PREGLED PORAZDELITEV

Dejan Zupan

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Normalna porazdelitev

- gostota:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2}$$

- porazdelitvena funkcija:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m_X}{\sigma_X}\right)^2} dt$$

- lastnosti:
  - simetrična;
  - linearna kombinacija normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je normalna slučajna spremenljivka.

Logaritemsko normalna porazdelitev

- gostota:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma_{\ln Y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \ln \tilde{m}_Y}{\sigma_{\ln Y}}\right)^2}$$

- parametri:

$$m_Y = \tilde{m}_Y e^{\frac{1}{2}\sigma^2_{\ln Y}}, \qquad \sigma^2_Y = m^2_Y\left(e^{\sigma^2_{\ln Y}} - 1\right)$$

- lastnosti:
  - ◇ $\ln Y = X$, kjer je X normalna slučajna spremelnjivka s parametroma $m_X = \ln \tilde{m}_Y$ in $\sigma_X = \sigma_{\ln Y}$;
  - ◇ produkt logaritemsko normalnih slučajnih spremenljivk je logaritemsko normalna slučajna spremenljivka: $\tilde{m}_Y = \tilde{m}_{Y_1}\tilde{m}_{Y_2}$ in $\sigma^2_{\ln Y} = \sigma^2_{\ln Y_1} + \sigma^2_{\ln Y_2}$.

Ekstremnih vrednosti tipa I, maksimumi

- začetna porazdelitev $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Y(y) = \exp\left[-\exp\left(-\lambda\left(y-u\right)\right)\right]$$

- gostota:

$$f_Y(y) = \lambda \exp\left[-\lambda\left(y-u\right) - \exp\left(-\lambda\left(y-u\right)\right)\right]$$

- parametri:

$$\lambda = \frac{\pi}{\sigma_Y\sqrt{6}}, \qquad u = m_Y - \frac{\gamma\sigma_Y\sqrt{6}}{\pi}$$

- lastnosti:
  - ◇ opis največjih pretokov v časovnem obdobju;
  - ◇ opis nekaterih obtežb na konstrukcije.

Ekstremnih vrednosti tipa I, minimumi

- začetna porazdelitev $F(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\lambda\left(z - v\right)\right)\right]$$

- gostota:

$$f_Z(z) = \lambda \exp\left(\lambda\left(z - v\right) - \exp\left(\lambda\left(z - v\right)\right)\right)$$

- parametri:

$$\lambda = \frac{\pi}{\sigma_Z\sqrt{6}}, \qquad v = m_Z + \frac{\gamma\sigma_Z\sqrt{6}}{\pi}.$$

Ekstremnih vrednosti tipa II, maksimumi

- začetna porazdelitev $F\left(x\right) = 1 - \beta\left(\frac{1}{x-\varepsilon}\right)^k$,$k \geq 2$, $x > \varepsilon$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Y\left(y\right) = \exp\left[-\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^k\right]$$

- gostota:

$$f_Y\left(y\right) = \frac{k}{u-\varepsilon}\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^{k+1}\exp\left[-\left(\frac{u-\varepsilon}{y-\varepsilon}\right)^k\right]$$

- parametri:

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1-\frac{1}{k}\right)} = \left(\frac{\sigma_Y}{m_Y-\varepsilon}\right)^2 + 1, \qquad u = \frac{m_Y-\varepsilon}{\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)} + \varepsilon$$

- lastnosti:
  - ◇ ε je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa spodno mejo.

Ekstremnih vrednosti tipa II, minimumi

- začetna porazdelitev $F(x) = \beta \left(\frac{1}{\omega - x}\right)^k$, $k \geq 2$, $x < \omega$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\omega - v}{\omega - z}\right)^k\right]$$

- gostota:

$$f_Z(z) = \frac{k}{\omega - v}\left(\frac{\omega - v}{\omega - z}\right)^{k+1} \exp\left[-\left(\frac{\omega - v}{\omega - z}\right)^k\right]$$

- parametri:

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)} = \left(\frac{\sigma_Z}{\omega - m_Z}\right)^2 + 1, \qquad v = \omega - \frac{\omega - m_Z}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)}$$

- lastnosti:
  - ◇ ω je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa zgornjo mejo.

Ekstremnih vrednosti tipa III, maksimumi

- začetna porazdelitev $F(x) = 1 - c(\omega - x)^k$, $k > 0$, $x \leq \omega$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Y(y) = \exp\left[-\left(\frac{\omega - y}{\omega - u}\right)^k\right]$$

- gostota:

$$f_Y(y) = \frac{k}{\omega - u}\left(\frac{\omega - y}{\omega - u}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{\omega - y}{\omega - u}\right)^k\right]$$

- parametri:

$$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \left(\frac{\sigma_Y}{\omega - m_Y}\right)^2 + 1, \qquad u = \omega - \frac{\omega - m_Y}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)}$$

- lastnosti:
  - ◇ ω je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa zgornjo mejo.

Ekstremnih vrednosti tipa III, minimumi

- začetna porazdelitev $F(x) = c(x-\varepsilon)^k$, $k > 0$, $x \geq \varepsilon$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Z(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^k\right]$$

- gostota:

$$f_Z(z) = \frac{k}{v-\varepsilon}\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{z-\varepsilon}{v-\varepsilon}\right)^k\right]$$

- parametri:

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \left(\frac{\sigma_Z}{m_Z-\varepsilon}\right)^2 + 1, \qquad v = \frac{m_Z-\varepsilon}{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)} + \varepsilon$$

- lastnosti:
  - ◇ ε je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa spodno mejo.

Porazdelitev Hi-kvadrat $\chi^2(n)$

- **gostota:**

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \; x > 0$$

- **Eulerjev integral Γ:**

$$\Gamma(a) = \int_0^1 u^{a-1} e^{-a} du$$

- **lastnosti:**
  - ◇ n je poljubno naravno število; rečemo mu **število prostostnih stopenj**;
  - ◇ po porazdelitvi χ^2 se porazdeljuje **vsota kvadratov** n neodvisnih standardizirano normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk;
  - ◇ če je $X \sim \chi^2(n)$, je za velike n porazdelitev $Y = \sqrt{2X} - \sqrt{2n-1}$ približno standardizirano normalna.

Studentova porazdelitev $t\left(n\right)$

- **gostota:**

$$f_T\left(t\right)=\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

- **Eulerjeva funkcija Beta:**

$$B\left(a,b\right)=\int_0^1 u^{a-1}\left(1-u\right)^{b-1}du$$

- **lastnosti:**
  - n je poljubno naravno število; rečemo mu število prostostnih stopenj;
  - po Studentovi poradelitvi se porazdeljuje povprečje vzorca normalno porazdeljene populacije, kadar je velikost vzorca majhna;
  - če je $X\sim N\left(0,1\right)$ in $Y\sim\chi^2\left(n\right)$, je $\frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}\sim t\left(n\right)$
  - ko gre $n\to\infty$, se Studentova porazdelitev približuje standardizirani normalni.

Porazdelitev $F(m,n)$

- gostota:

$$f_Z(m,n) = \frac{\sqrt{m^m n^n}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{x^{m-2}}{(n+mx)^{m+n}}},\ x > 0$$

- lastnosti:
  - ◇ m in n sta poljubni naravni števili; obema rečemo število prostostnih stopenj;
  - ◇ če je $X \sim \chi^2(m)$ in $Y \sim \chi^2(n)$, je $Z = \dfrac{nX}{mY} \sim F(m,n)$ in $Z^{-1} \sim F(n,m)$;
  - ◇ če je $X \sim t(n)$, je $X^2 \sim F(1,n)$.