

Transformacija komponent tenzorja napetosti

Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

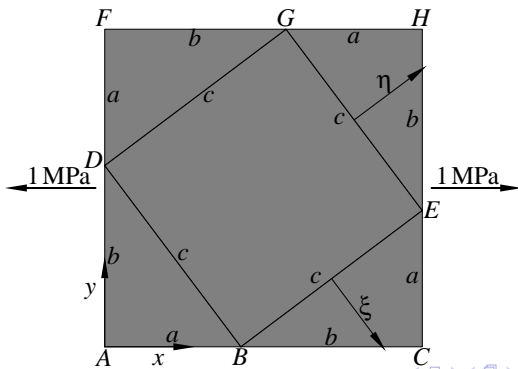
Določi komponente $[\sigma_{\alpha\beta}]$ tenzorja napetosti v tej točki v kartezijskem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ) , določenem z baznimi vektorji

$$e_{\xi} = \frac{3}{5}e_x - \frac{4}{5}e_y, \quad e_{\eta} = \frac{4}{5}e_x + \frac{3}{5}e_y, \quad e_{\zeta} = e_z.$$

Fizikalno pojasni dobljene rezultate.

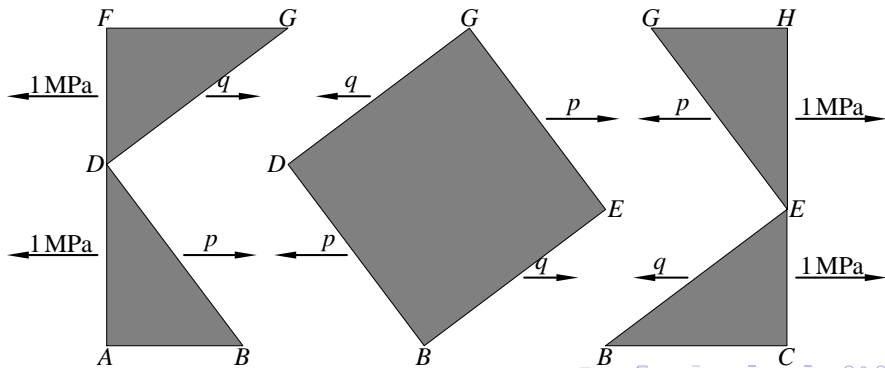
1. Uporaba ravnotežnih enačb iz Statike

Iz okolice točke P izrežemo tanko kvadratno steno s stranico $a + b$, debeline d . Normalno napetost $\sigma_{xx} = 1 \text{ MPa}$ na sliki predstavimo s puščicama. Iz stene izrežemo kvadrat s stranico c . Normalni stranic BE in EG tvorita nov (zavrt) kartezični koordinatni sistem (ξ, η, ζ) (os ζ sovpade z osjo z) (glej sliko). Iz podatkov izluščimo razmerje stranic $a : b : c = 3 : 4 : 5$. Napetostno stanje v tem koordinatnem sistemu predstavimo s komponentami tenzorja napetosti $\sigma_{\alpha\beta}$, kjer $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$.



1. Uporaba ravnotežnih enačb iz Statike

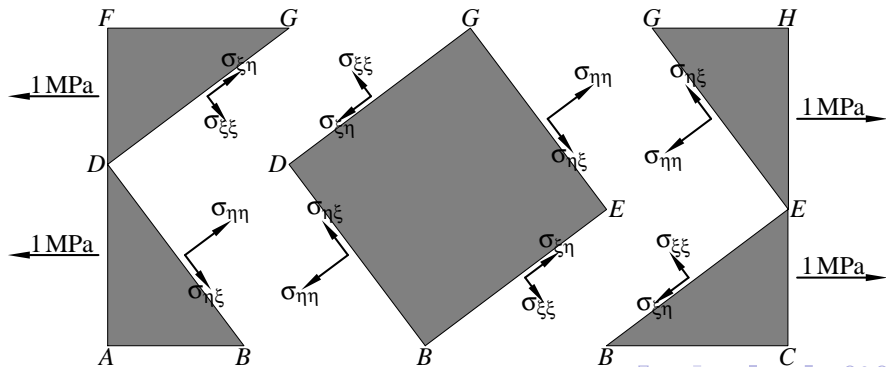
Steno razrežemo kot prikazuje spodnja slika. Vplive odstranjenih delov nadomestimo z napetostnimi vektorji. Velikosti vektorjev označimo s p in q , smeri pa so prikazane na sliki. Ker je napetosno stanje v okolici točke P homogeno, lahko velikosti napetostnih vektorjev dobimo z ravnotežnih enačb $\sum X = 0$ za trikotnika ABD in DGF . Iz enačb $\sum X = -1\text{MPa}ad + qcd = 0$, $\sum X = -1\text{MPa}bd + pcd = 0$ izračunamo $p = \frac{4}{5}\text{MPa}$ in $q = \frac{3}{5}\text{MPa}$. Preveri ravnotežje preostalih delov stene!



1. Uporaba ravnotežnih enačb iz Statike

Vsak napetostni vektor razstavimo na dve komponenti, t.j. normalno in strižno napetost. Glej sliko. Z upoštevanjem geometrije dobimo

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= \frac{3}{5}q = \frac{9}{25}\text{MPa}, & \sigma_{\xi\eta} &= \frac{4}{5}q = \frac{12}{25}\text{MPa}, \\ \sigma_{\eta\xi} &= \frac{3}{5}p = \frac{12}{25}\text{MPa}, & \sigma_{\eta\eta} &= \frac{4}{5}p = \frac{16}{25}\text{MPa}.\end{aligned}$$



2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Tenzor napetosti v novi bazi $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}.$$

Napetostne vektorje zapišemo z enačbami

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_{\xi\xi} e_\xi + \sigma_{\xi\eta} e_\eta + \sigma_{\xi\zeta} e_\zeta, \\ \sigma_\eta &= \sigma_{\eta\xi} e_\xi + \sigma_{\eta\eta} e_\eta + \sigma_{\eta\zeta} e_\zeta, \\ \sigma_\zeta &= \sigma_{\zeta\xi} e_\xi + \sigma_{\zeta\eta} e_\eta + \sigma_{\zeta\zeta} e_\zeta. \end{aligned}$$

Fizikalni pomen od nič različnih komponent je tako razviden iz zadnje slike.

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Komponente tenzorja napetosti v novi bazi so s komponentami tenzorja napetosti v stari bazi povezane z enačbami

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i \in \{x,y,z\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} e_{\alpha i} e_{\beta j} \sigma_{ij}, \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (1)$$

Najprej izračunamo smerne kosinuse

$$\begin{aligned} e_{\xi x} = e_{x\xi} = e_{\xi} \cdot e_x &= \frac{3}{5}, & e_{\eta x} = e_{x\eta} = e_{\eta} \cdot e_x &= \frac{4}{5}, \\ e_{\xi y} = e_{y\xi} = e_{\xi} \cdot e_y &= -\frac{4}{5}, & e_{\eta y} = e_{y\eta} = e_{\eta} \cdot e_y &= \frac{3}{5}, \\ e_{\xi z} = e_{z\xi} = e_{\xi} \cdot e_z &= 0, & e_{\eta z} = e_{z\eta} = e_{\eta} \cdot e_z &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{\zeta x} = e_{x\zeta} = e_{\zeta} \cdot e_x &= 0, \\ e_{\zeta y} = e_{y\zeta} = e_{\zeta} \cdot e_y &= 0, \\ e_{\zeta z} = e_{z\zeta} = e_{\zeta} \cdot e_z &= 1. \end{aligned}$$

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Potem pa še komponente tenzorja $\sigma_{\alpha\beta}$.

Najprej diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= e_{\xi x}^2 \sigma_{xx} + e_{\xi y}^2 \sigma_{yy} + e_{\xi z}^2 \sigma_{zz} + \\ &\quad + 2e_{\xi x} e_{\xi y} \sigma_{xy} + 2e_{\xi x} e_{\xi z} \sigma_{xz} + 2e_{\xi y} e_{\xi z} \sigma_{yz} = \\ &= \frac{9}{25} \text{MPa},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\eta} &= e_{\eta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\eta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\eta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &\quad + 2e_{\eta x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + 2e_{\eta x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + 2e_{\eta y} e_{\eta z} \sigma_{yz} = \\ &= \frac{16}{25} \text{MPa},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta\zeta} &= e_{\zeta x}^2 \sigma_{xx} + e_{\zeta y}^2 \sigma_{yy} + e_{\zeta z}^2 \sigma_{zz} + \\ &\quad + 2e_{\zeta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + 2e_{\zeta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + 2e_{\zeta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} = \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Nato izven diagonalne.

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\eta} &= e_{\xi x} e_{\eta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\eta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\eta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\eta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\eta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\eta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\eta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\eta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\eta z} \sigma_{zz} = \\ &= \frac{12}{25} \text{MPa},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\zeta} &= e_{\xi x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\xi x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\xi x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\xi y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\xi y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\xi y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\xi z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\xi z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\xi z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\zeta} &= e_{\eta x} e_{\zeta x} \sigma_{xx} + e_{\eta x} e_{\zeta y} \sigma_{xy} + e_{\eta x} e_{\zeta z} \sigma_{xz} + \\ &+ e_{\eta y} e_{\zeta x} \sigma_{yx} + e_{\eta y} e_{\zeta y} \sigma_{yy} + e_{\eta y} e_{\zeta z} \sigma_{yz} + \\ &+ e_{\eta z} e_{\zeta x} \sigma_{zx} + e_{\eta z} e_{\zeta y} \sigma_{zy} + e_{\eta z} e_{\zeta z} \sigma_{zz} = 0.\end{aligned}$$

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Posamezne komponente izračunamo (z manj pisanja) z enačbo

$$\sigma_{\xi\eta} = [e_{\xi x} \quad e_{\xi y} \quad e_{\xi z}] [\sigma_{ij}] [e_{\eta x} \quad e_{\eta y} \quad e_{\eta z}]^T. \text{ Dobimo}$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{9}{25} \text{MPa},$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{12}{25} \text{MPa},$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{16}{25} \text{MPa}.$$

Ostale komponente so enake nič. Izračunamo jih na enak način.

2. Določitev komponent z uporabo transformacijske enačbe

Upoštevamo simetrijo tenzorja in dobljene rezultate povežemo v končni rezultat

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

3. Določitev matrike z uporabo transformacijske enačbe

Tvorimo transformacijsko matriko smernih kosinusov

$$[T] = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix} = [e_{\xi} \quad e_{\eta} \quad e_{\zeta}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo dogovor o seštevanju in enačbe (1) prepisemo v obliko

$$[\sigma_{ij}] = [T] [\sigma_{\alpha\beta}] [T]^T, \quad [\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T],$$

Kratek izračun da

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = [T]^T [\sigma_{ij}] [T] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$