Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
8. september 2006

1. V točki T linearno elastičnega - linearno plastičnega telesa vlada **ravninsko napetostno stanje** glede na ravnino z normalo $\vec{e}_b = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$. V ravnini z normalo $\vec{e}_a = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ nastopa samo normalna napetost $\sigma_{aa} = 30$ MPa. Pri tem napetostnem stanju se v točki T v skladu z Misesovem kriterijem pojavijo plastične deformacije.
Izračunaj komponente tenzorja napetosti σ_{ij} v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z).
Podatki: $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_Y = 240$ MPa.

---

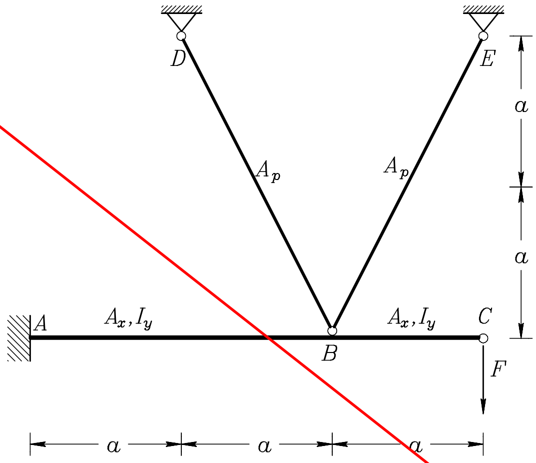
2. Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x in y. Vse točke telesa se premikajo le v ravnini (x,y). Poznana sta tudi pomik točke $T_0(1,0,0)$, tj. $\vec{u}_{T_0} = 10^{-4} \cdot (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y)$ in zasuk v točke $T_1(1,1,0)$, tj. $\vec{\omega}_{T_1} = -5 \cdot 10^{-5}\vec{e}_z$. Določi tenzor velikih deformacij v točki $T(5,5,0)$. Razdalje in pomiki so v m.

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 2+3x^2+4x^3 & \frac{1}{2}(3+3x^2+4x^3+3y^2+4y^3) & 0 \\ \frac{1}{2}(3+3x^2+4x^3+3y^2+4y^3) & 1+3y^2+4y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podatki: $a = 2$, $b = 5$.

---

3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z navpično F. Vsi nosilci in palice so iz enakega materiala. Z metodo upogibnice ali uporabo tabel določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil in določi vodoravni pomik točke B.
Podatki: $F = 1$ kN, $a = 2$ m, $A_p = 50$ cm^2, $A_x = 100$ cm^2, $I_y = 5000$ cm^4, $E = 2 \cdot 10^4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



Točkovanje: 40 % + 30 % + 40 % = 110%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES - Rešitve nalog
8. september 2006

1. Ker v ravnini z normalo $\vec{e}_a$ nastopa samo glavna normalna napetost, je to hkrati tudi ena izmed glavnih ravnin tj. $\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ in $\sigma_{11} = \sigma_{aa}$. Ker je vektor $\vec{e}_b$ normalni vektor ravnine v kateri vlada ravninsko napetostno stanje je $\vec{e}_b = \vec{e}_2$ in $\sigma_{22} = 0$. (Ker je normalna napetost $\sigma_{11} \neq 0$ mora biti vektor $\vec{e}_2$ pravokoten na $\vec{e}_1$. To tudi je). Tretja glavna smer je pravokotna na smeri $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$ torej jo lahko izračunamo z vektorskim produktom obeh normal tj.

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z\right).$$

Upoštevamo, da je v točki T izpolnjen tudi Misesov pogoj tečenja tj.

$$(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{22})^2 = 2\sigma_Y^2,$$

$$30^2 + (30-\sigma_{33})^2 + \sigma_{33}^2 = 2\cdot 240^2 \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_{33} = -223.6\,\text{MPa} \\ \sigma_{33} = 253.6\,\text{MPa}. \end{cases}$$

Našli smo dve rešitvi in sicer

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -223.6 \end{bmatrix}\text{MPa}, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 253.6 \end{bmatrix}\text{MPa}.$$

Poznamo tudi transformacijsko matriko $[T]$ tj.

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Z uporabo enačbe

$$[\sigma_{ij}] = [T]\cdot[\sigma_{\alpha\beta}]\cdot[T]^T$$

izračunamo

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -27.3 & -27.3 & 84.5 \\ -27.3 & -27.3 & 84.5 \\ 84.5 & 84.5 & -139.1 \end{bmatrix}\text{MPa}, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 52.3 & 52.3 & -74.5 \\ 52.3 & 52.3 & -74.5 \\ -74.5 & -74.5 & 179.1 \end{bmatrix}\text{MPa}.$$

2. Z uporabo enačb

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{T_0}^{T} \nabla \times \vec{\varepsilon}_x\,dx + \int_{T_0}^{T} \nabla \times \vec{\varepsilon}_y\,dy + \int_{T_0}^{T} \nabla \times \vec{\varepsilon}_z\,dz,$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \int_{T_0}^{T} \vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x\,dx + \int_{T_0}^{T} \vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y\,dy + \int_{T_0}^{T} \vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z\,dz$$

in robnih pogojev izračunamo pomike (konstanti c_1 in c_2 na sam izračun tenzorjev deformacij ne vplivata)

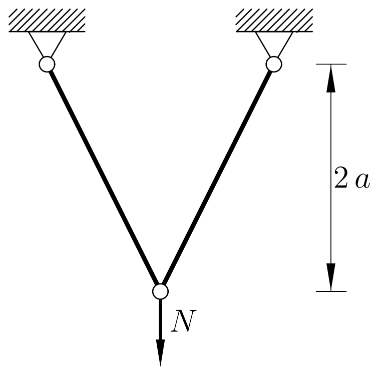
$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y,\\
u_x &= 10^{-4}\left(c_1 + 2x + x^3 + x^4 + 2y + y^3 + y^4\right),\\
u_y &= 10^{-4}\left(c_2 + x + x^3 + x^4 + y + y^3 + y^4\right)
\end{aligned}
$$

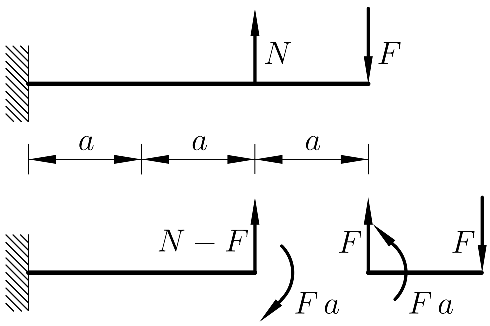
in potem še komponente tenzorja majhnih in velikih deformacij v točki T

$$
[\varepsilon_{ij}(T)] = \begin{bmatrix} 0.0577 & 0.05765 & 0 \\ 0.05765 & 0.05765 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [E_{ij}(T)] = \begin{bmatrix} 0.0610 & 0.06097 & 0 \\ 0.06097 & 0.06092 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Komponente tenzorja velikih deformacij lahko z uporabo deformacijskega gradienta določimo tudi hitreje!

3. Konstrukcijo razrežemo, kot prikazuje spodnja slika. Zakaj je vodoravna sila v vezi B enaka nič?





Z uporabo podajnostnih matrik določimo pomik konzole v točki B

$$
w_k(B) = \frac{(F-N)\,(2a)^3}{3EI_y} + \frac{(F\,a)\,(2a)^2}{2EI_y}
$$

Z uporabo metode pomikov določimo tudi navpični pomik prostega krajišča paličja. Oštevilčimo vozlišča paličja D, B in E z 1, 2 in 3. Izračunamo togostni matriki palic 12 in 23 in dobimo

$$
\begin{aligned}
[k_{12}] &= \frac{EA_p}{5l_p}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{EA_p}{5l_p}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\\
[k_{23}] &= \frac{EA_p}{5l_p}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{EA_p}{5l_p}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Od tu dobimo togostno matriko paličja

$$[K] = \frac{EA_p}{5a\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Napišemo sistem enačb

$$[K]\,[U] + [F] = [0]$$

tj.

$$\frac{EA_p}{5a\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -8 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(1) = 0 \\ u_y(1) = 0 \\ u_x(2) \\ u_y(2) \\ u_x(3) = 0 \\ u_y(3) = 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ 0 \\ -N \\ E_x \\ E_y \end{bmatrix}.$$

Od tu dobimo

$$w_p(B) = \frac{N5\sqrt{5}a}{8EAp}.$$

Izenačimo pomika konzole s pomikom paličja in dobimo silo N

$$N = 1.7477 \text{ kN}.$$

Ker se paličje zelo malo povesi, bi **približek** za silo N lahko dobili tudi iz pogoja

$$w_k(B) = 0 \Longrightarrow N = 1.75 \text{ kN}.$$