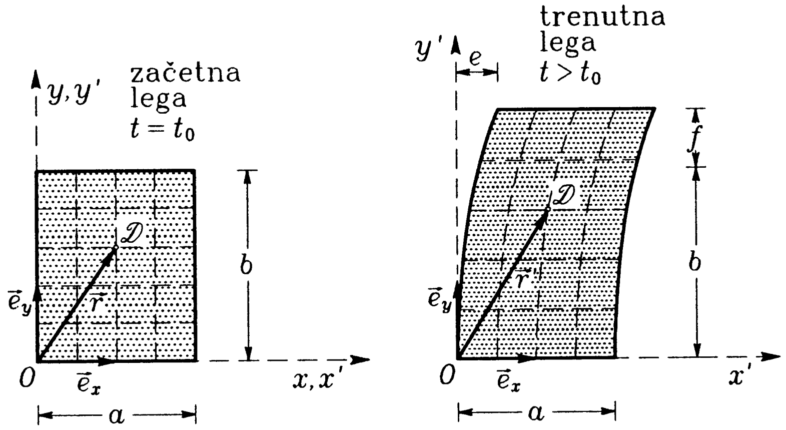
3. VAJA IZ TRDNOSTI

(tenzor deformacij)

(pomiki togega telesa, Lagrangev in Eulerjev opis, tenzor velikih deformacij, tenzor majhnih deformacij in rotacij, kompatibilitetni pogoji)

NALOGA 1: Gumijasti kvader dimenzij $a \times b \times c$ v začetni nedeformirani legi se deformira kot prikazuje slika. Določi pomik v referenčnem in prostorskem opisu. Zapiši materialne bazne vektorje e'_x, e'_y in e'_z za ta primer. Pokaži, da vektor e'_y leži na tangenti na materialno os in ni nujno enotski.



Rešitev: Pomik v referenčnem opisu: $\boldsymbol{u} = \frac{e}{b^2} y^2 \boldsymbol{e}_x + \frac{f}{b} y \boldsymbol{e}_y$.
Pomik v prostorskem opisu: $\boldsymbol{u} = \frac{e y'}{(b+f)^2} \boldsymbol{e}_x + \frac{f y'}{f+b} \boldsymbol{e}_y$.
Bazni vektorji: $\boldsymbol{e}'_x = \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}'_y = \frac{2y}{b^2} \boldsymbol{e}_x + \left(1 + \frac{f}{b}\right) \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}'_z = \boldsymbol{e}_z$.

NALOGA 2: Pomik togega telesa je glede na kartezijski koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ opisan s translacijo $\boldsymbol{u}_0$ in majhnim zasukom $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke $T_0(5,5,1)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0 &= 10^{-2} (2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z), \\ \boldsymbol{\omega}_0 &= 10^{-2} (\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z). \end{aligned}$$

Delec Q je v začetnem stanju določen s točko $T(8,2,1)$ (telesne koordinate delca so torej $x = 8$, $y = 2$, $z = 1$). Določi pomik in zasuk delca Q

a) v bazi $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$,

b) v bazi $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$ in $\boldsymbol{e}_\zeta$, ki je glede na bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ določena z enačbami

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\xi &= 1/\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_x + 1/\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_y + 1/\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_\eta &= -2/\sqrt{6}\,\boldsymbol{e}_x + 1/\sqrt{6}\,\boldsymbol{e}_y + 1/\sqrt{6}\,\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_\zeta &= -1/\sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_y + 1/\sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_z. \end{aligned}$$

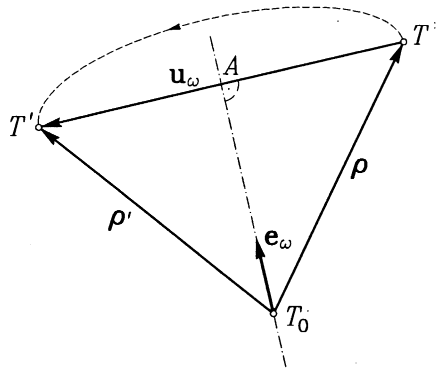
Rešitev:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 10^{-2} (11\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y - 8\boldsymbol{e}_z), \\ \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_0 = 10^{-2} (\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= u_x\,\boldsymbol{e}_x + u_y\,\boldsymbol{e}_y + u_z\,\boldsymbol{e}_z = u_\xi\,\boldsymbol{e}_\xi + u_\eta\,\boldsymbol{e}_\eta + u_\zeta\,\boldsymbol{e}_\zeta = \\
&= 10^{-2}\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{e}_\xi - \frac{24}{\sqrt{6}}\,\boldsymbol{e}_\eta - \frac{14}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_\zeta\right), \\
\boldsymbol{\omega} &= 10^{-2}\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{e}_\xi + \frac{3}{\sqrt{6}}\,\boldsymbol{e}_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_\zeta\right).
\end{aligned}
$$

NALOGA 3: Za podatke iz gornje naloge izračunaj točno vrednost pomika $\boldsymbol{u}$.
Rešitev:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0\,\boldsymbol{e}_\omega \\
\boldsymbol{\rho}' &= \cos(\omega_0)\,\boldsymbol{\rho} + (1-\cos(\omega_0))\,(\boldsymbol{e}_\omega\cdot\boldsymbol{\rho})\,\boldsymbol{e}_\omega + \sin(\omega_0)\,\boldsymbol{e}_\omega\times\boldsymbol{\rho} = \\
&= 3.0877\,\boldsymbol{e}_x - 2.9082\,\boldsymbol{e}_y - 0.0904\,\boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{u}_\omega &= \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho} = 10^{-2}\,(8.77\,\boldsymbol{e}_x + 9.18\,\boldsymbol{e}_y - 9.04\,\boldsymbol{e}_z), \\
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_\omega = 10^{-2}\,(10.77\,\boldsymbol{e}_x + 6.18\,\boldsymbol{e}_y - 8.04\,\boldsymbol{e}_z).
\end{aligned}
$$



Rešitev lahko poiščemo tudi z uporabo rotacijske matrike $[R]$.

$$
[R] = [I] + \sin(\omega_0)\,[N] + (1-\cos(\omega_0))\,[N]^2,
$$

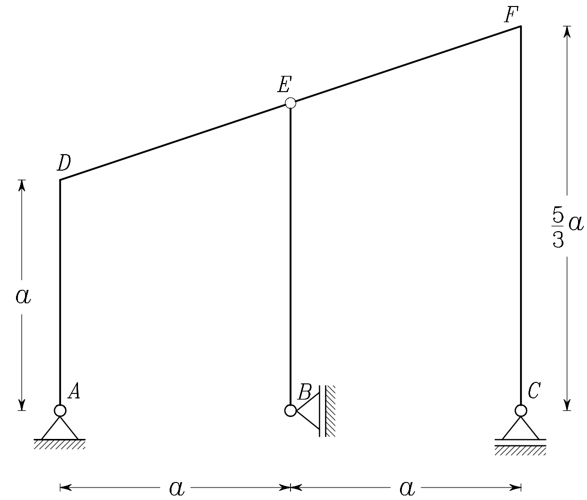
kjer ob upoštevanju oznak

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} &= \rho_x\,\boldsymbol{e}_x + \rho_y\,\boldsymbol{e}_y + \rho_z\,\boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{\rho}' &= \rho'_x\,\boldsymbol{e}_x + \rho'_y\,\boldsymbol{e}_y + \rho'_z\,\boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{e}_\omega &= \omega_1\,\boldsymbol{e}_x + \omega_2\,\boldsymbol{e}_y + \omega_3\,\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

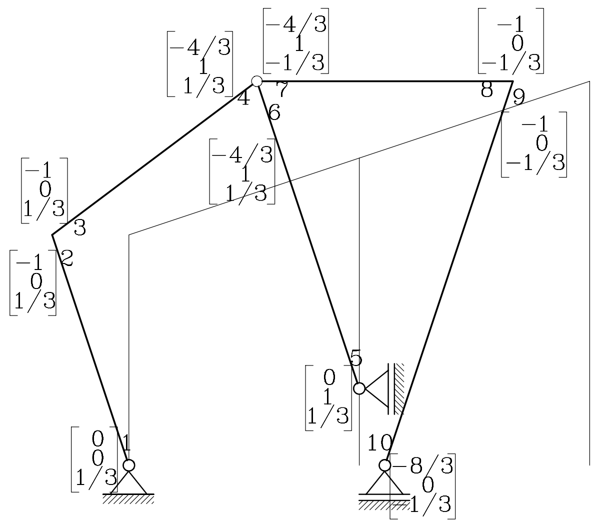
velja

$$
[N] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad
\begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{bmatrix} = [R]\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}.
$$

NALOGA 4: **3.** (35 %) Določi pomike in zasuke togih teles na sliki, če podporo B v vertikalni smeri premaknemo za $\delta v = 10^{-3}\,$m.
$a = 3\,$m.



Rešitev:



Pomiki in zasuki konstrukcije $\times 10^{-3}$.

Pomen oznak: $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}$.

NALOGA 5: Za materialni delec T so prostorske koordinate x', y' in z' podane v odvisnosti od telesnih koordinat x, y in z z enačbami

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + az, \\ z' &= z + ay. \end{aligned}$$

V enačbah je a konstanta. Določi vektorja pomikov, izražena z materialnimi in prostorskimi koordinatami.

Rešitev: Komponente vektorja pomika, izražene z materialnimi koordinatami:
$u_x = x' - x = 0$, $u_y = y' - y = az$, $u_z = z' - z = ay$.

Vektor pomika, izražen z materialnimi koordinatami:
$\boldsymbol{u} = u_x\,\boldsymbol{e}_x + u_y\,\boldsymbol{e}_y + u_z\,\boldsymbol{e}_z = a\,z\,\boldsymbol{e}_y + a\,y\,\boldsymbol{e}_z$.
Materialne koordinate, izražene v odvisnosti od prostorskih koordinat:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= \frac{y' - a\,z'}{1-a^2}, \\ z &= \frac{z' - a\,y'}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Od tu dobimo vektor pomika, izražen s prostorskimi koordinatami:
$\boldsymbol{u} = a\,\frac{z'-a\,y'}{1-a^2}\,\boldsymbol{e}_y + a\,\frac{y'-a\,z'}{1-a^2}\,\boldsymbol{e}_z$.

NALOGA 6: Deformiranje telesa je v Lagrangevem opisu podano z enačbami

$$\begin{aligned} x' &= x + z\,(e^2 - 1), \\ y' &= y + z\,(e^2 - e^{-2}) \\ z' &= e^2\,z, \end{aligned}$$

kjer je e konstanta. Pokaži da je Jacobijeva matrika povsod nesingularna in opiši deformiranje telesa z Eulerjevimi enačbami.
Rešitev:

$$|[J]| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & (e^2-1) \\ 0 & 1 & (e^2-e^{-2}) \\ 0 & 0 & e^2 \end{vmatrix} = e^2 \neq 0.$$

$$\begin{aligned} x &= x' + z'\,(e^{-2} - 1), \\ y &= y' + z'\,(e^{-4} - 1) \\ z &= e^{-2}\,z', \end{aligned}$$

NALOGA 7: Polje pomikov je podano z vektorjem

$$\boldsymbol{u} = x\,z^2\,\boldsymbol{e}_x + x^2\,y\,\boldsymbol{e}_y + y^2\,z\,\boldsymbol{e}_z.$$

Določi (materialni) deformacijski gradient $[F]$ in materialni gradient pomikov $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$ in pokaži, da velja $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] = [F] - [I]$.
Rešitev:

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} z^2 & 0 & 2\,x\,z \\ 2\,x\,y & x^2 & 0 \\ 0 & 2\,y\,z & y^2 \end{bmatrix}^T$$

$$[F] = \left[\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} 1+z^2 & 0 & 2\,x\,z \\ 2\,x\,y & 1+x^2 & 0 \\ 0 & 2\,y\,z & 1+y^2 \end{bmatrix}^T$$

NALOGA 8: Deformiranje telesa je opisano s poljem pomikov $\boldsymbol{u}$ v telesnih koordinatah x, y in z (dolžine so podane v cm).

$$\boldsymbol{u} = 10^{-4}\,(2\,x^2\,\boldsymbol{e}_x - (x+y)^2\,\boldsymbol{e}_y + 4\,\boldsymbol{e}_z).$$

a) Določi spremembo razdalje med delcema D_1 in D_2, ki sta v nedeformiranem stanju določena s točkama $T_1(10,10,0)$ in $T_2(11,11,0)$.

b) V točki T_1 določi točno vrednost specifične spremembe dolžine v smeri $\overline{T_1\,T_2}$. Kolikšno napako narediš, če to specifično spremembo dolžine izraziš

- z vrednostjo tenzorja majhnih deformacij v smeri $\overline{T_1\,T_2}$,
- s povprečno vrednostjo specifične spremembe dolžine med točkama T_1 in T_2.

Rešitev:

a)

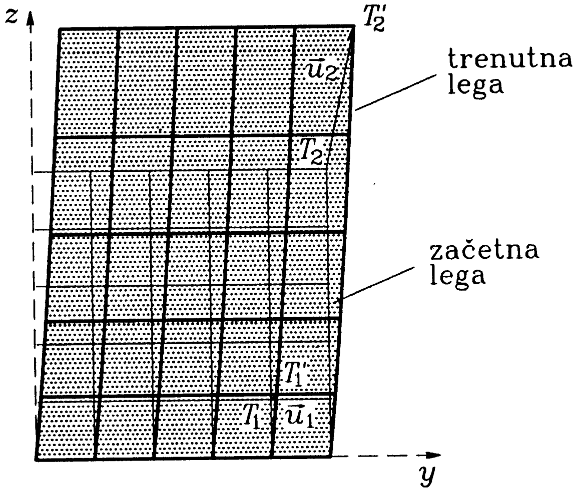
$$|\Delta \boldsymbol{r}'| - |\Delta \boldsymbol{r}| = |(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{u}_2) - (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}_1)| - |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = -0.002942\,\text{cm}.$$

b)

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= 4x \cdot 10^{-4} + (8x^2 + 2\,(x+y)^2) \cdot 10^{-8} = 40.16 \cdot 10^{-4}, \\
E_{yy} &= -2\,(x+y) \cdot 10^{-4} + 2\,(x+y)^2 \cdot 10^{-8} = -39.92 \cdot 10^{-4}, \\
E_{xy} &= -(x+y) \cdot 10^{-4} + 2\,(x+y)^2 \cdot 10^{-8} = -19.92 \cdot 10^{-4}, \\
E_{rr} &= E_{xx}\, e_{rx}^2 + 2\, E_{xy}\, e_{rx}\, e_{ry} + E_{yy}\, e_{ry}^2 = -19.80 \cdot 10^{-4}, \\
D_{rr} &= \sqrt{1 + 2\,E_{rr}} - 1 = -19.8196 \cdot 10^{-4}
\end{aligned}$$

- $\varepsilon_{rr} = -20 \cdot 10^{-4}$, $n_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{rr}}{D_{rr}} - 1 = 0.91\%$,
- $\overline{D}_{rr} = \frac{|\Delta \boldsymbol{r}'| - |\Delta \boldsymbol{r}|}{|\Delta \boldsymbol{r}|} = -0.00208$, $\overline{n} = \frac{\overline{D}_{rr}}{D_{rr}} - 1 = 4.94\%$,

NALOGA 9: Deformiranje telesa je podano s poljem pomikov v materialnem koordinatnem sistemu $\boldsymbol{u} = 10^{-3}\left((xy-3)\,\boldsymbol{e}_x + (2x^2+z)\,\boldsymbol{e}_y + z^2\,\boldsymbol{e}_z\right)$ [cm]. Telo v nedeformiranem stanju zaseda trirazsežno območje $(x,y,z) \in [0,1] \times [0,5] \times [0,5]$. Analiziraj deformiranje telesa v ravnini $x = 0$. Določi spremembo razdalje med delcema D_1 in D_2, ki sta se pred deformiranjem nahajala v točkah $\boldsymbol{r}_1 = 4\,\boldsymbol{e}_y + 1\,\boldsymbol{e}_z$ [cm] in $\boldsymbol{r}_1 = 5\,\boldsymbol{e}_y + 5\,\boldsymbol{e}_z$ [cm]. Določi tudi specifično spremembo dolžin vlaken v smeri $T_1\,T_2$.



Prerez telesa v nedeformirani začetni legi in pomika delcev $\mathscr{D}_1$ in $\mathscr{D}_2$

Rešitev: Specifična sprememba dožine daljice $\overline{T_1\,T_2}$ je $\overline{D}_{TT} = \overline{\varepsilon}_{TT} = \frac{\Delta \overline{T_1\,T_2}}{\overline{T_1\,T_2}} = 0.005881$.
Količina $\overline{D}_{TT}$ predstavlja **povprečno** normalno deformacijo $\overline{\varepsilon}_{TT}$ vlaken v smeri $\overrightarrow{T_1\,T_2}$ med točkama

T_1 in T_2.
Normalna komponenta deformacije ε_{TT} v smeri $\boldsymbol{e}_T = \frac{\vec{T_1T_2}}{\overline{T_1T_2}}$ **v točki** T_1 je $\varepsilon_{TT}(T_1) = 0.00211$.
Normalna komponenta deformacije ε_{TT} v smeri $\boldsymbol{e}_T$ v točki T_3, ki se nahaja na sredini med točkama T_1 in T_2 je $\varepsilon_{TT}(T_3) = 0.005882$.

NALOGA 10: Deformiranje telesa je podano z enačbami

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + az, \\ z' &= z + ay, \end{aligned}$$

kjer je a konstanta.

a) Izračunaj (Lagrangev) tenzor velikih deformacij $\boldsymbol{E}$,

b) Označimo z ds dolžino diagonale pravokotnika OC, kjer so koordinate točk $C(0, dy, dz)$ in $O(0,0,0)$ v nedeformiranem stanju. Izračunaj razliko $ds'^2 - ds^2$.

c) Izračunaj tenzor majhnih deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}$.

d) Naj bo $a = 10^{-4}$. Z uporabo tenzorja velikih deformacij $\boldsymbol{E}$ in z uporabo tenzorja majhih deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}$ izračunaj razliko $ds'^2 - ds^2$ in primerjaj rezultata.

Rešitev:

a)

$$[E_{ij}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 2a & a^2 \end{bmatrix}.$$

b)

$$ds'^2 - ds^2 = a^2\,(dy^2 + dz^2) + 4\,a\,dy\,dz.$$

c)

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 2a & 0 \end{bmatrix}.$$

d)

$$\begin{aligned} ds'^2 - ds^2 &= a^2\,(dy^2 + dz^2) + 4\,a\,dy\,dz = 10^{-8}\,(dy^2 + dz^2) + 10^{-4}\,dy\,dz, \\ ds'^2 - ds^2 &= 4\,a\,dy\,dz = 10^{-4}\,dy\,dz. \end{aligned}$$

NALOGA 11: Pomik tanke stene stranico $b = 1\,\mathrm{m}$ debeline $d = 1\,\mathrm{cm}$ je podan z vektorjema

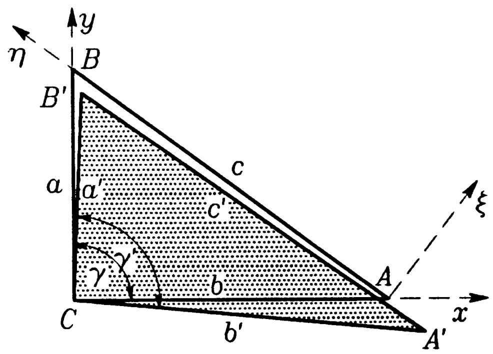
$$\begin{aligned} &(a) \quad \vec{u}(x,y,z) = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y = a\,y\,\vec{e}_x + a\,x\,\vec{e}_y \Longrightarrow u_x = a\,y,\; u_y = a\,x, \\ &(b) \quad \vec{u}(x,y,z) = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y = -a\,y\,\vec{e}_x + a\,x\,\vec{e}_y \Longrightarrow u_x = -a\,y,\; u_y = a\,x. \end{aligned}$$

Določi:

- Komponente tenzorja majhnih deformacij ε_{ij}, komponente tenzorja rotacij ω_{ij} v kartezičnem koordinatnem sistemu in vektor zasuka $\boldsymbol{\omega}$.
- Specifične spremembe dolžin daljic AB, AC, AD in BC in spremembi pravih kotov CAB in CED.
- Glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri.

Podatki: $a = 10^{-4}$, $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,0)$ in $E(0.5,0.5,0)$. Vse razdalje so v metrih.
Rešitev: Glej prosojnice.

NALOGA 12: Obravnavamo ploščo trikotne oblike s stranicami $a = 3\,\mathrm{m}$, $b = 4\,\mathrm{m}$ in $c = 5\,\mathrm{m}$. Plošča se zaradi delovanja zunanje obtežbe deformira. Spremembe dolžin stranic trikotnika so $\Delta a = -0.012\,\mathrm{m}$, $\Delta b = 0.015\,\mathrm{m}$ in $\Delta c = 0.0088\,\mathrm{m}$. Določi spremembo pravega kota med stranicama a in b.



Trikotna plošča pred in po deformiranju

Rešitev: Točno: $\Delta\gamma = \gamma' - \gamma = 90.09482^\circ - 90^\circ = 0.09482^\circ = 0.001655\,\mathrm{rad}$.
Približno: Iz ε_{xx}, ε_{yy}, $\varepsilon_{\eta\eta}$ izračunamo ε_{xy}. $\Delta\gamma \approx 2\,\varepsilon_{xy} = -0.001667\,\mathrm{rad}$.

NALOGA 13: Pokaži da se matrike $[F_{ij}]$, $[E_{ij}]$, $[\varepsilon_{ij}]$ in $[\omega_{ij}]$, pri prehodu iz kartezičnega koordinatnega sistema (x,y,z) preko rotacije na drug kartezični koordinatni sistem (ξ,η,ζ) transformirajo po enačbah

$$
\begin{aligned}
[F_{\alpha\beta}] &= [e_{\alpha i}]\,[F_{ij}]\,[e_{j\beta}],\\
[E_{\alpha\beta}] &= [e_{\alpha i}]\,[E_{ij}]\,[e_{j\beta}],\\
[\varepsilon_{\alpha\beta}] &= [e_{\alpha i}]\,[\varepsilon_{ij}]\,[e_{j\beta}],\\
[\omega_{\alpha\beta}] &= [e_{\alpha i}]\,[\omega_{ij}]\,[e_{j\beta}],
\end{aligned}
$$

in da zato v izbranih koordinatnih sistemih prestavljajo tenzorje drugega reda, konkretno, deformacijski gradient pomikov, tenzor velikih deformacij, tenzor majhnih deformacij in tenzor rotacij.

NALOGA 14: Pomik deformabilnega telesa je glede na kartezijski koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ opisan s translacijo $\boldsymbol{u}_0$ in majhnim zasukom $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke $T_0(5,5,1)$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_0 &= 10^{-2}\,(2\,\boldsymbol{e}_x - 3\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z),\\
\boldsymbol{\omega}_0 &= 10^{-2}\,(\boldsymbol{e}_x + 2\,\boldsymbol{e}_y + 3\,\boldsymbol{e}_z).
\end{aligned}
$$

Predpostavi da so zasuki majhni. Pri določitvi pomikov poljubne točke $T(x,y,z)$ uporabi približno Rodriguesovo enačbo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0),$$

kjer je $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$.

a) Določi komponente tenzorjev velikih in majhih deformacij v točki T.

b) Določi komponente tenzorja majhih rotacij v točki T.

c) Pojasni dobljene rezultate.

Rešitev:

a) Tenzor velikih deformacij v točki T je

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 6.5 & -1 & -1.5 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1.5 & -3 & 2.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

a') Tenzor majhih deformacij v točki T je

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Tenzor majhih rotacij v točki T je

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Ker smo vektor pomikov zapisali s približno Rodriguesovo enačbo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0),$$

ki opisuje translacijo in majhno rotacijo telesa, je tenzor majhnih deformacij enak nič. Tenzor velikih deformacij ni enak nič, saj smo pri računu pomika uporabili približno enačbo. Iz tenzorja rotacij lahko preberemo rotacijski vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{e}_x + \omega_y \boldsymbol{e}_y + \omega_z \boldsymbol{e}_z = 10^{-2} (\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z) = \boldsymbol{\omega}_0.$$

NALOGA 15: Pomik deformabilnega telesa je glede na kartezijski koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ opisan s translacijo $\boldsymbol{u}_0$ in majhnim zasukom $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke $T_0(5,5,1)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0 &= 10^{-2} (2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z), \\ \boldsymbol{\omega}_0 &= 10^{-2} (\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z). \end{aligned}$$

Pri določitvi pomikov poljubne točke $T(x,y,z)$ uporabi točne enačbe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_\omega, \\ \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0 \boldsymbol{e}_\omega \\ \boldsymbol{\rho}' &= \cos(\omega_0)\boldsymbol{\rho} + (1-\cos(\omega_0))(\boldsymbol{e}_\omega \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{e}_\omega + \sin(\omega_0)\boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{\rho}, \\ \boldsymbol{u}_\omega &= \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}, \\ \boldsymbol{\rho} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0. \end{aligned}$$

kjer je $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$.

a) Določi komponente tenzorjev velikih in majhih deformacij v točki T.

b) Določi komponente tenzorja majhih rotacij v točki T.

c) Pojasni dobljene rezultate.

Rešitev:

a) Tenzor velikih deformacij v točki T je

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a') Tenzor majhih deformacij v točki T je

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -6.5 & 1 & 1.5 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1.5 & 3 & -2.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

b) Tenzor majhih rotacij v točki T je

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2.9993 & -1.9995 \\ -2.9993 & 0 & 0.9998 \\ 1.9995 & -0.9998 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Ker smo vektor pomikov zapisali s točno Rodriguesovo enačbo je tenzor velikih deformacij enak nič. Tenzor majhnih deformacij ni enak nič, saj smo pri računu pomika uporabili točno enačbo. Iz tenzorja majhnih rotacij lahko dokaj natančno odčitamo rotacijski vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{e}_x + \omega_y \boldsymbol{e}_y + \omega_z \boldsymbol{e}_z = 10^{-2} (0.9998 \boldsymbol{e}_x + 1.9995 \boldsymbol{e}_y + 2.9993 \boldsymbol{e}_z) \approx \boldsymbol{\omega}_0.$$

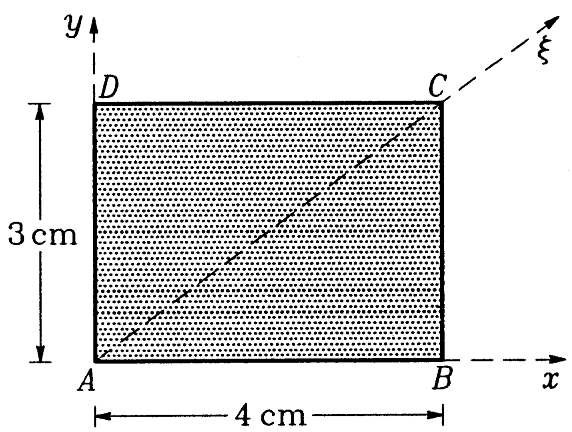
NALOGA 16: Predpostavi, da so deformacije po pravokotni plošči konstantne po prostornini plošče. Deformacijski tenzor je

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Privzemi, da sta pomik in zasuk v točki A enaka nič. Določi spremembo dolžine diagonale pravokotne plošče na dva načina:

(1) izračunaj pomik v točki C in določi deformirano dolžino diagonale.

(2) določi deformacijo $\varepsilon_{\xi\xi}$ v smeri diagonale in iz nje izračunaj spremembo dolžine diagonale.

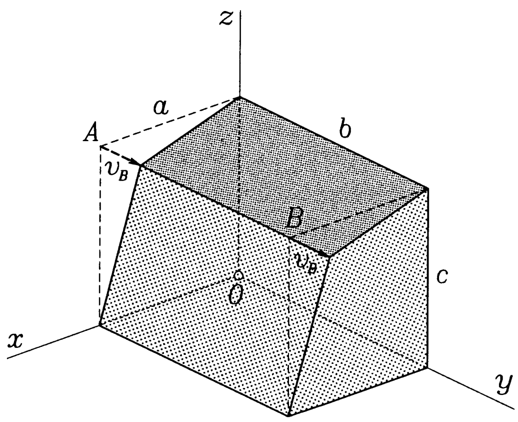


Dimenziji a in b pravokotne plošče ter lega točke C

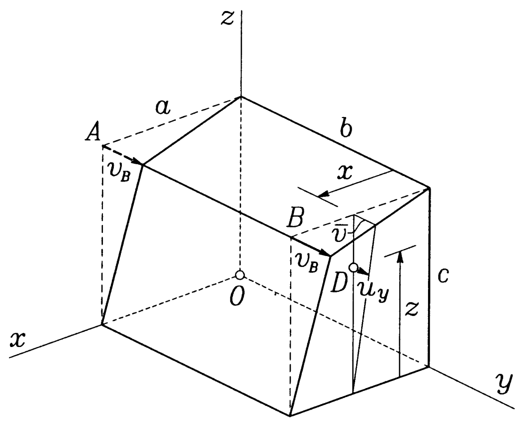
Rešitev: Pri izračunu pomika lahko uporabimo rezultat naloge 7. Dobimo $\vec{u}_C = 10^{-2}\,(\vec{e}_x + 1.7\,\vec{e}_y)$ [cm]. Od tu izračunamo $\Delta d = d - d_0 = 5.018206 - 5 = 0.018206\,\text{cm}$, kjer smo z d označili dolžino diagonale v deformirani legi z d_0 pa dolžino diagonale v začetni nedeformirani legi.

Upoštevamo enačbi $\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx}\,e_{\xi x}^2 + \varepsilon_{yy}\,e_{\xi y}^2 + 2\,\varepsilon_{xy}\,e_{\xi x}\,e_{\xi y} = 3.64\cdot 10^{-4}$ in $\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\Delta d}{d_0}$ in dobimo $\Delta d = 0.018200\,\text{cm}$.

NALOGA 17: Homogen kvader se deformira tako, da se stranica $\overline{AB}$ translatorno premakne v smeri y za vrednost v_B. Vse stranice ostanejo pri tem ravne (glej sliko). Določi vektor pomika poljubnega delca $D(x,y,z)$ ter komponente tenzorja majhnih deformacij glede na prikazani kartezijski koordinatni sistem. Določi tudi velikosti in smeri glavnih normalnih deformacij.



Rešitev: Pri določitvi pomika si lahko pomagamo s spodnjo sliko. Velja (glej sliko) $u_y = \overline{v}\,\frac{z}{c}$ in $\overline{v} = v_B\,\frac{x}{a}$. Od tu dobimo $u_y = v_B\,\frac{x}{a}\,\frac{z}{c}$ in končno $\vec{u}(x,y,z) = v_B\,\frac{x}{a}\,\frac{z}{c}\,\vec{e}_y$.



Z odvajanjem pomika dobimo

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha z & 0 \\ \alpha z & 0 & \alpha x \\ 0 & \alpha x & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo se glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \alpha\sqrt{x^2+z^2}, \\ \varepsilon_{22} &= 0, \\ \varepsilon_{33} &= -\alpha\sqrt{x^2+z^2} \end{aligned}$$

in

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \frac{z}{\sqrt{2\,(x^2+z^2)}}\,\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_y + \frac{x}{\sqrt{2\,(x^2+z^2)}}\,\vec{e}_z, \\
\vec{e}_2 &= -\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\vec{e}_x + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\,\vec{e}_z, \\
\vec{e}_3 &= \frac{z}{\sqrt{2\,(x^2+z^2)}}\,\vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_y + \frac{x}{\sqrt{2\,(x^2+z^2)}}\,\vec{e}_z.
\end{aligned}
$$

NALOGA 18: Deformiranje telesa je opisano z vektorskim poljem pomikov

$$
\vec{u} = 10^{-4}\,((5x^2-6z)\,\vec{e}_x + 2y^2 z\,\vec{e}_y + (x^2-3y^2 z)\,\vec{e}_z).
$$

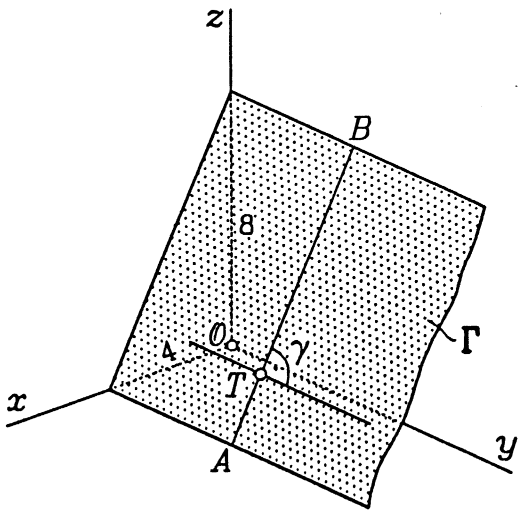
V točki $T\,(x,4,2)$, ki leži v ravnini Γ določi:

a) specifično spremembo dolžine normale na ravnino Γ,

b) specifično spremembo pravega kota γ,

c) rezultirajoči vektor zasuka $\vec{\omega}$, vrednosti $\vec{\omega}_n$ in $\vec{\omega}_t$ tenzorja zasukov ter povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale na ravnino Γ,

d) ugotovi ali v kakšni točki na črti $\overline{AB}$ vlada izohrono defomacijsko stanje (to pomeni, da je specifična sprememba prostornine v kakšni točki enaka 0).



Rešitev:

a) specifična sprememba dolžine normale na ravnino Γ je $D_{nn} \approx \varepsilon_{nn} = \frac{72}{5} \cdot 10^{-4}$,

b) specifična sprememba pravega kota γ je $\Delta\gamma = D_{yt} \approx 2\,\varepsilon_{yt} = -\frac{32}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$,

c) rezultirajoči vektor zasuka $\vec{\omega} = 10^{-4}\,(-40\,\vec{e}_x - 6\,\vec{e}_y)$,
$\vec{\omega}_n = \vec{\omega} \times \vec{e}_n = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}}\,(-6\,\vec{e}_x + 40\,\vec{e}_y + 12\,\vec{e}_z)$,
$\vec{\omega}_t = \vec{\omega} \times \vec{e}_t = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}}\,(-12\,\vec{e}_x + 80\,\vec{e}_y - 6\,\vec{e}_z)$,
povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale na ravnino Γ je $\omega_n = \frac{-80}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$,

d) v točki $T\left(\frac{40}{11}, 4, \frac{8}{11}\right)$ na črti $\overline{AB}$ vlada izohrono defomacijsko stanje.

NALOGA 19: Polje pomikov je podano z enačbo

$$\vec{u} = 10^{-4}\left((x-z)^2\,\vec{e}_x + (y+z)^2\,\vec{e}_y - xy\vec{e}_z\right).$$

V točki $P(0,2,-1)$ določi:

a) tenzor majhnih deformacij,

b) tenzor majhnih zasukov,

c) vektor zasuka $\vec{\omega}$.

d) specifično spremembo dolžine v smeri $\vec{e}_\xi = \frac{1}{9}\,(8\,\vec{e}_x - \vec{e}_y + 4\,\vec{e}_z)$

e) spremembo pravega kota med vektorjema $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\eta = \frac{1}{9}\,(4\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y - 7\,\vec{e}_z)$.

Rešitev:

a) tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

b) tenzor majhnih zasukov

$$[\omega_{ij}] = 10^{-4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

c) vektor zasuka $\vec{\omega} = -10^{-4}\,\vec{e}_x$.

d) specifična sprememba dolžine v smeri $\vec{e}_\xi = \frac{1}{9}\,(8\,\vec{e}_x - \vec{e}_y + 4\,\vec{e}_z)$ je $D_{\xi\xi} \approx \varepsilon_{\xi\xi} = \frac{-6}{81}\cdot 10^{-4}$.

e) sprememba pravega kota med vektorjema $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\eta = \frac{1}{9}\,(4\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y - 7\,\vec{e}_z)$ znaša $D_{\xi\eta} \approx 2\,\varepsilon_{\xi\eta} = 10^{-4}\cdot\frac{318}{81}$

NALOGA 20: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\vec{u} = 10^{-4}((4x - y + 3z)\,\vec{e}_x + (x + 7y)\,\vec{e}_y + (-3x + 4y + 4z)\,\vec{e}_z).$$

Določi:

a) specifično spremembo volumna,

b) tenzor majhnih deformacij,

c) glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri,

d) ekstremne strižne deformacije in pripadajoče smeri,

e) deviatorični del tenzorja majhnih deformacij,

f) Rezultate prikaži z Mohrovimi krogi.

Rešitev:

a) specifična sprememba volumna $\varepsilon_V = 10^{-4}\,(4+7+4)$,

b) tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

c) glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri so
$\varepsilon_{11} = 8\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{22} = 4\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{33} = 3\cdot 10^{-4}$,
$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}\,(2\,\vec{e}_y + \vec{e}_z)$,
$\vec{e}_2 = \vec{e}_x$,
$\vec{e}_3 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}\,(\vec{e}_y - 2\,\vec{e}_z)$.

d) ekstremna strižna deformacija in pripadajoče smeri so
$\gamma_2 = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) = -\frac{5}{2}\cdot 10^{-4}$, $\vec{e}_{II} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\vec{e}_3 \pm \vec{e}_1)$.

e) deviatorični del tenzorja majhnih deformacij

$$[e_{ij}] = 10^{-4}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

NALOGA 21: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\vec{u} = (-c\,y + b\,z)\,\vec{e}_x + (c\,x - a\,z)\,\vec{e}_y + (-b\,x + a\,y)\,\vec{e}_z,$$

kjer so a, b in c zelo majhne konstante.

Pokaži, da vektor pomikov opisuje rotacijo telesa. Poišči tudi vektor rotacije $\vec{\omega}_0$.
Rešitev: Vektor rotacije $\vec{\omega}_0 = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y + c\,\vec{e}_z$

NALOGA 22: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\vec{u} = \frac{2\cdot 10^{-3}\,y}{\sqrt{3}}\,\vec{e}_z.$$

Poišči normalo ravnine, v kateri ni normalnih deformacij.
Rešitev: Normali ravnin, v kateri ni normalnih deformacij sta $\vec{e}_n = \alpha\,\vec{e}_x + \beta\,\vec{e}_y, \alpha^2 + \beta^2 = 1$ in $\vec{e}_n = \alpha\,\vec{e}_x + \beta\,\vec{e}_z, \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

NALOGA 23: V kartezijskem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ in koordinatami x, y, z je podan kvader z oglišči $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(0,b,0)$, $D(a,b,0)$, $E(0,0,c)$, $G(a,0,c)$, $F(0,b,c)$, $H(a,b,c)$. Velja $a : b : c = 2 : 3 : 5$. Pri deformaciji ostanejo dolžine stranic $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ in $\overline{AE}$ nespremenjene, pravi kot BAC se poveča na $90°00'03"$, pravi kot CAE se zmanjša na $89°59'54"$, pravi kot EAB pa preide na $89°59'56"$.
Določi specifično spremembo dolžine diagonale $\overline{AH}$.
Rešitev: Specifična sprememba dolžine diagonale $\varepsilon_{\xi\xi} = 0.143\cdot 10^{-4}$.