Pomiki togega telesa

Koncept zvezne snovi

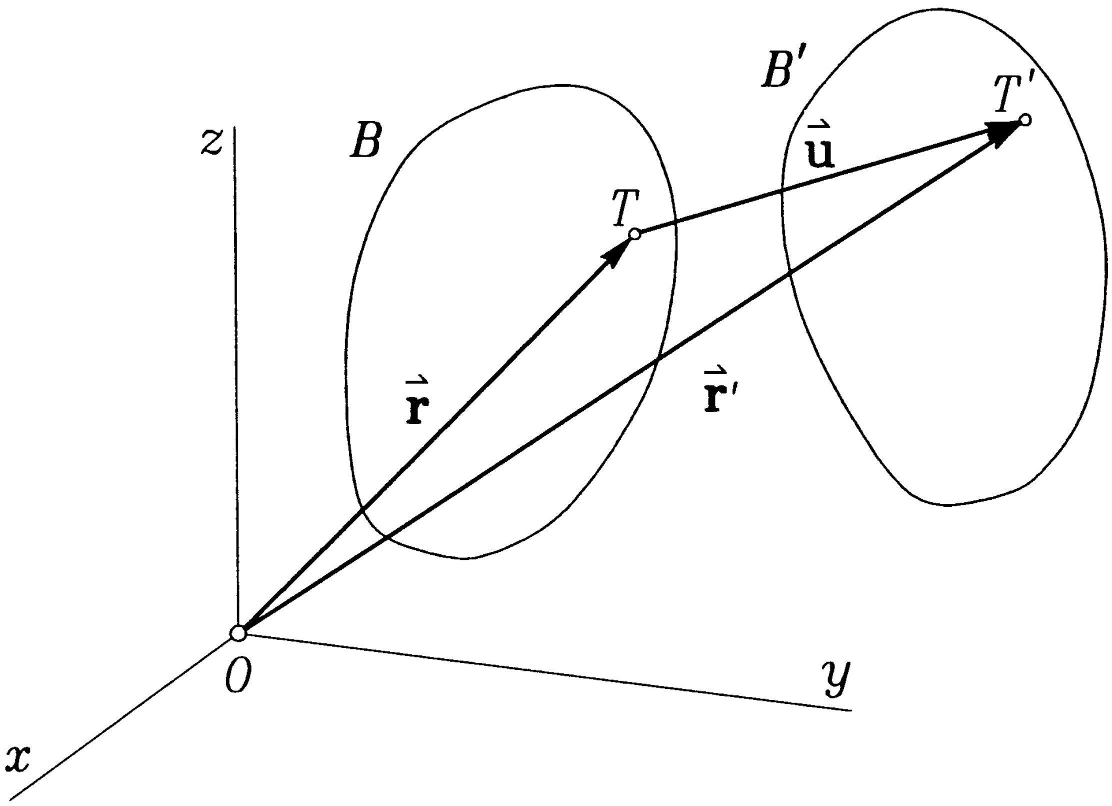
Privzamemo, da je snov enakomerno porazdeljena po prostornini, ki jo zavzema v prostoru, in da ima ta snov povprečne lastnosti množice mulekul, ki jo sestavljajo.

Model togega telesa

Togo telo služi kot matematični model za trdno telo, katerega dimenzije in oblika se med delovanjem zunanjih sil le malo spremenijo v primerjavi z razsežnostmi telesa.

Za togo telo velja, da se med delovanjem zunanjih sil lahko spreminja le njegova lega v prostoru, njegove dimenzije in oblika, kakor tudi medsebojne lege posameznih delcev pa ostanejo nespremenjene.

Pomiki togega telesa



Chaslesov izrek

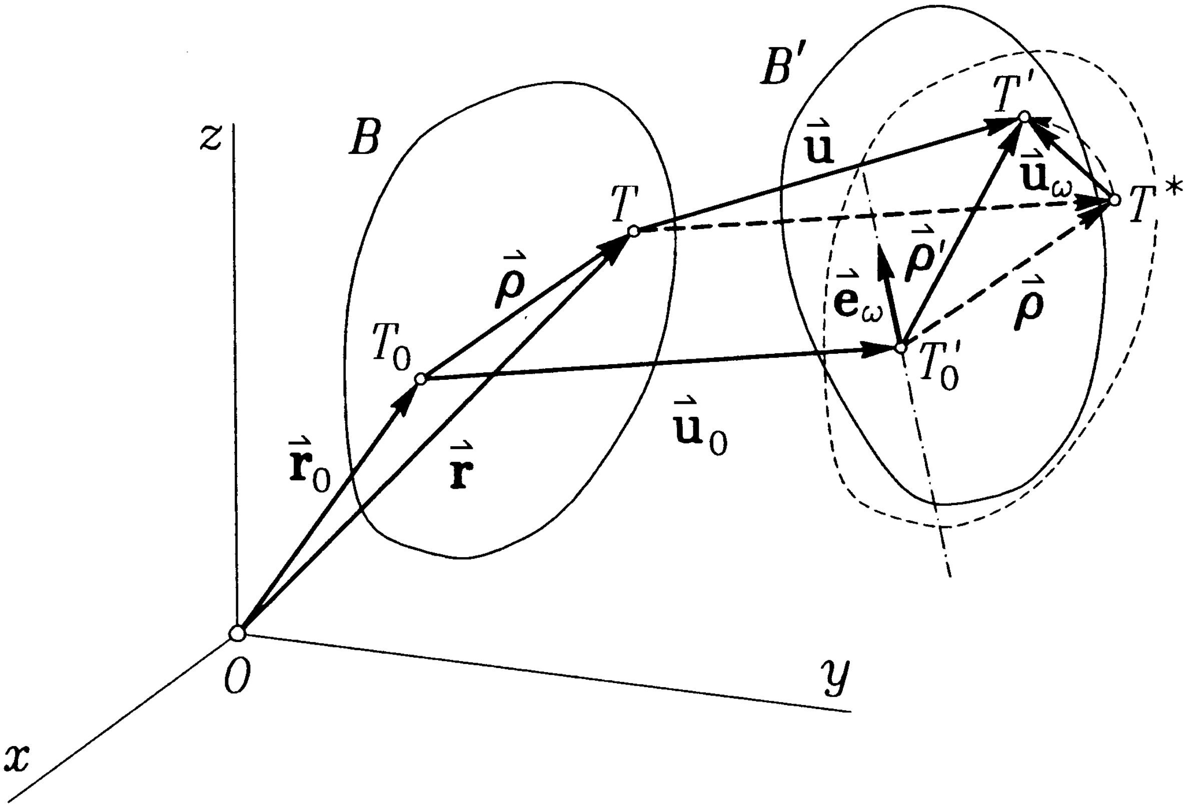
Premik togega telesa iz ene lege v drugo tudi v primeru najbolj splošnega gibanja lahko predstavimo takole:

Telo najprej vzporedno ali translatorno premaknemo tako, da so pomiki vseh delcev enaki pomiku $\vec{u}_0$ poljubno izbranega referenčnega delca, ki je v legi $\boldsymbol{B}$ določen s točko T_0.

Nato telo zasučemo okrog nepomične referenčne točke T_0' v novo lego.

Pomik poljubnega delca torej lahko zapišemo z enačbo $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_\omega$.

Pomiki togega telesa po Chaslesu

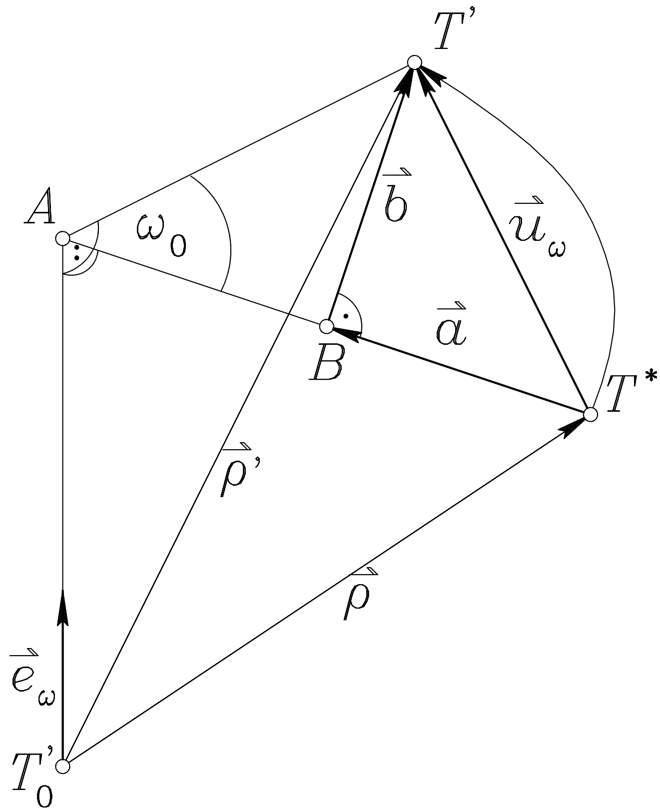


Del pomika zaradi zasuka togega telesa

Iz slike opazimo $\vec{u}_\omega = \vec{a} + \vec{b}$.
Pokažimo, da velja

$$\vec{a} = (1 - \cos(\omega_0))\,((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}).$$

$$\begin{aligned}
|\vec{T_0' A}| &= \vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho}, \\
\vec{T_0' A} &= (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\vec{e}_\omega, \\
\vec{T^* A} &= \vec{T_0' A} - \vec{\rho} = (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\vec{e}_\omega - \vec{\rho}, \\
|\vec{T^* A}| &= |\vec{T' A}|, \\
|\vec{B A}| &= |\vec{T^* A}|\,\cos(\omega_0), \\
\vec{B A} &= ((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\vec{e}_\omega - \vec{\rho})\,\cos(\omega_0), \\
\vec{a} &= \vec{T^* A} - \vec{B A}.
\end{aligned}$$

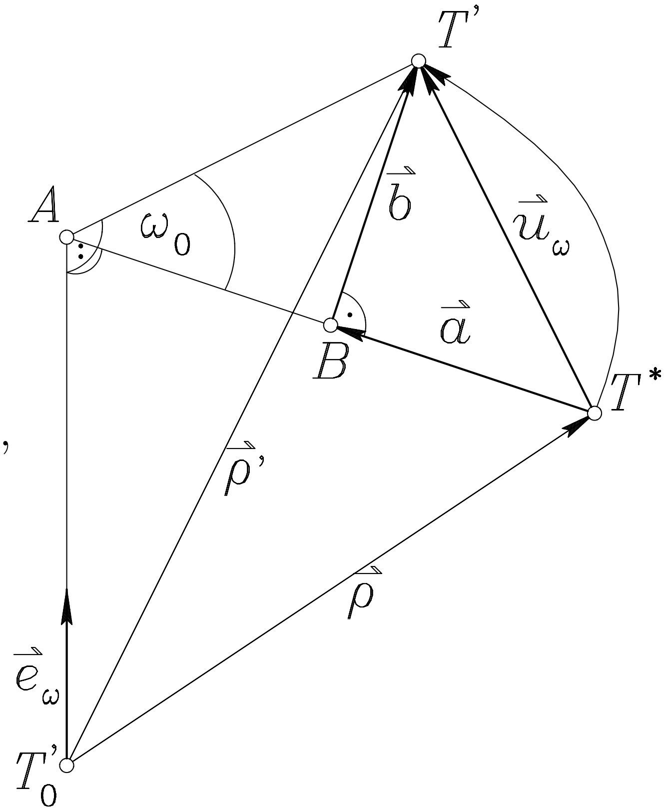


Pokažimo, da velja

$$\vec{b} = \sin(\omega_0)\, \vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

Smer je že prava. Še velikost. V ta namen upoštevamo enakosti:

$$\begin{aligned}
|\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho})| &= |\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}|, \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}), \\
\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}) &= \vec{e}_\omega\,(\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}, \\
\vec{T^* A} &= \vec{e}_\omega\,(\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}, \\
|\vec{T' A}| &= |\vec{T^* A}|, \\
|\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}| &= |\vec{T' A}|.
\end{aligned}$$



Združimo rezultate

$$\vec{u}_\omega = \vec{a} + \vec{b} = (1 - \cos(\omega_0))\,((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}) + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

Z upoštevanjem Lagrangeve identitete

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

in enačbe $\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_\omega = 1$ izpeljemo enakost

$$\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}) = (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - (\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_\omega)\,\vec{\rho} = (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}.$$

Z upoštevanjem te enakosti zapišemo pomike $\vec{u}_\omega$ z enačbo

$$\vec{u}_\omega = (1 - \cos(\omega_0))\,\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}) + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho},$$

od koder dobimo

$$\vec{\rho}\,' = \vec{\rho} + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho} + (1 - \cos(\omega_0))\,\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}).$$

Zapišimo vektorje še v izbrani bazi:

$$\vec{\rho} = \rho_x\vec{e}_x + \rho_y\vec{e}_y + \rho_z\vec{e}_z,\ \ \vec{\rho}\,' = \rho'_x\vec{e}_x + \rho'_y\vec{e}_y + \rho'_z\vec{e}_z,\ \ \vec{e}_\omega = e_{\omega x}\vec{e}_x + e_{\omega y}\vec{e}_y + e_{\omega z}\vec{e}_z.$$

Označimo z $\vec{d} = d_x\vec{e}_x + d_y\vec{e}_y + d_z\vec{e}_z$ vektorski produkt vektorjev $\vec{e}_\omega$ in $\vec{c} = c_x\vec{c}_x + c_z\vec{e}_y + c_z\vec{e}_z$. Kratek račun da

$$\vec{d} = \vec{e}_\omega \times \vec{c} = (e_{\omega y}c_z - e_{\omega z}c_y)\vec{e}_x + (e_{\omega z}c_x - e_{\omega x}c_z)\vec{e}_y + (e_{\omega x}c_y - e_{\omega y}c_x)\vec{e}_z.$$

Iz primerjave komponent odkrijemo zvezo

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -e_{\omega z} & e_{\omega y} \\ e_{\omega z} & 0 & -e_{\omega x} \\ -e_{\omega y} & e_{\omega x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix},$$

kjer $[N]$ označuje antisimetrično matriko smernih kosinusov vektorja $\vec{e}_\omega$.

Vektorsko množenje z vektorjem $\vec{e}_\omega$ lahko torej nadomestimo z delovanjem linearne preslikave N, v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) podane z matriko $[N]$. Konkretno

$$\vec{e}_\omega \times \vec{c} = N\,\vec{c}.$$

Enačbo

$$\vec{\rho}\,' = \vec{\rho} + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho} + (1 - \cos(\omega_0))\,\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho})$$

z upoštevanjem linearne preslikave N prepišemo kot

$$\begin{aligned} \vec{\rho}\,' &= I\,\vec{\rho} + \sin(\omega_0)N\,\vec{\rho} + (1 - \cos(\omega_0))N\,(N\,\vec{\rho}) \\ &= (I + \sin(\omega_0)N + (1 - \cos(\omega_0))N \circ N)\vec{\rho} \end{aligned}$$

ali po komponentah

$$\begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{bmatrix} = ([I] + \sin(\omega_0)[N] + (1 - \cos(\omega_0))[N]\,[N]) \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}$$

še krajše kot

$$\begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}, \quad [R] = [I] + \sin(\omega_0)[N] + (1 - \cos(\omega_0))[N]\,[N].$$

V zadnji enačbi matrika $[R]$ označuje rotacijsko matriko ali matriko rotacij.

Preveri sledeče lastnosti matrike $[R]$

- $\det([R]) = 1$,
- $[R]^T[R] = [R][R]^T = [I]$,
- matrika $[R]$ ima samo eno realno lastno vrednost in ta je enaka 1,

z uporabo pomožnih rezultatov (A_{ij} je število v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike $[A]$)

- $e_{\omega k}\, e_{\omega k} = 1$, (uporabimo dogovor o seštevanju)
- $N_{ij} = -e_{ijk}\, e_{\omega k}$, (uporabimo dogovor o seštevanju)
- $[M] = [N]N]$, $M_{ij} = e_{\omega i}\, e_{\omega j} - \delta_{ij}$,
- $[N]^T = -[N]$,
- $[N][N][N] = -[N]$,
- $[N][N][N][N] = -[N][N]$.

Dokaži tudi veljavnost pomožnih rezultatov.

Pomiki togega telesa z upoštevanjem majhnih zasukov

Pri poljubnih zasukih velja

$$\vec{u}_\omega = (1 - \cos(\omega_0))\,((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}) + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

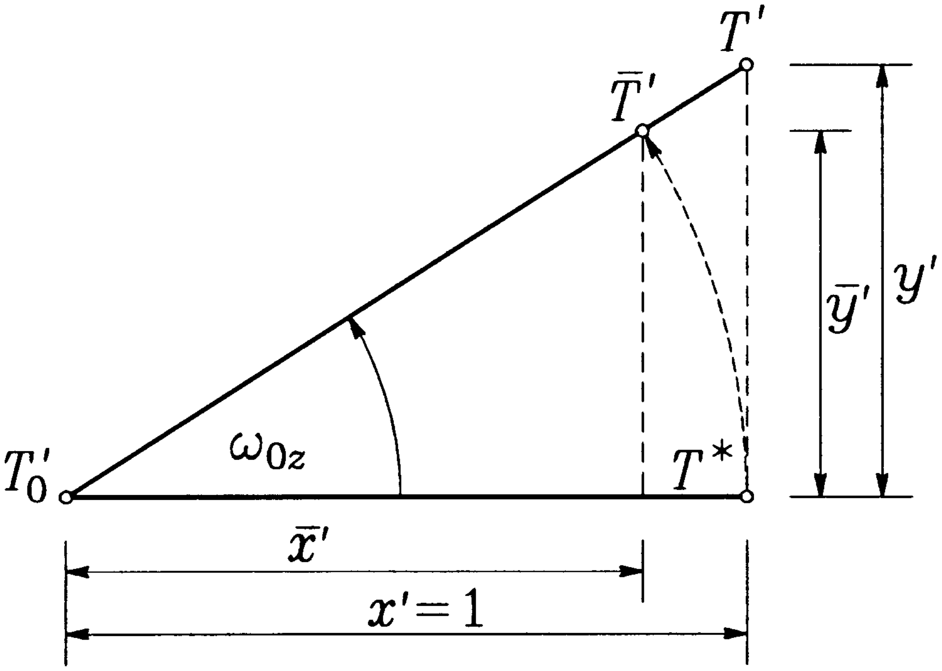
Če so zasuki majhni, je $\cos(\omega_0)) \approx 1$ in $\sin(\omega_0) \approx \omega_0$.
Zato lahko pišemo

$$\vec{u}_\omega \approx \omega_0\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

Rezultate združimo v poenostavljeno Rodriguesovo enačbo

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \omega_0\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

Računski primer



Napaka

ω_{0z}	0.01	0.05	0.10	0.20	0.50	1.00
	0.57^o	2.86^o	5.73^o	11.45^o	28.65^o	57.30^o
x'	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$\bar{x}'$	1.0000	0.9988	0.9950	0.9801	0.8776	0.5403
napaka %	0.0	0.1	0.5	2.0	14.0	85.1
y'	0.0100	0.0500	0.1000	0.2000	0.5000	1.0000
$\bar{y}'$	0.0100	0.0500	0.0998	0.1987	0.4794	0.8415
napaka %	0.0	0.0	0.2	0.7	4.3	18.8

Zaključek

Rezultati kažejo, da pri večini primerov praktične statike, kjer so pričakovani zasuki manjši od 0.1 rad ($5.73°$) pri določanju pomikov s poenostavljeno Rodriguesovo enačbo ne naredimo omembe vredne napake. Pri omenjeni vrednosti zasuka, znaša napaka pri “vodoravnem” pomiku 0.5%, pri “navpičnem” pa le 0.2%.

Napake, ki nastanejo vsled nepoznavanja dejanske velikosti obtežbe in dejanske nosilnosti materiala, običajno krepko presegajo omenjeno napako.

Viri

(1) M. Stanek, G. Turk, *Statika I*, FGG, Ljubljana, (1996).
(2) S. Srpčič, *Mehanika trdnih teles*, FGG, Ljubljana, (2002).
(3) S.P. Timoshenko, D.H. Young, *Theory of Structures*, McGraw-Hill, New York (1965).