# 1. VAJA IZ TRDNOSTI

## (linearna algebra - ponovitev, Kroneckerjev $\delta_{ij}$, permutacijski simbol $e_{ijk}$)

**NALOGA 1:** Zapiši vektor $\boldsymbol{a} = [1,-2,5,1]^\top$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\boldsymbol{e}_1 = [1,1,1,0]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [1,2,3,1]^\top$, $\boldsymbol{e}_3 = [2,-1,1,-1]^\top$ in $\boldsymbol{e}_4 = [0,0,0,1]^\top$.

**Rešitev:**[Rešitev v MATLABU `V01N01.m`] $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}) = -6\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$

**NALOGA 2:** Preveri, da so vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1,0,0,0]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [1,1,0,0]^\top$, $\boldsymbol{e}_3 = [1,1,1,0]^\top$ in $\boldsymbol{e}_4 = [1,1,1,1]^\top$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$. Določi koordinate vektorja $\boldsymbol{a} = [2,-3,1,5]^\top$ v tej bazi. Kakšne so koordinate vektorja $\boldsymbol{a}$ v bazi $\boldsymbol{f}_1 = [1,1,-1,1]^\top$, $\boldsymbol{f}_2 = [1,-1,-1,1]^\top$, $\boldsymbol{f}_3 = [1,1,1,1]^\top$ in $\boldsymbol{f}_4 = [-1,1,1,1]^\top$?

**Rešitev:** $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}) = [5,-4,-4,5]^\top$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}) = [-2,4,\frac{3}{2},\frac{3}{2}]^\top$

**NALOGA 3:** V prostoru $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1,2,0,1]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [-1,2,1,0]^\top$ in $\boldsymbol{e}_3 = [0,3,1,1]^\top$. Dopolni jih do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

**Rešitev:** Na primer $\boldsymbol{e}_4 = [0,0,0,1]^\top$.

**NALOGA 4:** Prepričaj se, da sestavljajo vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1,2,1,3]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [-1,3,2,1]^\top$, $\boldsymbol{e}_3 = [0,5,3,4]^\top$ in $\boldsymbol{e}_4 = [2,-1,-1,2]^\top$ podprostor razsežnosti 2 v prostoru $\mathbb{R}^4$.

**NALOGA 5:** Določi parameter $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo vektor $\boldsymbol{a} = [-1,a+2,-2,a^2+a+1]^\top$ pripadal podprostoru, razpetemu z vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1,0,2,4]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [3,1,1,2]^\top$ in $\boldsymbol{e}_3 = [5,1,5,3]^\top$.

**Rešitev:** $a = -2$

**NALOGA 6:** Naj bosta $M$ in $N$ podprostora v $\mathbb{R}^5$. Podprostor $M$ je napet na vektorjih $\boldsymbol{e}_1 = [1,0,0,0,-1]^\top$ in $\boldsymbol{e}_2 = [1,1,1,1,1]^\top$, podprostor $N$ pa na vektorjih $\boldsymbol{f}_1 = [-1,-1,0,0,1]^\top$, $\boldsymbol{f}_2 = [3,2,2,2,1]^\top$ in $\boldsymbol{f}_3 = [1,0,2,2,3]^\top$. Določi bazo podprostora $M \cap N$.

**Rešitev:**[Rešitev v MATLABU `V01N06.m`] $M \cap N = \{\lambda \boldsymbol{f}_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

**NALOGA 7:** Zapiši polinom $f(t) = t^2 + 4t - 3$ kot linearno kombinacijo polinomov $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$ in $p_3(t) = t + 3$.

**Rešitev:** $f = -3p_1 + 2p_2 + 4p_3$

**NALOGA 8:** V vektorskem prostoru $P_4(\mathbb{R})$ imamo podprostora $U = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p''(0) = p'(0) = 0\}$ in $V = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p'(1) = p(1) = 0\}$. Pokaži, da sta $U$ in $V$ podprostora v $P_4(\mathbb{R})$ in poišči po eno od baz za podprostora $U + V$ in $U \cap V$.

**Rešitev:** Podprostor $U + V = P_4(\mathbb{R})$ in zanj lahko vzamemo standardno bazo $1, t, t^2, t^3$ in $t^4$. Baza za $U \cap V$ pa je polinom $1 - 4t^3 + 3t^4$.

**NALOGA 9:** Naj bosta $U = L\{[0,-1,1,-1,0]^\top, [1,0,0,0,1]^\top\}$ in $V = \{\boldsymbol{x} = [x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]^\top \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ podprostora v $\mathbb{R}^5$. Določi po eno od baz za $V$ in $U \cap V$.

**Rešitev:** Baza za podprostor $V$ sta npr. vektorja $[-1,1,-1,0,0]^\top$ in $[0,0,0,1,-1]^\top$, za $U \cap V$ pa vektor $[-1,1,-1,1,-1]^\top$.

**NALOGA 10:** Dani sta matriki

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $U = \{[X] \in M_3(\mathbb{R}) \mid [A] \cdot [X] = [X] \cdot [A]\}$ in $V = \{[X] \in M_3(\mathbb{R}) \mid [B] \cdot [X] = [X] \cdot [B]\}$. Pokaži, da sta množici $U$ in $V$ vektorska podprostora v $M_3(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov $U, V$ in $U \cap V$.

**Rešitev:**

**NALOGA 11:** Naj bo $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ in $V = \{[X] \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det([A] + [X]) = \det[A] + \det[X]\}$. Pokaži, da je $V$ vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in določi njegovo dimenzijo in eno od baz.

**NALOGA 12:** Izračunaj determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}.$$

**Rešitev:**[Rešitev v MATLABU `V01N12.m`] 216, 5

**NALOGA 13:** Izračunaj determinanto $n$-tega reda

$$\begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Rešitev:** $\frac{1}{2}(-n)^{n-1}(n+1)$

**NALOGA 14:** Izračunaj determinanto z rekurzijsko formulo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

**Rešitev:** $D_n = (-1)^n(n+1)$

**NALOGA 15:** Dana je matrika $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunaj $[A]^n$ in rezultat preveri z indukcijo.

**NALOGA 16:** Določi rang matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

**Rešitev:**[Rešitev v MATLABU `V01N16.m`] 4, 2

**NALOGA 17:** Dani sta matriki

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad [B] = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna zveza mora veljati med parametroma $a$ in $b$, da bosta matriki $[A]$ in $[B]$ ekvivalentni? Določi parametra $a$ in $b$ tako, da bosta matriki $[A]$ in $[B]$ podobni. Izračunaj tudi matriko $[P]$, za katero je $[A] = [P]\cdot[B]\cdot[P]^{-1}$.

**Rešitev:** Matriki sta ekvivalentni, če je $b = -a$, podobni pa pri $a = -b = 4$.

**NALOGA 18:** Za vsako realno število $a$ izračunaj rang matrik

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -a & 3 & 1+a \\ -2-a & 4 & 5+a \end{bmatrix}$$

in pokaži, da sta matriki $[A]$ in $[B]$ ekvivalentni.

**Rešitev:** Za $a \neq 1$ je rang obeh matrik enak 3, za $a = 1$ pa 2.

**NALOGA 19:** Pokaži, da za kvadratni matriki $[A]$, $[B]$ velja $([A]\cdot[B])^\top = [B]^\top\cdot[A]^\top$. če sta matriki $[A]$, $[B]$ še obrnljivi, je matrika $[A]\cdot[B]$ obrnljiva in je $([A]\cdot[B])^{-1} = [B]^{-1}\cdot[A]^{-1}$. Dokaži tudi, da velja $([A]^\top)^{-1} = ([A]^{-1})^\top$! Pokaži, da inverzna operacija ohranja simetrijo (poševno simetrijo) matrike.

**NALOGA 20:** Za kvadratno matriko lahko definiramo sled matrike $[A]$ kot $\mathrm{tr}([A]) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$. Pokaži, da je sled linearen operator. Pokaži, da je $\mathrm{tr}([A]\cdot[B]) = \mathrm{tr}([\mathrm{B}]\cdot[\mathrm{A}])$. Če je $[Q]$ obrnljiva, pokaži, da je $\mathrm{tr}([\mathrm{Q}]^{-1}\cdot[\mathrm{A}]\cdot[\mathrm{Q}]) = \mathrm{tr}([A])$. Če je $[A]$ simetrična $[B]$ pa poševno simetrična matrika, potem je $\mathrm{tr}([\mathrm{A}]\cdot[\mathrm{B}]) = 0$.

**NALOGA 21:** Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 1 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

**Rešitev:**[Rešitev v MATLABU `V01N21.m`] $\boldsymbol{x} = [1,2,1,1]^\top$

**NALOGA 22:** Poišči splošno rešitev sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

**Rešitev:**[Rešitev v MATLABU `V01N22.m`] $\boldsymbol{x} = [0,0,6,-7]^\top + \alpha_1[1,0,-15,18]^\top + \alpha_2[0,1,10,-12]^\top$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

**NALOGA 23:** Zapiši rešitev sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

glede na parameter $a \in \mathbb{R}$.

**Rešitev:** Pri $a = -3$ in $a = 0$ sistem ni rešljiv, pri vseh drugih vrednostih parametra $a$ pa imamo rešitev $\boldsymbol{x} = \frac{1}{a(a+3)}[2-a^2, 2a-1, a^3+2a^2-a-1]^\top$.

**NALOGA 24:** Določi razsežnost in eno od baz prostora rešitev sistema homogenih enačb podanega z matriko

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & a & 2a & 1 \\ a & 0 & 1 & a \\ a-1 & a & a+1 & a \\ a & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

glede na parameter $a \in \mathbb{R}$.

**Rešitev:** Za $a=0$ imamo le trivialno rešitev, za $a \neq 0$ imamo dvoparametrično rešitev.

**NALOGA 25:** Reši matrično enačbo $[A]\cdot[X]+[B]=[0]$, kjer sta matriki

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [B]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Rešitev:** $[X]=\begin{bmatrix} 3a-1 & -2 & 4b-1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

**NALOGA 26:** Podana je matrična enačba

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot[X]-[X]\cdot\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Za katere vrednosti parametra $a$ je enačba rešljiva? Določi matriko $[X]$ za $a=1$.

**Rešitev:** $a \neq \frac{7}{2}$, $[X](1)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

**NALOGA 27:** Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrik

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Rešitev:**[Rešitev v MATLABU `V01N27.m`]

**NALOGA 28:** Izračunaj:

a) $\sum_i \delta_{ii}$,

b) $\sum_i \sum_j \delta_{ij}\,\delta_{ij}$,

c) $\sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij}\,\delta_{ik}\,\delta_{jk}$,

d) $\sum_j \delta_{ij}\,\delta_{jk}$,

e) $\sum_i \delta_{ij} A_{ik}$,

f) $\sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}\,e_{kij}$,

g) $\sum_j \sum_k e_{ijk}\,a_j\,a_k$,

kjer sta $e$ permutacijski simbol, $\delta$ pa Kroneckerjev delta.

**Rešitev:** $\sum_i \delta_{ii} = 3$, $\sum_i \sum_j \delta_{ij}\,\delta_{ij} = 3$, $\sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij}\,\delta_{ik}\,\delta_{jk} = 3$, $\sum_j \delta_{ij}\,\delta_{jk} = \delta_{ik}$, $\sum_i \delta_{ij} A_{ik} = A_{jk}$, $\sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}\,e_{kij} = 6$, $\sum_j \sum_k e_{ijk}\,a_j\,a_k = 0$.

**NALOGA 29:** Dokaži veljavnost identitet

- $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$,
- $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$.

**NALOGA 30:** Dokaži veljavnost identitete

$$e_{pqs}\,e_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix},$$

**NALOGA 31:** Z uporabo rešitve gornje naloge dokaži veljavnost identitet

$$\sum_s e_{pqs}\,e_{snr} = \delta_{pn}\,\delta_{qr} - \delta_{pr}\,\delta_{qn},$$

$$\sum_q \sum_s e_{pqs}\,e_{sqr} = -2\,\delta_{pr}.$$

**NALOGA 32:** Izračunaj lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da imata matriki $[A]$ in $[A]^2$ enake lastne vektorje.

**Rešitev:** Lastne vrednosti so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Lastni vektorji so $[e_1] = [0,0,1]^T$, $[e_2] = \frac{\sqrt{2}}{2}\,[1,1,0]^T$, $[e_3] = \frac{\sqrt{2}}{2}\,[1,-1,0]^T$.

**NALOGA 33:** Dokaži trditev: Lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so pravokotni med seboj.

**NALOGA 34:** Z uporabo dejstva, da imata simetrični matriki $[T]$ in $[T]^2$ enake lastne vektorje, izračunaj $\sqrt{[T]}$ za matriko

$$[T] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Rešitev:**

$$\sqrt{[T]} = 0.402 \begin{bmatrix} 5.414 & -0.586 & -0.586 \\ -0.586 & 4.863 & -0.035 \\ -0.586 & -0.035 & 4.863 \end{bmatrix}$$

**NALOGA 35:** Z uporabo rezultata

$$\det[A] = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$$

pokaži veljavnost

$$\det([A]\,[B]) = \det[A]\,\det[B].$$

**NALOGA 36:** Naj velja

$$[B] = [Q]^\top [A]\,[Q],$$

kjer je $[Q]$ ortogonalna matrika (rotacija). Pokaži, da veljajo enakosti

$$\sum_i A_{ii} = \sum_i B_{ii}$$

$$\sum_i \sum_j A_{ij} A_{ij} = \sum_i \sum_j B_{ij} B_{ij},$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_p e_{ijk}\, e_{kjp} A_{ip} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_p e_{ijk}\, e_{kjp} B_{ip},$$

$$\sum_i A_{ii} = I_1^{[A]} = I_1^{[B]} = \sum_i B_{ii},$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j (A_{ii} A_{jj} - A_{ij} A_{ji}) = I_2^{[A]} = I_2^{[B]} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (B_{ii} B_{jj} - B_{ij} B_{ji}),$$

$$\det([A]) = I_3^{[A]} = I_3^{[B]} = \det([B]).$$

**NALOGA 37:** Naj veljata enakosti $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$ in $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$, kjer smo s piko označili odvod po času. Pokaži da velja

$$\frac{d\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}).$$

**NALOGA 38:** V prostor postavimo kartezijev koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$. Novi bazi dobimo na sledeč način:

- Vektorja $\boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_y$ najprej zavrtimo v smeri vektorja $\boldsymbol{e}_z$ za kot $\alpha = 30^\circ$. Bazni vektorji $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ preidejo v nove bazne vektorje $\boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{e}'_y$, $\boldsymbol{e}'_z$.

- Bazne vektorje zavrtimo za kot $\alpha = 30^\circ$ okrog enotskega vektorja $\boldsymbol{e}_d = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$. Bazni vektorji $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ preidejo v nove bazne vektorje $\boldsymbol{e}^*_x$, $\boldsymbol{e}^*_y$, $\boldsymbol{e}^*_z$.

Določi rotacijski matriki $[R]$ za oba primera.
*Namig za drugi primer*: Rotacija v prostoru je določena z enotskim vektorjem $\boldsymbol{e}_n$ in kotom zasuka $\alpha$. Naj bo $\boldsymbol{e}_n$ podan v Kartezijevem koordinatnem sistemu z bazo $\boldsymbol{e}_1 \equiv \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_2 \equiv \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{e}_z$ tj. $\boldsymbol{e}_n = n_1\,\boldsymbol{e}_1 + n_2\,\boldsymbol{e}_2 + n_3\,\boldsymbol{e}_3 = n_i\,\boldsymbol{e}_i$. Definiramo matriko

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem rotacijsko matriko $[R]$ lahko zapišemo z enačbo

$$[R] = [I] + \sin\alpha\,[N] + (1 - \cos\alpha)\,[N]^2.$$