Porazdelitve ekstremnih vrednosti

Dejan Zupan in Goran Turk

27. marec 2001

Povzetek

Obravnavamo porazdelitve ekstremnih vrednosti, kot zelo pomembne porazdelitve na področjih, kjer nas večinoma zanimajo le ekstremni pojavi. V gradbeništvu nas običajno zanimajo le ekstremni pojavi, saj moramo konstrukcije in druge gradbeniške objekte projektirati prav za primere ekstremnih pojavov, kot so največji pretoki vodotokov, najhujša neurja, nejhitrejši veter, katastrofalni potresi... Prispevek je razdeljen v tri dele. V prvem spoznamo osnovne značilnosti porazdelitev slučajnih spremenljivk, ki jih bomo uporabili v naslednjih dveh delih. V drugem delu izpeljemo porazdelitve ekstrma končno mnogih slučajnih spremenljivk in obravnavamo lastnosti tako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. V zadnjem in najpomembnejšem delu na relativno preprost način izpeljemo asimptotične porazdelitve ekstremnih vrednosti in predstavimo njihove lastnosti. Ta del zaključulemo s preglednico, v kateri so zajete porazdelitvene funkcije, gostote verjetnosti ter momenti vseh treh tipov porazdelitev ekstremnih vrednosti.

Kazalo

1 Osnovne definicije in značilnosti

Definicija 1 *Naj bodo X_i, $i = 1,...,n$ enako porazdeljene, neodvisne slučajne spremenljivke. Porazdelitveni funkciji slučajnih spremenljivk Y in Z, definirani kot*

$$Y = \max_i X_i,$$
$$Z = \min_i X_i,$$

imenujemo porazdelitvi ekstremnih vrednosti.

Trditev 1 *Naj bo $F_X(x)$ porazdelitvena funkcija neodvisnih slučajnih spremenljivk X_i, $i = 1, \ldots, n$. Potem za porazdelitveno funkcijo $F_Y(y)$ slučajne spremenljivke Y velja*

$$F_Y(y) = F_X^n(x).$$

Dokaz: Po definiciji porazdelitvene funkcije je

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left[Y < y\right] = P\left[\max_i X_i < y\right] \\ &= P\left[X_1 < y \cap X_2 < y \cap \ldots \cap X_n < y\right] \\ &= P\left[X_1 < y\right] \cdot P\left[X_2 < y\right] \cdots P\left[X_n < y\right] = \prod_{i=1}^{n} F_X(y), \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da so slučajne spremenljivke medsebojno neodvisne. Ker so tudi enako porazdeljene, je

$$F_Y(y) = \prod_{i=1}^{n} F_X(y) = F_X^n(y).$$

□

Trditev 2 *Naj bo $F_X(x)$ porazdelitvena funkcija slučajnih spremenljivk X_i, $i = 1, \ldots, n$. Potem za porazdelitveno funkcijo $F_Z(z)$ slučajne spremenljivke Z velja*

$$F_Z(z) = 1 - \left(1 - F_X(z)\right)^n.$$

Dokaz: Po definiciji porazdelitvene fukcije je

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\left[Z < z\right] = P\left[\min_i X_i < z\right] \\ &= 1 - P\left[\min_i X_i \geq z\right] = 1 - P\left[X_1 \geq z \cap X_2 \geq z \cap \ldots \cap X_n \geq z\right] \\ &= 1 - \left(1 - F_X(z)\right)^n \end{aligned}$$

□

Posledica 1 *Če so slučajne spremenljivke X_i zvezne, je gostota verjetnosti slučajne spremenljivke Y enaka*

$$f_Y(y) = nF_X^{n-1}(y) f_X(y) .$$

Dokaz: Porazdelitvena funkcija je z gostoto verjetnosti povezana prek enačbe

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(\tilde{y}) d\tilde{y} \quad \text{oziroma} \quad f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}.$$

Torej dobimo gostoto z odvajanjem porazdelitvene funkcije. Preostanek sledi iz lastnosti odvoda posredne fukcije. □

Opomba 1 *Ektremna vrednost je poseben primer* vrstilnih statistik*, ki jih določimo takole: Naj bodo X_i, $i = 1, \ldots, n$ enako porazdeljene, neodvisne slučajne spremenljivke. Naj bo slučajna spremenljivka Y_k k-ta izmed slučajnih spremenljivk X_i, ki jih uredimo po velikosti. $Y_1, \ldots, Y_n$ imenujemo* vrstilne statistike*; prva izmed njih je ravno slučajna spremenljivka Z, zadnja pa Y.*

2 Ekstremi končnega števila slučajnih spremenljivk

2.1 Lastnosti ekstremnih vrednosti

Nesimetrija gostote verjetnosti porazdelitve Simetrija gostote verjetnosti slučajnih spremenljivk X_i se pri Y in Z ne podeduje:

Trditev 3 *Če je gostota verjetnosti slučajnih spremenljivk X_i simetrična glede na $x = 0$*

$$f_X(x) = f_X(-x) ,$$

gostoti $f_Y(y)$ in $f_Z(z)$ nista simetrični za $n > 1$.

Najprej si oglejmo, kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke s simetrično gostoto

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \int_{-\infty}^{0} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} + \int_{0}^{x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

$$F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \int_{-\infty}^{0} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} + \int_{0}^{-x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

Vsota obeh funkcij je zaradi simetrije $f_X(x)$

$$\begin{aligned} F_X(x) + F_X(-x) &= 2\int_{-\infty}^{0} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} + \int_{0}^{x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} + \int_{0}^{-x} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} \\ &= 2\int_{-\infty}^{0} f_X(\tilde{x})\, d\tilde{x} = 2\frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Zaključimo lahko: Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke je simetrična natanko tedaj, ko za porazdelitev velja

$$F_X(-x) = 1 - F_X(x) \,. \tag{1}$$

V eno smer smo zaključek že dokazali, druga pa je zelo preprosta, saj sledi direktno iz odvoda po x na levi in desni strani enačbe (1).

Dokaz: Sedaj dokažimo trditev. Dovolj je preveriti zvezo med $F_Y(-y)$ in $F_Y(y)$:

$$\begin{aligned} F_Y(-y) &= F_X^n(-y) \\ &= (1 - F_X(y))^n \,. \end{aligned}$$

Ker za $n \neq 1$ velja

$$(1 - F_X(y))^n \neq 1 - F_X^n(y),$$

porazdelitev $F_Y(y)$ ni simetrična. □

Simetrijo torej pokvarimo, vendar pa obstaja preprosta zveza med gostoto verjetnosti maksimalne in minimalne ekstremne vrednosti.

Trditev 4 *Če je gostota X_i simetrična glede na $x = 0$, sta gostoti verjetnosti slučajnih spremenljivk Y in Z medsebojno simetrični glede na os $y = 0$:*

$$f_Y(y) = f_Z(-y) \,.$$

Dokaz: Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke $f_Y(y)$ je

$$f_Y(y) = n\, F_X^{n-1}(y) f_X(y) \,,$$

medtem ko za $f_Z(z)$ velja

$$f_Z(z) = n\,(1 - F_X(z))^{n-1} f_X(z)$$

Ker so gostote X_i simetrične, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= n\,(F_X(-z))^{n-1} f_X(z) \\ &= n\, F_X^{n-1}(-z)\, f_X(-z) = f_Y(-z) \,. \end{aligned}$$

Če naredimo še substitucijo $z = -y$, je dokaz končan. □

Posledica 2 *Naj bodo X_i zvezne, enako porazdeljene neodvisne slučajne spremenljivke, ne nujno simetrične. Če je $f_Z(z)$ gostota verjetnosti minimuma slučajnih spremenljivk X_i, potem je $f_Z(-y)$ gostota verjetnosti maksimuma slučajnih spremenljivk $-X_i$.*

Dokaz: Ker gostota verjetnosti X_i ni več nujno simetrična, povežemo med sabo porazdelitvi in gostoti verjetnosti slučajnih spremenljivk X_i in $-X_i$. Za porazdelitvi velja

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P[X < x] = P[-X > -x] \\ &= 1 - P[-X \leq -x] = 1 - F_{-X}(-x), \end{aligned}$$

za gostoti pa

$$f_X(x) = f_{-X}(-x).$$

Porazdelitev minimuma slučajnih spremenljivk lahko ob izpeljanih zvezah zapišemo kot

$$\begin{aligned} f_Z(-y) &= n\,(1 - F_X(-y))^{n-1}\, f_X(-y) \\ &= n\,(1 - (1 - F_{-X}(y)))^{n-1}\, f_{-X}(y) \\ &= n\, F_{-X}^{n-1}(y)\, f_{-X}(y) = f_{-Y}(y), \end{aligned}$$

kjer smo z $-Y$ označili slučajno spremenljivko $-Y = \max_i(-X_i)$. □

Posledica 2 je bistvena pri porazdelitvah ekstremnih vrednosti, saj je dovolj tudi za nesimetrične slučajne spremenljivke računati zgolj eno od ekstremnih porazdelitev. Z drugimi besedami: če sta gostoti verjetnosti dveh družin enako porazdeljenih, neodvisnih slučajnih spremenljivk zrcalni glede na os y, je gostota verjetnosti maksimuma prve družine ravno gostota verjetnosti minimuma druge in obratno.

Ekstremi transformiranih slučajnih spremenljivk Če poznamo funkcijsko zvezo med dvema slučajnima spremenljivkama $V = g(X)$, poznamo tudi zvezo med porazdelitvama in gostotama verjetnosti obeh slučajnih spremenljivk

$$F_V(v) = F_X(g^{-1}(v)),$$

kjer je $g(x)$ poljubna monotono naraščajoča funkcija. Naslednja enačba, s katero zapišemo gostoto verjetnosti funkcije slučajne spremenljivke,

$$f_V(v) = f_X(g^{-1}(v)) \left| \frac{dg^{-1}(v)}{dv} \right|$$

pa velja za poljubne monotone funkcije $g(x)$. Enačbo lahko uporabimo tudi za gostote verjetnosti ekstremnih vrednosti.

Trditev 5 *Naj bodo X_i, $i = 1,\ldots,n$ enako porazdeljene, neodvisne slučajne spremenljivke. Naj bo g monotona in odvedljiva funkcija. Potem za gostote verjetnosti ekstremnih vrednosti slučajnih spremenljivk $V_i = g(X_i)$ velja*

$$f_U(u) = f_Y(g^{-1}(u)) \left| \frac{dg^{-1}(u)}{du} \right|,$$

za maksimalno vrednost $U = \max_i V_i$, *oziroma*

$$f_W(w) = f_Z(g^{-1}(w)) \left| \frac{dg^{-1}(w)}{dw} \right|,$$

za minimalno vrednost $W = \min_i V_i$, *kjer sta* $f_Y(y)$ *in* $f_Z(z)$ *gostoti verjetnosti minimuma in maksimuma slučajnih spremenljivk* X_i, $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz: Dokaz sledi neposredno iz izraza za gostoto verjetnosti ekstremnih vrednosti. Dokažimo le prvi del, saj je drugi povsem analogen.

$$\begin{aligned} f_U(u) &= nF_V^{n-1}(u) f_V(u) \\ &= nF_X(g^{-1}(u)) f_X(g^{-1}(u)) \left| \frac{dg^{-1}(u)}{du} \right| \\ &= f_Y(g^{-1}(u)) \left| \frac{dg^{-1}(u)}{du} \right|. \end{aligned}$$

□

2.2 Vpliv razpršenosti na ekstremne vrednosti

Radi bi ugotovili, kako velikost variance vpliva na ekstremne vrednosti. V ta namen, podobno kot pri centralnem limitnem izreku, ne obravnavamo slučajnih spremenljivk X_i, temveč zapišemo standardizirane slučajne spremenljivke

$$X_i' = \frac{X_i - E[X_i]}{\sqrt{var[X_i]}}.$$

Definiramo ekstremno slučajno spremenljivko

$$Y' = \max_i X_i' = \max_i \frac{X_i - E[X_i]}{\sqrt{var[X_i]}}.$$

Matematično upanje Y lahko sedaj izrazimo z upanjem Y'

$$\begin{aligned} E[Y'] &= E\left[\max_i \frac{X_i - E[X_i]}{\sqrt{var[X_i]}}\right] = E\left[\frac{\max_i X_i - E[X]}{\sqrt{var[X]}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{var[X]}} E\left[\max_i X_i\right] - \frac{E[X]}{\sqrt{var[X]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{var[X]}} E[Y] - \frac{E[X]}{\sqrt{var[X]}} \end{aligned}$$

$$E[Y] = E[X] + \sqrt{var[X]}\, E[Y'].$$

Matematično upanje $E[Y]$ raste s številom slučajnih spremenljivk. Vzrok za to je v osnovni lastnosti matematičnega upanja, da ima nenegativno vrednost za slučajno spremenljivko z zalogo vrednosti $x \geq 0$:

$$E[X] \geq 0 \quad \text{za } x \geq 0.$$

Gotovo velja

$$\max_{i \leq n} X_i \leq \max_{i \leq n+1} X_i,$$

saj iščemo na desni strani maksimum po večji množici, ki vsebuje množico na levi. Če neenačbo zapišemo drugače

$$\max_{i \leq n+1} X_i - \max_{i \leq n} X_i \geq 0,$$

je to neka slučajna spremenljivka z nenegativno zalogo vrednosti, torej velja

$$E\left[\max_{i \leq n+1} X_i - \max_{i \leq n} X_i\right] \geq 0. \tag{2}$$

Po lastnostih matematičnega upanja je

$$E\left[\max_{i \leq n+1} X_i - \max_{i \leq n} X_i\right] = E\left[\max_{i \leq n+1} X_i\right] - E\left[\max_{i \leq n} X_i\right]. \tag{3}$$

Če združimo (2) in (3), dobimo

$$E\left[\max_{i \leq n} X_i\right] \leq E\left[\max_{i \leq n+1} X_i\right],$$

kar pomeni, da je matematično upanje ekstremne vrednosti naraščajoče z rastjo n. Ker sta $E[X]$ in $\sqrt{var[X]}$ konstanti, neodvisni od n, je rast $E[Y]$ natanko določena z rastjo $E[Y']$.

Vzemimo sedaj dve družini (populaciji) slučajnih spremenljivk; $X_i^{(1)}$ in $X_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, n$. Slučajne spremenljivke obeh družin morajo imeti pozitivno zalogo vrednosti. Privzemimo, da so slučajne spremenljivke $X_i^{(1)}$ enako porazdeljene s porazdelitvijo $F_{X^{(1)}}(x)$, ter da so tudi $X_i^{(2)}$ enako porazdeljene s porazdelitvijo $F_{X^{(2)}}(x)$. Privzemimo, da gre pri porazdelitvah $F_{X^{(1)}}(x)$ in $F_{X^{(2)}}(x)$ za isto porazdelitev z različnimi parametri. Torej sta to v splošnem dve različni, a po obliki podobni funkciji. Predpostavka je smiselna; če merimo isto količino pri različnih populacijah, pričakujemo podobni porazdelitvi. Z $m_X^{(1)}$ označimo matematično upanje prve družine spremenljivk, z $m_X^{(2)}$ pa matematično upanje druge družine. Standardni deviaciji označimo z $\sigma_X^{(1)}$ in $\sigma_X^{(2)}$. $F_{X^{(1)}}(x)$ in $F_{X^{(2)}}(x)$ povežemo s porazdelitvima "standariziranih" slučajnih spremenljivk z enačbama

$$F_{X^{(1)}}(x) = F_{X'^{(1)}}\left(\frac{x - m_X^{(1)}}{\sigma_X^{(1)}}\right)$$

$$F_{X^{(2)}}(x) = F_{X'^{(2)}}\left(\frac{x - m_X^{(2)}}{\sigma_X^{(2)}}\right).$$

Privzeli smo, da je $F_{X'^{(1)}}(u) = F_{X'^{(2)}}(u)$, torej da sta "standarizirani" porazdelitvi enaki. Potem je seveda tudi

$$E\left[Y'^{(1)}\right] = E\left[Y'^{(2)}\right].$$

Naj bo $m_X^{(1)} > m_X^{(2)}$ in $\sigma_X^{(1)} < \sigma_X^{(2)}$, potem ob vseh navedenih predpostavkah obstaja taka velikost vzorca, da bo

$$E\left[Y^{(1)}\right] < E\left[Y^{(2)}\right].$$

Primer 1 *Najbolj nazorno opažamo ta pojav v hidrologiji. Reka z majhno povprečno letno višino vode in veliko standardno deviacijo bo v večjem številu let povzročila hujšo poplavo kot reka z večjo povprečno letno višino vode in majhno standardno deviacijo.*

2.3 Zgornja meja matematičnega upanja največjih vrednosti

Ta razdelek je zanimiv, ker v osnove verjetnostnega računa vključuje variacijski račun. Iščemo zgornjo mejo (maksimum) matematičnega upanja maksimuma n slučajnih spremenljik:

$$\max\left(E\left[\max_i X_i\right]\right).$$

Slučajne spremenljivke X_i naj bodo definirane na celi realni osi. Potem je tudi $Y = \max_i X_i$ definirana na celi realni osi. Izpeljati želimo izraz za maksimum vrednosti $E[Y]$ v odvisnosti od števila n slučajnih spremenljivk. Z variacijskimi principi poiščemo takšno porazdelitveno funkcijo F_X slučajnih spremenljivk X_i, da je vrednost $E[Y]$ največja. Ob tem privzamemo, da poznamo matematično upanje in varianco X_i. Osnovni parameter variacije je torej porazdelitev.

Naj bodo X_i, $i = 1,\ldots,n$ enako porazdeljene, neodvisne zvezne slučajne spremenljivke. Zahtevamo še obstoj prvega in drugega momenta slučajnih spremenljivk X_i.

Matematično upanje slučajne spremenljivke Y je po definiciji

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x)\,dx = n\int_{-\infty}^{\infty} x F_X^{n-1}(x) f_X(x)\,dx \\ &= n\int_0^1 x F_X^{n-1}(x) dF_X, \end{aligned} \tag{4}$$

tu smo spet uporabili zvezo med porazdelitvami X_i in Y in uporabili substitucijo $dF_X = f_X(x)\,dx$. Izrazimo še varianco Y.

$$\begin{aligned} var[Y] &= E\left[(Y - E[Y])^2\right] \\ &= n\int_0^1 (x - E[Y])^2 F_X^{n-1}(x) dF_X. \end{aligned}$$

Iščemo ekstrem $E[Y]$ ob dveh vezeh: matematičnemu upanju in varianci slučajnih spremenljivk X_i

$$E[X_i] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^1 x dF_X$$
$$var[X_i] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)\, dx = \int_0^1 (x - E[X])^2 dF_X.$$

Vezane ekstreme rešujemo z metodo Lagrangevih množiteljev. Tako iščemo prvo variacijo integrala

$$E[Y, \lambda_1, \lambda_2] = \int_0^1 \left(nxF_X^{n-1} - \lambda_1 x^2 - \lambda_2 x\right) dF_X.$$

Pri variacijskem računu moramo biti zelo pozorni kaj variiramo. Osnovna spremenljivka je x, v integralu pa nastopata še F in F' kot funkciji x. Nalogo smo zastavili kot iskanje tiste porazdelitve F, ki nam da ekstremno vrednost. V smislu variacijskega računa torej iščemo ekstrem funkcionala

$$\Phi(F) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x, F(x), F'(x)\right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(nxF_X^{n-1} - \lambda_1 x^2 - \lambda_2 x\right) F_X' dx, \tag{5}$$

pri tem zaenkrat obravnavamo množitelja λ_1 in λ_2 kot parametra.

Stacionarne točke variacijske naloge (5) dobimo kot rešitve Eulerjeve diferencialne enačbe

$$\frac{d}{dF} g\left(x, F(x), F'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dF'} g\left(x, F(x), F'(x)\right)\right], \tag{6}$$

za znani integrand

$$g\left(x, F(x), F'(x)\right) = \left(nxF_X^{n-1} - \lambda_1 x^2 - \lambda_2 x\right) F_X'. \tag{7}$$

Ko (7) vstavimo v (6) dobimo

$$n(n-1)\, xF_X^{n-2} F_X' = \frac{d}{dx}\left[nxF_X^{n-1} - \lambda_1 x^2 - \lambda_2 x\right]$$
$$n(n-1)\, xF_X^{n-2} F_X' = n(n-1)\, xF_X^{n-2} F_X' + nF_X^{n-1} - 2\lambda_1 x - \lambda_2$$
$$0 = nF_X^{n-1} - 2\lambda_1 x - \lambda_2.$$

Iz Eulerjeve enačbe lahko izrazimo F kot funkcijo x, še bolj elegantno pa je, če izrazimo x kot funkcijo F

$$x = \frac{nF_X^{n-1} - \lambda_2}{2\lambda_1}$$

in ga vstavimo v (4):

$$\begin{aligned}E[Y] &= \frac{n}{2\lambda_1}\int_0^1 \left(nF_X^{n-1}-\lambda_2\right) F_X^{n-1} dF_X = \\ &= \frac{n}{2\lambda_1}\int_0^1 \left(nF_X^{2n-2}-\lambda_2 F_X^{n-1}\right) dF_X \\ &= \frac{n}{2\lambda_1}\left[n\frac{F_X^{2n-1}}{2n-1}-\lambda_2\frac{F_X^n}{n}\right]_0^1 = \\ &= \frac{n}{2\lambda_1}\left(\frac{n}{2n-1}-\frac{\lambda_2}{n}\right) = \frac{1}{2\lambda_1}\left(\frac{n^2}{2n-1}-\lambda_2\right)\end{aligned} \tag{8}$$

Za $n=1$ je matematično upanje maksimuma znano

$$E[Y] = E[X] = \frac{1}{2\lambda_1}\left(1-\lambda_2\right). \tag{9}$$

Varianca Y je

$$\begin{aligned}var[Y] &= n\int_0^1 \left(x - E[Y]\right)^2 F_X^{n-1} dF_X \\ &= n\int_0^1 \left(\frac{nF_X^{n-1}-\lambda_2}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1}\left(\frac{n^2}{2n-1}-\lambda_2\right)\right)^2 F_X^{n-1} dF_X \\ &= \frac{n^3}{4\lambda_1^2}\int_0^1 \left(F_X^{n-1}-\frac{n}{2n-1}\right)^2 F_X^{n-1} dF_X \\ &= \frac{n^3}{4\lambda_1^2}\int_0^1 \left(F_X^{2n-2}-2F_X^{n-1}\frac{n}{2n-1}+\frac{n^2}{(2n-1)^2}\right) F_X^{n-1} dF_X \\ &= \frac{n^3}{4\lambda_1^2}\int_0^1 \left(F_X^{3n-3}-2F_X^{2n-2}\frac{n}{2n-1}+\frac{n^2}{(2n-1)^2}F_X^{n-1}\right) dF_X \\ &= \frac{n^3}{4\lambda_1^2}\left(\frac{1}{3n-2}-2\frac{n}{(2n-1)^2}+\frac{n}{(2n-1)^2}\right) \\ &= \frac{n^3}{4\lambda_1^2}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{n}{(2n-1)^2}\right) = \frac{n^3(n-1)^2}{4\lambda_1^2(3n-2)(2n-1)^2}\end{aligned} \tag{10}$$

Varianco X izračunamo po definiciji

$$\begin{aligned}
var\left[X\right] &= E\left[\left(X - E\left[X\right]\right)^2\right] = \int_0^1 \left(x - E\left[X\right]\right)^2 dF_X \\
&= \int_0^1 \left(\frac{nF_X^{n-1} - \lambda_2}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1}\left(1 - \lambda_2\right)\right)^2 dF_X \\
&= \frac{1}{4\lambda_1^2}\int_0^1 \left(nF_X^{n-1} - 1\right)^2 dF_X \\
&= \frac{1}{4\lambda_1^2}\int_0^1 \left(n^2F_X^{2n-2} - 2nF_X^{n-1} + 1\right) dF_X \\
&= \frac{1}{4\lambda_1^2}\left[n^2\frac{F_X^{2n-1}}{2n-1} - 2n\frac{F_X^n}{n} + F_X\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4\lambda_1^2}\left(n^2\frac{1}{2n-1} - 2n\frac{1}{n} + 1\right) = \frac{1}{4\lambda_1^2}\frac{\left(n-1\right)^2}{2n-1}.
\end{aligned}$$

V zvezi med λ_1 in $var\left[X\right]$ nastopa še n:

$$var\left[X\right] = \frac{1}{4\lambda_1^2}\frac{\left(n-1\right)^2}{2n-1}. \tag{11}$$

Iz izrazov (9) in (11) dobimo λ_1 in λ_2

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{var\left[X\right]}}\frac{n-1}{2\sqrt{2n-1}} \\
\lambda_2 &= 1 - \frac{E\left[X\right]}{\sqrt{var\left[X\right]}}\frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}
\end{aligned}$$

in ju vstavimo v izraz za $E\left[Y\right]$ (enačba (8))

$$\begin{aligned}
E\left[Y\right] &= \frac{\sqrt{var\left[X\right]}\sqrt{2n-1}}{n-1}\left(\frac{n^2}{2n-1} - 1 + \frac{E\left[X\right]}{\sqrt{var\left[X\right]}}\frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{var\left[X\right]}\sqrt{2n-1}}{n-1}\left(\frac{\left(n-1\right)^2}{2n-1} + \frac{E\left[X\right]}{\sqrt{var\left[X\right]}}\frac{n-1}{\sqrt{2n-1}}\right) \\
&= E\left[X\right] + \sqrt{var\left[X\right]}\frac{\left(n-1\right)}{\sqrt{2n-1}}.
\end{aligned}$$

Rezultat nam pove, kako se spreminja zgornja meja matematičnega upanja maksimuma v odvisnosti od parametra n. Rast je za velike n sorazmerno počasna, saj se $E\left[Y\right]$ spreminja kot $\sqrt{n}$. Če izraz za λ_1 vstavimo v enačbo (10), dobimo izraz za varianco slučajne spremenljivke Y

$$var[Y] = \frac{n^3 var[X]}{(3n-2)(2n-1)},$$

ki za velike n raste hitreje kot matematično upanje $E[Y]$.

Zgornja meja $E[Y]$ in $var[Y]$ je bila določena ob znanih vrednostih $E[X]$ in $var[X]$ slučajnih spremenljivk X_i.

2.4 Značilne vrednosti ekstremov

Definicija 2 *Značilna vrednost maksimuma je tisto realno število u_Y, za katerega je*

$$P[X < u_Y] = F_X(u_Y) = 1 - \frac{1}{n} \tag{12}$$

za $n \geq 2$.

Opomba 2 *Povsem analogno definiramo značilno vrednost minimuma kot*

$$P[X < u_Z] = F_X(u_Z) = \frac{1}{n}.$$

Hitro lahko preverimo, da se v primeru $n = 2$ vrednosti u_Y in u_Z ujemata z mediano.

Značilne vrednosti ekstremov nastopajo tudi kot pomembne točke v grafih gostote verjetnosti slučajne spremenljivke Y. Iz izraza

$$f_Y(y) = nF_X^{n-1}(y)f_X(y).$$

je razvidno (saj je zaloga vrednosti $F_X(y) \leq 1$), da se graf $f_Y(y)$ za večje n "pomika" v desno. Ta vpliv lahko delno ponazorimo s presečišči gostot. Z y_P označimo točko, ki je skupna krivljam $f_{Y,n}(y)$ in $f_{Y,n+1}(y)$. Pri tem smo z indeksom poudarili število slučajnih spremenljivk, ki določajo Y. Za y_P velja

$$\begin{aligned} f_{Y,n}(y_P) &= f_{Y,n+1}(y_P) \\ nF_X^{n-1}(y_P)f_X(y_P) &= (n+1)\,F_X^n(y_P)f_X(y_P) \\ \frac{n}{n+1} &= F_X(y_P). \end{aligned}$$

ugotovili smo, da je y_P rešitev enačbe

$$F_X(y_P) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

to pa je ravno značilna vrednost ekstrema za $n + 1$.

3 Asimptotične porazdelitve ekstremnih vrednosti

3.1 Uvod

Če število slučajnih spremenljivk X_i večamo, postane oblika porazdelitvene funkcije maskimuma oziroma minimuma v veliki meri neodvisna od porazdelitve F_X. V teh primerih govorimo o limitnih (asimptotičnih) porazdelitvah ekstremnih vrednosti, ki opisujejo porazdelitev minimuma oziroma maksimuma, tudi če ne poznamo točne porazdelitve slučajnih spremenljivk X_i. Limitnih porazdelitev ekstremnih vrednosti je več. V grobem ločimo tri tipe. Na razlike vpliva predvsem obnašanje začetnih porazdelitev X_i za velike oziroma majhne vrednosti. Pravimo, da nas zanima predvsem "rep" začetne porazdelitvene funkcije.

3.2 Nekaj pomožnih pojmov

Velikokrat je smiselno definirati integralske transformacije slučajnih spremenljivk. To so integrali, ki jih je lažje izračunati, uporabimo pa jih predvsem za račun momentov slučajnih spremenljivk.

Definicija 3 *Naj bo X slučajna spremenljivka. Funkcija*

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

se imenuje momentno rodovna funkcija.

Lastnosti 1

i) $M_X(0) = 1$

ii) Če obstaja k-ti odvod $M_X^{(k)}(t)$, obstaja tudi k-ti moment in je enak

$$E\left[X^k\right] = M_X^{(k)}(0)\,.$$

iii) Če je $Y = aX + b$, za neki konstanti a in b, potem je

$$M_Y(t) = e^{tb} M_X(at)\,.$$

iv) Za neodvisni slučajni spremenljivki X in Y je

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t)\,.$$

Tako vsoto slučajnih spremenljivk prevedemo na produkt rodovnih funkcij.

Za nadaljnje delo bo pomembna predvsem druga lastnost, čeprav sta lastnosti iii) in iv) sicer pomembnejši. Lastnosti ne bomo dokazovali. Dokazi so preprosti, najdemo pa jih tudi v večini učbenikov verjetnostnega računa.

Pri porazdelitvah ekstremnih vrednosti pogosto nastopata Eulerjevi funkciji gama (Γ) in beta (B). To sta funkciji, definirani z integraloma s parametrom.

Definicija 4 *Funkcija gama je posplošen integral s parametrom.*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx. \tag{13}$$

Lastnosti 2

i) Funkcija gama je definirana za pozitivna realna števila $s > 0$.

ii) Je posplošitev fakultete, saj velja osnovna rekurzina relacija

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

iii) Za naravna števila velja $\Gamma(n+1) = n!$

iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Definicija 5 *Funkcija beta je podana kot posplošeni integral dveh parametrov*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Lastnosti 3

i) Funkcija beta je definirana za pozitivne vrednosti parametrov $p > 0$ in $q > 0$.

ii) Je simetrična funkcija svojih parametrov

$$B(p,q) = B(q,p).$$

iii) Povezana je s funkcijo gama s preprosto formulo

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Potrebovali bomo še dve pomembni lastnosti funkcije gama, ki povezujeta funkcijo gama z vrstami. Za funkcijo $\ln\Gamma(1-t)$ poznamo (glej npr. [1]) razvoj v vrsto za $|t| < 1$:

$$\ln\Gamma(1-t) = \gamma t + \sum_{k=2}^{\infty} S_k \frac{t^k}{k}, \tag{14}$$

kjer je $\gamma \approx 0.5772156649$ Eulerjeva konstanta, koeficienti S_k pa so neskončne vsote

$$S_k = \sum_{a=1}^{\infty} a^{-k}.$$

Vsote S_k konvergirajo za $k \geq 2$. Za $k = 1$ je vsota

$$S_1 = \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a}$$

poznana kot *harmonična vrsta*. Harmonična vrsta divergira, to pomeni, da je ne moremo sešteti. Vendar pa lahko vseeno nekaj povemo o tej vsoti. Ocenimo lahko, kako hitro se z rastjo števila členov delne vsote približujejo neskončnosti. Velja naslednja zveza

$$S_1 = \gamma + \lim_{n\to\infty} \ln n, \tag{15}$$

torej se za veliko število členov S_1 približuje vrednosti $\gamma + \ln n$. Za $k = 2$ je vrednost $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$. Ostale numerične vrednosti za S_k ne potrebujemo v nadaljnji izpeljavi.

Druga lastnost pa povezuje logaritem kvocienta funkcij gama z vsoto logaritmov:

$$\ln \frac{\Gamma(n-t)}{\Gamma(n)} = \ln \Gamma(1-t) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right). \tag{16}$$

3.3 Ekstremi eksponentne slučajne spremenljivke

Zelo podrobno bomo obravnavali obnašanje maksimuma velikega števila eksponentno porazdeljenih slučajnih spremenljivk, saj je to osnova za razumevanje porazdelitev ekstremnih vrednosti. Pri tem nas ne bodo zanimali zgolj rezultati za maksimum fiksnega števila slučajnih spremenljivk, temveč nas bodo zanimale tudi vrednosti, ko to število raste čez vse meje. Tako bomo počasi uvedli pojem neskončnosti v porazdelitev ekstremov.

Naj bodo X_i neodvisne eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - e^{-\lambda x}, \qquad \lambda > 0 \\ f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $Y = \max_i X_i$ je po trditvi 1

$$F_Y(y) = \left(1 - e^{-\lambda y}\right)^n,$$

od tod pa izračunamo še gostoto

$$f_Y(y) = \lambda n \left(1 - e^{-\lambda y}\right)^{n-1} e^{-\lambda y}.$$

Primerjati želimo nekaj karakterističnih vrednosti porazdelitve: mediano, modus in značilno vrednost. Mediana je tista vrednost y_M, za katero velja, da je verjetnost, da je slučajna spremenljivka Y manjša kot y_M enaka 0.5:

$$P[Y < y_M] = F_Y(y_M) = \left(1 - e^{-\lambda y_M}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

Enačbo logaritmiramo in dobimo

$$n \ln\left(1 - e^{-\lambda y_M}\right) = -\ln 2 \quad \longrightarrow \quad -\ln\left(1 - e^{-\lambda y_M}\right) = \frac{\ln 2}{n}.$$

Po ponovnem logaritmiranju sledi

$$\ln\left(-\ln\left(1-e^{-\lambda y_M}\right)\right)=\ln\ln 2-\ln n.$$

Izraz na levi lahko ocenimo za velike vrednosti y_M. Ker je $\left|e^{-\lambda y_M}\right|<1$ za vse vrednosti y_M, lahko $\ln\left(1-e^{-\lambda y_M}\right)$ razvijemo v Taylorjevo vrsto po obrazcu

$$\ln(1-w)=-\left[w+\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}+\cdots+\frac{w^k}{k}+\cdots\right].$$

Če je w dovolj majhen, je

$$\ln(1-w)\approx -w.$$

V gornji enačbi to pomeni, da za dovolj velike vrednosti y_M velja

$$\ln\left(e^{-\lambda y_M}\right)\approx\ln\ln 2-\ln n$$

oziroma

$$\begin{aligned}-\lambda y_M&\approx\ln\ln 2-\ln n\\ y_M&\approx\frac{\ln n}{\lambda}-\frac{\ln\ln 2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Modus μ_Y je lokalni maksimum gostote verjetnosti. Dobimo ga kot rešitev enačbe

$$f_Y'(\mu_Y)=0$$

Odvod gostote je

$$f_Y'(y)=\lambda^2 n(n-1)\left(1-e^{-\lambda y}\right)^{n-2}e^{-2\lambda y}-\lambda^2 n\left(1-e^{-\lambda y}\right)^{n-1}e^{-\lambda y},$$

ko pa v ta izraz vstavimo $y=\mu_Y$, mora biti enak nič

$$\begin{aligned}\lambda^2 n(n-1)\left(1-e^{-\lambda\mu_Y}\right)^{n-2}e^{-2\lambda\mu_Y}-\lambda^2 n\left(1-e^{-\lambda\mu_Y}\right)^{n-1}e^{-\lambda\mu_Y}&=0\\ (n-1)e^{-\lambda\mu_Y}-\left(1-e^{-\lambda\mu_Y}\right)&=0\\ ne^{-\lambda\mu_Y}&=1\\ e^{-\lambda\mu_Y}&=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Po logaritmiranju dobimo

$$\begin{aligned}-\lambda\mu_Y&=\ln\frac{1}{n}\\ \mu_Y&=\frac{\ln n}{\lambda}.\end{aligned}$$

Značilno vrednost u_Y je najlaže izračunati, saj jo po definiciji (12) dobimo kar iz $F_X(x)$:

$$\left(1 - e^{-\lambda u_Y}\right) = 1 - \frac{1}{n} \qquad \longrightarrow \qquad e^{-\lambda u_Y} = \frac{1}{n}. \tag{17}$$

Po logaritmiranju lahko zapišemo rezultat

$$u_Y = \frac{\ln n}{\lambda}, \tag{18}$$

ki je enak modusu slučajne spremenljivke Y.

Tako smo opredelili, kako z naraščajočim n rastejo tri karakteristične vrednosti gostote ekstremnih vrednosti. Vendar bi radi še več. Z n bi radi izrazili vsaj še matematično upanje in varianco. Pomagamo si z momentno rodovno funkcijo. Ta je za slučajno spremenljivko Y enaka

$$\begin{aligned}
M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_Y(x)\, dx \\
&= n \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} F_X^{n-1}(x) f_X(x)\, dy \\
&= n \int_0^1 e^{tx} F_X^{n-1} dF_X.
\end{aligned}$$

Dobljeni integral spominja na funkcijo beta, zato e^{tx} izrazimo s F_X:

$$e^{-\lambda x} = 1 - F_X \quad \longrightarrow \quad e^x = (1 - F_X)^{-\frac{1}{\lambda}} \quad \longrightarrow \quad e^{tx} = (1 - F_X)^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

To vstavimo v integral in izračunamo

$$M_Y(t) = n \int_0^1 (1 - F_X)^{-\frac{t}{\lambda}} F_X^{n-1} dF_X = nB\left(1 - \frac{t}{\lambda}, n\right),$$

funkcijo beta pa znamo izraziti s funkcijo gama

$$M_Y(t) = n \frac{\Gamma\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) \Gamma(n)}{\Gamma\left(n - \frac{t}{\lambda} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n - \frac{t}{\lambda} + 1\right)}.$$

Enačbo logaritmiramo in uporabimo lastnost (16)

$$\begin{aligned}
\ln M_Y(t) &= \ln \frac{\Gamma\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n - \frac{t}{\lambda} + 1\right)} \\
&= \ln \Gamma\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) - \ln \frac{\Gamma\left(n + 1 - \frac{t}{\lambda}\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \ln \Gamma\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) - \left[\ln \Gamma\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{t}{\lambda k}\right)\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{t}{\lambda k}\right).
\end{aligned}$$

Matematično upanje je vrednost prvega odvoda momentne rodovne funkcije v točki $t = 0$. Izračunajmo odvod $\ln M_Y(t)$

$$\frac{M_Y'(t)}{M_Y(t)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{t}{\lambda k}} \left(-\frac{1}{\lambda k}\right)$$

in vstavimo $t = 0$

$$\frac{M_Y'(0)}{M_Y(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda k}.$$

Ker je $M_Y(0) = 1$, je

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Matematično upanje je za velike vrednosti n približno enako (enačba (15))

$$E[Y] \approx \frac{1}{\lambda}(\gamma + \ln n) = \frac{S_1}{\lambda} = u_Y + \frac{\gamma}{\lambda}. \tag{19}$$

Matematično upanje raste kot $\frac{1}{\lambda} \ln n$ in torej ni navzgor omejeno. Obnašanje variance pa je drugačno. Za izračun najprej izrazimo drugi moment:

$$E\left[Y^2\right] = M_Y''(0).$$

Drugi odvod $\ln M_Y(t)$ je enak

$$\frac{M_Y''(t) - M_Y'(t)\, M_Y'(t)}{M_Y^2(t)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda k}\right)^2 \frac{1}{\left(1-\frac{t}{\lambda k}\right)^2}$$

$$M_Y''(0) = \left(M_Y'(0)\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda k}\right)^2.$$

Torej je

$$E\left[Y^2\right] = E[Y]^2 + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

kar pa nam že podaja tudi varianco

$$var[Y] = E\left[Y^2\right] - E[Y]^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Ker je vrsta $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergentna, je varianca omejena in konvergira proti $\frac{1}{\lambda^2} S_2$

$$\lim_{n\to\infty} var[Y] = \frac{1}{\lambda^2} S_2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\pi^2}{6} \tag{20}$$

3.4 Prva asimptotična porazdelitev

V prejšnjem poglavju smo opredelili slučajno spremenljivko maksimuma eksponentno porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Naš cilj je poiskati limitno porazdelitev, to je porazdelitev, ki ustreza slučajni spremenljivki Y, ko gre število n v neskončnost. Pri tem poskušamo opozoriti na težave, ki nastanejo s takšno aproksimacijo. Že v uvodu pojasnimo, da limitna porazdelitev zaradi težav s konvergenco ne bo prava limita, temveč nekakšna aproksimacija porazdelitve pri velikih n.

Ugotovili smo, da je porazdelitev Y pri nekem fisnem n enaka

$$F_Y(y) = \left(1 - e^{-\lambda y}\right)^n.$$

Zanima nas porazdelitev, ko n narašča čez vse meje

$$F_{Y_\infty}(y) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - e^{-\lambda y}\right)^n. \tag{21}$$

To limito bi morali izračunati za vsak izbran y. Za neketere konkretne vrednosti to sicer znamo, za splošen y pa je to zelo zahteven problem. Pomagamo si z osnovno idejo, da je limito izraza $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ zelo lahko izračunati. Rezultat je seveda $\frac{1}{e}$. "Dodaten" n vpeljemo v izraz (21) z uporabo značilne vrednosti ekstremov. V enačbi (17) smo značilno vrednost za eksponentno porazdelitev že dobili:

$$e^{\lambda u_Y} = n \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{n} e^{\lambda u_Y} = 1. \tag{22}$$

Enačba (22) je izraz z identiteto. Z identiteto pa lahko pomnožimo poljuben izraz, zato je

$$\left(1 - e^{-\lambda y}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} e^{\lambda u_Y} e^{-\lambda y}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-\lambda\left(y - u_Y\right)}\right)^n.$$

Sedaj limite ni več težko izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - e^{-\lambda y}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-\lambda\left(y-u_Y\right)}\right)^n = e^{-e^{-\lambda\left(y-u_Y\right)}}.$$

Pri zadnjem koraku smo naredili v matematičnem smislu zelo hudo napako, saj smo izračunali limito po n ne da bi upoštevali, da je tudi u_Y funkcija n. Spreminjanje u_Y z naraščajočim n bi morali za korekten izračun limite upoštevati. Opazili pa smo, da raste u_Y bistveno počasneje kot n (enačba (18)). Zaradi logaritemske rasti je tudi pri velikih n vrednost u_Y precej majhna ($\ln 10^{10} \approx 23$), ter tudi zelo počasi narašča. Tako ne naredimo velike napake, če za dovolj velik n aproksimiramo

$$\left(1 - e^{-\lambda y}\right)^n \approx \left(1 - \frac{1}{n} e^{-\lambda(y-u)}\right)^n,$$

kjer je u izbrani parameter, neodvisen od n. Limito izraza na desni potem izračunamo korektno in zaradi večje preglednosti pišemo kot

$$\exp\left[-e^{-\lambda(y-u)}\right].$$

To je neka porazdelitvena funkcija, ki ni prava limitna porazdelitev za Y_∞, jo pa aproksimira.

Definicija 6 *Dobljeno porazdelitev*

$$F_Y(y) = \exp\left[-e^{-\lambda(y-u)}\right]$$

imenujemo prva asimptotična ali Gumbelova porazdelitev*. Določata jo dva parametra λ in u, ki ju določimo (neodvisno od porazdelitve slučajnih spremenljivk X_i) iz statističnega vzorca. Običajno to porazdelitev imenujemo* ekstremna porazdelitev tipa I.

Opomba 3 *Metoda izpeljave asiptotičnih porazdelitev, kot smo jo navedli, sta vpelajala Cramér in Von Mises. Je najbolj preprosta in pregledna. Obstajajo tudi drugačne izpeljave, ki pa jih ne navajamo. Velja še omeniti, da so izpeljani tudi zadostni pogoji za eksistenco asimptotičnih porazdelitev.*

Primer 2 ***Največja letna višina vode.*** *Recimo, da imamo dovolj dobre podatke o povprečju in varianci največje letne višine vode. Ker je največja letna višina vode največja izmed številnih največjih dnevnih višin, lahko pričakujemo, da bo porazdelitev največje letne višine porazdelitev ekstremnih vrednosti. Določiti želimo parametra λ in u te porazdelitve.*

Iz enačbe (20) dobimo zvezo med $var[Y]$ in parametrom λ

$$\begin{aligned} \sqrt{var[Y]} &= \frac{1}{\lambda}\frac{\pi}{\sqrt{6}} \\ \lambda &= \frac{\pi}{\sqrt{6var[Y]}}, \end{aligned}$$

iz enačbe (19) pa zvezo med $E[Y]$ in parametroma λ in u

$$\begin{aligned} E[Y] &= u + \frac{\gamma}{\lambda} \\ u &= E[Y] - \frac{\gamma\sqrt{6var[Y]}}{\pi}. \end{aligned}$$

Tako smo določili oba parametra porazdelitve.

Opomba 4 *Zavedati se moramo, da je v splošnem parameter u odvisen od števila podatkov, pri bolj splošni porazdelitvi pa to velja tudi za parameter λ. Včasih se lahko kljub počasni rasti pojavi vpliv spreminjanja u. Znano je na primer, da večji vzorci krhkega materiala odpovedo pri manjši sili kot manjši vzorci. Za takšne primere lahko izberemo še druge porazdelitve ekstremov, z drugačnimi lastnostimi. O tem pa nekaj v naslednjem poglavju.*

3.5 Drugi in tretji tipi asimptotičnih porazdelitev

Povsem analogno kot smo to naredili za Gumbelovo porazdelitev lahko najdemo še dva tipa asimptotičnih porazdelitev. Tudi ta dva tipa sta posledica limitnega procesa z osnovo v dveh različnih tipih porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i. Ker smo v prejšnjih poglavjih izpeljavo naredili zelo natančno, tu večinoma le podajamo rezultate.

Tip II Omejimo se na slučajne spremenljivke, ki so neomejene le v eno smer (navzgor, če nas zanima porazdelitev maksimuma). Za opis porazdelitve X_i vzamemo naslednjo porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = 1 - \beta \left(\frac{1}{x - \varepsilon} \right)^k, \qquad k \geq 1, \quad x > \varepsilon + \beta^{\frac{1}{k}}.$$

Porazdelitev maksimuma n slučajnih spremenljivk je

$$F_Y(y) = \left(1 - \beta \left(\frac{1}{x - \varepsilon} \right)^k \right)^n. \tag{23}$$

Ustrezno značilno vrednost u_Y dobimo kot rešitev enačbe (12), v katero vstavimo porazdelitev (23)

$$1 - \beta \left(\frac{1}{u_Y - \varepsilon} \right)^k = 1 - \frac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad \beta \left(\frac{1}{u_Y - \varepsilon} \right)^k = \frac{1}{n}.$$

Velja identiteta

$$1 = \frac{(u_Y - \varepsilon)^k}{n\beta},$$

ki jo vstavimo v izraz (23) za porazdelitev in dobimo primernejšo obliko za račun limite:

$$\left(1 - \beta \left(\frac{1}{x - \varepsilon} \right)^k \right)^n = \left(1 - \frac{(u_Y - \varepsilon)^k}{n\beta} \beta \left(\frac{1}{x - \varepsilon} \right)^k \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{u_Y - \varepsilon}{x - \varepsilon} \right)^k \right)^n.$$

Kot smo to že naredili za Gumbelovo porazdelitev, aproksimiramo $F_Y(y)$ za dovolj velike n z izbiro parametra u_Y:

$$\left(1 - \beta \left(\frac{1}{x - \varepsilon} \right)^k \right)^n \approx \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{u - \varepsilon}{x - \varepsilon} \right)^k \right)^n.$$

Sedaj lahko izračunamo limito izraza na desni, ko gre n v neskončnost:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{u - \varepsilon}{x - \varepsilon} \right)^k \right)^n = \exp \left[- \left(\frac{u - \varepsilon}{x - \varepsilon} \right)^k \right].$$

Dobljena funkcija tudi določa porazdelitev ekstremnih vrednosti, zato jo proglasimo za asimptotično porazdelitev drugega tipa.

Definicija 7 *Porazdelitveno funkcijo*

$$F_Y(y) = \exp \left[- \left(\frac{u - \varepsilon}{y - \varepsilon} \right)^k \right], \qquad y > \varepsilon,$$

imenujemo druga asimptotična ali Fréchetova porazdelitev. *Določajo jo parametri ε, k in u.*

Pri Gumbelovi porazdelitvi, smo osnovne verjetnostne količine (karakteristične točke, upanje, varianco) izpeljali že za končen n in jih primerno aproksimirali za velike vrednosti. Te aproksimacije bi lahko dobili tudi direktno iz asimptotične porazdelitve, vendar je bil predstavljeni način bolj nazoren. Hkrati pa bi z izpeljavo teh količin direktno iz Gumbelove porazdelitve lahko povsem rutinsko preverili, da so bile aproksimacije dovolj dobre. Za preostala tipa si bomo delo olajšali in upanja in variance izpeljali kar iz asimptotičnih porazdelitev (neodvisno od n).

Za začetek z odvajanjem porazdelitevene funkcije izračunajmo gostoto verjetnosti porazdelitve ekstremnih vrednosti tipa II.

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{k}{u-\varepsilon}\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^{k+1} \exp\left[-\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^k\right]$$

Z znano gostoto izračunamo tudi matematično upanje

$$E[Y^p] = \int_{\mathcal{D}} y^p f_Y(y)\, dy,$$

pri tem smo z $\mathcal{D}$ označili definicijsko območje, ki je za naš primer odprti interval (ε, ∞). V izrazu za $f_Y(y)$ nastopa $y-\varepsilon$ in ne zgolj y, zato si delo bistveno olajšamo, če računamo matematično upanje transformirane slučajne spremenljivke $Y-\varepsilon$

$$\begin{aligned} E[(Y-\varepsilon)^p] &= \int_{\mathcal{D}} (y-\varepsilon)^p f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{k}{u-\varepsilon}\int_{\mathcal{D}} (y-\varepsilon)^p \left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^{k+1} e^{-\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^k} dy. \end{aligned}$$

Izraz zelo spominja na funkcijo gama, zato uvedemo substitucijo $\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^k = w$. Diferencial substitucije da enakost

$$-\frac{k}{u-\varepsilon}\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^{k+1} dy = dw,$$

integralsko območje pa se prevede na $(\infty, 0)$:

$$\begin{aligned} E[(Y-\varepsilon)^p] &= -\int_{\infty}^{0} (u-\varepsilon)^p \frac{(y-\varepsilon)^p}{(u-\varepsilon)^p} e^{-w} dw \\ &= (u-\varepsilon)^p \int_0^{\infty} w^{-\frac{p}{k}} e^{-w} dw \\ &= (u-\varepsilon)^p\, \Gamma\left(1-\frac{p}{k}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Poudariti velja še, da momenti obstajajo le za $p < k$, torej dodatno privzamemo, da je $k > 2$, saj želimo zagotoviti obstoj matematičnega upanja in variance. Izračunajmo upanje in varianco z uporabo formule (24).

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[Y-\varepsilon] + \varepsilon \\ &= (u-\varepsilon)\, \Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

Podobno po lastnostih matematičnega upanja izrazimo še drugi moment

$$\begin{aligned}
E\left[(Y-\varepsilon)^2\right] &= E\left[Y^2\right] - 2\varepsilon E\left[Y\right] + \varepsilon^2 \\
E\left[Y^2\right] &= E\left[(Y-\varepsilon)^2\right] + 2\varepsilon E\left[Y\right] - \varepsilon^2 \\
&= (u-\varepsilon)^2 \Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right) + 2\varepsilon (u-\varepsilon) \Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right) + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \\
&= (u-\varepsilon)^2 \Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right) + 2\varepsilon (u-\varepsilon) \Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right) + \varepsilon^2 .
\end{aligned}$$

Varianca je potem

$$\begin{aligned}
var\left[Y\right] &= E\left[Y^2\right] - E\left[Y\right]^2 \\
&= (u-\varepsilon)^2 \Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right) + 2\varepsilon (u-\varepsilon) \Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right) + \varepsilon^2 \\
&\quad - \left[(u-\varepsilon) \Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right) + \varepsilon\right]^2 \\
&= (u-\varepsilon)^2 \left[\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] .
\end{aligned}$$

Parametra k in u asimptotične porazdelitve dobimo iz sistema dveh enačb z dvema neznankama

$$\begin{aligned}
m_{_Y} - \varepsilon &= (u-\varepsilon) \Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right) \\
\sigma_Y^2 &= (u-\varepsilon)^2 \left[\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] ,
\end{aligned} \tag{25}$$

pri tem poudarimo, da je vrednost ε znana; to je spodnja meja definicijskega območja slučajne spremenljivke. Sistem (25) razrešimo najprej na k in sicer iz kvocienta

$$\frac{\sigma_Y^2}{(m_{_Y}-\varepsilon)^2} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)} - 1.$$

Koeficient k je torej rešitev enačbe

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)} = \left(\frac{\sigma_Y}{m_{_Y}-\varepsilon}\right)^2 + 1,$$

ki jo rešimo numerično. Po izračunu k dobimo u po formuli

$$u = \frac{m_{_Y}-\varepsilon}{\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)} + \varepsilon.$$

Tip III Tu pa vzamemo slučajne spremenljivke X_i, ki so navdol neomejene, navzgor pa omejene s parametrom ω. Njihova porazdelitvena funkcija ima v bližini ω naslednjo obliko

$$F_X(x) = 1 - c(\omega - x)^k, \qquad k > 0, \quad x \leq \omega.$$

Ta tip se bistveno razlikuje od prejšnjih dveh, saj je navzgor, torej na repu, ki nas zanima, omejen. Porazdelitev maksimuma n slučajnih spremenljivk je

$$F_Y(y) = \left(1 - c(\omega - x)^k\right)^n,$$

za značilno vrednost u_Y pa velja

$$c(\omega - u_Y)^k = \frac{1}{n} \qquad \longrightarrow \qquad 1 = nc(\omega - u_Y)^k.$$

Z značilno vrednostjo prevedemo porazdelitev $F_Y(y)$ v obliko

$$F_Y(y) = \left(1 - \frac{c(\omega - x)^k}{nc(\omega - u_Y)^k}\right)^n.$$

Potem, ko postavimo $u_Y = u$, znamo izračunati limito

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{c(\omega - x)^k}{nc(\omega - u)^k}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{\omega - x}{\omega - u}\right)^k \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[-\left(\frac{\omega - x}{\omega - u}\right)^k\right].$$

Definicija 8 *Porazdelitveno funkcijo*

$$F_Y(y) = \exp\left[-\left(\frac{\omega - y}{\omega - u}\right)^k\right], \qquad y < \omega$$

imenujemo tretja asimptotična porazdelitev. *Določajo jo parametri ω, k in u.*

Običajno se ta tip uporablja pri problemih, kjer nas zanimajo minimumi. Seveda v tem primeru ne govorimo o navzgor omejenih, temveč o navzdol omejenih slučajnih spremenljivkah. Pri iskanju asimptotične porazdelitve se opremo na rezultate posledice 2 in nam porazdelitve minimuma ni potrebno posebej določati.

Iščemo torej minimum navzdol omejenih slučajnih spremenljivk s porazdelitvijo

$$F_{-X}(x) = 1 - F_X(-x) = c(x + \omega)^k, \qquad k > 0, \quad x \geq \omega.$$

Po posledici 2 je

$$f_Z(z) = f_Y(-z),$$

kjer sta Y in Z

$$Y = \max_i X_i, \qquad Z = \min_i(-X_i).$$

Iz zveze med gostotama sledi zveza med porazdelitvama

$$F_Z(z) = 1 - F_Y(-z).$$

Torej znamo izraziti $F_Z(z)$ z že izračunano porazdelitvijo $F_Y(y)$:

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\omega + z}{\omega - u}\right)^k\right]. \tag{26}$$

Ta izraz ni najbolj primeren, saj je parameter u še vedno ocena za u_Y in ne za u_Z. Poiščimo povezavo med u_Y in u_Z. u_Y že poznamo

$$c(\omega - u_Y)^k = \frac{1}{n},$$

u_Z pa dobimo kot rešitev enačbe

$$F_{-X}(u_Z) = \frac{1}{n} \qquad \longrightarrow \qquad c(u_Z + \omega)^k = \frac{1}{n}.$$

To pa pomeni, da med značilnimi vrednostmi obstaja antisimetrija:

$$u_Z = -u_Y.$$

Zato je koeficient u v izrazu (26) smiselno nadomestiti z $-v$, saj bo le v tem primeru pomenil oceno značilne vrednosti slučajne spremenljivke Z:

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\omega + z}{\omega + v}\right)^k\right].$$

Definicija 9 *Porazdelitveno funkcijo*

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{z - \varepsilon}{v - \varepsilon}\right)^k\right],$$

imenujemo tretja asimptotična porazdelitev minimalnih vrednosti. *Določajo jo parametri ε, k in v.*

To porazdelitev obravnavajmo malo bolj podrobno. Gostota verjetnosti porazdelitve je

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{k}{v - \varepsilon}\left(\frac{z - \varepsilon}{v - \varepsilon}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{z - \varepsilon}{v - \varepsilon}\right)^k\right]$$

Matematično upanje funkcij slučajnih spremenljivk Z^p dobimo z integracijo

$$E[Z^p] = \int_\varepsilon^\infty z^p f_Z(z)\, dz,$$

V izrazu za $f_Z(z)$ nastopa $(z-\varepsilon)$, zato računamo matematično upanje transformirane slučajne spremenljivke $Z-\varepsilon$

$$E\left[(Z-\varepsilon)^p\right]=\frac{k}{v-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty}(z-\varepsilon)^p\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^{k-1}e^{-\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^k}dz.$$

Vpeljemo novo spremenljivko

$$\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^k=w\qquad\longrightarrow\qquad\frac{k}{v-\varepsilon}\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^{k-1}dy=dw$$

in jo vstavimo v integral

$$E\left[(Z-\varepsilon)^p\right]=(v-\varepsilon)^p\int_0^{\infty}w^{\frac{p}{k}}e^{-w}dw=(v-\varepsilon)^p\,\Gamma\left(1+\frac{p}{k}\right).$$

Sedaj ni več težko izraziti matematičnega upanja in variance. Matematično upanje je

$$E[Z]=E[Z-\varepsilon]+\varepsilon=(v-\varepsilon)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)+\varepsilon$$

Ko izrazimo še drugi moment

$$\begin{aligned}E\left[Z^2\right]&=E\left[(Z-\varepsilon)^2\right]+2\varepsilon E[Z]-\varepsilon^2\\&=(v-\varepsilon)^2\,\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)+2\varepsilon\,(v-\varepsilon)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)+\varepsilon^2,\end{aligned}$$

izračunamo varianco

$$\begin{aligned}var[Z]&=E\left[Z^2\right]-E[Z]^2\\&=(v-\varepsilon)^2\,\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)+2\varepsilon\,(v-\varepsilon)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)+\varepsilon^2\\&\qquad-\left[(v-\varepsilon)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)+\varepsilon\right]^2\\&=(v-\varepsilon)^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right].\end{aligned}$$

Parametra k in v asimptotične porazdelitve dobimo iz znanega matematičnega upanja in variance z reševanjem sistema

$$\begin{aligned}m_Z-\varepsilon&=(v-\varepsilon)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\\\sigma_Z^2&=(v-\varepsilon)^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right].\end{aligned}$$

Koeficient k je rešitev enačbe

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \left(\frac{\sigma_Z}{m_z-\varepsilon}\right)^2 + 1,$$

u pa dobimo po formuli

$$u = \frac{m_Z-\varepsilon}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)} + \varepsilon.$$

	Asimptotične porazdelitve največjih vrednosti		
	TIP I	TIP II	TIP III
začetna porazdelitev	$1-e^{-\lambda x}$	$1-\beta\left(\frac{1}{x-\varepsilon}\right)^{k}$	$1-c\,(\omega-x)^{k}$
pogoji	$\lambda>0,\ x>0$	$k\geq 2,\ x>\varepsilon+\beta^{\frac{1}{k}}$	$k>0,\ x\leq\omega$
asimptotična porazdelitev $F_Y(y)$	$\exp\left[-e^{-\lambda(y-u)}\right]$	$\exp\left[-\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^{k}\right]$	$\exp\left[-\left(\frac{\omega-y}{\omega-u}\right)^{k}\right]$
gostota $f_Y(y)$	$\lambda\exp\left[-\lambda(y-u)-e^{-\lambda(y-u)}\right]$	$\frac{k}{u-\varepsilon}\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^{k+1}\exp\left[-\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^{k}\right]$	$\frac{k}{\omega-u}\left(\frac{\omega-y}{\omega-u}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{\omega-y}{\omega-u}\right)^{k}\right]$
parametri	$\lambda,\ u$	$k,\ u,\ \varepsilon$	$k,\ u,\ \omega$
določanje parametrov iz statističnih podatkov (metoda momentov)	$\lambda=\frac{\pi}{\sigma_Y\sqrt{6}}$ $u=m_Y-\frac{\gamma\sigma_Y\sqrt{6}}{\pi}$	$\varepsilon=$ spodnja meja* $\frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)}=\left(\frac{\sigma_Y}{m_Y-\varepsilon}\right)^2+1$ $u=\frac{m_Y-\varepsilon}{\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)}+\varepsilon$	$\omega=$ zgornja meja* $\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}=\left(\frac{\sigma_Y}{\omega-m_Y}\right)^2+1$ $u=\omega-\frac{\omega-m_Y}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}$

	Asimptotične porazdelitve najmanjših vrednosti		
	TIP I	TIP II	TIP III
začetna porazdelitev	$e^{\lambda x}$	$\beta\left(\frac{1}{\omega-x}\right)^{k}$	$c\,(x-\varepsilon)^{k}$
pogoji	$\lambda>0,\ x<0$	$k\geq 2,\ x<\omega-\beta^{\frac{1}{k}}$	$k>0,\ x\geq\varepsilon$
asimptotična porazdelitev $F_Z(z)$	$1-\exp\left[-e^{\lambda(z-v)}\right]$	$1-\exp\left[-\left(\frac{\omega-v}{\omega-z}\right)^{k}\right]$	$1-\exp\left[-\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^{k}\right]$
gostota $f_Z(z)$	$\lambda\exp\left[\lambda(z-v)-e^{-\lambda(z-v)}\right]$	$\frac{k}{\omega-v}\left(\frac{\omega-v}{\omega-z}\right)^{k+1}\exp\left[-\left(\frac{\omega-v}{\omega-z}\right)^{k}\right]$	$\frac{k}{v-\varepsilon}\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^{k}\right]$
parametri	$\lambda,\ v$	$k,\ v,\ \omega$	$k,\ v,\ \varepsilon$
določanje parametrov iz statističnih podatkov (metoda momentov)	$\lambda=\frac{\pi}{\sigma_Z\sqrt{6}}$ $v=m_Z+\frac{\gamma\sigma_Z\sqrt{6}}{\pi}$	$\omega=$ zgornja meja* $\frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)}=\left(\frac{\sigma_Z}{\omega-m_Z}\right)^2+1$ $v=\omega-\frac{\omega-m_Z}{\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)}$	$\varepsilon=$ spodnja meja* $\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}=\left(\frac{\sigma_Z}{m_Z-\varepsilon}\right)^2+1$ $v=\frac{m_Z-\varepsilon}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}+\varepsilon$

Komentirajmo še z * označene parametre. To so parametri, za katere pričakujemo, da izvirajo iz same narave problema. Pri tipu II tako praviloma vzamemo $\varepsilon = \omega = 0$, saj nas zanimajo le velike (majhne) vrednosti. Večji problem je pri tipu III, kjer ta parametra nista zanemarljiva. Lahko ju ocenimo z eksperimentalnim proučevanjem pojavov, ali pa tudi iz statističnih podatkov, vendar v tem primeru potrebujemo še eno enačbo (na primer tretji moment) ali pa parametre določimo po metodi največje verjetnosti.

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover publications, New York, 1965.

[2] J. R. Benjamin, C. A. Cornell, *Probability, statistics and decision for civil engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.

[3] K. Bury, *Statistical Distributions in Engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[4] M. Černe, *Matematika 2*, DMFA, Ljubljana, 1999.

[5] E. J. Gumbel, *Statistics of extremes*, Columbia University Press, New York, 1958.

[6] W. Hays, *Statistics*, Harcourt Brace College Publishers, Fort Worth, 1994

[7] The MathWorks, Inc. *MATLAB, Using MATLAB*, Natick, 1999.

[8] A. V. Metcalfe, *Statistics in civil engineering*, Arnold Publishers, London, 1997.

[9] R.-D. Reiss, M. Thomas, *Statistical Analysis of Extreme Values*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[10] M. R. Spiegel,*Theory and problems of probability and statistics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1991.

[11] G. Turk, *Verjetnostni račun in statistika*, osnutki skripta, Ljubljana, 2001. `http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/ovrs/OVRS.htm`

[12] S. Wolfram, *Mathematica*, 2. izdaja, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, 1991.