

Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) z bazo $\{e_x, e_y, e_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$. Privzemi sledeče zveze med baznimi vektorji: $e_\xi = -e_y$, $e_\eta = e_x$ in $e_\zeta = e_z$. Fizikalno gledano, lahko novo bazo dobimo z rotacijo stare okrog osi e_z za kot -90° .



Tenzor napetosti v običajni bazi $\{e_x, e_y, e_z\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

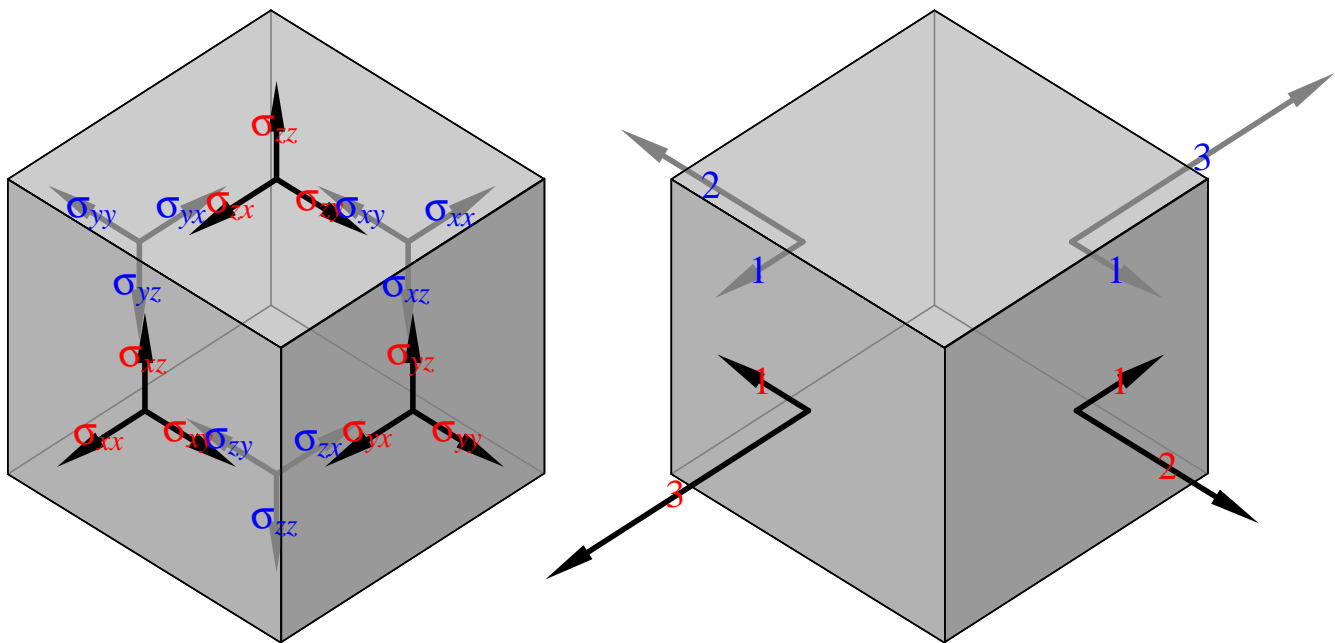
Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xx} e_x + \sigma_{xy} e_y + \sigma_{xz} e_z, \\ \sigma_y &= \sigma_{yx} e_x + \sigma_{yy} e_y + \sigma_{yz} e_z, \\ \sigma_z &= \sigma_{zx} e_x + \sigma_{zy} e_y + \sigma_{zz} e_z. \end{aligned}$$

Fizikalni pomen od nič različnih komponent je razviden iz slike 1. Prikazane napetosti dejansko pripadajo točki v središču kocke, na elementarni kocki smo jih narisali le zaradi preglednosti.



Fizikalni pomen od nič različnih komponent tenzorja napetosti v bazi $\{e_x, e_y, e_z\}$. Leva slika prikazuje smeri delovanja komponent tenzorja napetosti v izbrani bazi, desna pa dejansko napetostno stanje.



Slika: 1



Tenzor napetosti v novi bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}.$$

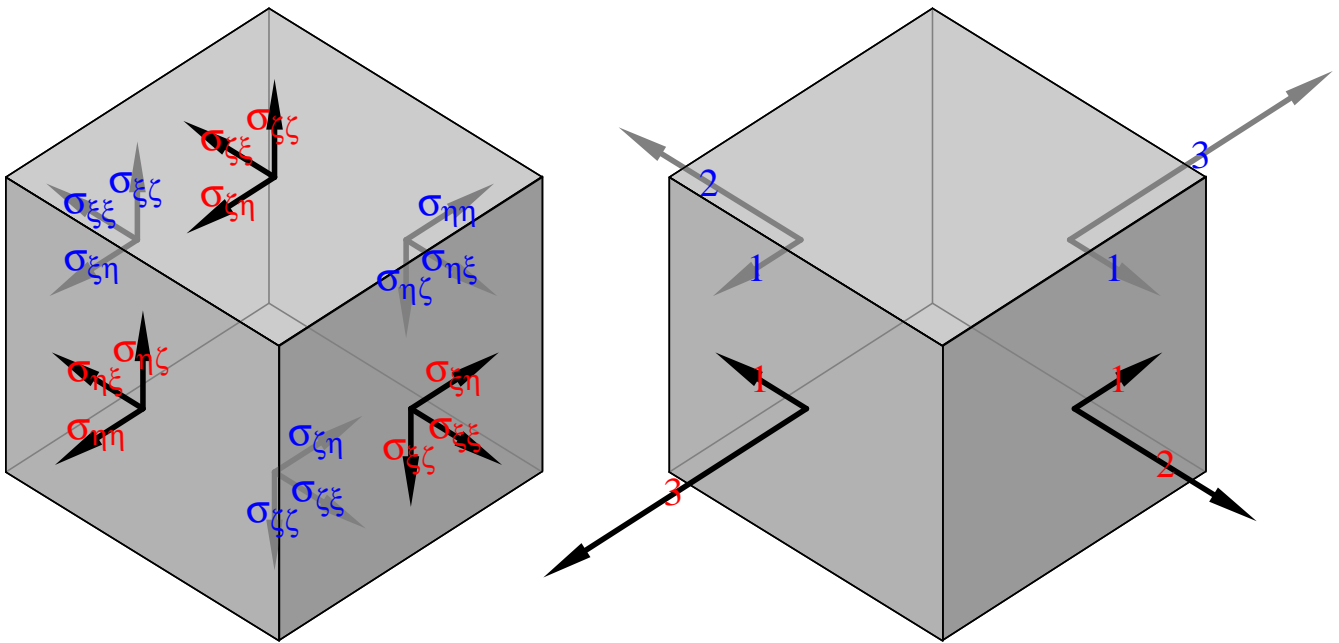
Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_{\xi\xi} e_\xi + \sigma_{\xi\eta} e_\eta + \sigma_{\xi\zeta} e_\zeta, \\ \sigma_\eta &= \sigma_{\eta\xi} e_\xi + \sigma_{\eta\eta} e_\eta + \sigma_{\eta\zeta} e_\zeta, \\ \sigma_\zeta &= \sigma_{\zeta\xi} e_\xi + \sigma_{\zeta\eta} e_\eta + \sigma_{\zeta\zeta} e_\zeta. \end{aligned}$$

Fizikalni pomen od nič različnih komponent je tako razviden iz slike 2.



Fizikalni pomen od nič različnih komponent tenzorja napetosti v bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$. Leva slika prikazuje smeri delovanja komponent tenzorja napetosti v izbrani bazi, desna pa dejansko napetostno stanje.



Slika: 2



Iz slike 2 lahko s primerjavo leve in desne kocke preberemo komponente tenzorja napetosti v novi bazi.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Napetostne vektorje potem zapišemo z enačbami

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= 2\text{MPa}e_\xi + 1\text{MPa}e_\eta, \\ \sigma_\eta &= 1\text{MPa}e_\xi + 3\text{MPa}e_\eta, \\ \sigma_\zeta &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zaradi enostavnih zvez med baznimi vektorji, smo lahko rezultat preprosto prebrali iz slike 2.

V nadaljevanju bomo do istega rezultata prišli še z izračunom.



Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo smerne kosinuse

$$\begin{aligned} e_{\xi x} &= e_{x\xi} = e_{\xi} \cdot e_x = -e_y \cdot e_x = 0, \\ e_{\xi y} &= e_{y\xi} = e_{\xi} \cdot e_y = -e_y \cdot e_y = -1, \\ e_{\xi z} &= e_{z\xi} = e_{\xi} \cdot e_z = -e_y \cdot e_z = 0, \\ e_{\eta x} &= e_{x\eta} = e_{\eta} \cdot e_x = e_x \cdot e_x = 1, \\ e_{\eta y} &= e_{y\eta} = e_{\eta} \cdot e_y = e_x \cdot e_y = 0, \\ e_{\eta z} &= e_{z\eta} = e_{\eta} \cdot e_z = e_x \cdot e_z = 0, \\ e_{\zeta x} &= e_{x\zeta} = e_{\zeta} \cdot e_x = e_z \cdot e_x = 0, \\ e_{\zeta y} &= e_{y\zeta} = e_{\zeta} \cdot e_y = e_z \cdot e_y = 0, \\ e_{\zeta z} &= e_{z\zeta} = e_{\zeta} \cdot e_z = e_z \cdot e_z = 1. \end{aligned}$$



Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} = 2\text{MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\eta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\eta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\eta x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + 2e_{\eta x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + 2e_{\eta y} e_{\eta z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} = 3\text{MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta\zeta} &= e_{\zeta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\zeta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\zeta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &+ 2e_{\zeta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + 2e_{\zeta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + 2e_{\zeta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} = \\ &= e_{\zeta z}^2 \sigma_{zz} = 0. \end{aligned}$$



Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} = \\ &= e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} = 1 \text{ MPa},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\zeta} &= e_{\xi x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\zeta} &= e_{\eta x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\eta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\eta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\eta y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\eta y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\eta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\eta z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\eta z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\eta z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = \\ &= 0.\end{aligned}$$



Upoštevamo simetrijo tenzorja in dobljene rezultate povežemo v končni rezultat

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



Do istega rezultata lahko pridemo tudi na drug način.
Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = [e_{\xi} \quad e_{\eta} \quad e_{\zeta}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo dogovor o seštevanju in enačbe (1) prepíšemo v obliko

$$[\sigma_{ij}] = [T][\sigma_{\alpha\beta}][T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T[\sigma_{ij}][T],$$

Kratek izračun da

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T[\sigma_{ij}][T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$