

1.

ENERGIJSKE METODE V MEHANIKI KONSTRUKCIJ

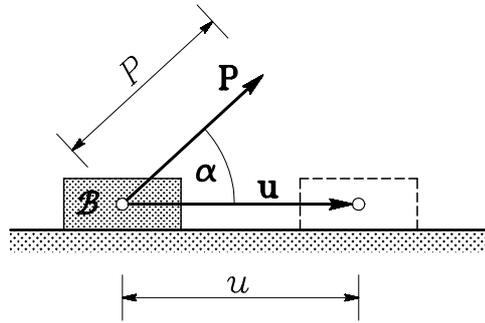
V osnovnem tečaju mehanike trdnih teles smo izpeljali sistem petnajstih osnovnih enačb, s katerimi lahko načeloma določimo napetosti, deformacije in pomike poljubnega linearno elastičnega izotropnega telesa pri omejenih geometrijskih spremembah, če le poznamo njegove geometrijske in materialne lastnosti, način podpiranja ter velikost in način delovanja zunanje obtežbe. Kakor vemo, je omenjeni sistem sestavljen iz treh parcialnih diferencialnih enačb ravnotežja, šestih parcialnih diferencialnih kinematičnih enačb ter šestih linearnih algebrskih konstitucijskih enačb. Še posebej reševanje parcialnih diferencialnih enačb je težavno opravilo, že pri nekoliko bolj splošnih primerih geometrije in zunanje obtežbe pa praktično sploh ni mogoče dobiti analitičnih rešitev.

Reševanje številnih mehanskih problemov si lahko občutno olajšamo z uporabo tako imenovanih *energijskih metod*, utemeljenih na fizikalnih zakonitostih energijskega stanja telesa.

1.1 Fizikalna definicija mehanskega dela

Spomnimo se, kako je mehansko delo definirano v elementarni fiziki. Če na trdno telo \mathcal{B} deluje konstantna sila \mathbf{P} in se pri tem telo premakne v novo lego tako, kakor to določa vektor pomika \mathbf{u} (*slika 1.1*), je opravljeno mehansko delo D določeno s skalarnim produktom

$$D = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = P u \cos \alpha . \quad (1.1)$$



Slika 1.1

Če na telo deluje še konstantna dvojica \mathbf{M} in telo razen translatornega pomika \mathbf{u} doživi tudi zasuk ω , je mehansko delo določeno z vsoto

$$D = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \omega . \quad (1.2)$$

Pri tem smo poudarili, da sta sila \mathbf{P} in dvojica \mathbf{M} konstantna vektorja, torej se med premikom in zasukom telesa ne spreminjata ne po velikosti ne po smeri. Z drugimi besedami to pomeni, da sta sila \mathbf{P} in dvojica \mathbf{M} neodvisni od pomika \mathbf{u} in zasuk ω .

1.2 Deformacijsko delo (deformacijska energija)

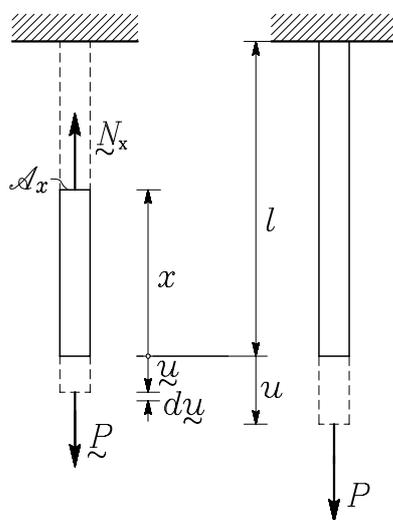
V mehaniki trdnih teles je bolj običajno, da se deformacije telesa razvijajo v odvisnosti od delujoče zunanje obtežbe. Kot zgled določimo mehansko delo, ki ga opravi natezna vzdolžna sila \mathcal{P} na koncu enakomerno debele palice med tem, ko se palica iz začetnega nedeformiranega stanja podaljša za u (slika 1.2). Začetna dolžina palice je l , ploščina njenega prečnega prereza pa je A_x . Vzemimo še, da je palica izdelana iz linearno elastičnega materiala z modulom elastičnosti E in da so deformacije dovolj majhne, da lahko uporabimo enačbe elementarne teorije linijskega nosilca, kakršne smo izpeljali v 5. poglavju knjige *Mehanika trdnih teles*.

Kot izhodišče vzemimo, da je poljuben del palice v *ravnotežju*. Edina notranja sila v prerezu \mathcal{A}_x je osna sila \underline{N}_x , ki je v ravnotežnem stanju po velikosti enaka obtežbi \underline{P} in je očitno konstantna po celotni dolžini palice

$$\underline{N}_x = \underline{P}. \quad (1.3)$$

Tedaj je pomik \underline{y} na koncu palice enak spremembi dolžine palice $\underline{\Delta}l$ in je premosorazmeren delujoči navpični sili \underline{P}

$$\underline{y} = \underline{\Delta}l = \frac{l}{EA_x} \underline{N}_x = \frac{l}{EA_x} \underline{P} \quad \rightarrow \quad u = \frac{l}{EA_x} P. \quad (1.4)$$



Slika 1.2

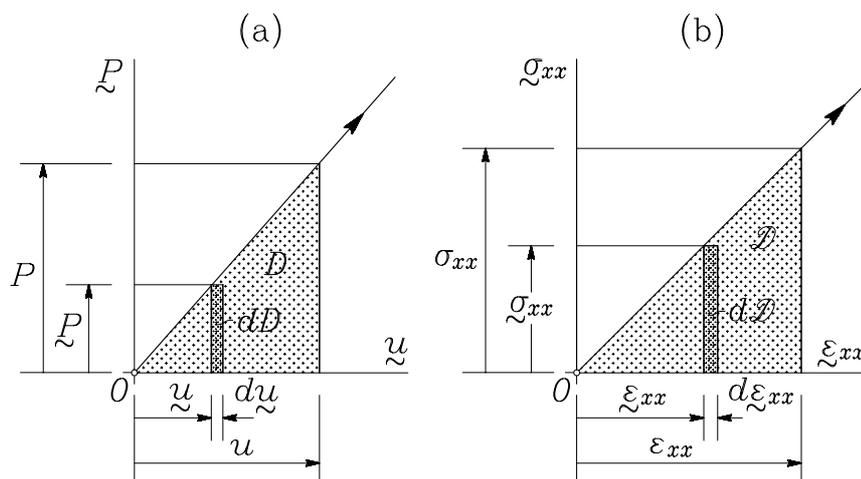
V tem primeru torej delujoča sila \underline{P}

$$\underline{P} = \frac{EA_x}{l} \underline{y} = \underline{P}(\underline{y}) \quad (1.5)$$

ni konstantna, temveč se linearno spreminja od vrednosti 0, ki ustreza nedeformiranemu stanju palice ($\underline{y} = 0$), do vrednosti P , ki ustreza končni deformirani obliki pri pomiku u na koncu previsa

$$P = \frac{EA_x}{l} u. \quad (1.6)$$

Zato mehanskega dela, ki ga opravi sila \tilde{P} med deformiranjem palice, ne moremo izračunati neposredno z enačbo (1.1). To enačbo pa lahko uporabimo, če doseženi pomik \tilde{y} povečamo za infinitezimalni prirastek $d\tilde{y}$ in vzamemo, da je na tem infinitezimalno majhnem pomiku sila \tilde{P} konstantna.



Slika 1.3

Prirastek mehanskega dela dD je tedaj (slika 1.3.a)

$$dD = \tilde{P} d\tilde{y}, \quad (1.7)$$

celotno mehansko delo D na intervalu $0 \leq \tilde{y} \leq u$ pa dobimo z integriranjem

$$D = \int_0^u dD = \int_0^u \tilde{P} d\tilde{y} = \frac{EA_x}{l} \int_0^u \tilde{y} d\tilde{y} = \frac{EA_x}{2l} u^2. \quad (1.8)$$

Tako smo celotno opravljeno mehansko delo izrazili s končno doseženim pomikom u

$$D = \frac{EA_x}{2l} u^2. \quad (1.9)$$

Ob uporabi enačbe (1.6) dobimo zelo poučen zapis

$$D = \frac{1}{2} P u, \quad (1.10)$$

ki pove, da je mehansko delo, ki ga sila \underline{P} opravi na intervalu $0 \leq \underline{y} \leq u$, po vrednosti enako ploščini trikotnika, ki ga v diagramu $\underline{y} - \underline{P}$ določata končni vrednosti u in P (slika 1.3.a).

V obravnavanem preprostem primeru lahko enačbo (1.10) zapišemo tudi drugače. Ker je $P = \sigma_{xx} A_x$ in $u = \Delta l = \varepsilon_{xx} l$, dobimo

$$D = \frac{1}{2} A_x l \sigma_{xx} \varepsilon_{xx}. \quad (1.11)$$

Pri tem smo s σ_{xx} označili vzdolžno normalno napetost, z ε_{xx} pa specifično spremembo dolžine v vzdolžni smeri, ki sta v našem primeru enakomerni po celotni dolžini palice. Produkt $V = A_x l$ predstavlja prostornino palice, tako da je

$$D = \frac{1}{2} V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx}. \quad (1.12)$$

Če upoštevamo, da je pri linearno elastičnem materialu zveza med deformacijo ε_{xx} in napetostjo σ_{xx} podana s Hookovim zakonom $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$, lahko opravljeno mehansko delo izrazimo v odvisnosti od končne dosežene vzdolžne deformacije

$$D = \frac{1}{2} E V \varepsilon_{xx}^2. \quad (1.13)$$

Rezultat kaže, da se je vloženo mehansko delo porabilo za deformiranje palice. Zato ga pogosto imenujemo tudi *deformacijsko delo*. Dobljeno zvezo lahko razumemo tudi tako, da se je vloženo mehansko delo naložilo v palici v obliki tako imenovane *deformacijske energije*.

Zaradi kasnejših posplošitev je ugodno vpeljati pojem *specifično deformacijsko delo* oziroma *specifična deformacijska energija* \mathcal{D} . To je deformacijska energija, ki se pri deformiranju naloži v enoti prostornine telesa. V našem primeru je specifična deformacijska energija

$$\mathcal{D} = \frac{D}{V} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} = \frac{E}{2} \varepsilon_{xx}^2. \quad (1.14)$$

Kakor vidimo, lahko tudi specifično deformacijsko energijo \mathcal{D} , ki se naloži v enoti prostornine telesa, predstavimo s ploščino trikotnika, ki ga v diagramu $\underline{\sigma}_{xx} - \underline{\varepsilon}_{xx}$ določata končno dosežena deformacija ε_{xx} in pripadajoča napetost σ_{xx} (slika 1.3.b)

Prirastek $d\mathcal{D}$ specifične deformacijske energije pri spremembi deformacije za $d\varepsilon_{xx}$ je tedaj

$$d\mathcal{D} = \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = E \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx}, \quad (1.15)$$

celotno specifično deformacijsko energijo, ki se naloži v palici, pa izračunamo z integriranjem tega prirastka v mejah od 0 do ε_{xx}

$$\mathcal{D} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} d\mathcal{D} = E \int_0^{\varepsilon_{xx}} \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = \frac{E}{2} \varepsilon_{xx}^2. \quad (1.16)$$

Celotna deformacijska energija deformirane palice je določena z integralom specifične deformacijske energije po prostornini palice. V splošnem je specifična deformacijska energija funkcija točke, v našem primeru pa je, tako kot napetosti in deformacije, enakomerna po vsej palici, zato dobimo

$$D = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV = \mathcal{D} \int_{\mathcal{V}} dV = \mathcal{D} V = \frac{1}{2} EV \varepsilon_{xx}^2. \quad (1.17)$$

Rezultat se seveda ujema z enačbo (1.13). Zlahka se prepričamo, da dobimo enak rezultat tudi z integriranjem prirastka celotnega deformacijskega dela dD v mejah od 0 do ε_{xx}

$$dD = V d\mathcal{D} = V \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = VE \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx}, \quad (1.18)$$

$$D = EV \int_0^{\varepsilon_{xx}} \underline{\varepsilon}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{2} EV \varepsilon_{xx}^2. \quad (1.19)$$

Iz primerjave enačbe (1.7) z enačbo (1.18) sledi

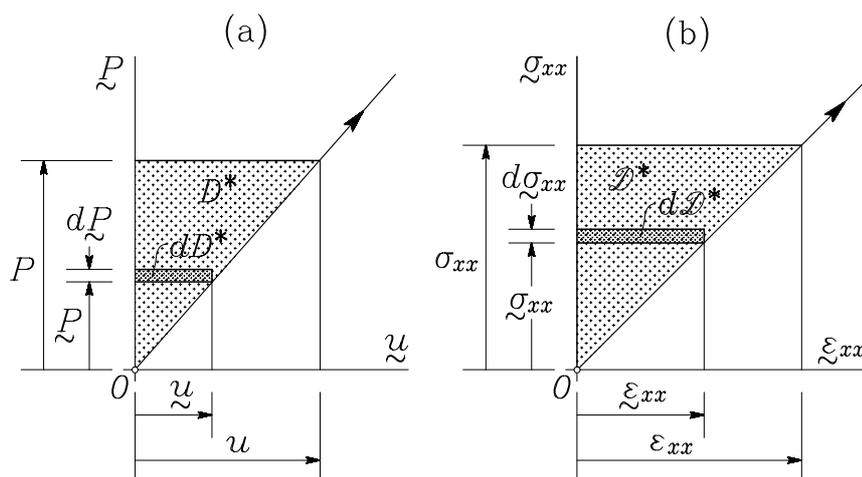
$$dD = \underline{P} d\underline{y} = V \underline{\sigma}_{xx} d\underline{\varepsilon}_{xx}. \quad (1.20)$$

Dobljena enakost pove, da je prirastek mehanskega dela, ki ga zunanja sila \tilde{P} opravi na prirastku pomika $d\tilde{y}$, enaka prirastku deformacijskega dela, ki ga napetost $\tilde{\sigma}_{xx}$ opravi na prirastku deformacije $d\tilde{\varepsilon}_{xx}$.

1.3 Dopolnilno deformacijsko delo (dopolnilna deformacijska energija)

V dosedanjih izvajanjih smo za neodvisno spremenljivko izbrali pomik \tilde{y} oziroma deformacijo $\tilde{\varepsilon}_{xx}$. Ker imamo opraviti z linearno elastičnim materialom, dobimo enak rezultat tudi v primeru, da za neodvisno spremenljivko izberemo silo \tilde{P} in pomik \tilde{y} izrazimo z enačbo (1.4) kot funkcijo te sile

$$\tilde{y} = \frac{l}{EA_x} \tilde{P} = \tilde{y}(\tilde{P}). \quad (1.21)$$



Slika 1.4

Če silo \tilde{P} povečamo za infitezimalni prirastek $d\tilde{P}$, dobimo pripadajoči prirastek mehanskega dela kot produkt prirastka sile $d\tilde{P}$ in konstantnega pomika \tilde{y} (slika 1.4.a)

$$dD^* = \tilde{y} d\tilde{P}. \quad (1.22)$$

Vpeljali smo novo oznako za prirastek mehanskega dela dD^* , da bi ga razlikovali od prirastka dD , ki smo ga dobili kot delo, ki ga sila $d\mathcal{P}$ opravi na prirastku pomika \mathcal{u} . Celotno mehansko delo D^* na intervalu $0 \leq \mathcal{P} \leq P$ dobimo z integriranjem

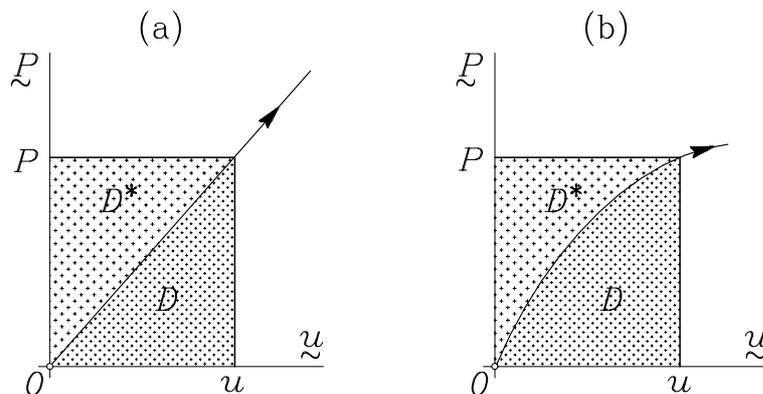
$$D^* = \int_0^P dD^* = \int_0^P \mathcal{u} d\mathcal{P} = \frac{l}{EA_x} \int_0^P \mathcal{P} d\mathcal{P}$$

$$D^* = \frac{l}{2EA_x} P^2. \quad (1.23)$$

S slik 1.4.a in 1.5.a lahko razberemo, da delo D^* dopolni deformacijsko delo D do vrednosti, ki bi jo dobili, če bi z enačbo (1.1) izračunali mehansko delo konstantne sile P na neodvisnem pomiku u

$$D + D^* = Pu. \quad (1.24)$$

Zato vrednost D^* imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno deformacijsko delo*. Kakor smo že omenili, je pri linearno elastičnem materialu dopolnilno deformacijsko delo D^* enako deformacijskemu delu D . Pri nelinearno elastičnem materialu pa vrednosti D in D^* nista enaki (slika 1.5.b).



Slika 1.5

Podobno kakor v prejšnjem primeru lahko vpeljemo *prirastek specifičnega dopolnilnega deformacijskega dela* $d\mathcal{D}^*$

$$d\mathcal{D}^* = \xi_{xx} d\mathcal{G}_{xx} = \frac{1}{E} \mathcal{G}_{xx} d\mathcal{G}_{xx} \quad (1.25)$$

ter celotno specifično dopolnilno deformacijsko delo \mathcal{D}^* , ki se v obliki specifične dopolnilne deformacijske energije naloži v palici (*slika 1.4.b*)

$$\mathcal{D}^* = \int_0^{\sigma_{xx}} d\mathcal{D}^* = \frac{1}{E} \int_0^{\sigma_{xx}} \mathcal{G}_{xx} d\mathcal{G}_{xx} = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2. \quad (1.26)$$

Celotno dopolnilno deformacijsko delo deformirane palice pa je

$$D^* = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D}^* dV = \mathcal{D}^* V = \frac{V}{2E} \sigma_{xx}^2, \quad (1.27)$$

kjer smo spet upoštevali, da je pri zgolj osno obteženi palici specifično dopolnilno deformacijsko delo enakomerno po celotni prostornini palice.

1.4 Castiglianov izrek

Z enačbama (1.9) in (1.23) smo za linearno elastično telo izrazili deformacijsko delo D in dopolnilno deformacijsko delo D^* s končno doseženim pomikom u oziroma s končno doseženo silo P

$$D = \frac{EA_x}{2l} u^2 \quad (1.28)$$

$$D^* = \frac{l}{2EA_x} P^2. \quad (1.29)$$

Odvajajmo enačbo (1.28) po pomiku u in enačbo (1.29) po sili P ter upoštevajmo zvezi (1.16) in (1.4); tako dobimo

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \frac{EA_x}{l} u = P \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial P} = \frac{l}{EA_x} P = u. \quad (1.31)$$

Rezultata sta v skladu s *Castiglianovim izrekom*, ki pravi, da je pri linearno elastičnem materialu odvod deformacijskega dela po pomiku enak pripadajoči sili, odvod dopolnilnega deformacijskega dela po sili pa pripadajočemu pomiku †. Pri tem je pomembno, da gre za pomik prijemališča sile v smeri njenega delovanja.

Podobno pravilo lahko izpeljemo za odvode specifičnega deformacijskega dela. Brez posebnega truda se namreč lahko prepričamo, da velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{xx}} = E \varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \varepsilon_{xx} . \quad (1.33)$$

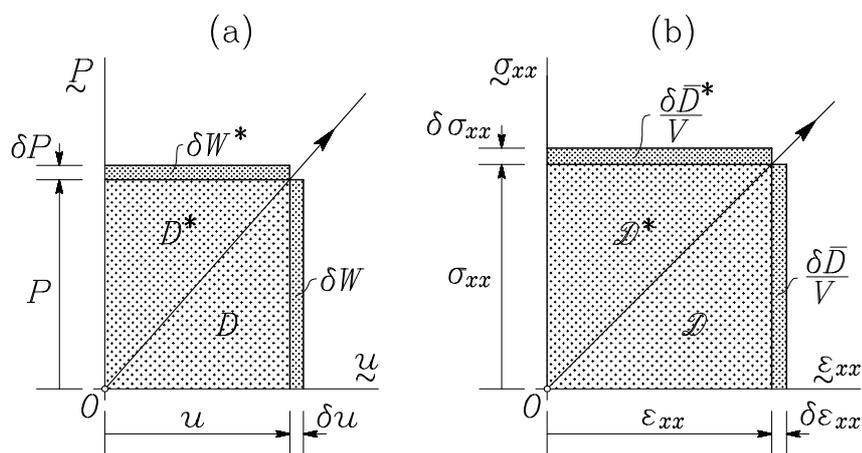
Castiglianov izrek v obliki (1.32) ali (1.33) je pomemben predvsem kot ugotovitev, da pri linearno elastičnem telesu lahko najdemo tako funkcijo deformacije $\mathcal{D}(\varepsilon_{xx})$ da njen odvod po deformaciji ε_{xx} enolično določa ustrezno napetost σ_{xx} , oziroma tako funkcijo napetosti $\mathcal{D}(\sigma_{xx})$, da je njen odvod po σ_{xx} enak deformaciji ε_{xx} .

1.5 Virtualno delo. Izrek o virtualnih pomikih

V dosedanjih izpeljavah smo imeli opravka z energijskimi količinami, ki imajo razviden fizikalni pomen in jih je mogoče vsaj posredno tudi izmeriti. V nadaljevanju pa bomo vpeljali pojma *virtualno delo* in *dopolnilno virtualno delo*, ki sta v svojem bistvu zgolj formalni matematični količini, vendar ju izračunamo podobno kakor prirastka deformacijskega oziroma dopolnilnega deformacijskega dela.

† Prvi del izreka velja tudi za nelinearno elastično telo, drugi del pa le za linearno elastično telo.

Znova vzemimo, da je opazovana natezna palica v ravnotežju, ko nanjo deluje zunanja sila P . Pomik obteženega prostega konca palice je tedaj $\Delta l = u$. Sedaj pa si zamislimo, da se prosti konec palice premakne še za poljubno, vendar dovolj majhno vrednost δu v smeri delovanja sile P (slika 1.6.a).



Slika 1.6

Poudarimo, da gre za namišljen, *virtualen* pomik, ki ni v nikakršni zvezi z dejansko obtežbo P . Zato lahko po vzorcu enačbe (1.7) izračunamo namišljeno mehansko delo, ki ga zunanja sila P opravi na virtualnem pomiku δu . Dobljeno količino imenujemo *virtualno delo zunanje sile* in jo označimo z δW

$$\delta W = P \delta u . \quad (1.34)$$

Primerjava z enačbo (1.18) pokaže, da lahko virtualno delo zapišemo tudi takole (slika 1.6.b)

$$\delta W = V \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} , \quad (1.35)$$

kjer je σ_{xx} dejanska napetost v palici, $\delta \epsilon_{xx}$ pa je virtualna vzdolžna deformacija, ki je z virtualnim pomikom δu povezana s kinematičnim pogojem

$$\delta \epsilon_{xx} = \frac{\delta \Delta l}{l} = \frac{\delta u}{l} . \quad (1.36)$$

Za virtualni pomik, ki ustreza enačbi (1.36) in kinematičnim robnim pogojem, pravimo, da je *kinematično dopusten* ali *kinematično možen*.

Na desni strani enačbe (1.35) je virtualno delo izraženo z napetostmi, torej z notranjo specifično površinsko obtežbo. Tako izraženo virtualno delo imenujemo *virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta\bar{D}$

$$\delta\bar{D} = V \sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx}, \quad (1.37)$$

S primerjavo enačb (1.34), (1.35) in (1.37) dobimo tako imenovani *izrek o virtualnem delu* ali *izrek o virtualnih pomikih*, ki pove, da je v ravnotežnem stanju telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil

$$\delta W = \delta\bar{D}. \quad (1.38)$$

Za praktično delo v mehaniki je bolj koristna naslednja oblika izreka o virtualnih pomikih:

Če je pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil, je telo v ravnotežju.

Izrek o virtualnem delu torej predstavlja drugačen zapis ravnotežnih enačb. Glede na to, da so ravnotežne enačbe v svoji izvorni obliki parcialne diferencialne enačbe, je zapis v obliki izreka o virtualnem delu pogosto znatno bolj ugoden.

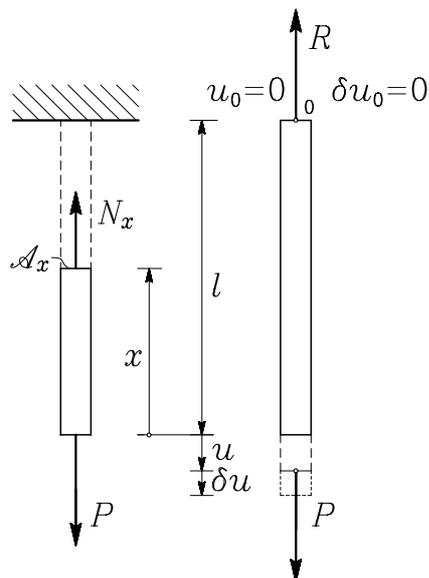
Delovanje izreka o virtualnem delu si oglejmo kar na primeru natezne palice, s katero se v tem poglavju že ves čas ukvarjamo (*slika 1.7*). Virtualno delo zunanjih sil je v tem primeru

$$\delta W = P \delta u. \quad (1.39)$$

Pri tem smo upoštevali, da v podpori 0 na palico sicer deluje reakcija R , vendar je njeno virtualno delo enako nič. Virtualni pomiki morajo namreč zadoščati kinematičnim robnim pogojem, zato je $\delta u_0 = 0$.

Virtualno delo notranjih sil izrazimo ob upoštevanju enačbe (1.37) takole

$$\delta\bar{D} = V \sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} = l A_x \sigma_{xx} \frac{\delta u}{l}. \quad (1.40)$$



Slika 1.7

Ker je $A_x \sigma_{xx} = N_x$, lahko pišemo

$$\delta \bar{D} = N_x \delta u \quad (1.41)$$

in iz izreka o virtualnem delu sledi

$$\delta W = \delta \bar{D} \quad \rightarrow \quad (P - N_x) \delta u = 0. \quad (1.42)$$

Virtualni pomik δu je poljuben, zato je enačba (1.42) izpolnjena le tedaj, ko velja

$$P - N_x = 0 \quad \rightarrow \quad N_x = P. \quad (1.43)$$

V enačbi (1.43) zlahka prepoznamo ravnotežni pogoj za poljuben del opazovane palice, kar potrjuje ugotovitev, da izrek o virtualnem delu nadomešča ravnotežne pogoje.

1.6 Dopolnilno virtualno delo. Izrek o virtualnih silah

Drug pomemben in koristen izrek spoznamo, če prosti konec opazovane palice, ki se je pod vplivom sile P premaknil v vzdolžni smeri za u , obtežimo z virtualno silo δP (slika 1.6.a). Virtualna sila je neodvisna od dejanske obtežbe in pomikov, zato lahko po zgledu enačbe (1.22) izračunamo delo δW^* , ki ga ta sila opravi na dejanskem pomiku u . To delo imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo zunanje sile*

$$\delta W^* = u \delta P. \quad (1.44)$$

Ob upoštevanju enačbe (1.25) lahko dopolnilno virtualno delo zapišemo tudi takole (slika 1.6.b)

$$\delta W^* = V \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx}. \quad (1.45)$$

kjer je ε_{xx} dejanska vzdolžna deformacija, ki je s kinematičnim pogojem povezana s pomikom u . $\delta \sigma_{xx}$ pa je *statično dopustna* virtualna vzdolžna normalna napetost, kar pomeni, da je napetost $\delta \sigma_{xx}$ povezana z virtualno silo δP z ravnotežnim pogojem

$$\delta \sigma_{xx} = \frac{\delta P}{A_x}. \quad (1.46)$$

Izraz na desni strani enačbe (1.45) imenujemo *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta \bar{D}^*$

$$\delta \bar{D}^* = V \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx}. \quad (1.47)$$

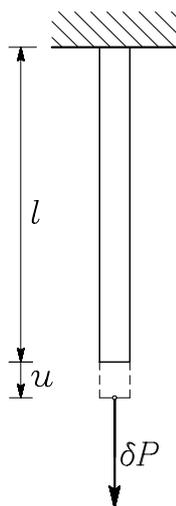
Enakost, ki sledi iz enačb (1.44) in (1.45), imenujemo *izrek o dopolnilnem virtualnem delu* oziroma *izrek o virtualnih silah*

$$\delta W^* = \delta \bar{D}^*. \quad (1.48)$$

Glede na potek izpeljave lahko izrek o dopolnilnem virtualnem delu povzamemo takole:

Če je pri statično dopustni virtualni obtežbi izpolnjen izrek o dopolnilnem virtualnem delu, tedaj sta dejanska deformacija in dejanski pomik povezana s kinematičnim pogojem.

Uporabo izreka o dopolnilnem virtualnem delu si spet oglejmo na primeru natezne palice (slika 1.8).



Slika 1.8

Ob upoštevanju enačb (1.44) do (1.47) in izreka (1.48) sledi

$$u \delta P = l A_x \varepsilon_{xx} \frac{\delta P}{A_x}$$

in po ureditvi

$$(u - l \varepsilon_{xx}) \delta P = 0. \quad (1.49)$$

Ker je δP poljubna virtualna sila, je enačba (1.49) izpolnjena le, če je izraz v oklepaju enak nič. Tedaj velja

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u}{l}, \quad (1.50)$$

kar je dokaz, da dejanski pomik u in vzdolžna deformacija ε_{xx} zadoščata kinematičnemu pogoju obravnavanega preprostega primera. Še bolj koristno ugotovitev ponuja naslednji zapis izreka o dopolnilnem virtualnem delu

$$\delta W^* = u \delta P = \delta \bar{D}^*, \quad (1.51)$$

kjer vzamemo enotsko virtualno silo $\delta P = 1$

$$\delta P = 1 \quad \rightarrow \quad u = \delta \bar{D}^*. \quad (1.52)$$

To pomeni, da je v primeru, da za virtualno silo izberemo velikost 1, vrednost pripadajočega dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil $\delta \bar{D}^*$ že kar enaka velikosti pomika v prijemališču in v smeri delovanja privzete virtualne sile. Ta ugotovitev ima daljnosežne in zelo ugodne posledice pri vrsti nalog, pri katerih je treba določiti pomike ali zasuke posameznih diskretnih točk konstrukcijskih elementov. Za opazovano palico bi ob upoštevanju znanih enačb nosilca dobili

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N_x}{EA_x} \quad \text{in} \quad \delta \sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x}, \quad (1.53)$$

tako da je

$$u = \delta \bar{D}^* = l A_x \frac{N_x}{EA_x} \frac{\delta N_x}{A_x}$$

in po ureditvi

$$u = l \frac{N_x \delta N_x}{EA_x} = l \frac{N_x(P) \delta N_x (\delta P = 1)}{EA_x}. \quad (1.54)$$

Poudarili smo, da je N_x dejanska osna sila v palici, ki se pojavi zaradi delovanja zunanje obtežbe P , δN_x pa je osna sila, ki pripada enotski virtualni sili $\delta P = 1$. V našem primeru je $N_x = P$ in $\delta N_x = 1$ in iz enačbe (1.54) sledi

$$u = P \frac{l}{EA_x}, \quad (1.55)$$

kar se ujema z enačbo (1.4).

Z enačbo (1.44) smo zapisali dopolnilno virtualno delo zunanjih sil, z enačbo (1.47) pa virtualno delo notranjih sil pri enoosnem napetostnem stanju, kakršno vlada v natezni palici. Obe enačbi posplošimo za

primer, da v poljubnem trdnem telesu vlada prostorsko napetostno in deformacijsko stanje

$$\begin{aligned}\delta W^* &= \oint_{\mathcal{S}} \delta \mathbf{p}_n \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{v} \mathbf{u} dV \\ \delta \bar{D}^* &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \delta \boldsymbol{\sigma}_i dV.\end{aligned}\tag{1.56}$$

Pri tem je \mathbf{u} polje pomikov, ki ga na obravnavanem telesu povzroči dejanska zunanja obtežba, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ pa so pripadajoči koordinatni vektorji majhnih deformacij. Z $\delta \mathbf{p}_n$ smo označili virtualno specifično površinsko obtežbo, z $\delta \mathbf{v}$ virtualno specifično prostorninsko obtežbo, z $\delta \boldsymbol{\sigma}_i$ pa pripadajoče napetosti. Še enkrat poudarimo, da je virtualna obtežba popolnoma neodvisna od dejanske obtežbe telesa. Virtualna obtežba mora biti *statično dopustna*; to pomeni, da morajo virtualne sile in virtualne napetosti zadoščati ravnotežnim pogojem

$$\begin{aligned}\mathcal{V} : \quad & \sum_i \frac{\partial \delta \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} + \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \mathcal{S} : \quad & \sum_i \delta \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{e}_{ni} = \delta \mathbf{p}_n.\end{aligned}\tag{1.57}$$

1.7 Določanje pomikov in zasukov z izrekom o virtualnih silah

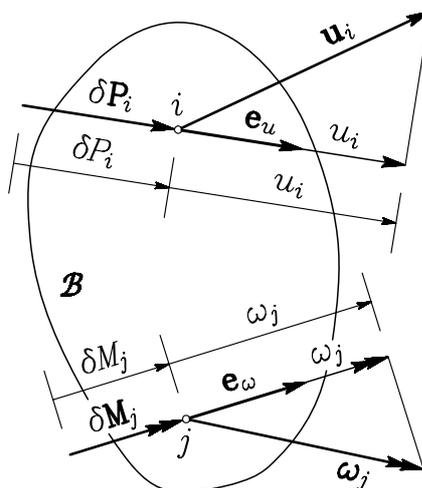
V okviru omejitve (1.57) lahko virtualno obtežbo izberemo povsem poljubno. Seveda je umestno izbrati virtualno obtežbo tako, da z njo na čim bolj preprost način določimo pomike in zasuke posameznih točk telesa. Zato dosledno vzamemo, da je virtualna prostorninska obtežba enaka nič, virtualno obtežbo mejne ploskve telesa \mathcal{S} pa sestavimo zgolj iz virtualnih točkovnih sil $\delta \mathbf{P}_i$ in virtualnih točkovnih dvojic $\delta \mathbf{M}_i$

$$\begin{aligned}\mathcal{V} : \quad & \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathcal{S} : \quad & \delta \mathbf{P}_i \cup \delta \mathbf{M}_i = \delta \mathbf{p}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).\end{aligned}\tag{1.58}$$

Pri tem smo vpeljali poenostavljen način označevanja prijemališč virtualnih sil in dvojic kar z zaporednimi naravnimi števili i ($i = 1, 2, \dots, n$). Oznaka $\delta\mathbf{P}_i$ oziroma $\delta\mathbf{M}_i$ tako pomeni, da virtualna sila in virtualna dvojica delujeta v točki i . Enako logiko označevanja uporabimo za pomike in zasuke, tako da sta \mathbf{u}_i in $\boldsymbol{\omega}_i$ pomik in zasuk, ki ju dejanska zunanja obtežba povzroči v točki i . S tem lahko dopolnilno virtualno delo zunanjih sil zapišemo takole

$$\delta W^* = \sum_i^n \mathbf{u}_i \delta\mathbf{P}_i + \sum_i^n \boldsymbol{\omega}_i \delta\mathbf{M}_i. \quad (1.59)$$

Naj bo naloga zastavljena takole: v točki i telesa \mathcal{B} je treba določiti pomik u_i v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_u , v točki j pa zasuk ω_j okoli osi, določene z enotskim vektorjem \mathbf{e}_ω (slika 1.9).



Slika 1.9

Reševanja se lotimo tako, da v točki i obtežimo telo z virtualno silo $\delta\mathbf{P}_i$, ki se po smeri ujema z enotskim vektorjem \mathbf{e}_u , v točki j pa z virtualno dvojico $\delta\mathbf{M}_j$, ki ima smer enotskega vektorja \mathbf{e}_ω . Če z δP_i in δM_j označimo velikosti vektorjev $\delta\mathbf{P}_i$ in $\delta\mathbf{M}_j$, lahko ta dva vektorja zapišemo takole

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{P}_i &= \delta P_i \mathbf{e}_u \\ \delta \mathbf{M}_j &= \delta M_j \mathbf{e}_\omega.\end{aligned}\tag{1.60}$$

Dopolnilno virtualno delo, ki ga virtualna zunanja obtežba opravi na dejanskih pomikih in zasukih, je tedaj

$$\delta W^* = \mathbf{u}_i \delta \mathbf{P}_i + \boldsymbol{\omega}_j \delta \mathbf{M}_j = \mathbf{u}_i \mathbf{e}_u \delta P_i + \boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega \delta M_j.\tag{1.61}$$

Skalarna produkta $\mathbf{u}_i \mathbf{e}_u$ in $\boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega$ predstavljata projekciji vektorjev \mathbf{u}_i in $\boldsymbol{\omega}_j$ na smeri \mathbf{e}_u in \mathbf{e}_ω , torej ravno iskani pomik in zasuk točk i in j

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i \mathbf{e}_u &= u_i \\ \boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega &= \omega_j.\end{aligned}\tag{1.62}$$

Dopolnilno virtualno delo zunanjih sil lahko sedaj zapišemo v skalarni obliki

$$\delta W^* = u_i \delta P_i + \omega_j \delta M_j\tag{1.63}$$

in ob upoštevanju izreka o virtualnih silah dobimo

$$\delta W^* = \delta \bar{D}^* \quad \rightarrow \quad u_i \delta P_i + \omega_j \delta M_j = \delta \bar{D}^*.\tag{1.64}$$

Virtualni obtežbi δP_i in δM_j lahko izberemo poljubno, na primer takole

$$\delta P_i = 1, \quad \delta M_j = 0$$

in iz enačbe (1.64) sledi

$$u_i = \delta \bar{D}^*(\delta P_i = 1, \delta M_j = 0).\tag{1.65}$$

Z izbiro

$$\delta P_i = 0, \quad \delta M_j = 1$$

pa dobimo

$$\omega_j = \delta \bar{D}^*(\delta P_i = 0, \delta M_j = 1).\tag{1.66}$$

Tako smo prišli do zelo preprostega pravila: pomik obravnavane točke telesa v predpisani smeri določimo tako, da telo v obravnavani točki

obtežimo z enotsko virtualno silo v izbrani smeri in izračunamo pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil $\delta\bar{D}^*$. Iskani pomik je po vrednosti kar enak dopolnilnemu virtualnemu delu, ki ga napetosti zaradi enotske virtualne obtežbe opravijo na dejanskih deformacijah telesa. Podobno ravnamo, če je treba v obravnavani točki telesa določiti zasuk okrog predpisane smeri v prostoru: točko obtežimo z enotsko virtualno dvojico v izbrani smeri in iskani zasuk izračunamo kot dopolnilno virtualno delo, ki ga pripadajoče virtualne napetosti opravijo na dejanskih deformacijah telesa.

1.7 Pomiki in zasuki diskretnih točk linijskega nosilca pri upogibu z osno silo

Kakor smo pokazali v prejšnjem razdelku, je računski postopek za določanje pomikov in zasukov posameznih točk telesa osredotočen na računanje dopolnilnega virtualnega dela $\delta\bar{D}^*$ pri premišljeno izbrani enotski virtualni obtežbi. Skalarni zapis druge od enačb (1.56)

$$\delta\bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} dV \quad (1.67)$$

pokaže, da moramo določiti deformacije ε_{ij} , ki ustrezajo dejanski zunanji obtežbi, ter napetosti $\delta\sigma_{ij}$, ki pripadajo virtualni obtežbi telesa.

Pri linijskem elementu je določanje dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil razmeroma preprosto, saj je v skladu z osnovnimi predpostavkami le deformacijska komponenta ε_{xx} različna od nič. V vsoti na desni strani enačbe (1.67) nam torej od devetih ostane en sam člen

$$\delta\bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta\sigma_{xx} dV \quad (1.68)$$

V poglavju 5.3 *Upogib ravnega nosilca z osno silo*† smo izpeljali enačbo

† Glej knjigo Srpčič, *Mehanika trdnih teles*, Ljubljana, 2003, str. 521.

za določanje vzdolžne normalne napetosti σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - y \frac{M_z}{I_z} + z \frac{M_y}{I_y}. \quad (1.69)$$

Upoštevajoč Hookov zakon $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ določimo deformacijo ε_{xx} z enačbo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{N_x}{EA_x} - y \frac{M_z}{EI_z} + z \frac{M_y}{EI_y}, \quad (1.70)$$

virtualne napetosti $\delta\sigma_{xx}$ pa analogno analogno z enačbo (1.69)

$$\delta\sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y}. \quad (1.71)$$

Pri linijskem nosilcu lahko trojni integral po prostorskem območju \mathcal{V} , ki nastopa v enačbi (1.68), izračunamo tako, da najprej integriramo po prečnem prerezu \mathcal{A}_x , nato pa še po dolžini elementa l . Upoštevamo, da je $dV = dA_x dx$ in dobimo

$$\begin{aligned} \delta\bar{D}^* = & \\ & \int_0^l \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{N_x}{EA_x} - y \frac{M_z}{EI_z} + z \frac{M_y}{EI_y} \right) \left(\frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y} \right) dA_x dx. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Notranje sile zaradi dejanske in zaradi virtualne obtežbe so funkcije koordinate x , zato se pri integriranju po prečnem prerezu \mathcal{A}_x obnašajo kot konstante. Zato lahko enačbo (1.72) zapišemo takole

$$\begin{aligned} \delta\bar{D}^* = & \int_0^l \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x^2} \int_{\mathcal{A}_x} dA_x - \frac{M_y \delta M_z + M_z \delta M_y}{EI_y I_z} \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x - \right. \\ & \frac{N_x \delta M_z + M_z \delta N_x}{EA_x I_z} \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x + \frac{N_x \delta M_y + M_y \delta N_x}{EA_x I_y} \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x + \\ & \left. \frac{M_y \delta M_y}{EI_y^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z^2} \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x \right) dx. \end{aligned} \quad (1.73)$$

V poglavju 5.3 *Upogib ravnega nosilca z osno silo*[†] smo vpeljali oznake za geometrijske karakteristike prečnega prereza \mathcal{A}_x

$$\begin{aligned}
 A_x &= \int_{\mathcal{A}_x} dA_x && \dots \text{ ploščina prečnega prereza } \mathcal{A}_x \\
 S_y &= \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x && \dots \text{ statični moment prečnega prereza } \\
 &&& \mathcal{A}_x \text{ glede na os } y \\
 S_z &= \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x && \dots \text{ statični moment prečnega prereza } \\
 &&& \mathcal{A}_x \text{ glede na os } z \\
 I_{yy} &= \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x && \dots \text{ vztrajnostni moment prečnega } \\
 &&& \text{ prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } y \\
 I_{zz} &= \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x && \dots \text{ vztrajnostni moment prečnega } \\
 &&& \text{ prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } z \\
 I_{yz} &= - \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x && \dots \text{ deviacijski vztrajnostni moment } \\
 &&& \text{ prečnega prereza } \mathcal{A}_x .
 \end{aligned}$$

Lokalni koordinatni sistem obravnavanega linijskega elementa lahko vedno izberemo tako, da sta osi y in z težiščni in glavni vztrajnostni osi prečnega prereza \mathcal{A}_x . Tedaj je $S_y = S_z = 0$ in $I_{yz} = 0$ in iz enačbe (1.73) sledi

$$\delta \bar{D}^* = \int_0^l \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx . \quad (1.74)$$

Dobili smo zelo preprosto pravilo za računanje dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil: določiti moramo produkte osnih sil in upogibnih momentov zaradi dejanske in zaradi virtualne obtežbe, jih reducirati s togostnimi karakteristikami in jih integrirati po celotni dolžini nosilca. Če imamo opraviti s sestavljeno linijsko konstrukcijo, na primer z okvirjem,

[†] Glej knjigo Srpčič, *Mehanika trdnih teles*, Ljubljana, 2003, str. 518-519.

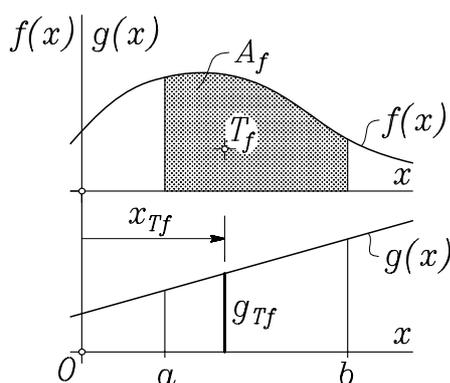
sestavljanim iz n linijskih elementov, izračunamo dopolnilno virtualno delo notranjih sil za celotno konstrukcijo z vsoto

$$\delta \bar{D}^* = \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx, \quad (1.75)$$

pri čemer smo z l_e označili dolžino linijskega elementa e .

1.8 Metoda Vereščagina

Ker za virtualno obtežbo dosledno izbiramo točkovne virtualne sile in dvojice, so notranje sile δN_x , δM_y in δM_z vedno odsekoma linearne funkcije. Integriranje produktov teh funkcij s funkcijami notranjih sil zaradi dejanske obtežbe N_x , M_y in M_z si lahko občutno olajšamo z uporabo tako imenovane *grafo-analične metode Vereščagina*.



Slika 1.10

Izračunati je treba integral

$$J = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad (1.76)$$

pri čemer je $f(x)$ poljubna gladka funkcija na intervalu $[a, b]$, $g(x)$ pa je poljubna linearna funkcija na tem intervalu (slika 1.10)

$$g(x) = \alpha + \beta x. \quad (1.77)$$

Integral J je tako

$$J = \int_a^b f(x)(\alpha + \beta x) dx, \quad (1.78)$$

oziroma, ker sta α in β konstanti

$$J = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b xf(x) dx. \quad (1.79)$$

Dobljeno enačbo zapišemo malo drugače

$$J = \int_a^b f(x) dx \left(\alpha + \beta \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \right). \quad (1.80)$$

Vpeljemo nove oznake

$$A_f = \int_a^b f(x) dx, \quad x_{Tf} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{in} \quad g_{Tf} = \alpha + \beta x_{Tf},$$

pri čemer A_f predstavlja ploščino lika, ki ga na intervalu $[a, b]$ določa funkcija $f(x)$, x_{Tf} je razdalja težišča omenjenega lika od ordnatne osi, g_{Tf} pa je vrednost funkcije $g(x)$ pri $x = x_{Tf}$.

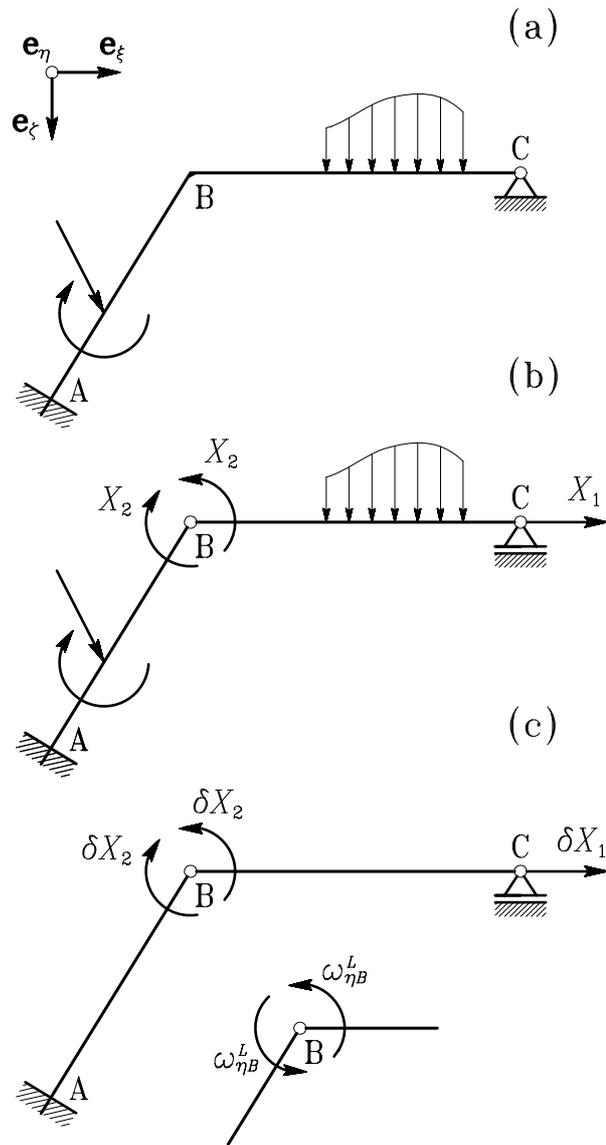
Tako smo prišli do preprostega pravila za izvednotenje integrala J

$$J = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \rightarrow \quad J = A_f g_{Tf}. \quad (1.81)$$

S tem smo pridobili zelo učinkovito orodje za praktično računanje pomikov in zasukov v posameznih točkah linijskih konstrukcij.

1.9 Metoda sil pri statično nedoločenih linijskih konstrukcijah

Uporabo *metode sil* si oglejmo na primeru preproste dvakrat statično nedoločene ravninske linijske okvirne konstrukcije (slika 1.11.a).



Slika 1.11

V konstrukcijo vpeljemo toliko dodatnih prostostnih stopenj, da postane statično določena, vendar kinematično stabilna. Ena od neskončno mnogo možnosti za sprostitev konstrukcije je prikazana na *sliki 1.11.b*. Ker imamo opraviti z dvakrat statično nedoločeno konstrukcijo, vpeljemo dve sprostitev: možnost vodoravnega pomika v podpori C in upogibni členek v stiku B. Tako smo dobili tako imenovano *statično določeno osnovno konstrukcijo* ali *delovni sistem*. Ta sistem mora biti v statičnem in kinematičnem pogledu enakovreden prvotni konstrukciji. Statično enakovrednost smo zagotovili s tem, da smo v točkah C in B, kjer smo vpeljali sprostitev, obtežili delovni sistem z nadomestnima zunanjsima silama X_1 in X_2 . S silo X_1 smo nadomestili vodoravno reakcijo, s katero nepomična podpora C deluje na prvotno konstrukcijo in preprečuje vodoravni pomik desnega krajišča prečke \overline{BC} . Z dvojicama X_2 pa nadomestimo notranji upogibni moment, s katerim v togem stiku B elementa \overline{AB} in \overline{BC} delujeta drug na drugega, in zagotavljata enak zasuk obeh elementov v točki B. Nadomestnih sil X_1 in X_2 zaenkrat še ne poznamo. Določimo ju iz pogojev za kinematično enakovrednost delovnega sistema in prvotne konstrukcije. V našem primeru gre za zahtevo, da mora biti vodoravni pomik nosilca v podpori C enak nič in da morata biti upogibna zasuka obeh stikajočih se elementov v točki B enaka med seboj. Ker se lokalna koordinatna sistema elementov konstrukcije ne ujemata med seboj, je ugodno vpeljati *skupni* ali *globalni koordinatni sistem* z bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, v katerem pogoja za kinematično enakovrednost zapišemo z enačbama

$$u_{\xi C} = 0 \quad (1.82)$$

$$\omega_{\eta B}^L = \omega_{\eta B}^D. \quad (1.83)$$

Z $\omega_{\eta B}^L$ in $\omega_{\eta B}^D$ smo označili zasuka okrog globalne osi η na "levi" in "desni" strani stika B. Pogoj (1.80) je očitno kinematični robni pogoj za smer ξ v nepomični vrtljivi podpori C. Pogoj (1.81) pa je po svoji naravi *kompatibilnostni pogoj*, saj zahteva enoličnost zasuka v točki B. Za nadaljnje delo ga je ugodno zapisati v naslednji obliki

$$\omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L = \Delta\omega_{\eta B} = 0, \quad (1.84)$$

torej kot zahtevo, da mora biti *medsebojni zasuk* v stiku B enak nič.

Pogoja (1.82) in (1.84) sestavljata sistem dveh enačb, iz katerih bomo izračunali neznani nadomestni sili X_1 in X_2 . Pomik in oba zasuk, ki nastopajo v teh enačbah, bi lahko izračunali z uporabo diferencialne enačbe za vzdolžni pomik in enačbe upogibnice, ki smo ju izpeljali v okviru elementarne teorije upogiba. Vendar nam izrek o virtualnih silah ponuja dosti bolj udobno pot, ki jo bomo spoznali v nadaljevanju. V ta namen obtežimo osnovno statično določeno konstrukcijo z virtualno silo δX_1 v točki C in z virtualnima dvojicama δX_2 v stiku B, kakor kaže *slika 1.11.c*. Virtualna obtežba je seveda povsem neodvisna od dejanske obtežbe in nadomestnih sil. Vendar se izkaže, da je ugodno izbrati virtualne sile tako, da se njihove smeri ujemajo s smermi nadomestnih sil X_1 in X_2 . Dopolnilno virtualno delo zunanjih sil je tedaj

$$\delta W^* = u_{\xi C} \delta X_1 + (\omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L) \delta X_2. \quad (1.85)$$

Upoštevali smo, da je dopolnilno virtualno delo, ki ga dvojica δX_2 opravi na dejanskem zasuku $\omega_{\eta B}^L$, negativno, saj sta smeri virtualne dvojice in dejanskega zasuca nasprotni med seboj.

Dopolnilno virtualno delo notranjih sil je v obravnavanem ravninskem primeru ($M_z = 0$) določeno z izrazom

$$\delta \bar{D}^* = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} \right) dx, \quad (1.86)$$

Ob predpostavki, da je konstrukcija linearno elastična, si zapis dopolnilnega virtualnega dela znatno olajšamo, če pri določitvi notranjih sil uporabimo zakon superpozicije. Tako osno silo kakor tudi upogibni moment izrazimo kot vsoto prispevkov dejanske zunanje obtežbe ter obeh nadomestnih sil

$$\begin{aligned} N_x &= N_x(p) + N_x(X_1) + N_x(X_2) \\ M_y &= M_y(p) + M_y(X_1) + M_y(X_2), \end{aligned} \quad (1.87)$$

kjer smo z $N_x(p)$ in $M_y(p)$ označili skupna prispevka celotne dejanske zunanje obtežbe k osni sili N_x oziroma upogibnemu momentu M_y . V nadaljevanju uporabljamo za omenjena prispevka še bolj pregledni označbi

$$N_{xp} = N_x(p) \quad \text{in} \quad M_{yp} = M_y(p). \quad (1.88)$$

Zapise notranjih sil dodatno poenostavimo z vpeljavo tako imenovanih *normiranih notranjih sil*, ki bi nastopile v osnovni statično določeni konstrukciji, če bi jo obtežili z enotsko nadomestno silo $X_1 = 1$ oziroma z enotskima dvojicama $X_2 = 1$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x1} &= N_x(X_1 = 1) & \bar{M}_{y1} &= M_y(X_1 = 1) \\ \bar{N}_{x2} &= N_x(X_2 = 1) & \bar{M}_{y2} &= M_y(X_2 = 1). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Ker je

$$\begin{aligned} N_x(X_1) &= X_1 N_x(X_1 = 1) & M_y(X_1) &= X_1 M_y(X_1 = 1) \\ N_x(X_2) &= X_2 N_x(X_2 = 1) & M_y(X_2) &= X_2 M_y(X_2 = 1), \end{aligned} \quad \text{in} \quad (1.90)$$

preideta enačbi (1.87) v pregledno obliko

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xp} + X_1 \bar{N}_{x1} + X_2 \bar{N}_{x2} \\ M_y &= M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Ker smo za virtualni sili δX_1 in δX_2 izbrali enaki smeri kot za X_1 in X_2 , lahko podobno kakor dejansko osno silo in dejanski upogibni moment izrazimo tudi virtualno osno silo in virtualni upogibni moment

$$\begin{aligned} \delta N_x &= \delta X_1 \bar{N}_{x1} + \delta X_2 \bar{N}_{x2} \\ \delta M_y &= \delta X_1 \bar{M}_{y1} + \delta X_2 \bar{M}_{y2}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Izraz (1.86) za dopolnilno virtualno delo notranjih sil lahko sedaj zapišemo takole

$$\begin{aligned} \delta \bar{D}^* = & \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left[\frac{1}{EA_x} (N_{xp} + X_1 \bar{N}_{x1} + X_2 \bar{N}_{x2}) (\delta X_1 \bar{N}_{x1} + \delta X_2 \bar{N}_{x2}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{EI_y} (M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}) (\delta X_1 \bar{M}_{y1} + \delta X_2 \bar{M}_{y2}) \right] dx . \end{aligned} \quad (1.93)$$

Po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} \delta \bar{D}^* = & \delta X_1 \left[X_1 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx + \right. \\ & X_2 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx + \\ & \left. \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \right] + \\ & \delta X_2 \left[X_1 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx + \right. \\ & X_2 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx + \\ & \left. \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \right] \quad (1.94) \end{aligned}$$

Integrale, ki nastopajo v dobljeni enačbi, lahko izračunamo vnaprej, saj se nanašajo na statično določeni osnovni sistem. Z oznakami

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{12} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx \\
 b_1 &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{21} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{22} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx \\
 b_2 &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} M_{yp}}{EI_y} \right) dx
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

lahko izraz (1.95) za dopolnilno virtualno delo notranjih sil zapišemo na kratko

$$\delta \bar{D}^* = \delta X_1 (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1) + \delta X_2 (a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2) \tag{1.96}$$

in ga v skladu z izrekom o dopolnilnem virtualnem delu izenačimo z dopolnilnim virtualnim delom zunanjih sil, ki smo ga že določili z enačbo (1.85). Tako dobimo

$$\begin{aligned}
 dWk = \delta \bar{D}^* : \quad & \delta X_1 (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 - u_{\xi C}) + \\
 & \delta X_2 (a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2 - \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L) = 0 \quad (1.97)
 \end{aligned}$$

Pri poljubni izbiri virtualnih sil δX_1 in δX_2 je enačba (1.97) izpolnjena le v primeru, da sta oba izraza v okroglih oklepajih enaka nič. Tedaj

velja

$$\begin{aligned} u_{\xi C} &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 \\ \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Tako smo določili vodoravni pomik $u_{\xi C}$ in medsebojni zasuk $\Delta\omega_{\eta} = \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L$ v odvisnosti od dejanske zunanje obtežbe in nadomestnih sil X_1 in X_2 . Upošteva je zakon superpozicije zlahka prepoznamo fizikalni pomen posameznih koeficientov v gornjih enačbah:

- a_{11} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročila sila $X_1 = 1$,
- a_{12} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročili dvojici $X_2 = 1$,
- b_1 je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročila celotna dejanska zunanja obtežba nosilca,
- a_{21} je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročila sila $X_1 = 1$,
- a_{11} je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročili dvojici $X_2 = 1$,
- b_1 je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročila celotna dejanska zunanja obtežba nosilca.

Iz druge in četrte od enačb (1.95) tudi vidimo, da sta koeficienta a_{12} in a_{21} enaka med seboj.

V našem primeru iz robnega pogoja (1.82) in kompatibilnostnega pogoja (1.84) sledi, da je $u_{\xi C} = 0$ in $\Delta\omega_{\eta} = \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L = 0$. Sistem (1.98) se s tem glasi

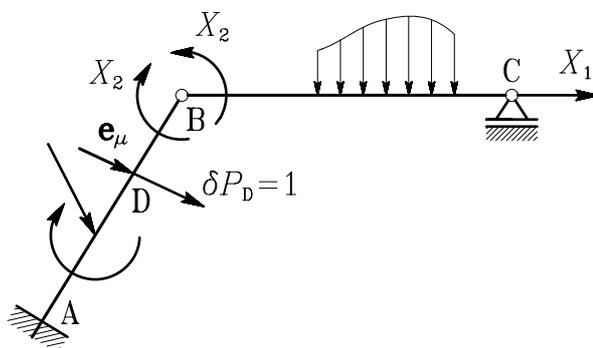
$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 &= 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Koeficiente a_{11}, \dots, a_{22} in prosta člena (desni strani) b_1 in b_2 smo določili z enačbami (1.95). Tako smo dobili sistem dveh linearnih algebrskih enačb, iz katerih s katero od znanih metod določimo nadomestni zunanji sili X_1 in X_2 . S tem poznamo celotno zunanjo obtežbo osnovne statično določene konstrukcije (*slika 1.11.b*). Reakcije določimo z ravnotežnimi pogoji, notranje sile pa z enačbama (1.87).

Nalogo lahko sedaj še razširimo z zahtevo, da je treba določiti, na primer, pomik točke D v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_μ (slika 1.12). V skladu z dosedanjimi ugotovitvami obtežimo osnovno statično določeno konstrukcijo v točki D z virtualno silo $\delta P_D = 1$ v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_μ in izračunamo iskani pomik u_μ kot pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil

$$u_\mu = \delta \bar{D}^*(p, X_1, X_2, \delta P_D = 1) = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} \right) dx. \quad (1.100)$$

N_x in M_y sta osna sila in upogibni moment, ki pripadata dejanski zunanji obtežbi na prvotni statično nedoločeni konstrukciji, vendar ju ob upoštevanju zakona superpozicije lahko izračunamo na osnovnem statično določenem sistemu z enačbama (1.85), saj sta sedaj X_1 in X_2 znani zunanji sili. Prav tako na osnovnem statično določenem sistemu izračunamo virtualno osno silo $\delta N_x(\delta P_D = 1)$ in virtualni upogibni moment $\delta M_y(\delta P_D = 1)$.



Slika 1.12

Ugotovitev, da tudi notranje sile zaradi virtualne obtežbe določamo kar na statično določeni osnovni konstrukciji, je znana kot *redukcijsko pravilo* in znatno olajšuje računanje pomikov in zasukov statično nedoločenih konstrukcij.

enačbe v obliki (1.101) ugodne tudi za obravnavanje problemov, pri katerih so v posameznih točkah konstrukcije predpisani pomiki in zasuki, na primer pri posedanju podpor ali vodenju pomikov pri eksperimentih.

Iz enačb (1.101) določimo nadomestne sile X_1, X_2, \dots, X_n , nato pa po analogiji z enačbama (1.87) še osne sile in upogibne momente

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xp} + \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} X_i \\ M_y &= M_{yp} + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} X_i. \end{aligned} \tag{1.104}$$

Metoda sil je ena od temeljnih metod za določanje reakcij, notranjih sil ter pomikov in zasukov linijskih konstrukcij. Še posebej je primerna za hitro statično analizo linijskih konstrukcij z nizko stopnjo statične nedoločenosti.