2. VAJA IZ TRDNOSTI

(tenzor napetosti)

(napetostni vektor, transformacija koordinatnega sistema, glavne normalne napetosti, strižne napetosti, ravninsko napetostno stanje, Mohrovi krogi, ravnotežne enačbe)

Opomba: Pri obravnavi napetostnega tenzorja ne smemo pozabiti na enote. V nalogah, kjer enote niso posebej navedene, so vse komponente napetostnih tenzorjev kot tudi vse komponente napetostnih vektorjev podane v (Pascalih) [Pa].

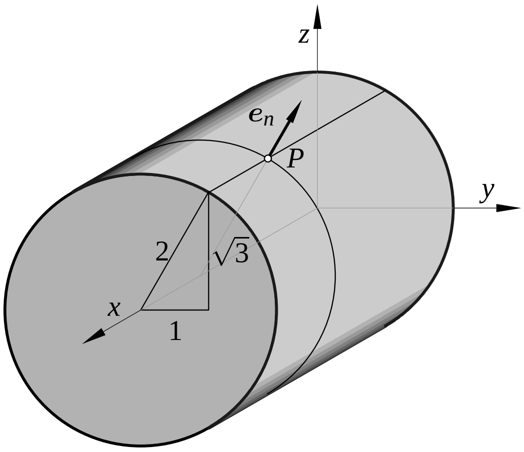
NALOGA 1: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, glede na kartezijski koordinatni sistem (x,y,z). Skozi točko P položimo dve nekomplanarni ravnini: Γ_q z enotsko normalo $\boldsymbol{e}_a$ in Γ_b z enotsko normalo $\boldsymbol{e}_b$. Določi vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$, ki v točki P pripadata ravninama Γ_a in Γ_b. Dokaži, da je projekcija napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ na smer $\boldsymbol{e}_b$ enaka projekciji napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_b$ na smer $\boldsymbol{e}_a$.

NALOGA 2: Trikotna streha z oglišči $A(3\text{ m},0,0)$, $B(0,2\text{ m},0)$ in $C(0,0,1\text{ m})$ je obtežena s snegom itenzitete $q_S = 2\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$, ki pada v smeri $-\boldsymbol{e}_z$. Izračunaj vektor specifične površinske obtežbe zaradi delovanja snega v poljubni točki strehe. Privzemi enakomerno razporeditev obtežbe po strehi.

NALOGA 3: Napetostno stanje valja je določeno s tenzorjem napetosti, ki ga v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) podaja matrika

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Skozi točko $P(2,1,\sqrt{3})$ položimo tangentno ravnino na površino cilindra $y^2+z^2=4$. Določi vektor napetosti $\boldsymbol{\sigma}_n(P)$ v tej točki glede na tangentno ravnino.



Rešitev: Normala na ravnino v točki P je $\boldsymbol{e}_n(P) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_z$. Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n(P) = (\frac{5}{2}\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_z)$ MPa.

NALOGA 4: Napetostno stanje v točki P je podano s tenzorjem napetosti

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{bmatrix},$$

kjer so a, b in c realne konstane, σ pa poljubna napetost. Določi konstate a, b in c, tako da bo napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n(P)$ v ravnini z normalo $\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$ skozi točko P enak $\boldsymbol{0}$. **Rešitev:** Konstante so $a=b=c=\frac{-1}{2}$.

NALOGA 5: Telo iz linearno elastičnega, izotropnega, homogenega materiala v točki $T(0,0,0)$ prerežemo s tremi ravninami.
Normale ravnin so podane z vektorji: $\boldsymbol{e}_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$, $\boldsymbol{e}_{n_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$, $\boldsymbol{e}_{n_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)$. Znani so napetostni vektorji v točki T, ki pripadajo tem trem ravninam: $\boldsymbol{\sigma}_{n_1} =$

$-2\,\sigma \boldsymbol{e}_x - \sigma \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{\sigma}_{n_2} = -6\,\sigma \boldsymbol{e}_y + 3\,\sigma \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{\sigma}_{n_3} = 4\,\sigma \boldsymbol{e}_x + 4\,\sigma \boldsymbol{e}_y - 9\,\sigma \boldsymbol{e}_z$. Izračunaj komponente napetostnega tenzorja v točki T v kartezičnem koordinatnem sistemu. Kakšne so komponente napetostnega tenzorja v točki T, če vektor $\boldsymbol{\sigma}_{n_3}$ zamenjamo z vektorjem $\boldsymbol{\sigma}_{n_3} = 4\,\sigma \boldsymbol{e}_x + 4\,\sigma \boldsymbol{e}_y + 9\,\sigma \boldsymbol{e}_z$? Ali rešitev takrat obstaja? Odgovor utemelji.
Podatki: $\sigma = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ MPa.

Rešitev: Ovedemo okrašave $\boldsymbol{\sigma}_a = \boldsymbol{\sigma}_{n_1}$, $\boldsymbol{\sigma}_b = \boldsymbol{\sigma}_{n_2}$, $\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma}_{n_3}$ in $\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_{n_1}$, $\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_{n_2}$, $\boldsymbol{e}_c = \boldsymbol{e}_{n_3}$. Komponente tenzorja napetosti dobimo iz ravnotežnih enačb

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_a &= \boldsymbol{\sigma}_x e_{ax} + \boldsymbol{\sigma}_y e_{ay} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{az},\\
\boldsymbol{\sigma}_b &= \boldsymbol{\sigma}_x e_{bx} + \boldsymbol{\sigma}_y e_{by} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{bz},\\
\boldsymbol{\sigma}_c &= \boldsymbol{\sigma}_x e_{cx} + \boldsymbol{\sigma}_y e_{cy} + \boldsymbol{\sigma}_z e_{cz}.
\end{aligned}
$$

Enačbe lahko zapišemo tudi v matrični obliki

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\sigma_{ax}\\ \sigma_{ay}\\ \sigma_{az}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{ax}\\ e_{ay}\\ e_{az}\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\sigma_{bx}\\ \sigma_{by}\\ \sigma_{bz}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{bx}\\ e_{by}\\ e_{bz}\end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix}\sigma_{cx}\\ \sigma_{cy}\\ \sigma_{cz}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{cx}\\ e_{cy}\\ e_{cz}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ali vse skupaj z eno samo matrično enačbo

$$
\begin{bmatrix}\sigma_{ax} & \sigma_{bx} & \sigma_{cx}\\ \sigma_{ay} & \sigma_{by} & \sigma_{cy}\\ \sigma_{az} & \sigma_{bz} & \sigma_{cz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{ax} & e_{bx} & e_{cx}\\ e_{ay} & e_{by} & e_{cy}\\ e_{az} & e_{bz} & e_{cz}\end{bmatrix},
$$

ki se v konkretnem primeru glasi

$$
\begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & -9\,\sigma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.
$$

Iz zadnje enačbe lahko neposredno izračunamo komponente tenzorja napetosti. Dobimo

$$
\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & -9\,\sigma\end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}10 & -5 & -15\\ -5 & 15 & -10\\ -15 & -10 & 20\end{bmatrix} \text{MPa}.
$$

Tenzor napetosti je simetričen, torej je to iskana rešitev. V drugem primeru dobimo

$$
\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & 9\,\sigma\end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}10 & -5 & -15\\ -5 & 15 & -10\\ 30 & -10 & -25\end{bmatrix} \text{MPa}.
$$

Tokrat rešitve v okviru omenjene teorije nimamo, saj tenzor napetosti ni simetričen. V drugem primeru zato vektorji $\boldsymbol{\sigma}_a$, $\boldsymbol{\sigma}_b$ in $\boldsymbol{\sigma}_c$ niso napetostni vektorji.

NALOGA 6: Za podani napetostni tenzor (komponente tenzorja so dane v kartezičnem koordinatnem sistemu)

$$
[\sigma_{ij}] = \sigma \begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

- poišči normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, da bosta napetostna vektorja v teh ravninah $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepala pravi kot. Ali je rešitev več? Če je rešitev več, poišči vsaj eno.

- poišči normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, da bosta napetostna vektorja v teh ravninah $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepala kot 30°. Ali je rešitev več? Če je rešitev več, poišči vsaj eno.

Podatki: $\sigma = \frac{5\sqrt{3}}{3} \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$. **Rešitev:**

- Normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, v katerih napetostna vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepata pravi kot sta $\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_y$. Rešitev je več. Za vektor $\boldsymbol{e}_a$ bi npr. lahko izbrali poljuben enotski vektor v ravnini $y = 0$.

- Normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, v katerih napetostna vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepata kot 30° sta npr. $\boldsymbol{e}_a = 0.3827\boldsymbol{e}_x + 0.9239\boldsymbol{e}_z$ in $\boldsymbol{e}_b = 0.2897\boldsymbol{e}_x + 0.9571\boldsymbol{e}_z$. Pripadajoča napetostna vektorja sta $\boldsymbol{\sigma}_a = \sigma\,(0.2241\boldsymbol{e}_x + 0.5412\boldsymbol{e}_z)$ in $\boldsymbol{\sigma}_b = \sigma\,(-0.0879\boldsymbol{e}_x + 0.6673\boldsymbol{e}_z)$. Tudi tu je rešitev neskončno mnogo.

NALOGA 7: Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) z bazo $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$. Privzemi sledeče zveze med baznimi vektorji: $\boldsymbol{e}_\xi = -\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{e}_z$. Fizikalno gledano, lahko novo bazo dobim z rotacijo stare okrog osi $\boldsymbol{e}_z$ za kot $-90°$. **Rešitev:**

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Opomba: Potek reševanja je prikazan na prosojnicah.

NALOGA 8: Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) z bazo $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$, ki jo dobim z rotacijo prvotne baze okrog osi $\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$ za kot $\alpha = 30°$. Pri rotaciji vektor $\boldsymbol{e}_x$ preide v $\boldsymbol{e}_\xi$ vektor $\boldsymbol{e}_y$ v $\boldsymbol{e}_\eta$ in vektor $\boldsymbol{e}_z$ v $\boldsymbol{e}_\zeta$.

NALOGA 9: Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) v bazi $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Pokaži, da obstaja takšna baza $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$ v kateri lahko tenzor predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

in jo poišči.

Rešitev: Takšna baza obstaja, ker imata matriki $[\sigma_{ij}]$ in $[\sigma_{\alpha\beta}]$ enake invariante in s tem enak karakteristični polinom. Rešitev je več. Tule podajamo dve rešitvi:
$\boldsymbol{e}_\xi = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_\eta = -\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_\zeta = -\boldsymbol{e}_z$ (novo bazo dobimo z rotacijo baze $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ okrog osi $\boldsymbol{e}_x$ za 180°).
$\boldsymbol{e}_\xi = -\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{e}_z$ (novo bazo dobimo z rotacijo baze $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ okrog osi $\boldsymbol{e}_z$ za $-90°$).
Opomba: Potek reševanja je prikazan na prosojnicah.

NALOGA 10: Dokaži, da so količine I_1^σ, I_2^σ, I_3^σ neodvisne od izbire koordinatega sistema, torej invariante.

NALOGA 11: Pokaži so vse lastne vrednosti tenzorja napetosti realne.

NALOGA 12: Pokaži, da je množica ekstremnih normalnih napetosti podmnožica množice glavnih normalnih napetosti.

NALOGA 13: Izhajajoč iz Gaussovega integralnega izreka izpelji ravnotežne pogoje za delec trdnega telesa izražene z napetostmi v kartezijskih koordinatah. Upoštevaj, da je zunanja obtežba telesa v ravnotežju.

NALOGA 14: Določi glavne normalne napetosti in smeri glavnih normalnih napetosti za napetostni tenzor, ki je v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) podan z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix}.$$

Kakšno napetostno stanje opisuje tenzor napetosti? **Rešitev:** Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 3\,\tau$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = 0$.
Smeri glavnih normalnih napetosti so:
$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\,\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$.
Tenzor napetosti opisuje enoosno napetostno stanje. Smer osi se ujema z vektorjem $\boldsymbol{e}_1$.

NALOGA 15: Pokaži, da lahko strižno napetost v oktaederski ravnini τ_o zapišemo z enačbo

$$\tau_o = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}.$$

NALOGA 16: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{Pa}.$$

Določi

(a) normalno in strižno komponento, ter velikost vektorja napetosti, ki v točki P pripada ravnini z normalo

$$\boldsymbol{e}_\xi = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_z\right),$$

(b) komponente podanega tenzorja napetosti v desnosučnem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ), ki ga tvori, dana smer $\boldsymbol{e}_\xi$ z dvema pravokotnima smerema

$$\boldsymbol{e}_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_y + e_{\eta z}\boldsymbol{e}_z \quad \text{in} \quad \boldsymbol{e}_\zeta,$$

(c) velikosti in smeri glavnih normalnih napetosti,

(č) velikosti in ravnine ekstremnih strižnih napetosti ter pripadajoče normalne napetosti v teh ravninah,

(d) hidrostatični in deviatorični del tenzorja napetosti ter velikosti in smeri glavnih deviatoričnih napetosti,

(e) normalno in strižno napetost v oktaedrski ravnini skozi točko P.

Rešitev:

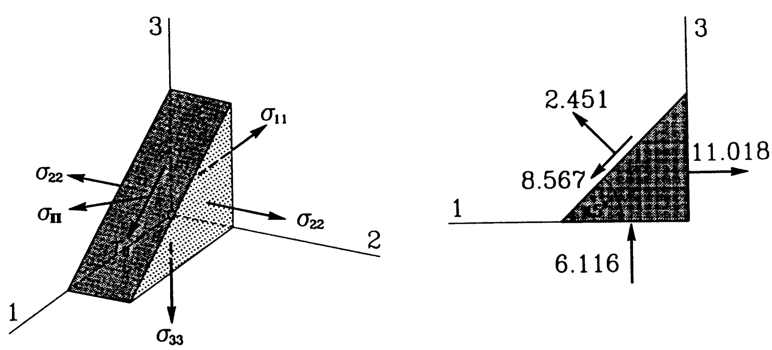
(a) $\boldsymbol{\sigma}_\xi = 4.379\,\boldsymbol{e}_x + 4.914\,\boldsymbol{e}_y - 3.328\,\boldsymbol{e}_z$,
$\sigma_{\xi\xi} = 2.293\,\text{Pa}, \quad \sigma_{\xi t} = 7.010\,\text{Pa}.$

(b) $e_{\eta z} = 0$, $\boldsymbol{e}_\zeta = \frac{1}{2}\left(-\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_z\right)$,

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 2.293 & 0.379 & -7 \\ 0.379 & 0 & 4.621 \\ -7 & 4.621 & 3.707 \end{bmatrix} \text{Pa}.$$

(c) $\sigma_{11} = 11.018\,\text{Pa}$, $\sigma_{22} = 1.098\,\text{Pa}$, $\sigma_{33} = -6.116\,\text{Pa}$,
$\boldsymbol{e}_1 = 0.879\,\boldsymbol{e}_x + 0.462\,\boldsymbol{e}_z - 0.114\,\boldsymbol{e}_z.$
$\boldsymbol{e}_2 = 0.347\,\boldsymbol{e}_x - 0.786\,\boldsymbol{e}_z - 0.512\,\boldsymbol{e}_z.$
$\boldsymbol{e}_3 = -0.326\,\boldsymbol{e}_x + 0.411\,\boldsymbol{e}_z - 0.852\,\boldsymbol{e}_z.$

(č) Ekstremna strižna napetost:
$\tau_{II} = \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) = -8.567\,\text{Pa}$,
Pripadajoče normalne napetosti:
$\sigma_{IIII} = \frac{1}{2}(\sigma_{33} + \sigma_{11}) = 2.451\,\text{Pa}$,
Smeri ravnin z ekstremnimi strižnimi napetostmi:
$\boldsymbol{e}_{II} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_3 \pm \boldsymbol{e}_1)$.
Spodnja slika prikazuje prikaz delovanja teh napetosti na elementarnih prizmi "izrezani" iz telesa v okolici obravnavane točke P.



(d) Hidrostatični del tenzorja napetosti:

$$[\sigma_{ij}^H] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ Pa.}$$

Deviatorični del tenzorja napetosti:

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \text{ Pa.}$$

Glavne deviatorične napetosti: $s_{11} = 9.018\,\text{Pa}$, $s_{22} = -0.902\,\text{Pa}$, $s_{33} = -8.116\,\text{Pa}$.

(e) Normale oktaedrskih ravnin $\boldsymbol{e}_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_2 \pm \boldsymbol{e}_3)$.
Normalna napetost v oktaedrski ravnini $\sigma_{oo} = 2\,\text{Pa}$.
Strižna napetost v oktaedrski ravnini $\tau_o = \pm 7.024\,\text{Pa}$.

NALOGA 17: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, glede na kartezijski koordinatni sistem (x,y,z).

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \text{ Pa.}$$

Določi velikost po aboslutni vrednosti največje strižne napetosti $\tau_{\max}$ in normalo ravnine v kateri deluje.

Rešitev: Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 10\,\text{Pa}$, $\sigma_{22} = 5\,\text{Pa}$, $\sigma_{33} = -15\,\text{Pa}$.
$\tau_{\max} = (\sigma_{33} - \sigma_{11})/2 = -12.5\,\text{Pa}$.

NALOGA 18: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

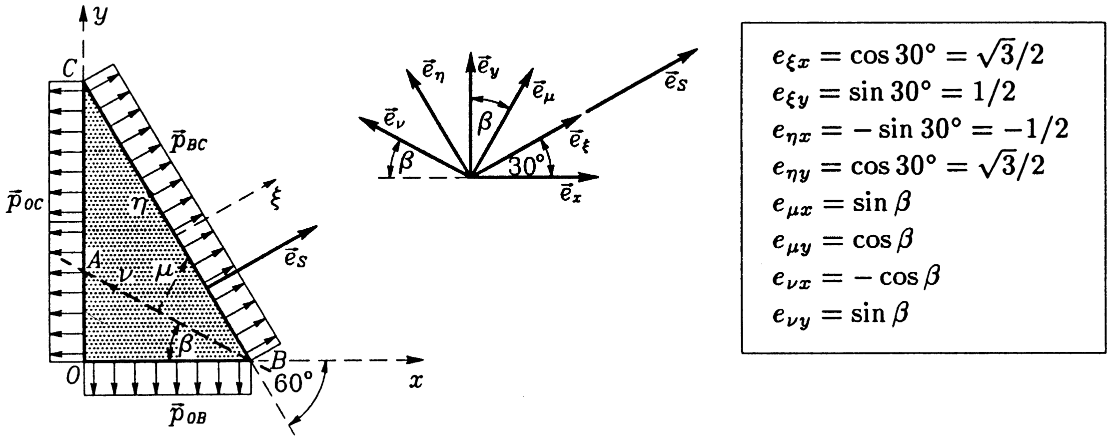
Določi normalo ravnine, v kateri je normalna napetost σ_N enaka $\frac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{2}$, strižna τ_N pa $\frac{\sigma_{11}-\sigma_{33}}{4}$.
Rešitev: $\boldsymbol{e}_N = \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_z$.

NALOGA 19: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, glede na kartezijski koordinatni sistem (x,y,z).

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \text{ Pa.}$$

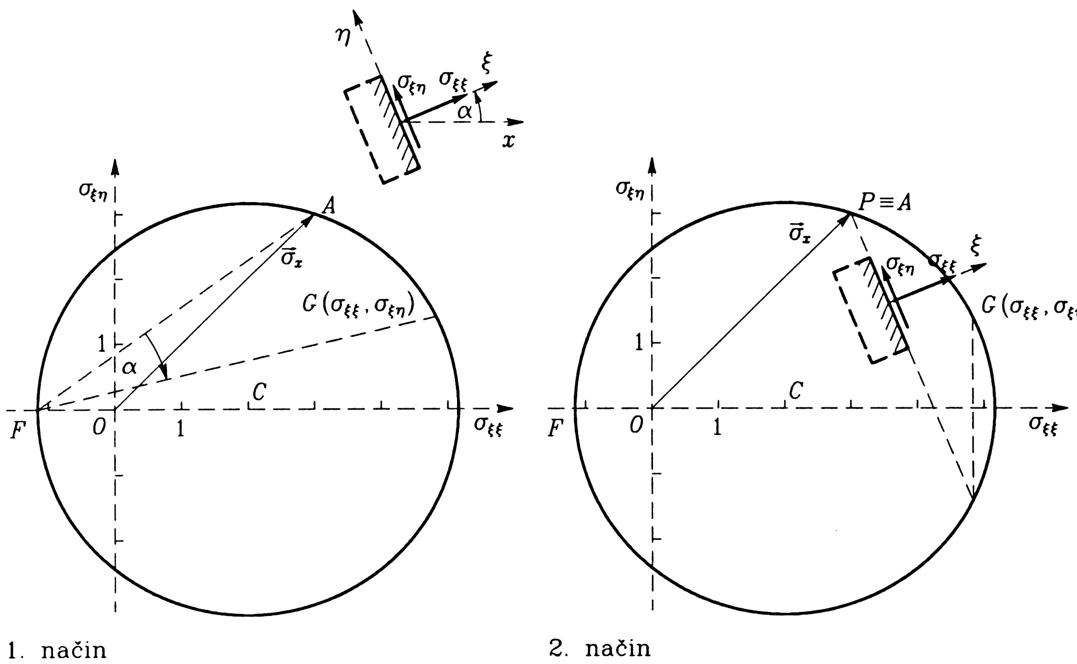
Določi napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n$ v ravnini z normalo $\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z)$. Rezultate preveri z Mohrovimi krogi. **Rešitev:** $\boldsymbol{\sigma}_n = -\frac{10}{3}\,\text{Pa}\,\boldsymbol{e}_x - 10\,\text{Pa}\,\boldsymbol{e}_y - \frac{10}{3}\,\text{Pa}\,\boldsymbol{e}_z$.

NALOGA 20: Na stranske ploskve tanke trikote prizme deluje samo normalna enakomerna površinska obtežba. Privzemimo, da so napetosti po celotni prostornini prizme enake. Določimo napetosti v poljubni ravnini AB, ki je glede na negativno os nagnjena za kot β. Normalna obtežba na robu BC z normalo $\boldsymbol{e}_\xi$ je $p_{BC} = -2$ Pa.

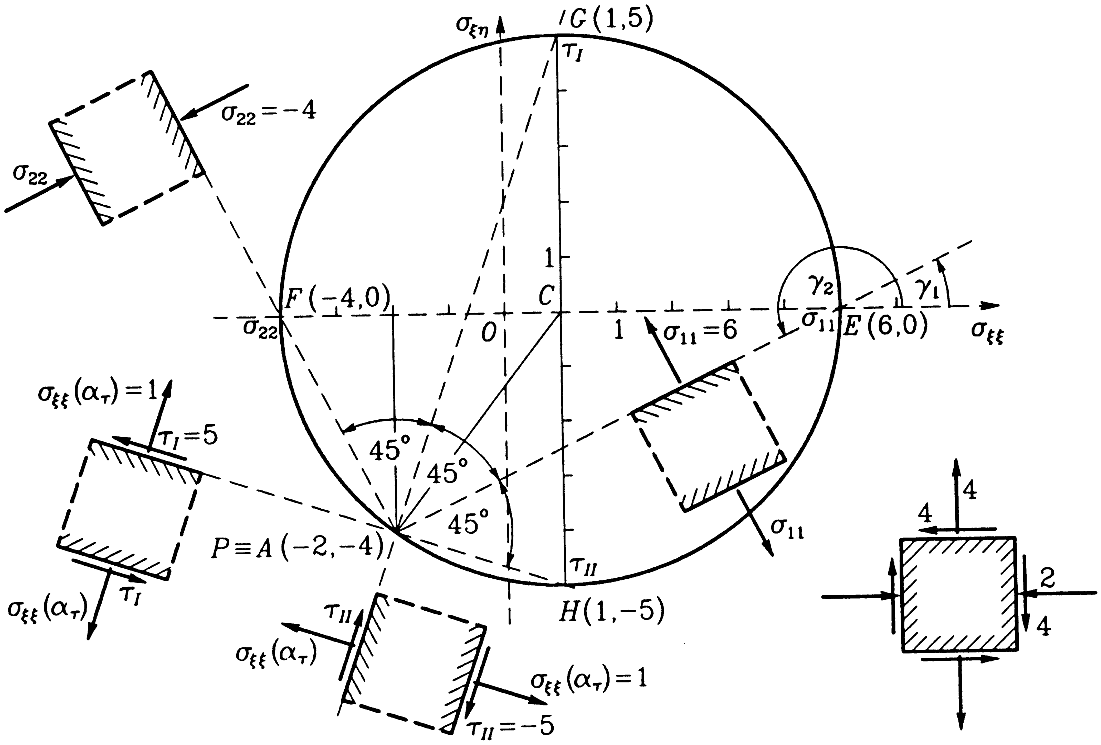


Rešitev: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -2$ Pa, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{\mu\mu} = -2$ Pa, $\sigma_{\mu\nu} = 0$.

NALOGA 21: Napetostno stanje je podano s komponentami tenzorja napetosti v koordinatnem sistemu x, y: $\sigma_{xx} = 3\,\mathrm{N/cm^2}$, $\sigma_{yy} = 1\,\mathrm{N/cm^2}$, $\sigma_{xy} = 3\,\mathrm{N/cm^2}$. Določi napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ in $\sigma_{\xi\eta}$ v ravnini z normalo e_ξ, $\alpha = 22.5°$ z uporabo Mohrovih krogov. **Rešitev:**

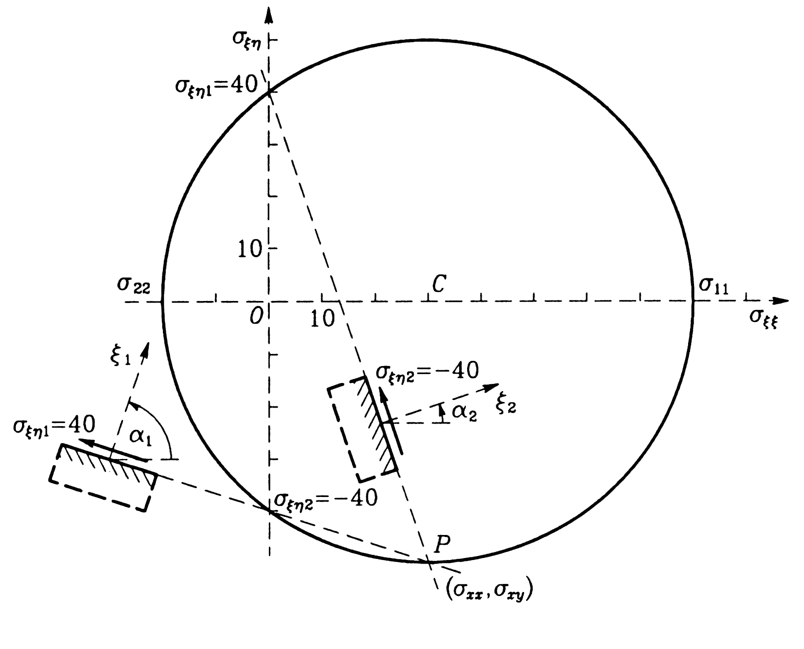


NALOGA 22: Podane so napetosti σ_{xx}, σ_{yy} in σ_{xy} ($\sigma_{xx} = -2\,\mathrm{N/cm^2}$, $\sigma_{yy} = 4\,\mathrm{N/cm^2}$, $\sigma_{xy} = -4\,\mathrm{N/cm^2}$). Z Mohrovo krožnico določi velikosti glavnih normalnih napetosti in pripadajoče smeri ravnin. Določi tudi največje strižne napetosti, pripadajoče normalne napetosti ter smeri ravnin za te napetosti. Rezultate prikaži na kvadratih, katerih robovi imajo smeri ravnin za iskane napetosti. **Rešitev:**



NALOGA 23: Ravninsko napetostno stanje je podano s komponentami napetostnega tenzorja $[\sigma_{ij}]$ v koordinatnem sistemu x, y: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 30$ Pa, $\sigma_{xy} = -50$ Pa. Določi naklon ravnin glede na os x, v kateri delujejo le strižne napetosti $\sigma_{\xi\eta}$, normalne pa so enake nič ($\sigma_{\xi\xi} = 0$). Določi tudi vrednosti teh strižnih napetosti.

Rešitev:



NALOGA 24: Napetostno stanje telesa je podano s tenzorjem napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & Cz & 0 \\ Cz & 0 & -Cx \\ 0 & -Cx & 0 \end{bmatrix} \text{ Pa},$$

kjer je C poljubna konstanta.

(a) Pokaži, da mora volumska obtežba enaka nič, če hočemo zadostiti ravnotežnim enačbam.

(b) V točki $P(4,-4,7)$ izračunaj napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_r$, ki pripada ravnini $2x+2y-z=-7$.

(c) V točki $P(4,-4,7)$ izračunaj napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_s$, ki pripada sferi $x^2+y^2+z^2=9^2$.

(d) Izračunaj glavne normalne napetosti, po absolutni vrednosti največjo strižno napetost, in glavne deviatorične napetosti.

(e) Določi Mohrove kroge, ki ustrezajo napetostnemu stanju v točki P.

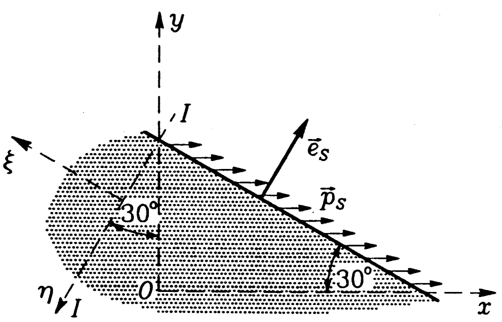
Rešitev:

(b) Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_r = \frac{C}{3}\,(14\,\boldsymbol{e}_x + 18\,\boldsymbol{e}_y - 8\,\boldsymbol{e}_z)$.

(c) Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{C}{9}\,(-28\,\boldsymbol{e}_x + 0\,\boldsymbol{e}_y + 16\boldsymbol{e}_z)$.

(d) Glavne normalne napetosti $\sigma_{11} = \sqrt{65}\,\mathrm{Pa}$, $\sigma_{22} = 0\,\mathrm{Pa}$, $\sigma_{33} = -\sqrt{65}\,\mathrm{Pa}$.
Največja strižna napetost $\tau_{\max} = \pm\sqrt{65}\,\mathrm{Pa}$.
Glavne deviatorične napetosti $s_{11} = \sqrt{65}\,\mathrm{Pa}$, $s_{22} = 0\,\mathrm{Pa}$, $s_{33} = -\sqrt{65}\,\mathrm{Pa}$.

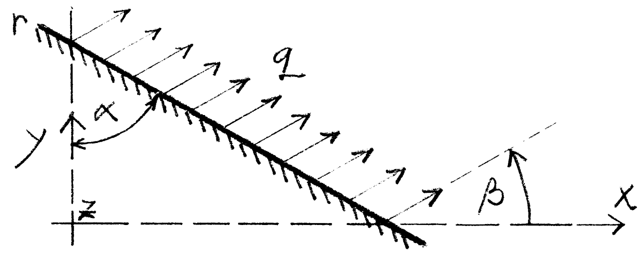
NALOGA 25: Na rob tanke stene deluje enakomerna zvezna površinska obtežba $\boldsymbol{p}_S = 6\,\boldsymbol{e}_x[\mathrm{MPa}]$. V prerezu $I-I$ je normalna komponenta napetosti enaka nič. Določi strižno napetost v prerezu $I-I$. Predpostavi, da so napetosti po celotni steni konstantne.



$$e_{Sx} = \frac{1}{2}$$
$$e_{Sy} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$e_{\xi x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$e_{\xi y} = \frac{1}{2}$$

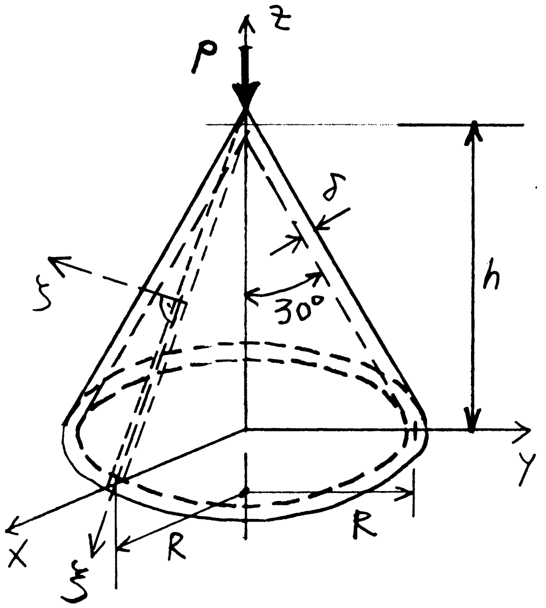
Rešitev: $\sigma_{xx} = 5.25\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{yy} = -2.25\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{xy} = 3.8971\,\mathrm{MPa}$.
Strižna napetost znaša $5.1962\,\mathrm{MPa}$.

NALOGA 26: Na rob stene (RNS) deluje enakomerna zvezna obtežba q kot kaže skica. Določi komponente tenzorja v koordinatnem sistemu (x,y,z) tako, da bosta glavni normalni napetosti nasprotno enaki med seboj ($\sigma_{11} = -\sigma_{22}$)! Določi ravnini obeh glavnih normalnih napetosti. Podatki: $q = 10\,\mathrm{MPa}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.



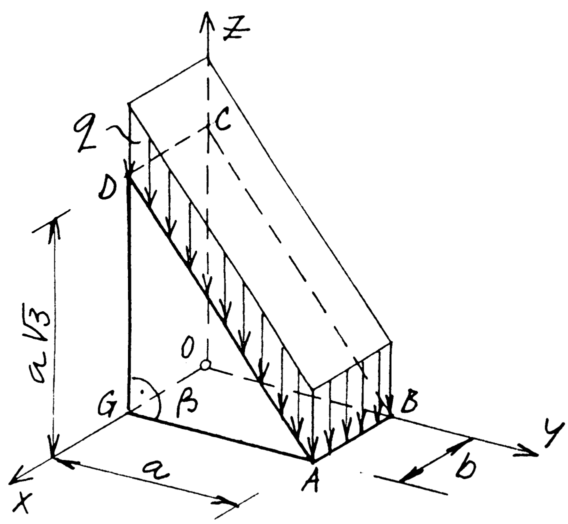
Rešitev: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{xy} = q = 10\,\mathrm{MPa}$.
Normali glavnih ravnin oklepata kota $\alpha_{g1} = 45°$ in $\alpha_{g2} = 135°$ z osjo x.

NALOGA 27: Tanka stožčasta lupina je prilepljena na vodoravno podlago. Srednji polmer osnovne ploskve je R, višina stožca pa h. Vrh stožca je obtežen z navpično silo P. Določi normalno napetost $\sigma_{\xi\xi}$ v steni lupine v odvisnosti od koordinate z ter normalno napetost $\sigma_{zz} = \sigma_{zy}$ v osnovni ploskvi $(z = 0)$! Ker gre za tanko lupino $(\delta << R)$, lahko predpostaviš enakomeren potek napetosti po debelini. Lastne teže lupine ni potrebno upoštevati.

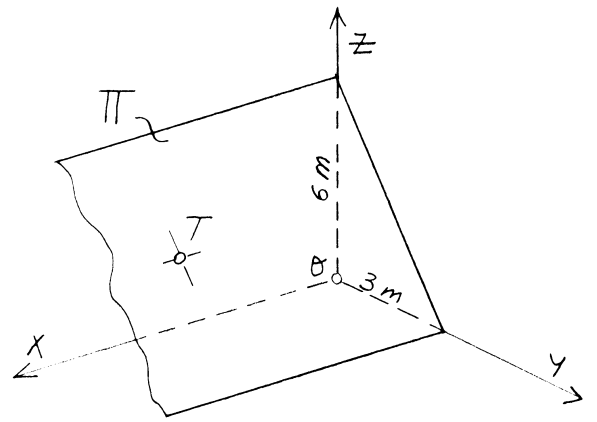


NALOGA 28: Poševna mejna ploskev $ABCD$ majhne homogene trikote prizme je obtežena s navpično enakomerno površinsko obtežbo q, kot kaže skica. Rezultanta enakomerne površinske obtežbe mejne ploskve $OGAB$ je $\boldsymbol{P} = P_y\,\boldsymbol{e}_y + P_z\boldsymbol{e}_z$. Komponento P_z poznamo: $P_z = 30\,\mathrm{kN}$. Mejni ploski OBC in GAD nista obteženi.

Pri katerih vrednostih zunanje obtežbe q je normalna napetost v mejni ploskvi $OGDC$ i) natezna, ii) enaka nič, iii) tlačna?
Določi normalno in strižno napetost v mejni ploskvi $OGDC$ pri $q = 170\,\mathrm{MPa}$! Določi komponento P_y in kontroliraj ravnotežje prizme kot celote! Dolžini sta $a = 30\,\mathrm{mm}$, $b = 10\,\mathrm{mm}$.

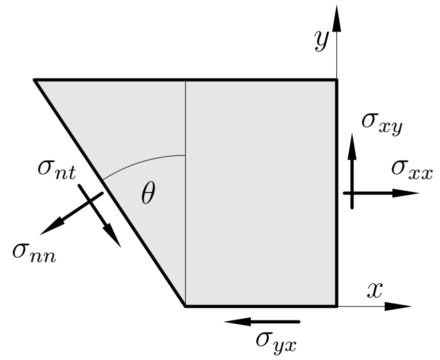


NALOGA 29: Poševna mejna ploskev $ABCD$ majhne homogene trikote prizme je obtežena s navpično enakomerno površinsko obtežbo q, kot kaže skica. Rezultanta enakomerne površinske obtežbe mejne ploskve $OGAB$ je $\boldsymbol{P} = P_y\,\boldsymbol{e}_y + P_z\boldsymbol{e}_z$. Komponento P_z poznamo: $P_z = 30\,\mathrm{kN}$. Mejni ploski OBC in GAD nista obteženi.

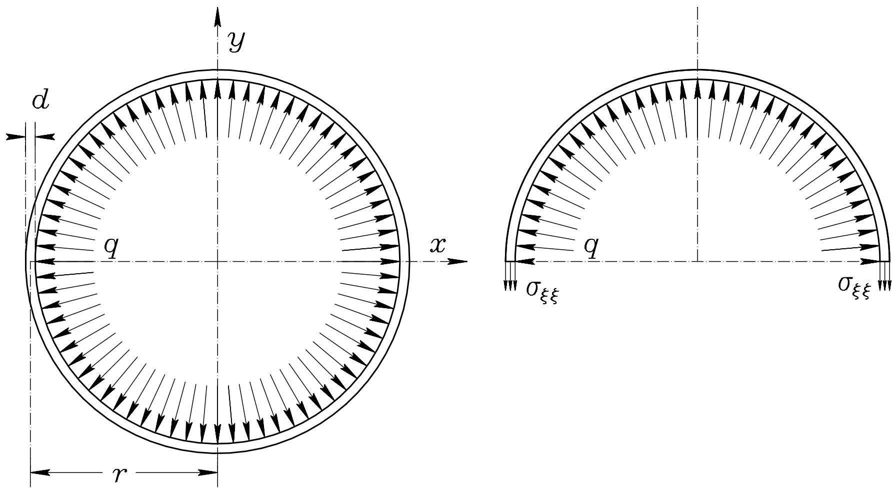


$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 4\,(2y^2+z) & 5z & 5zx \\ 5z & -zx & 5z^2-2xy \\ 5zx & 5z^2-2xy & 10x \end{bmatrix} \text{Pa.}$$

NALOGA 30: Iz okolice točke P izrežemo infinitezimalno majhen trapez, prikazan na spodnji sliki. Slika prikazuje potek napetosti na stranskih ploskvah (nevrisane napetosti so enake 0). Iz meritev poznamo vrednost normalne napetosti σ_{xx}. Določi vrednosti preostalih neznanih napetosti na sliki.



NALOGA 31: Določi normalne napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ v tankem prstanu, ki je z notranje strani obtežen z enakomerno normalno natezno obtežbo q. Privzemi konstanten potek normalnih napetosti po debelini prstana.



NALOGA 32: Napetostno stanje telesa je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti glede na kartezijski koordinatni sistem (x,y,z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x^2y & (1-y^2)x & 0 \\ (1-y^2)x & (y^3-3y)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2z^3 \end{bmatrix} \text{Pa}$$

Določi:

a) volumsko obtežbo telesa, ki zadošča ravnotežnim enačbam,

b) glavne normalne napetosti v točki $P(a, 0, 2\sqrt{a})$,

c) po absolutni vrednosti največjo strižno napetost $\tau_{\max}$ v točki P,

d) glavne deviatorične napetosti v točki P.

NALOGA 33: V telesu vlada homogeno ravninsko napetostno stranje v ravnini $z = 0$. Telo prerežemo z ravnino z normalo $\boldsymbol{e}_a = e_{ax}\boldsymbol{e}_x + e_{ay}\boldsymbol{e}_y$, ki oklepa z osjo x kot α in nato še z ravnino z normalo $\boldsymbol{e}_b = e_{bx}\boldsymbol{e}_x + e_{by}\boldsymbol{e}_y$, ki oklepa z osjo x kot β. Znani sta normalni in strižni komponenti napetosti v teh ravninah. Konkretno $\sigma_{\xi\xi}(\alpha) = 10\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{\xi\eta}(\alpha) = 2\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{\xi\xi}(\beta) = 9\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{\xi\eta}(\beta) = 1\,\mathrm{MPa}$. Določi glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22}, ter največjo strižno napetost $\tau^{\max}$. Namig: Pri reševanju si pomagaj z Mohrovimi krogi.