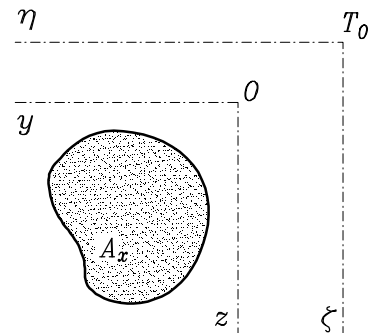


5. VAJA IZ TRDNOSTI

(geometrijske karakteristike likov)

NALOGA 1: Izpelji formulo za vztrajnostni tenzor $[J]'$ za poljuben lik, če koordinatni sistem (y, z) vzporedno premaknemo v točko $T_0(y_0, z_0)$, tj. $(y, z) \mapsto (\eta, \zeta) = (y, z) - (y_0, z_0)$.

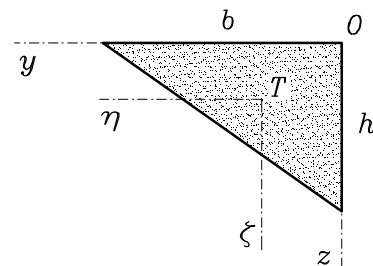


Podatki: $A_x, T_0(y_0, z_0)$

Rešitev:

$$\begin{aligned} I_{\eta\eta} &= I_{yy} - 2z_0 S_y + z_0^2 A_x \\ I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\eta} &= I_{yz} + y_0 S_y + z_0 S_z - y_0 z_0 A_x \\ I_{\zeta\zeta} &= I_{zz} - 2y_0 S_z + y_0^2 A_x \end{aligned}$$

NALOGA 2: Izračunaj komponente vztrajnostnega tenzorja $[J]$ za prikazani trikotnik glede na koordinatni sistem (y, z) . Izračunaj vztrajnostni tenzor $[J]_T$, če koordinatni sistem premaknemo v težišče lika.

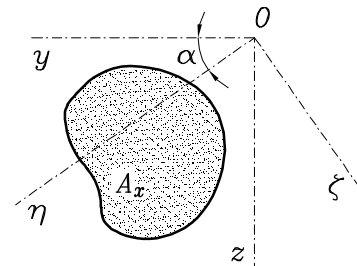


Podatki: b, h

Rešitev:

$$[J] = \frac{A_x}{12} \begin{bmatrix} 2h^2 & -bh \\ -bh & 2b^2 \end{bmatrix}, \quad [J]_T = \frac{A_x}{18} \begin{bmatrix} h^2 & A_x \\ A_x & b^2 \end{bmatrix}$$

NALOGA 3: Izpelji formulo za vztrajnostni tenzor $[J]'$ pri rotaciji koordinatnega sistema $(y, z) \mapsto (\eta, \zeta)$.



Podatki: A_x, α

Rešitev:

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

$$[J]' = [Q]^T \cdot [J] \cdot [Q]$$

$$I_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha$$

$$I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

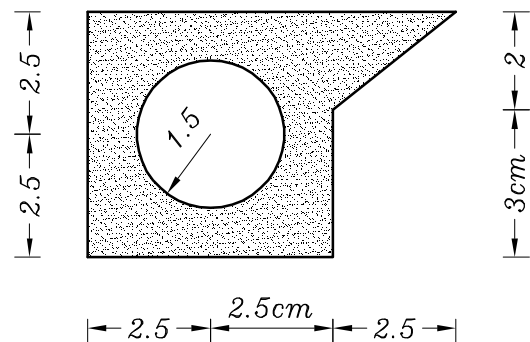
NALOGA 4: Pri katerem kotu je vztrajnostni moment $I_{\eta\eta}(\alpha)$ ekstremen? Izračunaj glavni vztrajnostni tenzor $[\widehat{J}]$.

Podatki: \mathcal{A}_x

Rešitev:

$$\tan 2\hat{\alpha} = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}, \quad [\widehat{J}] = \begin{bmatrix} I_{\eta\eta}(\hat{\alpha}) & 0 \\ 0 & I_{\zeta\zeta}(\hat{\alpha}) \end{bmatrix}$$

NALOGA 5: Izračunaj deviacijski vztrajnostni moment I_{yz} za lik \mathcal{A}_x , ki je simetričen glede na koordinatno os z .

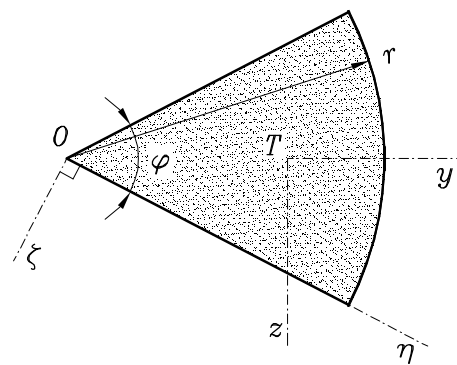


NALOGA 6: Izračunaj komponente glavnega vztrajnostnega tenzorja $[\widehat{J}]$ ter pripadajoče glavne vztrajnostne osi glede na težišče podanega lika.

Podatki:

Rešitev: $\hat{\alpha} = 28.912^\circ$, $[\widehat{J}] = \begin{bmatrix} 48.442 & 0 \\ 0 & 80.951 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$

NALOGA 7: Izračunaj koordinate težišča $T(\eta_T, \zeta_T)$ in komponente glavnega vztrajnostnega tenzorja $[\widehat{J}]_T$ v težišču prikazanega lika.

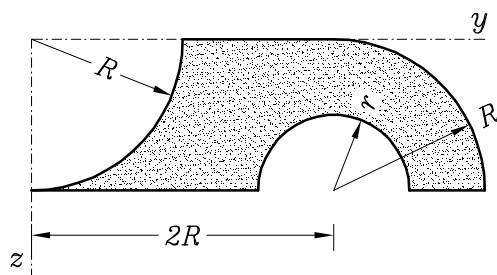


Podatki: r, φ

Rešitev: $T(\eta_T, \zeta_T) = \frac{2r}{3\varphi}(\sin \varphi, \cos \varphi - 1)$

$$[\widehat{J}]_T = \frac{r^4}{8} \begin{bmatrix} \varphi - \sin \varphi & 0 \\ 0 & \varphi + \sin \varphi + \frac{32(\cos \varphi - 1)}{9\varphi} \end{bmatrix}$$

NALOGA 8: Za prikazani lik izračunaj koordinate težišča $T(y_T, z_T)$ in komponente glavnega vztrajnostnega tenzorja $[\widehat{J}]_T$ v težišču.

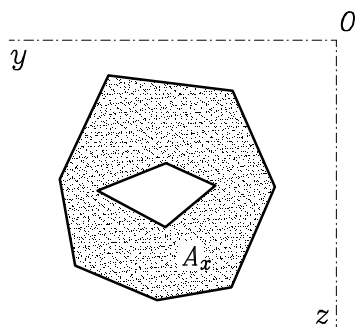


Podatki: $r, R = 2r$

Rešitev: $T(y_T, z_T) = (3.4659r, 1.0071r)$

$$\widehat{[J]}_T = \begin{bmatrix} 2.0053r^4 & 0 \\ 0 & 11.5389r^4 \end{bmatrix}$$

NALOGA 9: Izpelji izraze za ploščino A_x , statična momenta S_y, S_z in komponente vztrajnostnega tenzorja $[J]$ v koordinatnem sistemu (y, z) za poljuben poligonalen lik.



Podatki: $T_i(y_i, z_i), i = 1, \dots, n$

Rešitev: $(y_{n+1}, z_{n+1}) = (y_1, z_1)$

$$A_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} + y_i)(z_{i+1} - z_i)$$

$$S_y = -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2)$$

$$S_z = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_i)(y_{i+1}^2 + y_{i+1}y_i + y_i^2)$$

$$I_{yy} = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^3 + z_{i+1}^2z_i + z_{i+1}z_i^2 + z_i^3)$$

$$I_{yz} = -\frac{1}{24} \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_i)(z_{i+1}(3y_{i+1}^2 + 2y_{i+1}y_i + y_i^2) + z_i(y_{i+1}^2 + 2y_{i+1}y_i + 3y_i^2))$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (z_{i+1} - z_i)(y_{i+1}^3 + y_{i+1}^2y_i + y_{i+1}y_i^2 + y_i^3)$$