# Pomiki togega telesa

## Koncept zvezne snovi

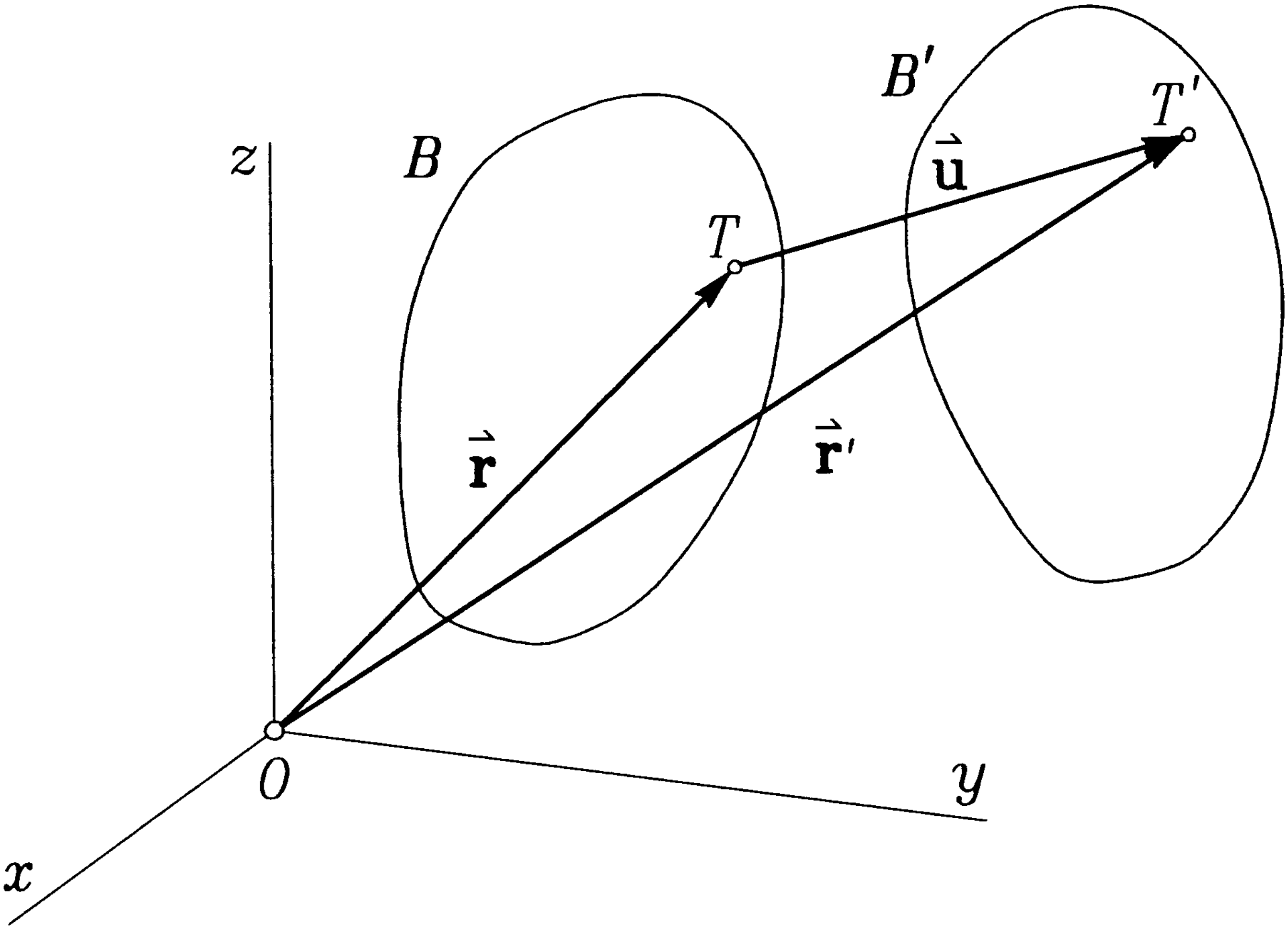
Privzamemo, da je snov enakomerno porazdeljena po prostornini, ki jo zavzema v prostoru, in da ima ta snov povprečne lastnosti množice mulekul, ki jo sestavljajo.

## Model togega telesa

Togo telo služi kot matematični model za trdno telo, katerega dimenzije in oblika se med delovanjem zunanjih sil le malo spremenijo v primerjavi z razsežnostmi telesa.

Za togo telo velja, da se med delovanjem zunanjih sil lahko spreminja le njegova lega v prostoru, njegove dimenzije in oblika, kakor tudi medsebojne lege posameznih delcev pa ostanejo nespremenjene.

# Pomiki togega telesa



# Chaslesov izrek

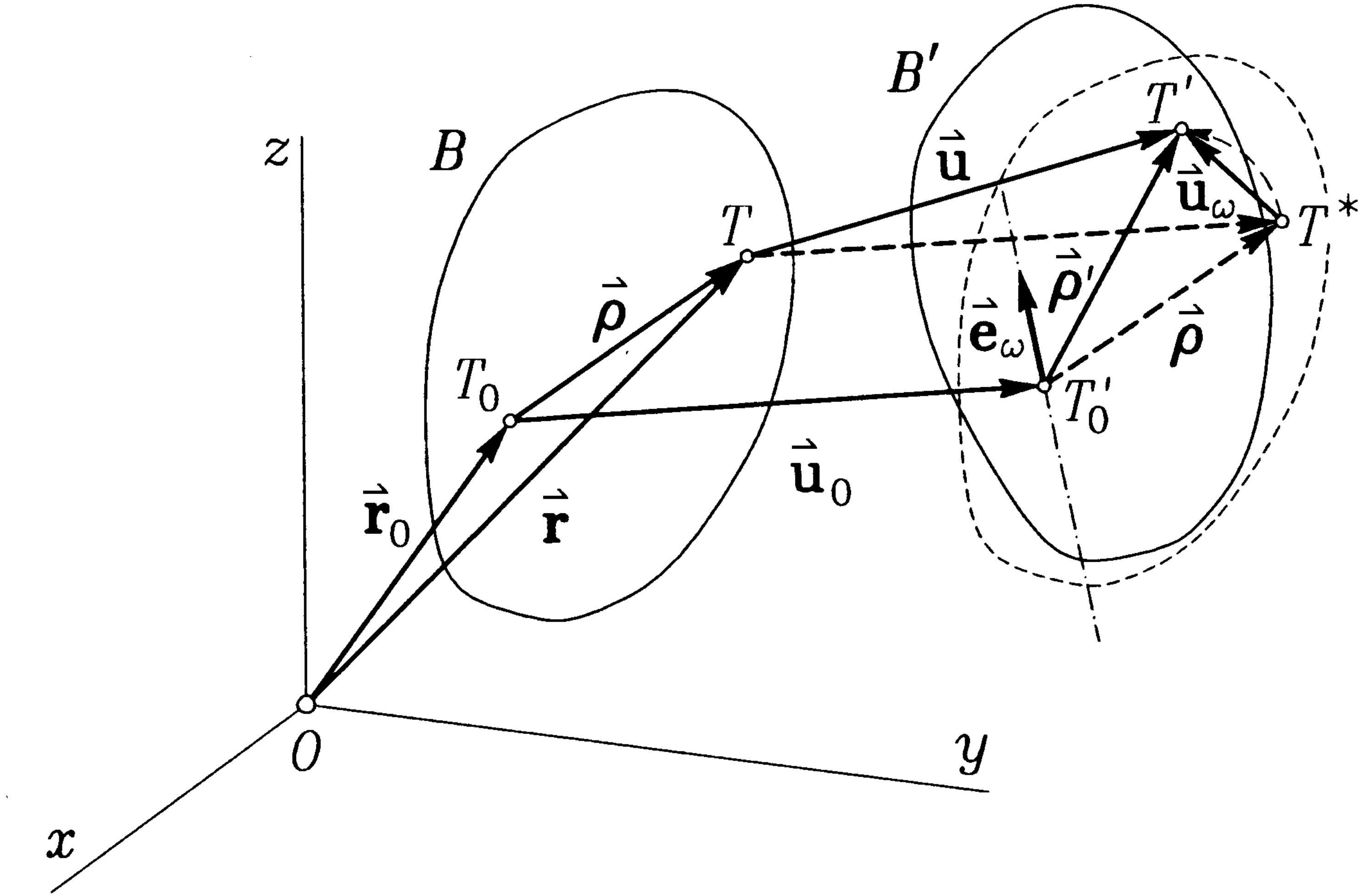
Premik togega telesa iz ene lege v drugo tudi v primeru najbolj splošnega gibanja lahko predstavimo takole:

Telo najprej vzporedno ali translatorno premaknemo tako, da so pomiki vseh delcev enaki pomiku $\vec{u}_0$ poljubno izbranega referenčnega delca, ki je v legi $\boldsymbol{B}$ določen s točko $T_0$.

Nato telo zasučemo okrog nepomične referenčne točke $T_0'$ v novo lego.

Pomik poljubnega delca torej lahko zapišemo z enačbo $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_\omega$.

# Pomiki togega telesa po Chaslesu



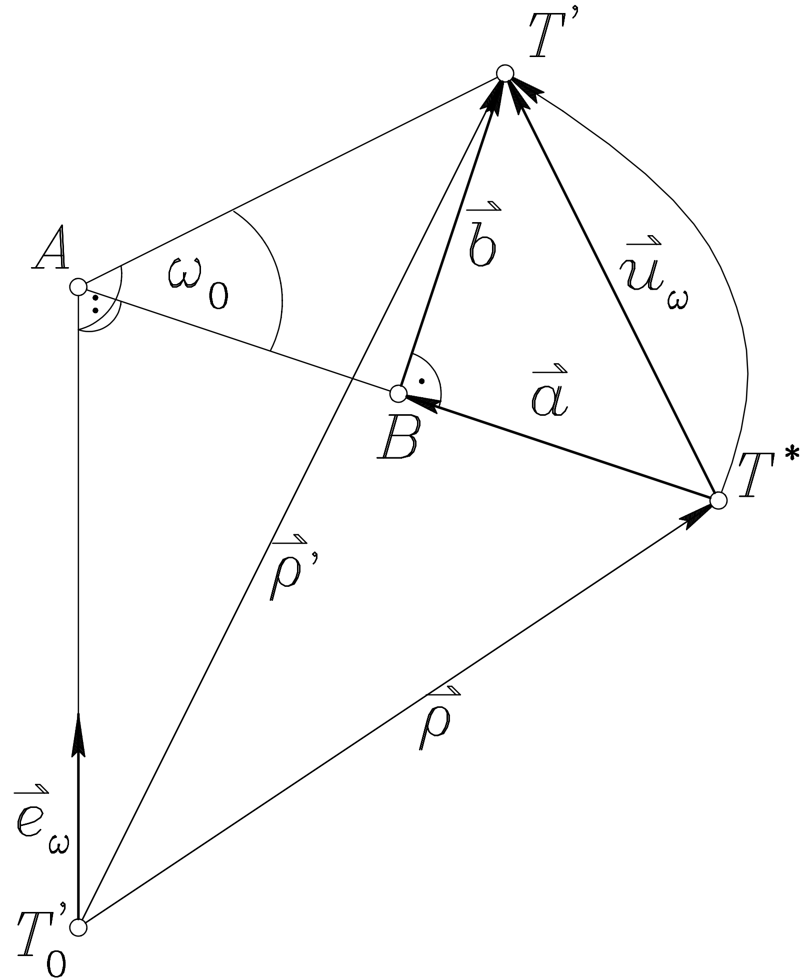
# Del pomika zaradi zasuka togega telesa

Iz slike opazimo $\vec{u}_\omega = \vec{a} + \vec{b}$.

Pokažimo, da velja

$$\vec{a} = (1 - \cos(\omega_0))\,((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}).$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{T_0' A}| &= \vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho}, \\
\overrightarrow{T_0' A} &= (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\vec{e}_\omega, \\
\overrightarrow{T^* A} &= \overrightarrow{T_0' A} - \vec{\rho} = (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\vec{e}_\omega - \vec{\rho}, \\
|\overrightarrow{T^* A}| &= |\overrightarrow{T' A}|, \\
|\overrightarrow{B A}| &= |\overrightarrow{T^* A}| \cos(\omega_0), \\
\overrightarrow{B A} &= ((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\vec{e}_\omega - \vec{\rho}) \cos(\omega_0), \\
\vec{a} &= \overrightarrow{T^* A} - \overrightarrow{B A}.
\end{aligned}$$

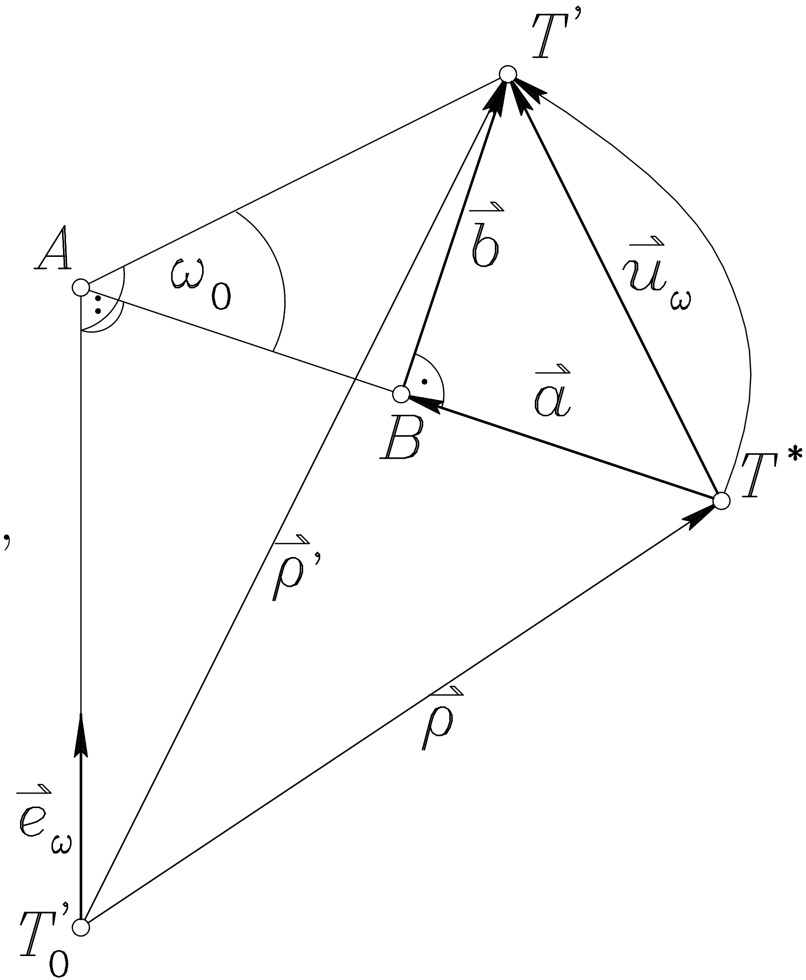


Pokažimo, da velja

$$\vec{b} = \sin(\omega_0)\, \vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

Smer je že prava. Še velikost. V ta namen upoštevamo enakosti:

$$\begin{aligned}
|\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho})| &= |\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}|, \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}), \\
\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}) &= \vec{e}_\omega\,(\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}, \\
\overrightarrow{T^* A} &= \vec{e}_\omega\,(\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}, \\
|\overrightarrow{T' A}| &= |\overrightarrow{T^* A}|, \\
|\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}| &= |\overrightarrow{T' A}|.
\end{aligned}$$




Združimo rezultate

$$\vec{u}_\omega = \vec{a} + \vec{b} = (1 - \cos(\omega_0))\,((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}) + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

Z upoštevanjem Lagrangeve identitete

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

in enačbe $\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_\omega = 1$ izpeljemo enakost

$$\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}) = (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - (\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_\omega)\,\vec{\rho} = (\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}.$$

Z upoštevanjem te enakosti zapišemo pomike $\vec{u}_\omega$ z enačbo

$$\vec{u}_\omega = (1 - \cos(\omega_0))\,\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}) + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho},$$

od koder dobimo

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho} + (1 - \cos(\omega_0))\,\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}).$$

Zapišimo vektorje še v izbrani bazi:

$$\vec{\rho} = \rho_x \vec{e}_x + \rho_y \vec{e}_y + \rho_z \vec{e}_z, \;\; \vec{\rho}' = \rho'_x \vec{e}_x + \rho'_y \vec{e}_y + \rho'_z \vec{e}_z, \;\; \vec{e}_\omega = e_{\omega x} \vec{e}_x + e_{\omega y} \vec{e}_y + e_{\omega z} \vec{e}_z.$$

Označimo z $\vec{d} = d_x\vec{e}_x + d_y\vec{e}_y + d_z\vec{e}_z$ vektorski produkt vektorjev $\vec{e}_\omega$ in $\vec{c} = c_x\vec{c}_x + c_z\vec{e}_y + c_z\vec{e}_z$. Kratek račun da

$$\vec{d} = \vec{e}_\omega \times \vec{c} = (e_{\omega y}c_z - e_{\omega z}c_y)\vec{e}_x + (e_{\omega z}c_x - e_{\omega x}c_z)\vec{e}_y + (e_{\omega x}c_y - e_{\omega y}c_x)\vec{e}_z.$$

Iz primerjave komponent odkrijemo zvezo

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -e_{\omega z} & e_{\omega y} \\ e_{\omega z} & 0 & -e_{\omega x} \\ -e_{\omega y} & e_{\omega x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix},$$

kjer $[N]$ označuje antisimetrično matriko smernih kosinusov vektorja $\vec{e}_\omega$.

Vektorsko množenje z vektorjem $\vec{e}_\omega$ lahko torej nadomestimo z delovanjem linearne preslikave $N$, v kartezijskem koordinatnem sistemu $(x, y, z)$ podane z matriko $[N]$. Konkretno

$$\vec{e}_\omega \times \vec{c} = N\,\vec{c}.$$

Enačbo

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho} + (1 - \cos(\omega_0))\,\vec{e}_\omega \times (\vec{e}_\omega \times \vec{\rho})$$

z upoštevanjem linearne preslikave $N$ prepišemo kot

$$\begin{aligned} \vec{\rho}' &= I\,\vec{\rho} + \sin(\omega_0) N\,\vec{\rho} + (1 - \cos(\omega_0)) N\,(N\,\vec{\rho}) \\ &= (I + \sin(\omega_0) N + (1 - \cos(\omega_0)) N \circ N)\vec{\rho} \end{aligned}$$

ali po komponentah

$$\begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{bmatrix} = ([I] + \sin(\omega_0)[N] + (1 - \cos(\omega_0))[N]\,[N]) \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}$$

še krajše kot

$$\begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}, \quad [R] = [I] + \sin(\omega_0)[N] + (1 - \cos(\omega_0))[N]\,[N].$$

V zadnji enačbi matrika $[R]$ označuje rotacijsko matriko ali matriko rotacij.

Preveri sledeče lastnosti matrike $[R]$

- $\det([R]) = 1$,
- $[R]^T[R] = [R][R]^T = [I]$,
- matrika $[R]$ ima samo eno realno lastno vrednost in ta je enaka $1$,

z uporabo pomožnih rezultatov ($A_{ij}$ je število v $i$-ti vrstici in $j$-tem stolpcu matrike $[A]$)

- $e_{\omega k}\, e_{\omega k} = 1$, (uporabimo dogovor o seštevanju)
- $N_{ij} = -e_{ijk}\, e_{\omega k}$, (uporabimo dogovor o seštevanju)
- $[M] = [N]N]$, $M_{ij} = e_{\omega i}\, e_{\omega j} - \delta_{ij}$,
- $[N]^T = -[N]$,
- $[N][N][N] = -[N]$,
- $[N][N][N][N] = -[N][N]$.

Dokaži tudi veljavnost pomožnih rezultatov.

# Pomiki togega telesa z upoštevanjem majhnih zasukov

Pri poljubnih zasukih velja

$$\vec{u}_\omega = (1 - \cos(\omega_0))\,((\vec{e}_\omega \cdot \vec{\rho})\,\vec{e}_\omega - \vec{\rho}) + \sin(\omega_0)\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

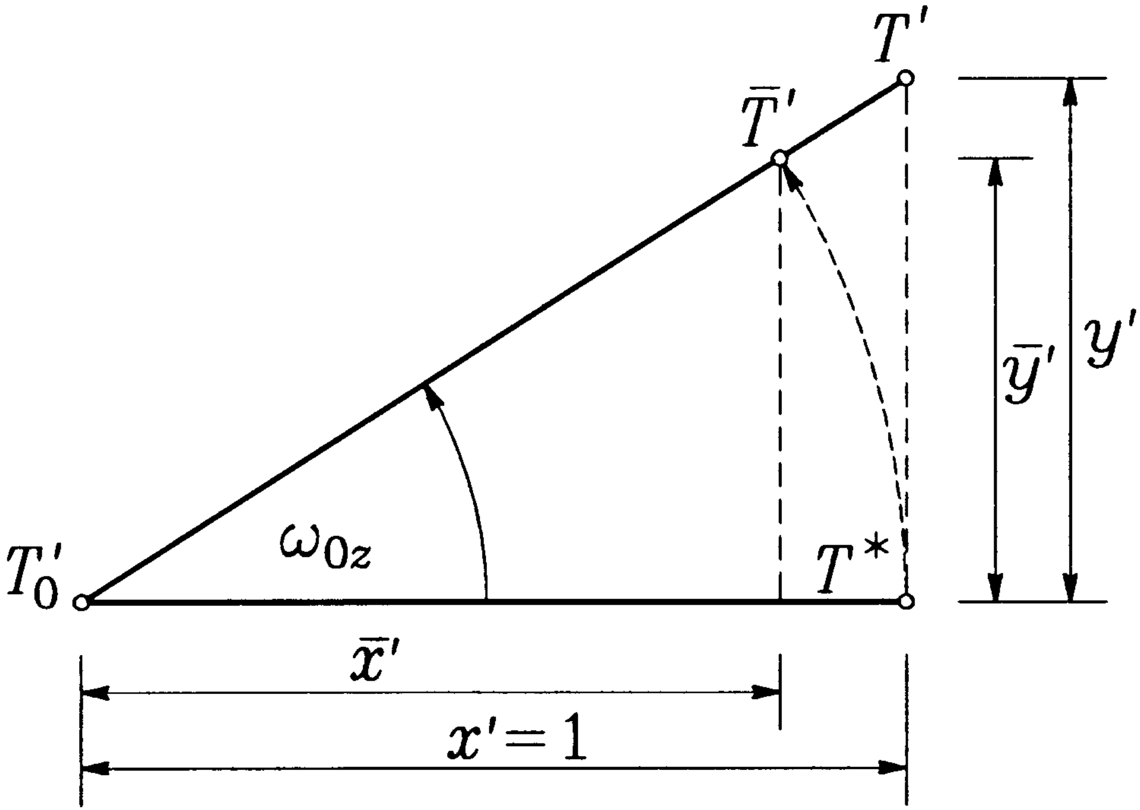
Če so zasuki majhni, je $\cos(\omega_0)) \approx 1$ in $\sin(\omega_0) \approx \omega_0$.
Zato lahko pišemo

$$\vec{u}_\omega \approx \omega_0\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

Rezultate združimo v poenostavljeno Rodriguesovo enačbo

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \omega_0\,\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}.$$

# Računski primer



# Napaka

| $\omega_{0z}$ | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.20 | 0.50 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0.57^o$ | $2.86^o$ | $5.73^o$ | $11.45^o$ | $28.65^o$ | $57.30^o$ |
| $x'$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $\bar{x}'$ | 1.0000 | 0.9988 | 0.9950 | 0.9801 | 0.8776 | 0.5403 |
| napaka % | 0.0 | 0.1 | 0.5 | 2.0 | 14.0 | 85.1 |
| $y'$ | 0.0100 | 0.0500 | 0.1000 | 0.2000 | 0.5000 | 1.0000 |
| $\bar{y}'$ | 0.0100 | 0.0500 | 0.0998 | 0.1987 | 0.4794 | 0.8415 |
| napaka % | 0.0 | 0.0 | 0.2 | 0.7 | 4.3 | 18.8 |

# Zaključek

Rezultati kažejo, da pri večini primerov praktične statike, kjer so pričakovani zasuki manjši od 0.1 rad ($5.73^\circ$) pri določanju pomikov s poenostavljeno Rodriguesovo enačbo ne naredimo omembe vredne napake. Pri omenjeni vrednosti zasuka, znaša napaka pri "vodoravnem" pomiku 0.5%, pri "navpičnem" pa le 0.2%.

Napake, ki nastanejo vsled nepoznavanja dejanske velikosti obtežbe in dejanske nosilnosti materiala, običajno krepko presegajo omenjeno napako.

# Viri


(1) M. Stanek, G. Turk, *Statika I*, FGG, Ljubljana, (1996).

(2) S. Srpčič, *Mehanika trdnih teles*, FGG, Ljubljana, (2002).

(3) S.P. Timoshenko, D.H. Young, *Theory of Structures*, McGraw-Hill, New York (1965).