne infinitezimalne vrednosti. Popolni diferencial df funkcije $f(x, y, z)$ je tako

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz\,. \tag{1.73}$$

Pomen prve variacije δF funkcije F pa si oglejmo na nekoliko bolj splošnem primeru, ko je $F = F(u, v, u', v', u'', v'', x)$. Če pri $x = konst.$ variiramo funkcije u, v, u', v', u'', v'' za δu, δv, $\delta u'$, $\delta v'$, $\delta u''$, $\delta v''$, dobimo

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\, \delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\, \delta v + \frac{\partial F}{\partial u'}\, \delta u' + \frac{\partial F}{\partial v'}\, \delta v' + \frac{\partial F}{\partial u''}\, \delta u'' + \frac{\partial F}{\partial v''}\, \delta v''\,. \tag{1.74}$$

Prva variacija δF je torej sprememba funkcije F pri poljubnih neodvisnih variacijah funkcij, ki jo določajo, in sicer pri konstantni vrednosti neodvisne spremenljivke x.

Zapis prve variacije lahko še nadalje posplošimo, če vzamemo, da je funkcija F podana v odvisnosti od n parametrov p_i, pri čemer so p_i funkcije koordinat in njihovi odvodi, lahko pa tudi točkovne vrednosti teh funkcij in njihovih odvodov. Tedaj je

$$\delta F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\, \delta p_i\,. \tag{1.75}$$