

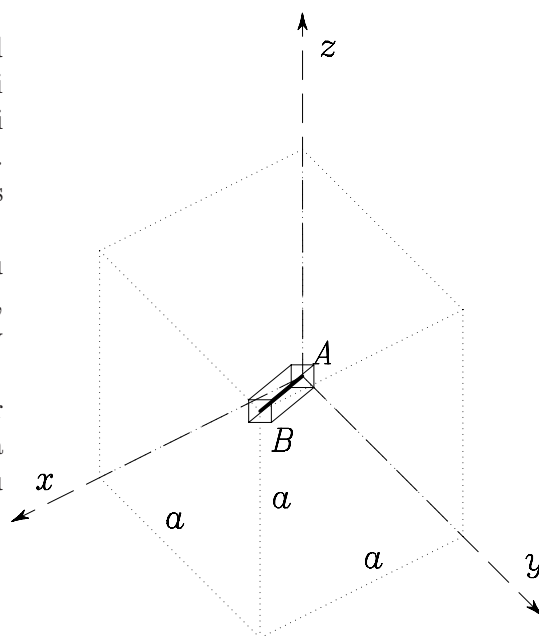
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 22. marec 2002

1. Palica s krajiščema težiščne osi $A(0, 0, 0)$ in $B(a, a, a)$ se pod vplivom zunanje obtežbe raztegne za ΔL vzdolž težiščne osi AB , hkrati pa prečni prerez palice po deformaciji ohrani enako obliko in velikost, kot jo je imel pred deformacijo. Prečni prerez, ki je bil pred deformacijo pravokoten na os AB , ostane tudi po deformaciji pravokoten to os.

Ob privzetku linearizirane teorije elastičnosti in upoštevanju dejstva, da je deformacijsko stanje v palici konstantno, določi tenzor majhnih deformacij v poljubni točki palice v kartezičnem koordinatnem sistemu na sliki.

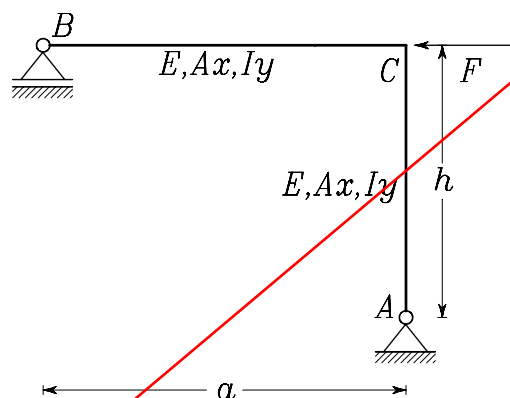
Namig: Uvedi nov koordinatni sistem, kjer ima en vektor smer osi AB , ostala dva ležita v ravnini, ki je pravokotna na to os. Tenzor deformacij ima v tem koordinatnem sistemu samo eno komponento različno od nič.

Podatki: $\Delta L = 1 \text{ mm}$, $a = 1 \text{ m}$.



2. Ravnski okvir na sliki je obremenjen z horizontalno silo F . Z uporabo diferencialnih enačb upogibnice določi horizontalni pomik točke C .

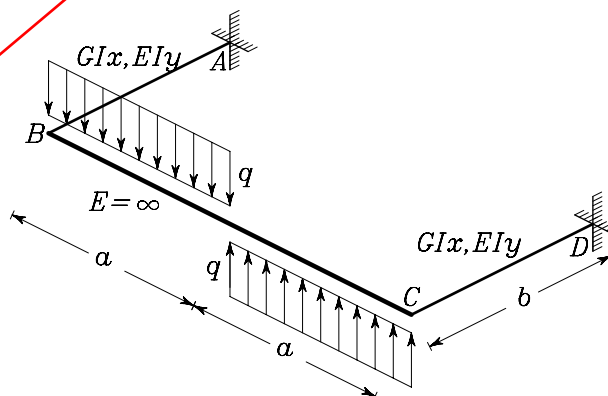
Podatki: $F = 2 \text{ kN}$, $a = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $E = 20\,000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $A_x = 70 \text{ cm}^2$, $I_y = 5000 \text{ cm}^4$.



3. Prostorski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo q , kot prikazuje slika. Del nosilca med točkama B in C je zelo tog v primerjavi s preostalim delom okvirja. Deplanacijo prerezov zanemari. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Namig: Upoštevaj antisimetrijo obtežbe.

Podatki: $q = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $a = 4 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $I_y = 5000 \text{ cm}^4$, $I_x = 20000 \text{ cm}^4$, $E = 21\,000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\nu = 0.3$.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120 %.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 22. marec 2002
Rešitve nalog

- 1 Izberemo ortonormiran koordinatni sistem z baznimi vektorji $\vec{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$, Vektor \vec{e}_ξ ima smer diagonale AB . Skupaj z vektorja \vec{e}_η in \vec{e}_ζ , ki ležita v ravnini z normalo \vec{e}_ξ tvorijo ortonormirano bazo. Zakaj smo izbrali takšne vektorje? Preprosto zato ker poznamo tenzor deformacij v tem koordinatnem sistemu. Specifična sprememba dolžine diagonale ustreza deformaciji $\varepsilon_{\xi\xi}$. Iz podatka se oblika in velikost prečnega prereza pri deformiranju ne spremeni in upoštevanja dejstva, da je deformacijski tenzor po palici konstanten razberemo, da so deformacije $\varepsilon_{\eta\eta}$, $\varepsilon_{\eta\zeta}$ in $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ enake 0. Iz podatka, ostane prečni prerez ki je bil pred deformacijo pravokoten os AB tudi po deformaciji pravokoten na to os, razberemo da sta tudi komponenti $\varepsilon_{\xi\eta}$ in $\varepsilon_{\xi\zeta}$ enaki 0. Komponente tenzorja v novem koordinatnem sistemu $\varepsilon_{\alpha\beta}$ in komponente tenzorja v starem (običajno kartezičnem) koordinatnem sistemu ε_{ij} so povezane z enačbo

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \varepsilon_{ij}, \quad \alpha \in \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}.$$

Enačbo lahko, kar naj za vajo preveri bralec sam, zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\xi\zeta} \\ \varepsilon_{\eta\xi} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\eta\zeta} \\ \varepsilon_{\zeta\xi} & \varepsilon_{\zeta\eta} & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix}$$

ali krajše

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = Q^T \cdot [\varepsilon_{ij}] \cdot Q,$$

kjer je Q ortogonalna matrika. V prvem stolpcu matrike Q so komponente vektorja \vec{e}_ξ v smereh vektorjev \vec{e}_x , \vec{e}_y in \vec{e}_z . V drugem stolpcu so komponente vektorja \vec{e}_η in v tretjem komponente vektorja \vec{e}_ζ . Če gornjo enačbo pomnožimo z leve z Q in z desne s Q^T in upoštevamo relacije $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I$, kjer s smo z I označili identiteto (enotsko matriko reda 3), dobimo iskan rezultat.

$$[\varepsilon_{ij}] = Q \cdot [\varepsilon_{\alpha\beta}] \cdot Q^T.$$

V našem primeru je $\vec{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$. Vektor \vec{e}_η izberemo tako, da bo pravokoten na \vec{e}_ξ , npr. $\vec{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_z)$. Vektor \vec{e}_ζ pa določimo z vektorskim produktom $\vec{e}_\zeta = \vec{e}_\xi \times \vec{e}_\eta$. Dobimo $\vec{e}_\zeta = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ in od tu

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Tenzor deformacij lahko sedaj izračunamo iz enačbe

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1000\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3000\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2 Konstrukcija je statično določena. Določimo diagrame upogibnih momentov in osnih sil. Postavimo lokalna koordinatna sistema v polji AC in CB v katerih napišemo diferencialne enačbe upogibnic:

Polje 1 \equiv **polje AC:**

$$M_y(x) = F \frac{h}{a} x \quad (1a)$$

$$w_1'' = -\frac{M_y}{EI_y} = -F \frac{h}{a EI_y} x \quad (1b)$$

$$w_1' = -F \frac{h}{a} \frac{x^2}{2EI_y} + C_1 \quad (1c)$$

$$w_1 = -F \frac{h}{a} \frac{x^3}{6EI_y} + C_1 x + C_2 \quad (1d)$$

$$N_x(x) = 0 \quad (2a)$$

$$u_1' = \frac{N_x}{EA_x} = 0 \quad (2b)$$

$$u_1 = C_3 \quad (2c)$$

Polje 2 \equiv **polje CB:**

$$M_y(x) = F(h-x) \quad (3a)$$

$$w_2'' = -\frac{M_y}{EI_y} = \frac{F(x-h)}{EI_y} \quad (3b)$$

$$w_2' = F \frac{(x-h)^2}{2EI_y} + D_1 \quad (3c)$$

$$w_2 = F \frac{(x-h)^3}{6EI_y} + D_1 x + D_2 \quad (3d)$$

$$N_x(x) = F \frac{h}{a} \quad (4a)$$

$$u_2' = \frac{N_x}{EA_x} = F \frac{h}{a EA_x} \quad (4b)$$

$$u_2 = F \frac{h}{a EA_x} x + D_3 \quad (4c)$$

s pripadajočimi robni pogoji:

$$w_1(0) = 0 \quad (5a)$$

$$w_1(a) = u_2(0) \quad (5b)$$

$$u_1(a) = -w_2(0) \quad (5c)$$

$$w_1'(a) = w_2'(0) \quad (5d)$$

$$w_2(h) = 0 \quad (5e)$$

$$u_2(h) = 0 \quad (5f)$$

Lokalni koordinatni sistemi:

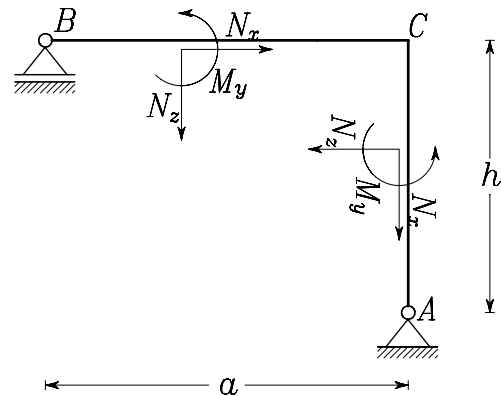


Diagram osnih sil:

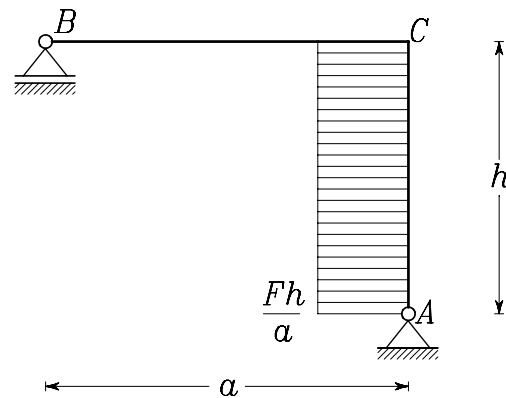
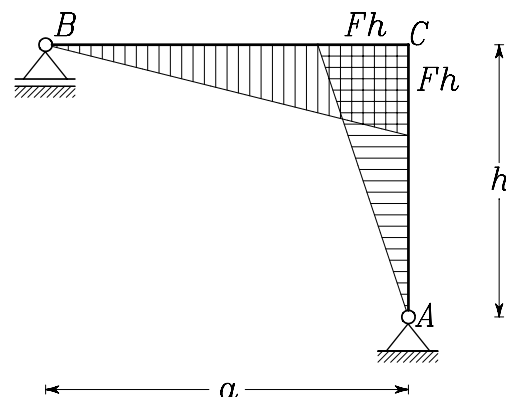


Diagram upogibnih momentov:



Robni pogoji predstavljajo sistem 6 linearnih enačb s 6 neznankami $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$. Matrika sistema enačb je razpršena, tako da z reševanjem nimamo težav. Najprej iz enačbe (5a) preberemo $C_2 = 0$, nato iz enačbe (5f) izračunamo $D_3 = -\frac{Fh^2}{aEA_x}$, nadalje iz enačbe (5a) izračunamo C_1 . Po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} C_1 &= -1/6 \frac{hF(-a^3E A_x + 6hE I_y)}{a^2E A_x E I_y} \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= -1/3 \frac{Fh^2(ha^2E A_x + a^3E A_x + 3hE I_y)}{a^2E A_x E I_y} \\ D_1 &= -1/6 \frac{hF(2a^3E A_x + 6hE I_y + 3ha^2E A_x)}{a^2E A_x E I_y} \\ D_2 &= 1/6 \frac{Fh^2(2a^3E A_x + 6hE I_y + 3ha^2E A_x)}{a^2E A_x E I_y} \\ D_3 &= -\frac{Fh^2}{aEA_x}. \end{aligned}$$

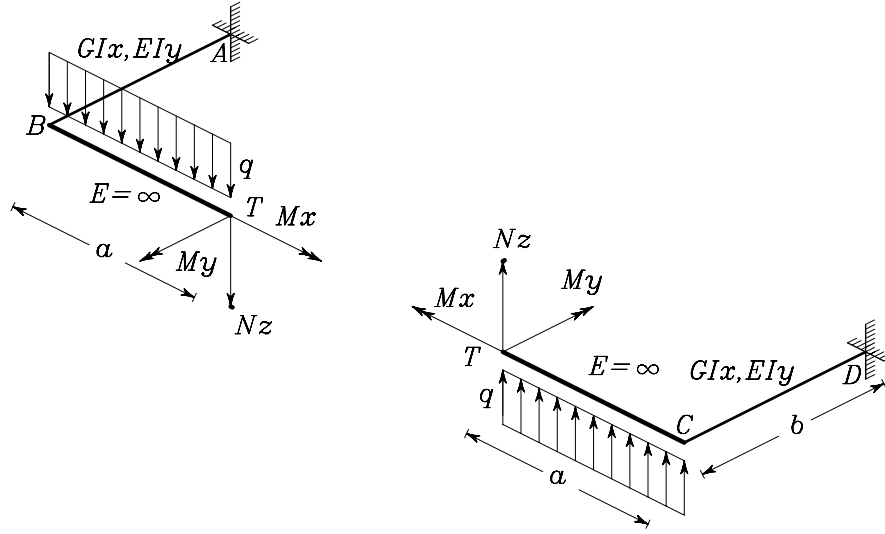
Iskani pomik predstavlja konstanta C_3 . Pomik potemtakem znaša

$$u = C_3 = -1/3 \frac{Fh^2(ha^2E A_x + a^3E A_x + 3hE I_y)}{a^2E A_x E I_y}.$$

Ko vstavimo numerične podatke dobimo $u = -0.4202$ cm.

Komentar: Ko opisujemo notranje statične količine npr. M_y kot funkcijo x to počnemo na odprtih intervalih npr. v polju AC na delu $x \in (0, a)$ v polju CB pa na delu $x \in (0, h)$. Torej v nobenem primeru robne točke niso zajete saj v njih notrane sile sploh niso definirane (npr. prečna sila v podpori). V primerih, ko so notranje sile zvezne lahko rezultat razširimo na krajišča (npr. upogibni moment v točki C). Kakorkoli, količine w, w' in u pa so zvezne zato npr velja $u_1(h-) = u_1(h)$, zato tudi robne pogoje izrazimo preko diferencialnih enačb (pa čeprav diferencialne enačbe veljajo samo na odprtih intervalih).

- 3 Konstrukcijo v splošnem prerežemo po spodnji sliki. Pri branah so samo upogibni momenti M_x in M_y prečne sile N_z od nič različne.



Če upoštevamo antisimetrijo obtežbe lahko obravnavamo samo polovico konstrukcije npr. del ABT . Mi tega ne bomo naredili. Notranje sile bomo izračunali tako kot bi jih izračunali pri poljubni pravokotni obtežbi. V točki T morata biti enaka zasuka okrog osi x in y kot tudi vertikalni pomik w levega in desnega dela konstrukcije. Označimo del konstrukcije ABT z 1 in del TCD z 2. Potem lahko pogoje matematično zapišemo z enačbami

$$\omega_x^1(T) = \omega_x^2(T), \quad (6a)$$

$$\omega_y^1(T) = \omega_y^2(T), \quad (6b)$$

$$w^1(T) = w^2(T), \quad (6c)$$

kjer smeri x , y in z sovpadajo s smermi M_x , M_y in N_z na delu 1. Z izrazi N_x , M_x in M_y smo označili prečno silo, torzijski in upogibni moment v točki T . Pri izračunov pomikov in zasukov bomo privzeli, da sta dela BT in CT toga. Privzamemo rezultate iz tabel in dobimo

$$\omega_x^1(T) = \omega_x^1(B) = \frac{q a b^2}{2 E I_y} + \frac{N_z b^2}{2 E I_y} + \frac{M_x b}{E I_y}, \quad (7a)$$

$$\omega_x^2(T) = \omega_x^2(C) = -\frac{q a b^2}{2 E I_y} - \frac{N_z b^2}{2 E I_y} - \frac{M_x b}{E I_y}, \quad (7b)$$

$$\omega_y^1(T) = \omega_y^1(B) = \frac{M_y b}{G I_x} - \frac{q a^2 b}{2 G I_x} - \frac{N_z a b}{G I_x}, \quad (7c)$$

$$\omega_y^2(T) = \omega_y^2(C) = -\frac{M_y b}{G I_x} - \frac{q a^2 b}{2 G I_x} - \frac{N_z a b}{G I_x}, \quad (7d)$$

$$w^1(T) = \frac{N_z b^3}{3 E I_y} + \frac{q a b^3}{3 E I_y} + \frac{M_x b^2}{E I_y} - \omega_y^1(B) a, \quad (7e)$$

$$w^2(T) = -\frac{N_z b^3}{3 E I_y} - \frac{q a b^3}{3 E I_y} - \frac{M_x b^2}{E I_y} + \omega_y^1(C) a. \quad (7f)$$

Imamo sistem 3 linearnih enačb s tremi neznankami N_z , M_x in M_y . Enačbo (6b) prepisemo v obliko $\omega_y^1(T) - \omega_y^2(T) = 0$ od koder neposredno sledi $M_y = 0$. Enak rezultat bi dobili z upoštevanjem antisimetrije obtežbe. Preostane sistem dveh linearnih enačb (6a) in (6c) z dvema neznankama N_z in M_x .

Sistem enačb rešimo po Cramerjevem pravilu in dobimo

$$N_z = -\frac{aq(b^2 G I_x + 6 a^2 E I_y)}{b^2 G I_x + 12 a^2 E I_y}$$
$$M_x = -3 \frac{ba^3 E I_y q}{b^2 G I_x + 12 a^2 E I_y}$$

Vstavimo numerične vrednosti in končno izračunamo

$$N_z = -6.4036 \text{ kN}$$
$$M_x = -8.3946 \text{ kN m.}$$

Diagramov notranjih sil od tu naprej ni več težko konstruirati.