

6. VAJA IZ TRDNOSTI

(normalne napetosti v nosilcu, jedro prereza,
strižne napetosti v nosilcu)

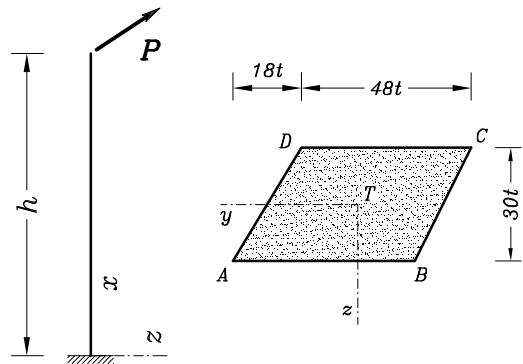
NALOGA 1: Izpelji izraz za normalno napetost σ_{xx} v sestavljenem prečnem prerezu. Vsi materiali prečnega prereza se enako obnašajo v tlaku in nategu.

Podatki: E, \tilde{A}_x

Rešitev:

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{N_x}{\tilde{A}_x} - (y - y_T) \frac{M_z^T \tilde{I}_{yy}^T - M_y^T \tilde{I}_{yz}^T}{\tilde{I}_{yy}^T \tilde{I}_{zz}^T - (\tilde{I}_{yz}^T)^2} + (z - z_T) \frac{M_y^T \tilde{I}_{zz}^T - M_z^T \tilde{I}_{yz}^T}{\tilde{I}_{yy}^T \tilde{I}_{zz}^T - (\tilde{I}_{yz}^T)^2} \right)$$

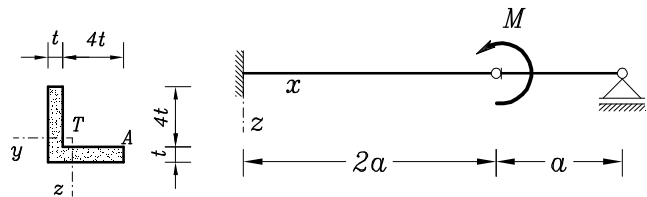
NALOGA 2: Kamniti steber višine h in specifične teže γ je v zgornjem prečnem prerezu obremenjen s silo P v težišču T paralelograma $ABCD$. Izračunaj normalne napetosti σ_{xx} v podpori.



Podatki: $h = 12 \text{ m}$, $t = 10 \text{ cm}$, $\gamma = 22 \text{ kN/m}^3$, $\alpha = \angle DAB$, $P = (-1100, 200 \cos \alpha, 200 \sin \alpha) \text{ kN}$

Rešitev: $\sigma_{xx}(A) = -626.22 \text{ kN/m}^2$

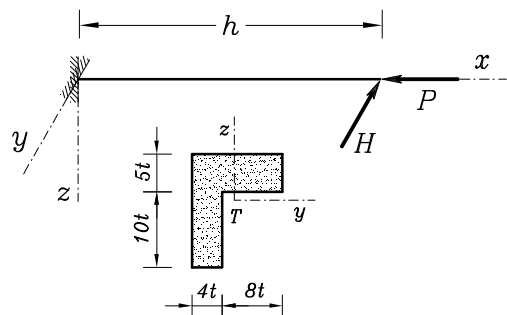
NALOGA 3: Za prikazani Gerberjev nosilec izračunaj normalno napetost $\sigma_{xx}(A)$ v vpeti podpori.



Podatki: $a, t = 2 \text{ cm}$, $M = 2 \text{ kNm}$

Rešitev: $\sigma_{xx}(A) = 4.89 \text{ kN/cm}^2$

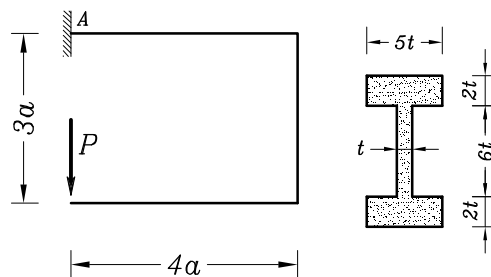
NALOGA 4: Določi silo H tako, da v prečnem prerezu vzdolž prikazane konzole ne bo nateznih napetosti.



Podatki: $P = 400 \text{ kN}$, $h = 4 \text{ m}$, $t = 1 \text{ cm}$

Rešitev: $H \leq 1.178 \text{ kN}$

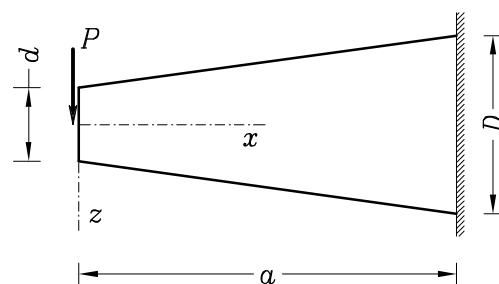
NALOGA 5: Jekleni nosilec I-prereza z lomljeno osjo je v prostem krajišču obtežen s točkovno silo P , kot kaže slika. Izračunaj dimenzijo t tako, da bodo normalne napetosti $|\sigma_{xx}| \leq \sigma_{\max}$.



Podatki: $P = 19 \text{ kN}$, $a = 50 \text{ cm}$, $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{\max} = 16.5 \text{ kN/cm}^2$ (jeklo)

Rešitev: $t \geq 15.05 \text{ mm}$

NALOGA 6: Nosilec oblike prisekanega stožca je obremenjen s silo P , kot kaže slika. Ob pogoju, da so normalne napetosti $|\sigma_{xx}| \leq \sigma_{\max}$, določi razmerje D/d tako, da bo masa nosilca najmanjša. Izračunaj tudi V_{\min} in razmerje V_{\min}/V_{valj} za valj $D = d$.



Podatki: P , a , σ_{\max}

Rešitev: $\frac{D}{d} = \frac{15 + \sqrt{105}}{3 + \sqrt{105}}$, $\frac{V_{\min}}{V_{\text{valj}}} = \frac{3}{5}$

NALOGA 7: Pravokotni nosilec je izdelan iz zlitine, ki jo opišemo s konstitucijskim zakonom

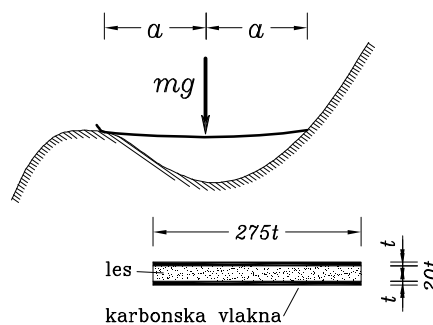
$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_0 \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right|^{\frac{1}{n}} \text{sign}(\varepsilon) \quad (n \geq 1).$$

če je nosilec obremenjen samo z upogibnim momentom, pokaži, da je maksimalna napetost

$$\sigma_{\max} = \frac{1 + 2n}{3n} \frac{hM_y}{2I_{yy}}.$$

Podatki: n , M_y , b , h

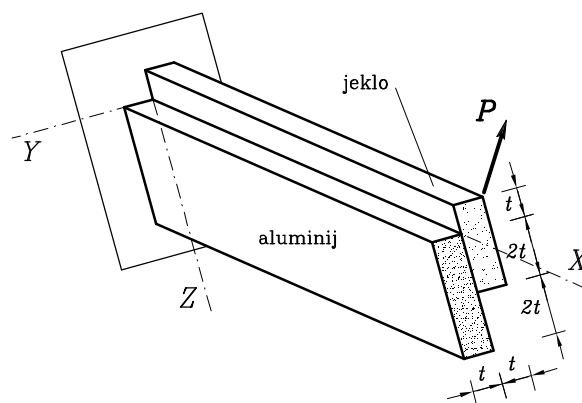
NALOGA 8: Snowboard dolžine $2a$ sestavljenega prečnega prereza je med dvema kucljema obtežen s smučarjem mase m . Izračunaj razmerje med maksimalnima normalnima napetostima med nosilnimi karbonskimi vlakni in polnilnim lesom.



Podatki: $2a = 1620 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$, $m = 95 \text{ kg}$, $E_c = 250 \text{ GPa}$ (karbonska vlakna), $E_w = 13 \text{ GPa}$ (les)

Rešitev: $\sigma_{xx}^c / \sigma_{xx}^w = 21.15$

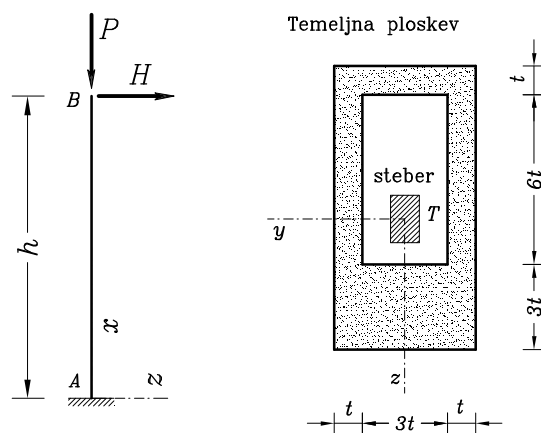
NALOGA 9: Izračunaj normalne napetosti v podpori za prikazani nosilec dolžine a sestavljenega prečnega prereza.



Podatki: $t = 5 \text{ cm}$, $a = 3 \text{ m}$, $\mathbf{P} = (-40, 30, 50) \text{ kN}$, $E_1 = 7000 \text{ kN/cm}^2$ (aluminij), $E_2 = 20000 \text{ kN/cm}^2$ (jeklo)

Rešitev: $\min(\sigma_{xx}) = -27.46 \text{ kN/cm}^2$ (aluminij), $\max(\sigma_{xx}) = 52.72 \text{ kN/cm}^2$ (jeklo)

NALOGA 10: Pravokotni steber AB višine h (skupaj s temeljem) je na vrhu obremenjen s tlačno silo P in z vodoravno silo H . Steber je v točki A vpet v temelj škatlastega prereza (glej sliko) tako, da se težišča stebra in temeljne ploskve pokrivata. Določi višino stebra h tako, da ne bodo prekoračene napetosti v zemljini $-\sigma_{\max} < \sigma_{xx} \leq 0$ (zemljina prevzame le tlačne napetosti!) in vsaj polovica temeljne ploskve je tlačena.



Podatki: $t = 30 \text{ cm}$, $P = 500 \text{ kN}$, $H = 100 \text{ kN}$, $\sigma_{\max} = 350 \text{ kN/m}^2$

Rešitev: $0 \leq h < 4.27 \text{ m}$

NALOGA 11: Za konveksni enostavno povezani lik \mathcal{D} z gladkim robom

$$\partial \mathcal{D} = \{(y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid y, z \in C^\infty, t \in \mathbb{R}\}$$

izpelji enačbo roba jedra \mathcal{J} danega lika. Rešitev posploši za lik z odsekoma gladkim robom $\partial \mathcal{D}$, za večkrat povezan lik \mathcal{D} in za nekonveksen lik \mathcal{D} .

Podatki: \mathcal{D}

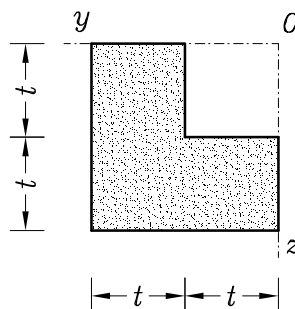
Rešitev: V prvem primeru je $\partial \mathcal{J} = \left\{ (\eta(t), \zeta(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta = -i_z^2 \frac{\dot{z}}{y\dot{z} - \dot{y}z}, \zeta = i_y^2 \frac{\dot{y}}{y\dot{z} - \dot{y}z}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

NALOGA 12: Izračunaj jedro \mathcal{J} pravokotnika $b \times h$.

Podatki: b, h

Rešitev: Romb z diagonalama $\frac{b}{3}, \frac{h}{3}$.

NALOGA 13: Izračunaj koordinate oglišč jedra \mathcal{J} podanega lika.



Podatki: t

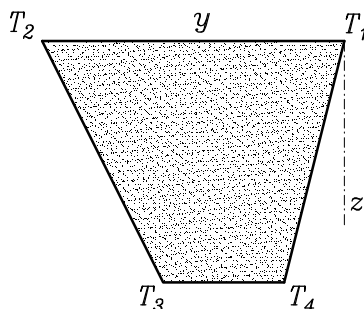
Rešitev: Oglišča jedra lika v koordinatnem sistemu (y, z) so: $O_1(\frac{15}{14}t, \frac{10}{7}t)$, $O_2(\frac{4}{5}t, \frac{13}{10}t)$, $O_3(\frac{13}{10}t, \frac{4}{5}t)$, $O_4(\frac{10}{7}t, \frac{15}{14}t)$, $O_5(\frac{21}{16}t, \frac{21}{16}t)$.

NALOGA 14: Izračunaj jedro \mathcal{J} elipse $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

Podatki: a, b

Rešitev: $\frac{\eta^2}{(\frac{a}{4})^2} + \frac{\zeta^2}{(\frac{b}{4})^2} \leq 1$

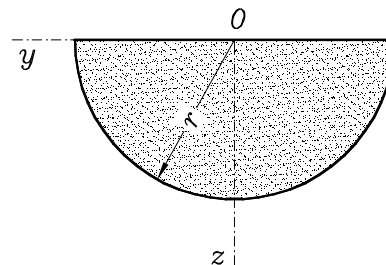
NALOGA 15: Izračunaj koordinate oglišč jedra trapeza z oglišči $T_1(0,0)$, $T_2(5t,0)$, $T_3(3t,4t)$ in $T_4(t,4t)$.



Podatki: t

Rešitev: Oglišča jedra trapeza v koordinatnem sistemu (y, z) so: $O_1(\frac{79}{36}t, \frac{22}{9}t)$, $O_2(\frac{5}{3}t, \frac{19}{13}t)$, $O_3(\frac{113}{48}t, \frac{7}{6}t)$, $O_4(\frac{463}{156}t, \frac{19}{13}t)$.

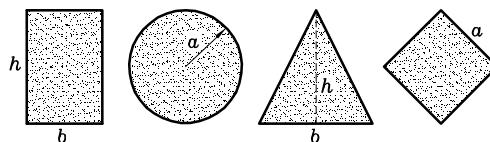
NALOGA 16: Izračunaj jedro polkroga z radijem r .



Podatki: r

Rešitev: Del jedra je elipsa $(\frac{\eta}{a} + \frac{4}{3\pi})^2 + (\frac{\zeta}{b})^2 \leq 1$, kjer sta $a = \frac{r}{4} \frac{9\pi^2 - 64}{9\pi^2 - 16}$, $b = \frac{r}{4} \frac{3\pi}{\sqrt{9\pi^2 - 16}}$.

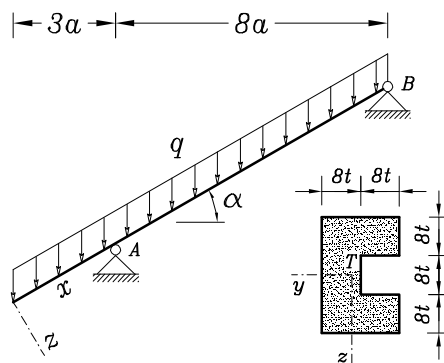
NALOGA 17: Za prikazane like izračunaj strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} zaradi prečne sile N_z . Izračunaj tudi pripadajoče strižne oblikovne koeficiente κ_z .



Podatki: a, b, h

Rešitev: (i) $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{xz} = \frac{3N_z}{2Ax} (1 - 4\frac{z^2}{h^2})$, $\kappa_z = \frac{6}{5}$; (iii) $\sigma_{xy} = 3\frac{N_z}{Ax} \frac{y}{b} (1 - \frac{2y}{b}) \frac{b}{h}$ ($y \geq 0$), $\sigma_{xz} = \frac{2N_z}{3Ax} (2 + \frac{3z}{h}) (1 - \frac{3z}{h})$, $\kappa_z = \frac{6}{5}$

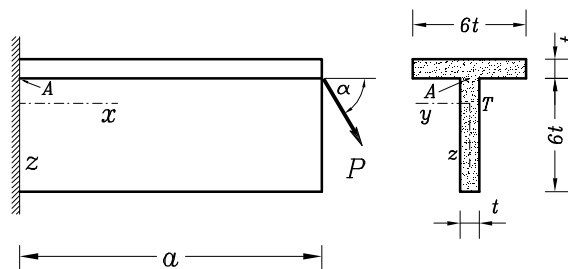
NALOGA 18: V leseni tram je bočno zarezan žleb dimenzij $8t \times 8t$ cm, kot kaže skica. V navpični enakomerni zvezni obtežbi q , ki je definirana na enoto dolžine nosilca, je če upoštevana tudi njegova lastna teža. Določi in skiciraj: (i) potek notranjih sil ter označi prereza z maksimalnim upogibnim momentom in maksimalno prečno silo, (ii) potek normalnih napetosti v prerezu z maksimalnim upogibnim momentom ter potek strižnih napetosti na mestu maksimalne prečne sile.



Podatki: $q = 6 \text{ kN/m}$, $a = 0.5 \text{ m}$, $t = 1 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$

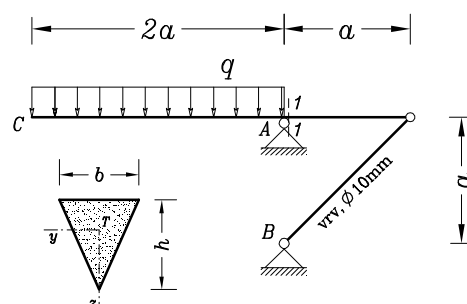
Rešitev: $\max M_y = 10.23 \text{ kNm}$, $\max N_z = 13.69 \text{ kN}$, $\max \sigma_{xx} = 0.682 \text{ kN/cm}^2$, $\max \sigma_{xz} = 0.103 \text{ kN/cm}^2$

NALOGA 19: Za prikazani konzolni nosilec dolžine a , ki je obremenjen s silo P pod kotom α , izračunaj normalne in obe strižni napetosti v točki vpetja. V točki A izračunaj tudi glavni normalni in strižni napetosti.



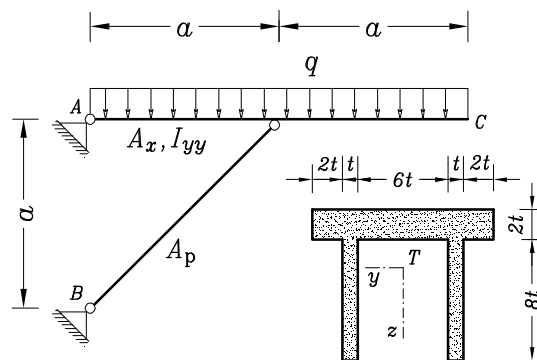
Podatki: $a = 1.5 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, $P = 10 \text{ kN}$, $t = 25 \text{ mm}$
Rešitev: $\sigma_{11}(A) = 20.05 \text{ MPa}$, $\sigma_{22}(A) = -0.35 \text{ MPa}$

NALOGA 20: Za prikazani ravninski okvir izračunaj: (i) diagrame notranjih sil, (ii) spremembo dolžine vrvi, (iii) in nariši normalne σ_{xx} in strižne napetosti σ_{xz} v prerezu 1-1, (iv) s Castiglianovim izrekom vertikalni pomik v točki C (upoštevaj tudi vpliv osnih sil na deformiranje).



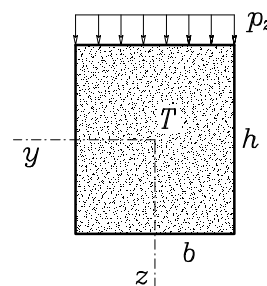
Podatki: $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 20 \text{ cm}$, $h = 40 \text{ cm}$, $q = 15 \text{ kN/m}$
Rešitev: $\Delta \ell_V = 1.53 \text{ cm}$, $\max \sigma_{xx}^{1-1} = 4.35 \text{ kN/cm}^2$, $\max \sigma_{xz}^{1-1} = 0.225 \text{ kN/cm}^2$, $w_C = 5.45 \text{ cm}$

NALOGA 21: V vmesni fazi gradnje je polovični mostni nosilec AC podprt in obtežen kot kaže slika. Izračunaj: (i) strižni oblikovni koeficient κ_z za prikazani prečni prerez, (ii) strižni oblikovni koeficient $\bar{\kappa}_z$, če strižne napetosti prevzameta le stojini, (iii) navpični pomik in zasuk v točki C. Upoštevaj vpliv osnih in prečnih sil na deformiranje.



Podatki: $E = 10000 \text{ kN/cm}^2$, $A_p = 50 \text{ dm}^2$, $q = 40 \text{ kN/m}$, $\nu = 0.3$, $a = 8 \text{ m}$, $t = 10 \text{ cm}$
Rešitev: (i) $\kappa_z = 2.099$, (ii) $\bar{\kappa}_z = 2$, (iii) $w_C = 1.66 \text{ cm}$, $\varphi_C = -0.118^\circ$

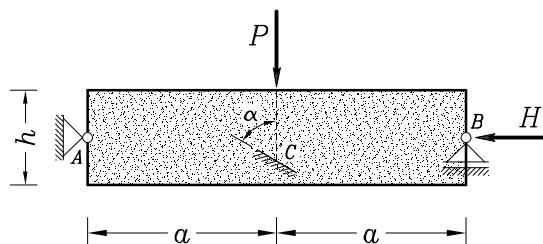
NALOGA 22: Izračunaj normalno napetost σ_{zz} za prostoležeči nosilec dolžine a obremenjen s porazdeljeno ploskovno obtečbo p_z na zgornjem robu pravokotnega prečnega prereza $b \times h$. Izračunaj tudi razmerje med normalnima napetostima $\max |\sigma_{zz}|$ in $\max |\sigma_{xx}|$.



Podatki: b, h, p_z

Rešitev: $\sigma_{zz}(z) = -\frac{p_z}{2} (4\zeta^3 - 3\zeta + 1), \quad \zeta = \frac{z}{h}; \quad \frac{\max|\sigma_{zz}|}{\max|\sigma_{xx}|} = \frac{4}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2$

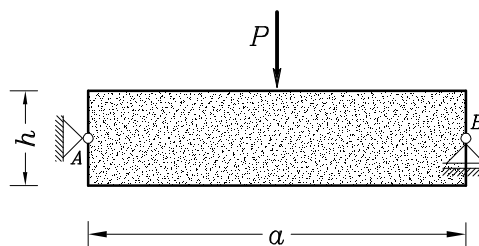
NALOGA 23: Izračunaj napetostni vektor $t(\mathbf{n})$ v točki $C(a, 0, \frac{h}{4})$ za prikazani prostoležeči nosilec dolžine $2a$ pravokotnega prečnega prereza $b \times h$. Določi območje na nosilcu, kjer so glavne normalne napetosti po absolutni vrednosti manjše od σ_0 , tj. $|\sigma_{11,22}| < \sigma_0$; ter območje, kjer so glavne strižne napetosti po absolutni vrednosti manjše od τ_0 , tj. $|\tau_{I,II}| < \tau_0$.



Podatki: $b = 15 \text{ cm}, h = 50 \text{ cm}, a = 2 \text{ m}, \alpha = 60^\circ, P = 600 \text{ kN}, H = 400 \text{ kN}, \sigma_0 = 4 \text{ kN/cm}^2, \tau_0 = 1 \text{ kN/cm}^2$

Rešitev: $t(\mathbf{n}) = 1.744 e_x + 0.225 e_z [\text{kN/cm}^2]$

NALOGA 24: Določi družino ortogonalnih trajektorij glavnih normalnih napetosti σ_{11} in σ_{22} za prikazani prostoležeči nosilec pravokotnega prečnega prereza $b \times h$, obremenjenega s koncentrirano silo P na sredini nosilca.



Podatki: $\alpha = \frac{h}{a} = \frac{1}{8}$

Rešitev: $\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{4\xi\zeta}{1-4\zeta^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4\xi\zeta}{1-4\zeta^2}\right)^2 + \alpha^2}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{h}$