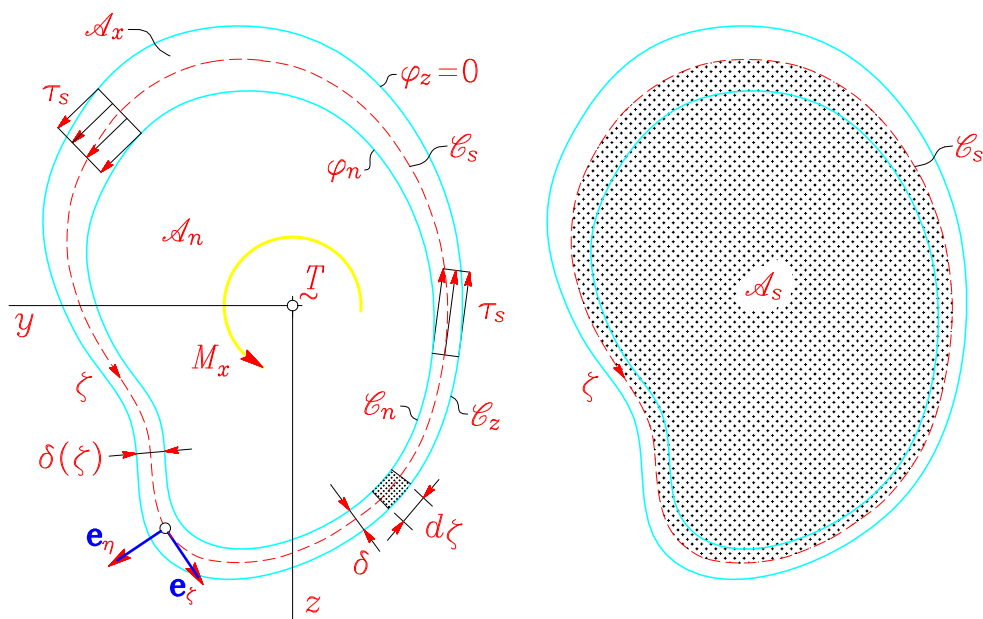


Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim enoceličnim tankostenskim prečnim prereзом

Razporeditev strižnih napetosti pri čisti torziji votlega eliptičnega prereza kaže, da največje napetosti nastopajo na zunanjem robu prereza, material v notranjosti prereza pa je napetostno slabo izkoriščen. Zato je za prenašanje torzijske obtežbe ugodno izbirati zaprte tankostenske prezeze, pri katerih je material nameščen čim bolj ob zunanjem robu prereza. O tankostenskem zaprtem prečnem prerezu govorimo v primeru, da je stena zaprtega prereza zelo tanka v primerjavi z drugimi dimenzijami prereza, na primer z njegovo višino ali širino. Na (sliki T-1) je prikazan tankostenski prerez \mathcal{A}_x , ki ga določata zunanja in notranja mejna krivulja \mathcal{C}_z in \mathcal{C}_n . Votli del prereza je označen z \mathcal{A}_n .



Slika T-1

Pri poljubno oblikovanem zaprtem profilu z neenakomerno debelino stene δ je ugodno namesto kartezijskih prereznih koordinat (y, z) vpeljati "naravni" koordinati (η, ζ) . Pri tem je ζ ločna dolžina tako ime-

novane srednje črte prereza \mathcal{C}_s , ki poteka po sredini debeline stene in ograjuje srednjo ploskev \mathcal{A}_s . Koordinati ζ sta v vsaki točki srednje črte prirejena medsebojno pravokotna enotska bazna vektorja \mathbf{e}_η in \mathbf{e}_ζ , prvi v smeri normale in drugi v smeri tangente na srednjo črto. Po analogiji z ozkim pravokotnim prerezom lahko tedaj vzamemo, da se napetostna funkcija φ vzdolž srednje krivulje \mathcal{C}_s , torej v odvisnosti od koordinate ζ , ne spreminja

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0. \quad (T.1)$$

Pripadajoči strižni napetosti $\sigma_{x\eta}$ in $\sigma_{x\zeta}$ izrazimo z napetostno funkcijo φ po analogiji z enačbama (5.178)

$$\sigma_{x\eta} = \theta G \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \quad \text{in} \quad \sigma_{x\zeta} = -\theta G \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}. \quad (T.2)$$

Poissonova enačba čiste torzije se v koordinatah (η, ζ) glasi

$$\mathcal{A}_x : \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + 2 = 0. \quad (T.3)$$

Ob upoštevanju poenostavitve (T.1) iz prve od enačb (T.2) sledi, da je $\sigma_{x\eta} = 0$ povsod na tankostenskem prerezu, Poissonova enačba pa preide v navadno diferencialno enačbo drugega reda glede na koordinato η

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = -2. \quad (T.4)$$

Splošna rešitev te enačbe je

$$\varphi = -\eta^2 + C_1 \eta + C_2. \quad (T.5)$$

Integracijski konstanti C_1 in C_2 določimo iz pogoja, da mora biti vrednost napetostne funkcije na zunanjem robu prereza enaka nič, na notranjem robu pa enaka neki konstantni vrednosti φ_n

$$\begin{aligned} \varphi \left(\eta = -\frac{\delta}{2} \right) &= \varphi_n \\ \varphi \left(\eta = \frac{\delta}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -\frac{\varphi_n}{\delta} \\ C_2 = \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4} \end{cases} \quad (T.6)$$

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe je torej

$$\varphi = -\eta^2 - \frac{\varphi}{\delta} \eta + \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4}. \quad (T.7)$$

Torzijski vztrajnostni moment I_x določimo z enačbo (5.194), kjer upoštevamo, da imamo samo eno notranjo odprtino s ploščino A_n , ki ji pripada konstantna vrednost napetostne funkcije φ_n

$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \varphi dA_x + 2 \varphi_n A_n. \quad (T.8)$$

V prvem členu vzamemo $dA_x = d\eta d\zeta$ ter integriramo po ζ vzdolž sklenjene srednje črte \mathcal{C}_s in po η v mejah od $-\delta/2$ do $+\delta/2$

$$I_x = 2 \oint_{\mathcal{C}_s - \frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \int \left(-\eta^2 - \frac{\varphi}{\delta} \eta + \frac{\varphi_n}{2} + \frac{\delta^2}{4} \right) d\eta d\zeta + 2 \varphi_n A_n. \quad (T.9)$$

Po izvrednotenju integrala po debelini stene sledi

$$I_x = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta + \varphi_n \oint_{\mathcal{C}_s} \delta d\zeta + 2 \varphi_n A_n. \quad (T.10)$$

Integral v drugem členu predstavlja ploščino materialnega dela prereza A_x

$$A_x = \oint_{\mathcal{C}_s} \delta d\zeta, \quad (T.11)$$

zato lahko pišemo

$$I_x = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta + 2 \varphi_n \left(A_n + \frac{A_x}{2} \right). \quad (T.12)$$

Pri tankostenskem prerezu je izraz v oklepaju praktično enak ploščini A_s srednje ploskve \mathcal{A}_s , vrednost integrala v prvem členu pa je odvisna od tretje potence majhne debeline stene δ in je zato zanemarljivo majhna v primerjavi z vrednostjo drugega člena

$$A_s = A_n + \frac{A_x}{2} \quad \dots \quad \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}_s} \delta^3 d\zeta \ll 2\varphi_n A_s. \quad (T.13)$$

Torzijski vztrajnostni moment zaprtega enoceličnega tenkostenskega prereza lahko torej dovolj natančno izračunamo s preprosto formulo

$$I_x = 2\varphi_n A_s. \quad (T.14)$$

Seveda pa moramo najprej določiti vrednost napetostne funkcije φ_n na notranji konturi \mathcal{C}_n . V ta namen uporabimo dodatni kompatibilnostni pogoj (5.186) za prerez z eno notranjo odprtino, ki pa ga tokrat ob upoštevanju tankostenske narave nosilca zapišemo za srednjo krivuljo \mathcal{C}_s in glede na koordinatno bazo ($\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$)

$$\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta = -2A_s. \quad (T.15)$$

Poudarili smo, da je pri integriranju po krivulji \mathcal{C}_s vseskozi $\eta = 0$. Z odvajanjem enačbe (T.7) dobimo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2\eta - \frac{\varphi_n}{\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\varphi_n}{\delta}. \quad (T.16)$$

Ker je φ_n konstanta, iz enačbe (T.15) sledi

$$\varphi_n \oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta} = 2A_s \quad \rightarrow \quad \varphi_n = \frac{2A_s}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}}. \quad (T.17)$$

Z vstavitvijo v enačbo (T.14) dobimo tako imenovano 2. *Bredtovo formulo* za določitev torzijskega vztrajnostnega momenta zaprtega enoceličnega tenkostenskega prereza

$$I_x = \frac{4A_s^2}{\oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}}. \quad (T.18)$$

S tem lahko ob upoštevanju enačbe (5.190) določimo specifični torzijski zasuk θ

$$\theta = \frac{M_x}{4GA_s^2} \oint_{\mathcal{C}_s} \frac{d\zeta}{\delta}. \quad (T.19)$$

Glavni cilj naloge pa je seveda določitev napetosti. Iz druge od enačb (T.2) in prve od enačb (T.16) sledi

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{M_x}{I_x} \left(2\eta + \frac{\varphi_n}{\delta} \right). \quad (T.20)$$

Kakor vidimo, je strižna napetost $\sigma_{x\zeta}$ linearna funkcija koordinate η , ki se na območju stene prereza spreminja v mejah od $-\delta/2$ do $+\delta/2$. Največjo vrednost doseže na zunanem, najmanjšo pa na notranjem robu prereza

$$\begin{aligned} \sigma_{x\zeta}^{max} &= \sigma_{x\zeta} \left(\eta = \frac{\delta}{2} \right) = \frac{M_x}{I_x} \left(\frac{\varphi_n}{\delta} + \delta \right) \\ \sigma_{x\zeta}^{min} &= \sigma_{x\zeta} \left(\eta = -\frac{\delta}{2} \right) = \frac{M_x}{I_x} \left(\frac{\varphi_n}{\delta} - \delta \right). \end{aligned} \quad (T.21)$$

Pri tankostenskem prerezu je jasno, da se robni vrednosti napetosti le malo razlikujeta med seboj. Zato pri praktičnih nalogah dosledno računamo kar z enakomerno povprečno vrednostjo strižne napetosti $\bar{\sigma}_{x\zeta}$, za katero običajno vpeljemo tudi preprostejšo oznako τ_s (slika T-1)

$$\tau_s = \bar{\sigma}_{x\zeta} = \sigma_{x\zeta}(\eta = 0) \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{M_x \varphi_n}{\delta I_x}. \quad (T.22)$$

Za torzijski vztrajnostni moment I_x vstavimo izraz (T.14) in dobimo 1. *Bredtovo formulo* za strižno napetost v tanki steni zaprtega enoceličnega prereza

$$\tau_s = \frac{M_x}{2\delta A_s}. \quad (T.23)$$

Dobljena formula pove, da je strižna napetost v steni zaprtega prereza največja tam, kjer je debelina stene najmanjša. Če enačbo (T.23)

pomnožimo z δ , dobimo tako imenovani *strižni tok* q_s , ki je enakomeren vzdolž celotne srednje krivulje prereza \mathcal{C}_s

$$q_s = \delta \tau_s = \frac{M_x}{2 A_s} = konst. \quad (T.24)$$

Opazimo lahko analogijo s tokom idealne tekočine po cevi spremenljivega prereza, pri čemer vlogo ploščine prereza prevzame debelina stene δ , vlogo hitrosti pa torzijska strižna napetost τ_s .

Čista torzija ravnega nosilca z zaprtim večceličnim tankostenskim prečnim prerezom

Podobno kot pri nosilcu z enoceličnim prečnim prerezom ravnamo tudi pri določitvi mehanskega stanja nosilca z večceličnim zaprtim tankostenskim prerezom pri čisti torzijski obtežbi. Oglejmo si primer prečnega prereza s tremi notranjimi odprtinami (*slika T-2.a*).

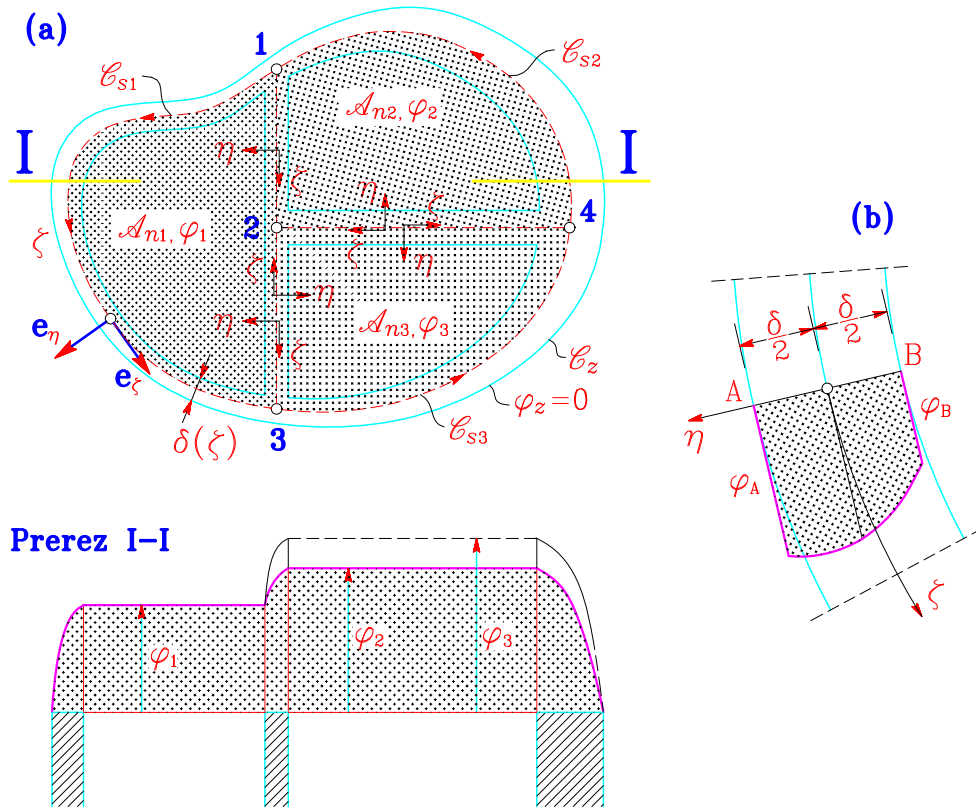
Sredinske črte obodne in notranjih sten tvorijo srednje krivulje \mathcal{C}_{s1} , \mathcal{C}_{s2} in \mathcal{C}_{s3} , ki obkrožajo srednje ploskve nad posameznimi odprtinami \mathcal{A}_{s1} , \mathcal{A}_{s2} in \mathcal{A}_{s3} s ploščinami A_{s1} , A_{s2} , A_{s3} . Konstantne vrednosti napetostne funkcije nad konturami notranjih odprtin označimo s φ_1 , φ_2 , φ_3 .

Poissonovo diferencialno enačbo čiste torzije torej rešujemo ob enakih predpostavkah kot v prejšnjem primeru in dobimo tudi enako splošno rešitev

$$\varphi = -\eta^2 + C_1\eta + C_2. \quad (T.25)$$

Pri določanju integracijskih konstant C_1 in C_2 moramo tokrat upoštevati, da sta pri notranjih stenah obe robni vrednosti napetostne funkcije različni od nič (*slika T-2.b*)

$$\begin{aligned} \varphi\left(\eta = -\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_B \\ \varphi\left(\eta = \frac{\delta}{2}\right) = \varphi_A \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \\ C_2 = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} + \frac{\delta^2}{4} \end{cases} \quad (T.26)$$



Slika T-2

Rešitev Poissonove diferencialne enačbe je torej

$$\varphi = -\eta^2 + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \eta + \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} + \frac{\delta^2}{4} \quad (T.27)$$

s prvim odvodom po η

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -2\eta + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta}. \quad (T.28)$$

Vrednosti napetostne funkcije nad notranjimi odprtinami φ_1 , φ_2 , φ_3 izračunamo iz dodatnih kompatibilnostnih enačb, ki jih zapišemo vzdolž

sklenjenih srednjih črt \mathcal{C}_{s1} , \mathcal{C}_{s2} , \mathcal{C}_{s3} okrog notranjih odprtin

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s1} \\ \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s2} \\ \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\zeta &= -2 A_{s3}. \end{aligned} \quad (T.29)$$

Nastopajoči prvi odvodi napetostne funkcije očitno niso gladke funkcije vzdolž srednjih krivulj. Zato srednje krivulje razdelimo na odseke, vzdolž katerih so integrandi gladke funkcije in krivuljne integrale po sklenjenih krivuljah izračunamo kot vsote integralov po posameznih odsekih. Začnimo s prvo od enačb (29). Na odseku od točke 1 do točke 3 je $\varphi_A = \varphi_z = 0$ in $\varphi_B = \varphi_1$, na odseku $\overline{32}$ je $\varphi_A = \varphi_3$ in $\varphi_B = \varphi_1$, na odseku $\overline{21}$ pa je $\varphi_A = \varphi_2$ in $\varphi_B = \varphi_1$. Ob upoštevanju enačb (28) se prva od enačb (29) glasi

$$\int_1^3 \frac{0 - \varphi_1}{\delta} d\zeta + \int_3^2 \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\delta} d\zeta + \int_2^1 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta} d\zeta = -2 A_{s1}. \quad (30)$$

Podobno zapišemo tudi preostali dve dodatni kompatibilnostni enačbi in dobimo

$$\begin{aligned} \int_4^1 \frac{0 - \varphi_2}{\delta} d\zeta + \int_1^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\delta} d\zeta + \int_2^4 \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\delta} d\zeta &= -2 A_{s2} \\ \int_3^4 \frac{0 - \varphi_3}{\delta} d\zeta + \int_4^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\delta} d\zeta + \int_2^3 \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{\delta} d\zeta &= -2 A_{s3}. \end{aligned} \quad (31)$$

Ker so φ_1 , φ_2 , φ_3 konstantne vrednosti, po ureditvi in množenju z -1

sledi

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_2 \int_2^1 \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_3 \int_3^2 \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s1} \\
 -\varphi_1 \int_1^2 \frac{d\zeta}{\delta} + \varphi_2 \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_3 \int_2^4 \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s2} \\
 -\varphi_1 \int_2^3 \frac{d\zeta}{\delta} - \varphi_2 \int_4^2 \frac{d\zeta}{\delta} + \varphi_3 \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} &= 2 A_{s3}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Z vpeljavo okrajšav

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \oint_{\mathcal{C}_{s1}} \frac{d\zeta}{\delta} & a_{12} &= - \int_2^1 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{13} &= - \int_3^2 \frac{d\zeta}{\delta} \\
 a_{21} &= - \int_1^2 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{22} &= \oint_{\mathcal{C}_{s2}} \frac{d\zeta}{\delta} & a_{24} &= - \int_2^1 \frac{d\zeta}{\delta} \\
 a_{31} &= - \int_2^3 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{32} &= - \int_4^2 \frac{d\zeta}{\delta} & a_{33} &= \oint_{\mathcal{C}_{s3}} \frac{d\zeta}{\delta}
 \end{aligned} \tag{33}$$

ter

$$b_1 = 2 A_{s1} \quad b_2 = 2 A_{s2} \quad b_3 = 2 A_{s3} \tag{34}$$

lahko sistem (32) zapišemo v pregledni obliki

$$\begin{aligned}
 a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + a_{13} \varphi_3 &= b_1 \\
 a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + a_{23} \varphi_3 &= b_2 \\
 a_{31} \varphi_1 + a_{32} \varphi_2 + a_{33} \varphi_3 &= b_3.
 \end{aligned}$$

Tako smo dobili sistem linearnih algebrajskih enačb, iz katerega brez težav določimo konstantne vrednosti napetostne funkcije φ_1 , φ_2 in φ_3 .

Dobljene ugotovitve lahko posplošimo za primer tankostenskega prereza z N notranjimi odprtini. Tedaj lahko sistem kompatibilnostnih

enačb na kratko zapišemo z enačbo

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \varphi_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (35)$$

ali v matrični obliki

$$[a_{ij}] \{\varphi_j\} = \{b_i\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (36)$$

Koeficienti a_{ij} in desne strani b_i so podani z izrazi

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \oint_{\mathcal{C}_{si}} \frac{d\zeta}{\delta} \\ (i \neq j) \dots a_{ij} &= - \int_{l_{ij}} \frac{d\zeta}{\delta} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \\ b_i &= 2 A_{si}. \end{aligned} \quad (37)$$

Pri tem smo z l_{ij} označili skupni odsek srednjih krivulj \mathcal{C}_{si} in \mathcal{C}_{sj} , torej dolžino skupne stene med celicama i in j .

Z vstavitvijo rešitve za napetostno funkcijo (27) in izračunanih vrednosti napetostne funkcije nad notranjimi odprtinami φ_i v splošno enačbo za torzijski vztrajnostni moment (5.194) bi na podoben način kakor pri enoceličnem prerezu dobili

$$I_x = \frac{1}{3} \left(\oint_{\mathcal{C}_{sz}} \delta^3 d\zeta + \sum_{l_{ij}} \int \delta^3 d\zeta \right) + 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si}. \quad (T.38)$$

Prvi integral v okroglem oklepaju iz vrednotimo vzdolž sklenjene srednje krivulje \mathcal{C}_{sz} obodne stene. S tem prvi člen v enačbi (38) predstavlja prispevek obodne in notranjih sten kot odprtih ozkih profilov k torzijskemu vztrajnostnemu momentu prereza. Vendar lahko z enakim razmislekom kakor sicer pri tankostenskih zaprtih prerezihi prvi člen v

izrazu za I_x zanemarimo v primerjavi z drugim in v praktičnih nalogah računamo s poenostavljeno formulo

$$I_x = 2 \sum_{i=1}^N \varphi_i A_{si}. \quad (T.39)$$

Končno določimo še strižne napetosti. Iz druge od enačb (T.2) in prve od enačb (T.28) sledi

$$\sigma_{x\zeta} = \frac{M_x}{I_x} \left(2\eta - \frac{\varphi_A - \varphi_B}{\delta} \right). \quad (T.40)$$

V praktičnih nalogah je pri tankostenskih zaprtih prerezih umestno računati kar s povprečno vrednostjo strižne napetosti τ_s

$$\tau_s = \bar{\sigma}_{x\zeta} = \sigma_{x\zeta}(\eta = 0) \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{M_x}{\delta I_x} (\varphi_B - \varphi_A). \quad (T.41)$$

Za dimenzioniranje oziroma kontrolo torzijske nosilnosti prereza je praviloma merodajna največja vrednost strižne napetosti τ_s . Da bi ugotovili, kolikšna je ta napetost in kje nastopa, moramo vzdolž vseh srednjih krivulj iz vrednotiti razmerje med razliko napetostnih funkcij na robovih $\varphi_B - \varphi_A$ in debelino stene δ .