16.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 12. MAJ 2010

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

16. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 12. maj 2010

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
16. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Studio Orca, Ljubljana

Obseg: 28 strani

Naklada: 100 izvodov

Ljubljana, 2011

CIP – Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (16 ; 2010 ; Ljubljana)
[Šestnajsto]
16. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana, 12. maj 2010 / [pripravili] Dejan Zupan ... [et al.]. - V Ljubljani : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2011

ISBN 978-961-6167-96-3

1. Zupan, Dejan, 1973-
255842304

16. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2010

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 16. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Stane Srpčič,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo, Celje) in
Duška Tomšič (Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola, Ljubljana).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 60 dijakinj in dijakov tretjega in 51 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 20.–22. aprila 2010. Triintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 12. maja 2010 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

ime in priimek	**letnik**	**šola**	**mentor**
Martin Avguštin	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Klemen Bajc	3	SGGEŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Izidor Bukovšek	3	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Jernej Divjak	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Simon Dobelšek	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Špela Doles	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Matej Ilinković	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Andreja Kebler	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Gašper Kosmač	3	SGGEŠ Ljubljana	Duška Tomšič
Miha Medved	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Luka Ošlaj	3	TŠC Maribor	Vili Vesenjak
Rok Pahič	3	TŠC Maribor	Vili Vesenjak
Peter Pezderšek	3	SŠG Celje	Lidija Jurički
Janez Strnad	3	SGGEŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Denis Toplak	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Jaš Zakrajšek	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Miha Zupančič	3	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Matej Župan	3	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
David Bojanec	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Bojan Bučar	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Ana Drenik	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Matej Drobnič	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Nejc Fabijan	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Damir Grguraš	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Mateja Kopinšek	4	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Luka Laznik	4	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Jure Leščanec	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Zdenko Mazurek	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Nejc Novak	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Aleš Rorič	4	TŠC Maribor	Vili Vesenjak
Anja Rudman	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Danijel Zorec	4	SGŠG Maribor	Eva Dvorakova
Simon Zupančič	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGEŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠ Maribor	Srednja gradbena šola Maribor
SŠG Celje	Srednja šola za gradbeništvo Celje
TŠC Maribor	Tehniški šolski center Maribor

Sklepno tekmovanje se je začelo 12. maja 2010 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom doc. dr. Violete Bokan-Bosiljkov, ogledali konstrukcijsko prometni laboratorij.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Tomaž Hozjan, Aleš Kroflič, Igor Planinc, Urban Rodman, Goran Turk in Eva Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Luka Ošlaj	TŠC Maribor	1. nagrada	85%
Matej Župan	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	83%
Jernej Divjak	SGŠG Maribor	3. nagrada	80%
Simon Dobelšek	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	80%
Miha Zupančič	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	80%
4. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Bojan Bučar	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	60%
Nejc Fabijan	SGLŠ Novo mesto	3. nagrada	54%
Damir Grguraš	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	44%
Luka Laznik	SŠG Celje	3. nagrada	42%
Nejc Novak	SGŠG Maribor	3. nagrada	40%

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	19.81	17.29	4.08	10.44	51.62
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	93

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	18.88	8.38	3.13	7.63	38.00
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	20	25	90

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	10.56	12.44	16.11	18.94	58.06
najnižja ocena	0	0	0	10	20
najvišja ocena	25	25	25	25	84

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	1.13	7.81	10.81	9.50	29.25
najnižja ocena	0	0	0	2	4
najvišja ocena	4	25	25	15	60

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom najtežje 3. naloga pri tretjih letnikih ter 3. naloga pri četrtih. Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene za tretje letnike celo boljše kot na predtekmovanju, pri četrtih pa nekoliko nižje.

Na zaključnem tekmovanju je bila izrazito najtežja 1. naloga pri četrtih letnikih, ki je nihče ni uspel pravilno rešiti, saj je bila najboljša ocena pri tej naloge le 4 točke. Med težje naloge lahko prištejemo še 1. nalogo pri tretjih letnikih ter 2. in 4. nalogo pri četrtih letnikih.

Zanimivo je pogledati, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju je skoraj vsako nalogo pravilno rešil vsaj ena dijakinja oziroma dijak. Izjema je bila le 3. naloga pri četrtih letnikih. Na sklepnem tekmovanju je bila prav tako opazna razlika v uspešnosti med tretjim in četrtim letnikom. Pri četrtih letnih ni nihče pravilno rešil 1. in 4. naloge. Pri tretjih letnikih pa je bila po tem kriteriju najtežja 1. naloga, ki so jo pravilno rešili le trije.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
40	25	2	9
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
28	3	0	4

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
3	4	5	7
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	2	3	0

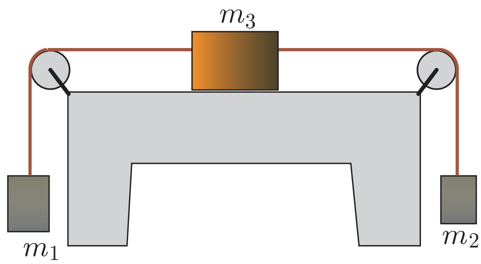
Letošnje tekmovanje je finančno podprla:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

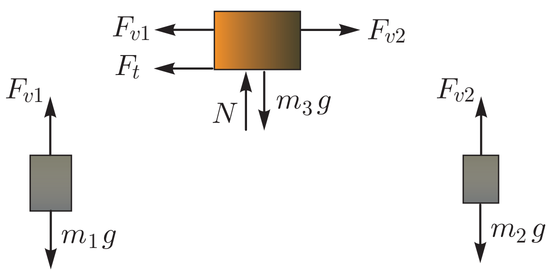
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Določi najmanjši koeficient trenja med kvadrom in podlago, da bo sistem na sliki miroval! Upoštevaj, da sta škripca in vrv breztežna. Mase kvadrov so: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 2.5$ kg, $m_3 = 4$ kg.



Rešitev: Sistem treh kvadrov razstavimo na posamezne kvadre. Vpliv vrvi in podlage ter zunanje vplive nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Za vsak kvader posebej zapišemo ravnotežne enačbe. Za kvadra z masama m_1 in m_2 iz ravnotežnih pogojev v navpični smeri dobimo:

$$F_{v1} = m_1\, g \qquad F_{v2} = m_2\, g.$$

Za tretji kvader zapišemo ravnotežni enačbi v vodoravni in navpični smeri:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -F_{v1} - F_t + F_{v2} = 0$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N = m_3\, g.$$

V ravnotežni enačbi v vodoravni smeri upoštevamo, da je sila trenja enaka produktu koeficienta trenja in sile podlage

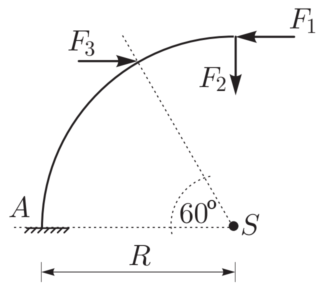
$$F_t = k_t\, N = k_t\, m_3\, g.$$

Ko vstavimo izraze za F_{v1}, F_{v2} in N v zgornjo enačbo, dobimo:

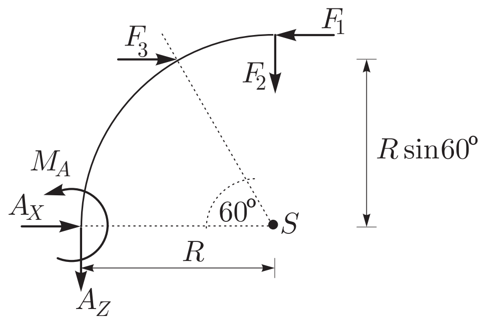
$$-m_1\, g - k_t\, m_3\, g + m_2\, g = 0 \quad \rightarrow \quad k_t = \frac{m_2 - m_1}{m_3} = 0.125.$$

2. naloga

Za previsni nosilec v obliki krožnega loka določi reakcije v podpori A!
Podatki:
$F_1 = 200$ N, $F_2 = 400$ N,
$F_3 = 500$ N,
$R = 2$ m.



Rešitev: Podporo odstranimo in njen vpliv nadomestimo z reakcijami.



Nato zapišemo ravnotežne pogoje, iz njih pa izračunamo reakcije

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + F_3 - F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -300 \text{ N}$$

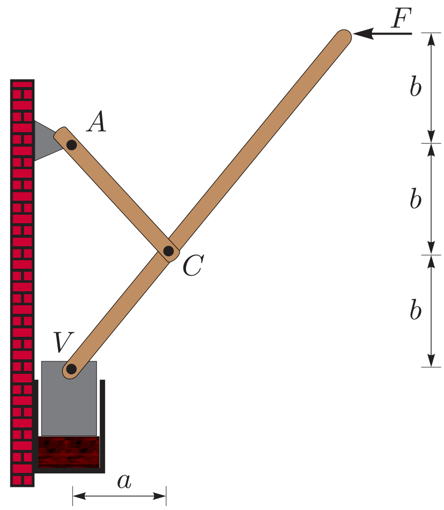
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + F_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -400 \text{ N}$$

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad M_A - F_2\, R + F_1\, R - F_3\, R \sin 60^{\circ} = 0$$

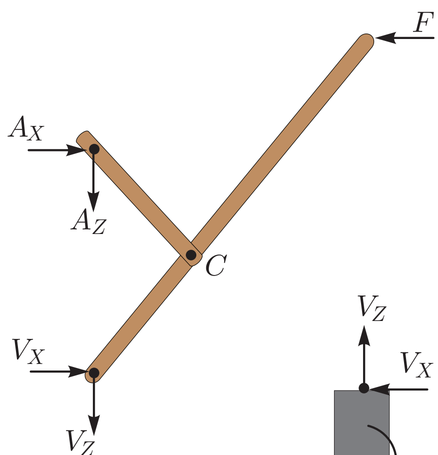
$$\rightarrow \quad M_A = -1266 \text{ Nm}.$$

3. naloga

Določi navpično silo, s katero naprava za stiskanje deluje na telo v stiskalni posodi, če pritiskamo na ročico v vodoravni smeri s silo $F = 50$ N.
$a = 15$ cm,
$b = 20$ cm.



Rešitev: Stiskalno napravo razstavimo na elemente in njihove medsebojne vplive nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Opozorimo, da naloga zahteva le določitev navpične sile, s katero deluje naprava na stiskano telo. Ta je seveda nasprotno enaka sili, s katero telo deluje na stiskalni bat. Na sliki smo to silo označili z F_V. Iz ravnotežja sil v navpični smeri sledi $F_V = -V_Z$. Določiti je torej potrebno navpično silo v vezi V. Za sistem dveh teles, povezanih s členkom C, zapišemo tri ravnotežne enačbe:

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + V_Z = 0 \quad \rightarrow \quad V_Z = -A_Z$$

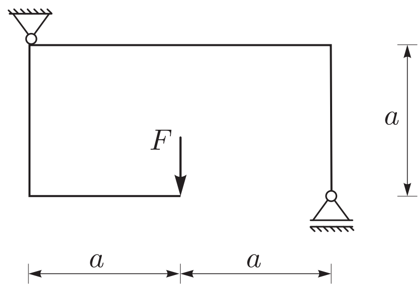
$$\sum M^V = 0 \quad \rightarrow \quad A_X\, 2b - F\, 3b = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = \frac{3}{2} F = 75 \text{ N}$$

$$\sum_{AC} M^C = 0 \quad \rightarrow \quad A_X\, b + A_Z\, a = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = 2F = 100 \text{ N}.$$

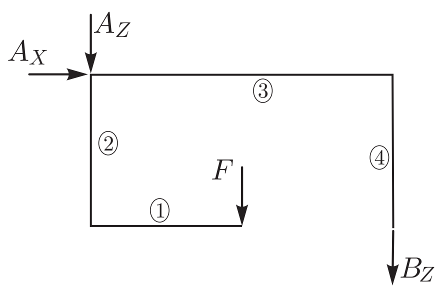
Navpična sila $V_Z = -100$ N, s katero deluje stiskalnica na telo, je torej dvakrat tolikšna, kot je sila, s katero pritiskamo na ročico.

4. naloga

Za lomljeni nosilec na sliki določi diagrame notranjih sil in notranjih momentov! Podatki $F = 100$ N, $a = 2$ m.

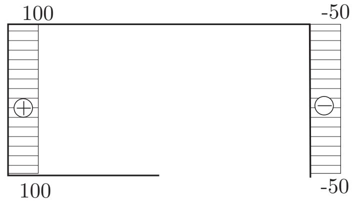


Rešitev: Podpori odstranimo, njun vpliv pa nadomestimo z reakcijami, kot kaže slika:

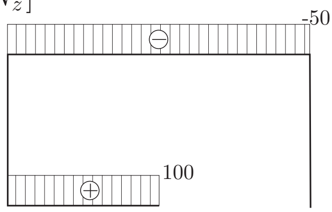


Reakcije so: $A_X = 0$, $A_Z = B_Z = -50$ N. Konstrukcijo razdelimo na polja in za vsako polje iz ravnotežnih enačb določimo notranje sile. Diagrame prikazujemo na spodnji sliki.

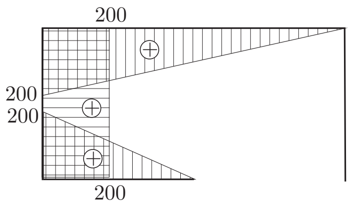
$[N_x]$



$[N_z]$



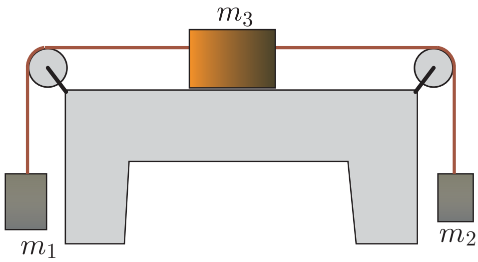
$[M_y]$



Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Določi najmanjšo maso kvadra m_3, da bo sistem na sliki miroval! Upoštevaj, da sta škripca in vrv breztežna. Koeficient trenja med kvadrom in podlago znaša $k_t = 0.15$. Masi drugih dveh kvadrov sta: $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$.



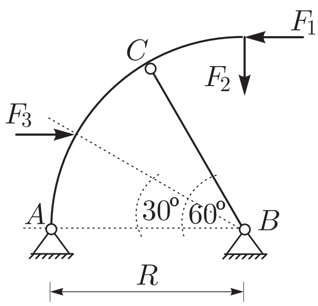
Rešitev: Iz ravnotežnih enačb za posamezne kvadre (glej prvo nalogo za 3. letnike) sledi:

$$m_3 = \frac{m_2 - m_1}{k_t} = \frac{3-2}{0.15}\,\mathrm{kg} = \frac{20}{3}\,\mathrm{kg} = 6.67\,\mathrm{kg}.$$

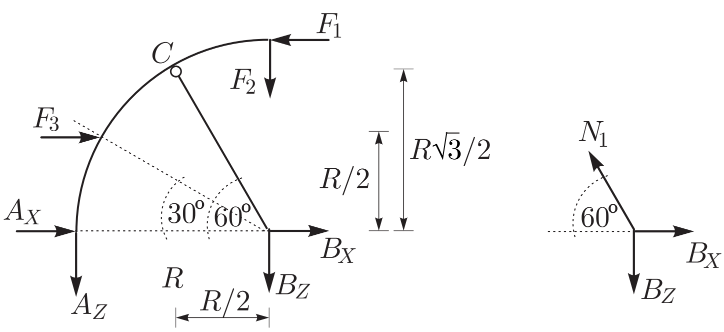
2. naloga

Za konstrucijo na sliki, sestavljeno iz nosilca v obliki krožnega loka in palice, določi reakcije v podporah in osno silo v palici!

Podatki:
$F_1 = 200$ N, $F_2 = 400$ N,
$F_3 = 500$ N,
$R = 2$ m.



Rešitev: Podpori odstranimo in njun vpliv nadomestimo z reakcijami. Nato izrežemo vozlišče B in vpliv palice nadomestimo z osno silo.



Za celotno konstrukcijo zapišemo tri ravnotežne pogoje:

$$\begin{aligned}
&\sum X = 0 && \rightarrow && A_X + B_X + F_3 - F_1 = 0 && && \\
&\sum Z = 0 && \rightarrow && A_Z + B_Z + F_2 = 0 && \rightarrow && B_Z = -450\,\mathrm{N} \\
&\sum M_Y^B = 0 && \rightarrow && A_Z R + F_1 R - F_1 R\frac{1}{2} = 0 && \rightarrow && A_Z = 50\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Nezane reakcije so štiri, dodatno neodvisno enačbo zapišemo kot momentni pogoj za podkonstrukcijo BC

$$\sum_{BC} M^C = 0 \quad \rightarrow \quad B_X R\frac{\sqrt{3}}{2} - B_Z R\frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = -259.8\,\mathrm{N}.$$

Iz prve enačbe potem sledi

$$A_X = -40.2\,\mathrm{N}.$$

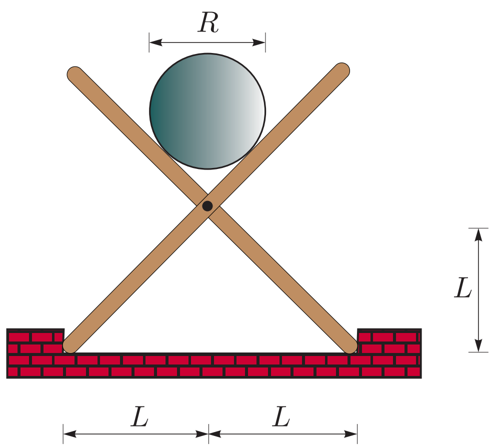
Za vozlišče B zapišemo ravnotežje sil v vodoravni in navpični smeri

$$\begin{aligned}
&\sum X = 0 && \rightarrow && N_1 \cos 60^\circ = B_X && \rightarrow && N_1 = 2B_X = -519.6\,\mathrm{N} \\
&\sum Z = 0 && \rightarrow && N_1 \sin 60^\circ = B_Z. && &&
\end{aligned}$$

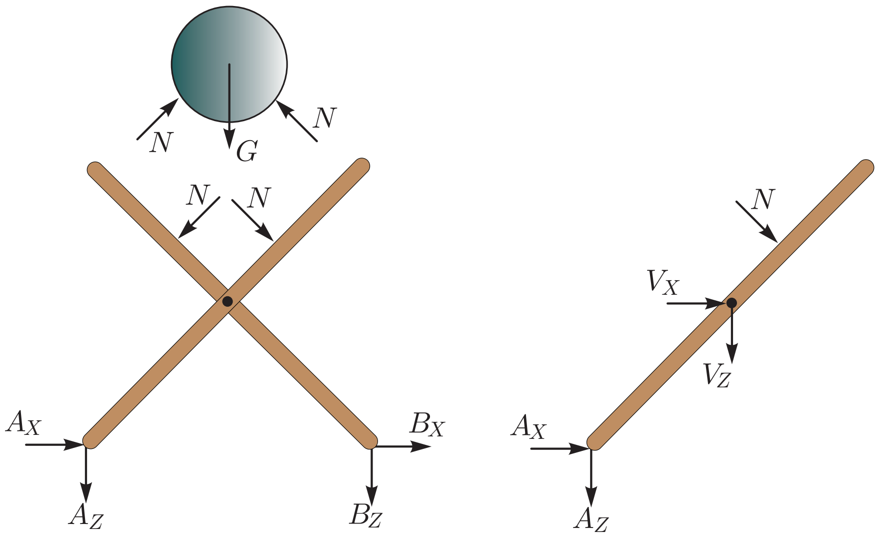
Za določitev osne sile v palici je zadoščala ena od enačb, drugo smo uporabili za kontrolo.

3. naloga

Na vrtljivo povezana nosilca postavimo valj z maso 20 kg in premerom 60 cm. Določi sile med nosilcema in podlago ter sili v vezi! Trenje med valjem in nosilcema lahko zanemariš. $L = 50$ cm.



Rešitev: Medsebojni vpliv med valjem in nosilcema nadomestimo z enakima silama N, ki sta pravokotni na osi nosilcev. Vpliv podlage nadomestimo z reakcijami v točkah A in B. Za določitev sil v vezi dodatno ločimo nosilca in vez V in zapišemo ravnotežne enačbe na enem izmed nosilcev.



Zapisovanje ravnotežnih enačb je preprostejše zaradi kota med nosilcem in podlago, ki znaša $45°$. Iz ravnotežne enačbe za valj v navpični smeri določimo velikost sile N

$$G = 2N\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \quad N = mg\frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}\,\mathrm{N},$$

kjer smo za težnosti pospešek predpostavili približek $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Za konstrukcijo zapišemo tri ravnotežne enačbe:

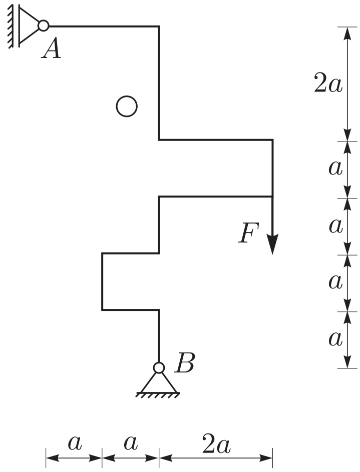
$$\begin{aligned}
&\sum X = 0 && \to \quad A_X + B_X = 0 && \to \quad A_X = -B_X\\
&\sum Z = 0 && \to \quad A_Z + B_Z + 2N\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 && \to \quad A_Z = -100\,\mathrm{N}\\
&\sum M^A = 0 && \to \quad -B_Z\,2L - N\left(L\sqrt{2} + \frac{R}{2}\right) + N\,\frac{R}{2} = 0 &&\\
& && \to \quad B_Z = -100\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Dodatno enačbo za določitev reakcij A_X in B_X ter enačbi za določitev sil v vezi V določajo ravnotežne enačbe za nosilec:

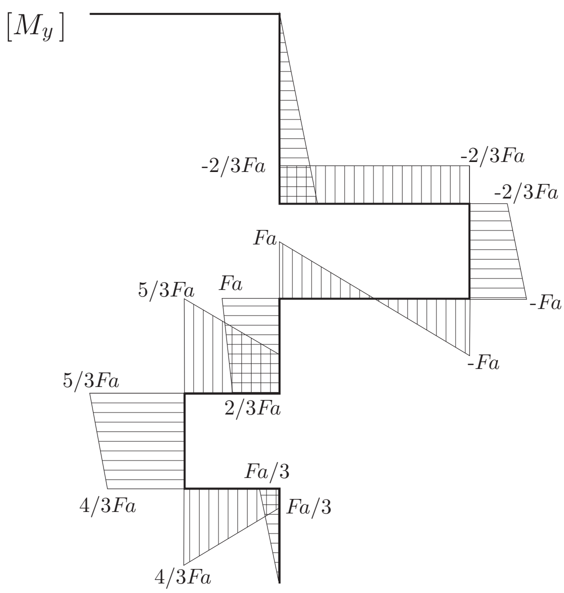
$$\begin{aligned}
&\sum X = 0 && \to \quad V_X + A_X + N\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 && \to \quad V_X = -284.8\,\mathrm{N}\\
&\sum Z = 0 && \to \quad V_Z + A_Z + N\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 && \to \quad V_Z = 0\,\mathrm{N}.\\
&\sum M^V = 0 && \to \quad A_X\,L + A_Z\,L + N\,\frac{R}{2} = 0 && \to \quad A_X = 184.8\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

4. naloga

Za lomljeni nosilec na sliki določi diagrame upogibnih momentov!
Podatki:
$F = 100$ N,
$a = 1$ m.



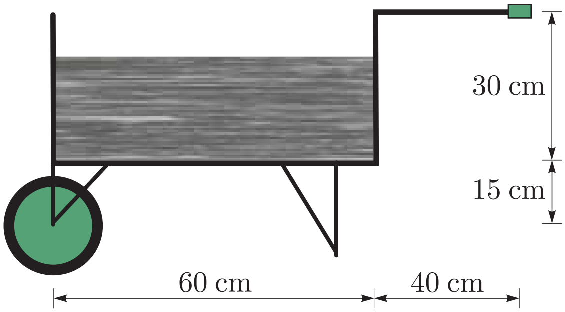
Rešitev: Podpori odstranimo in njun vpliv nadomestimo z reakcijami. Reakcije so: $A_X = -\frac{F}{3}$, $B_X = -\frac{F}{3}$, $B_Z = -F$. Reševanje naloge zahteva zadostno mero vztrajnosti in potrpežljivosti. Konstrukcijo razdelimo na 10 polj in za vsako polje zapišemo momentni ravnotežni pogoj glede na prerezno točko. Diagrame upogibnih momentov prikazujemo na spodnji sliki.



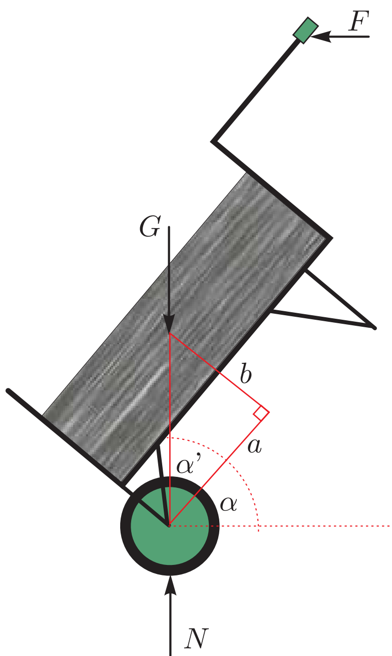
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

V samokolnici s koritom oblike kvadra z dolžino 60 cm, širino 40 cm in višino 30 cm peljemo 48 litrov strjene malte z gostoto 1200 kg/m^3. Določi kot, pod katerim moramo nagniti samokolnico glede na vodoravno ravnino, da bo sila, s katero moramo držati samokolnico v ravnotežju, najmanjša! Določi tudi to najmanjšo silo!



Rešitev: Ker je malta strjena, je najmanjša sila, s katero držimo samokolnico glede na vodoravno ravnino takrat, ko leži težišče malte v navpični ravnini skozi os kolesa. V tem primeru je ta sila enaka nič.



Za določitev kota moramo najprej določiti višino malte v samokolnici:

$$v = \frac{V}{A} = \frac{48 \cdot 10^3}{60 \cdot 40} = 20\,\mathrm{cm}.$$

Težišče je torej določeno z razdaljama

$$a = 30\,\mathrm{cm} \quad \text{in} \quad b = 15 + \frac{20}{2} = 25\,\mathrm{cm}.$$

Razdalji a in b sta kateti v pravokotnem trikotniku, zato je

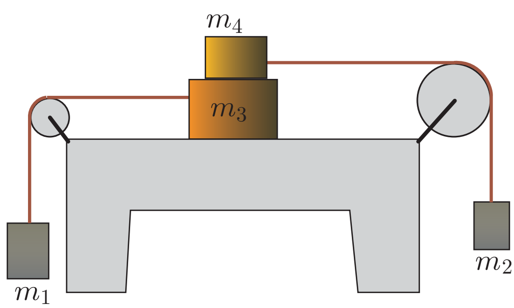
$$\tan\alpha' = \frac{b}{a} = \frac{30}{25} = 1.2 \quad \rightarrow \quad \alpha' = 39.8°.$$

Iskani kot merimo glede na vodoravno ravnino in je

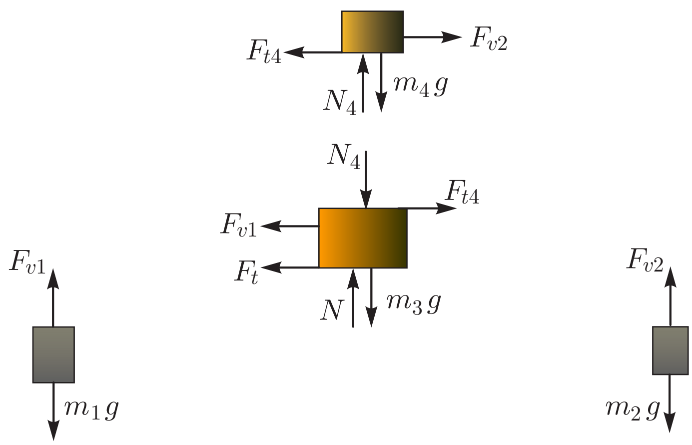
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' = 50.2°.$$

2. naloga

Določi najmanjši koeficient trenja med kvadrom z maso m_3 in podlago ter najmanjšo maso kvadra m_4, da bo sistem na sliki miroval! Koeficient trenja med kvadroma je $k_{t4} = 0.2$. Upoštevaj, da sta škripca in vrv breztežna! Mase kvadrov so: $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 4\,\mathrm{kg}$.



Rešitev: Sistem kvadrov razstavimo na posamezne kvadre. Vpliv vrvi in podlage ter zunanje vplive nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Za vsak kvader posebej zapišemo ravnotežne enačbe. Za kvadra z masama m_1 in m_2 iz ravnotežnih enačb v navpični smeri izračunamo:

$$F_{v1} = m_1\,g \qquad F_{v2} = m_2\,g.$$

Za tretji in četrti kvader zapišemo ravnotežni enačbi v navpični smeri:

$$\sum_3 Z = 0 \quad \to \quad N = m_3\,g + N_4$$
$$\sum_4 Z = 0 \quad \to \quad N_4 = m_4\,g.$$

Ko upoštevamo, da je sila trenja enaka produktu koeficienta trenja in sile podlage

$$F_{t4} = k_{t4}\,N_4 = k_{t4}\,m_4\,g \qquad F_t = k_t\,N = k_t\,(m_3 + m_4)\,g$$

in ko dobljena izraza upoštevamo v ravnotežnih enačbah v vodoravni smeri

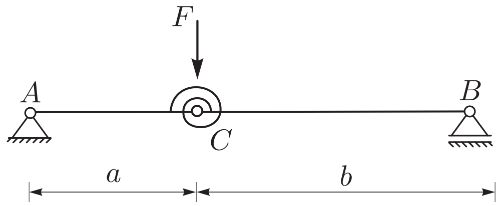
$$\sum_3 X = 0 \quad \to \quad F_{v2} - F_{t4} = 0 \qquad \to \quad m_2\,g - k_{t4}\,m_4\,g = 0$$
$$\sum_4 X = 0 \quad \to \quad -F_t - F_{v1} + F_{t4}$$
$$\to \quad -k_t\,(m_3 + m_4)\,g - m_1\,g + k_{t4}\,m_4\,g = 0,$$

izračunamo

$$m_4 = \frac{m_2}{k_{t4}} = 15\,\mathrm{kg}$$
$$k_t = \frac{m_2 - m_1}{m_3 + m_4} = \frac{1}{19} = 0.0526.$$

3. naloga

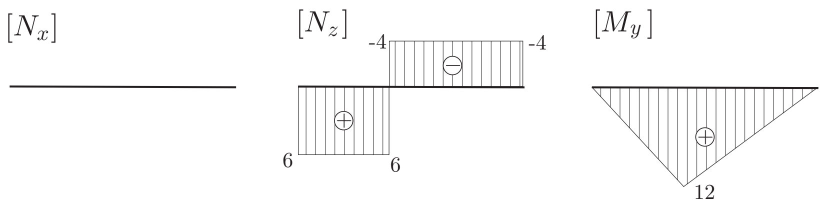
Konstrukcija na sliki je povezana z linearno torzijsko vzmetjo s koeficientom k_φ in obtežena s silo F. Določi diagrame notranjih sil in upogibnih momentov ter moment v vzmeti! Koeficient vzmeti k_φ je tako velik, da so pomiki majhni.
Podatki $F = 10$ kN, $a = 2$ m, $b = 3$ m.



Rešitev: Podpori odstranimo, njun vpliv pa nadomestimo z reakcijami. Iz ravnotežnih enačb izračunamo

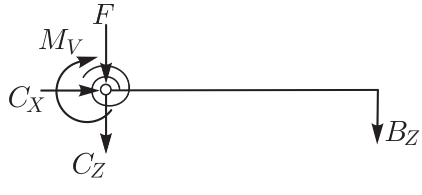
$$A_X = 0 \qquad A_Z = -6\,\mathrm{kN} \qquad B_Z = -4\,\mathrm{kN}.$$

Notranje sile določimo za polji AC in CB iz ravnotežnih enačb. Diagrami so prikazani na spodnji sliki



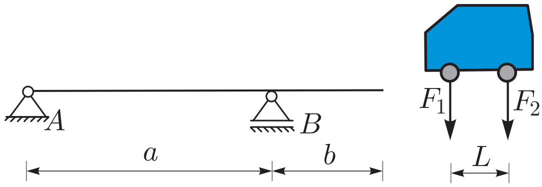
Za ugotavljanje sile v torzijski vzmeti iz konstrukcije izrežemo element AC. Vpliv telesa AC na vez C nadomestimo s silama C_X in C_Z, vpliv torzijske vzmeti pa opišemo z momentom v vzmeti M_V. Moment v vzmeti določimo z momentnim ravnotežnim pogojem na točko C

$$\sum_{BC} M^C = 0 \qquad \to \qquad -M_V - B_Z b = 0 \qquad \to \qquad M_V = 12\,\mathrm{kNm}.$$

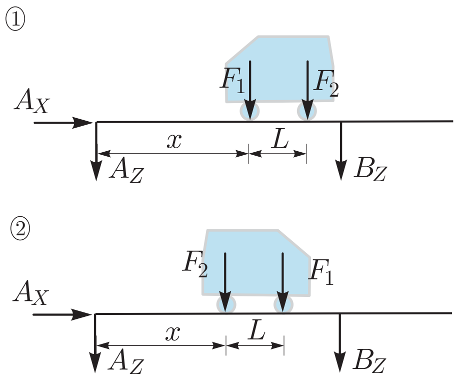


4. naloga

Vozilo z medosno razdaljo L potuje po prostoležečem nosilcu z enostranskim previsom. Določi spreminjanje reakcij podpor nosilca glede na lego vozila in največjo ter najmanjšo vrednost reakcije. Opozorilo: vozilo lahko potuje po nosilcu v obe smeri.
Podatki: $L = 3\,\mathrm{m}$, $a = 20\,\mathrm{m}$, $b = 5\,\mathrm{m}$,
$F_1 = 5$ kN, $F_2 = 7$ kN.



Rešitev: Levo os vozila lahko postavimo kjerkoli na razdalji $x \in [0, 22\,\mathrm{m}]$ od podpore A (glej sliko). Pri tem upoštevamo obe možnosti gibanja vozila, saj je rezultat od tega odvisen.



Ravnotežni enačbi za prvi primer sta

$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = \frac{3}{5}x - \frac{219}{20}$$
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -\frac{3}{5}x - \frac{21}{20}.$$

Rešitve v skrajnih legah so

$$A_{Z,\min} = -10.95\,\mathrm{kN} \quad A_{Z,\max} = 2.25\,\mathrm{kN}$$
$$B_{Z,\min} = -14.25\,\mathrm{kN} \quad B_{Z,\max} = -1.05\,\mathrm{kN}.$$

Za drugi primer gibanja vozila sta ravnotežni enačbi naslednji:

$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = \frac{3}{5}x - \frac{45}{4}$$
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{4}.$$

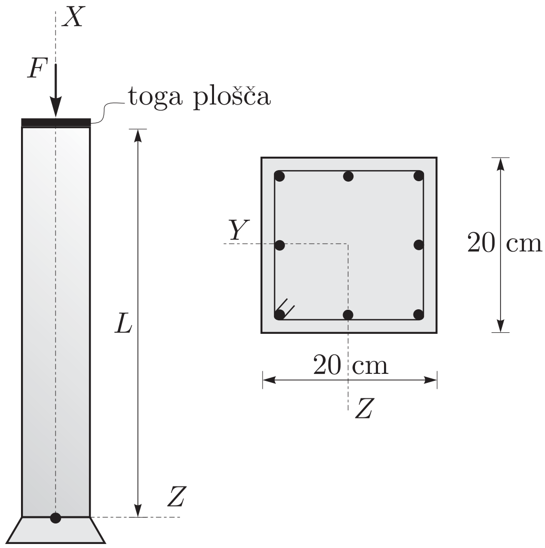
Ekstremni vrednosti za linearno funcijo določimo kar z vstavljanjem mejnih vrednosti parametra x. Tako je

$$A_{Z,\mathrm{min}} = -11.25\,\mathrm{kN} \quad A_{Z,\mathrm{max}} = 1.95\,\mathrm{kN}$$
$$B_{Z,\mathrm{min}} = -13.95\,\mathrm{kN} \quad B_{Z,\mathrm{max}} = -0.75\,\mathrm{kN}.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Opazujemo raven armiranobetonski steber. Na prostem robu je obtežen s centrično tlačno silo. Določi napetosti v betonu in armaturnih palicah ter pomik stebra ob sili. Povezava med armaturo in betonom je toga. Razmišljaj! Kaj bi se zgodilo, če povezava ni toga? Prečni prerez stebra je kvadrat s stranico 20 cm, premer armaturnih palic pa je 1.6 cm.
Ostali podatki: $F = 300\,\mathrm{kN}$, $L = 3\,\mathrm{m}$, $E_b = 3500$ kN/cm^2, $E_j = 21000$ kN/cm^2.



Rešitev: Tlačno silo, s katero je obtežen steber, uravnotežata rezultantna sila betonskega dela stebra F_b in rezultantna sila armaturnih palic F_j:

$$F = F_b + F_j.$$

Ker je steber obtežen centrično, so normalne napetosti v betonu in armaturi konstantne

$$\begin{aligned} F_b &= \sigma_b A_b, \qquad\qquad F_j = \sigma_j A_j \\ F &= \sigma_b A_b + \sigma_j A_j. \end{aligned}$$

Ploščini armature in betonskega dela prereza sta

$$\begin{aligned} A_j &= 8\pi \cdot 0.8^2 = 16.085\,\mathrm{cm}^2 \\ A_b &= 20 \cdot 20 - A_j = 383.923\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

Iz pogoja, da sta osni deformaciji v jeklu in betonu enaki, sledi zveza med napetostima:

$$\varepsilon_j = \varepsilon_b \quad \to \quad \frac{\sigma_j}{E_j} = \frac{\sigma_b}{E_b} \quad \to \quad \sigma_j = \frac{E_j}{E_b}\sigma_b.$$

Dobljeno zvezo upoštevamo v ravnotežni enačbi in dobimo

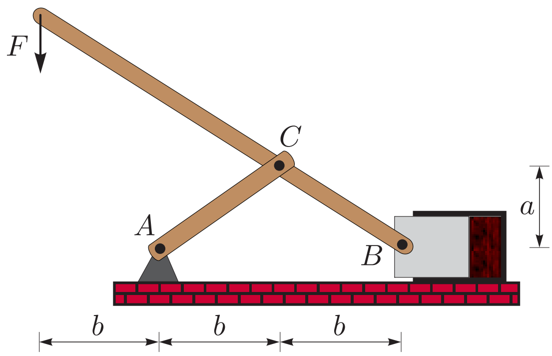
$$\sigma_b = \frac{F}{A_b + A_j E_j / E_b} = 0.6244\,\mathrm{kN/cm^2} \quad \to \quad \sigma_j = 3.7467\,\mathrm{kN/cm^2}.$$

Navpični pomik stebra narašča linearno od vpetišča do prostega roba in je ob prijemališču sile

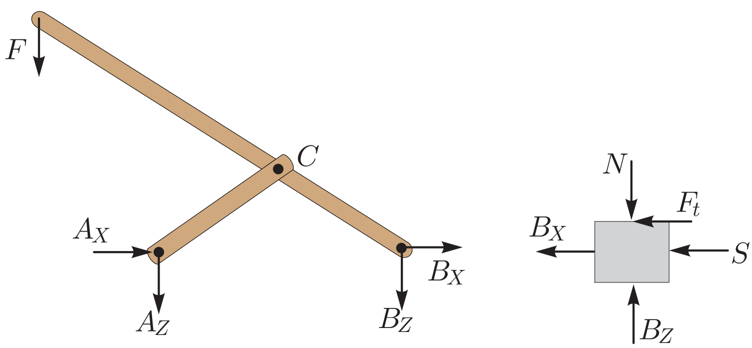
$$u = \varepsilon_j L = \varepsilon_b L = \frac{\sigma_j}{E_j} L = 0.0535\,\text{cm}.$$

2. naloga

Določi vodoravno silo, s katero naprava za stiskanje deluje na telo v stiskalni posodi, če pritiskamo na ročico v navpični smeri s silo $F = 100$ N. Pri tem upoštevaj trenje med batom in posodo!
Podatki: $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $k_t = 0.2$.



Rešitev: Stiskalno napravo ustrezno ločimo na elemente in medsebojne vplive nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Vodoravna sila, s katero deluje naprava na stiskano telo, je na sliki označena z S.

Ravnotežne enačbe zapišemo za sistem dveh vzvodov

$$
\begin{array}{llll}
\sum X = 0 & \rightarrow \quad A_X + B_X = 0 & \rightarrow \quad B_X = -2F = -200\,\mathrm{N} \\
\sum Z = 0 & \rightarrow \quad A_Z + B_Z + F = 0 & \rightarrow \quad A_Z = -\dfrac{3}{2}F = -150\,\mathrm{N} \\
\sum M^A = 0 & \rightarrow \quad -B_Z\,2b + F\,b = 0 & \rightarrow \quad B_Z = \dfrac{1}{2}F = 50\,\mathrm{N} \\
\sum\limits_{AC} M^C = 0 & \rightarrow \quad A_X\,a + A_Z\,b = 0 & \rightarrow \quad A_X = 2F = 200\,\mathrm{N}
\end{array}
$$

in bat

$$
\begin{array}{lll}
\sum X = 0 & \rightarrow \quad -B_X - F_t - S = 0 & \\
\sum Z = 0 & \rightarrow \quad N - B_Z = 0 & \rightarrow \quad N = B_Z = 50\,\mathrm{N}.
\end{array}
$$

Sila trenja je enaka produktu koeficienta trenja in sile podlage:

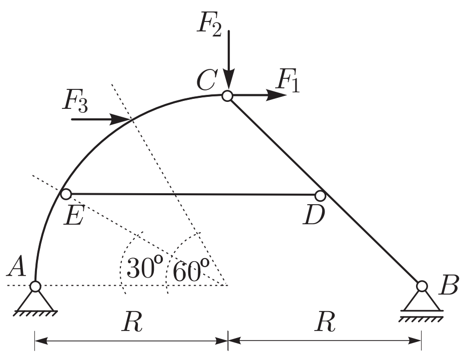
$$F_t = k_t N,$$

zato je

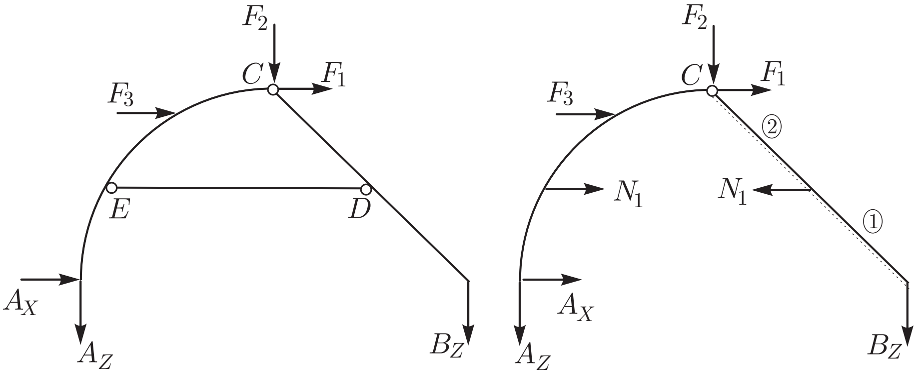
$$S = -B_X - k_t N = 190\,\mathrm{N}.$$

3. naloga

Za konstrukcijo na sliki, sestavljeno iz nosilca v obliki krožnega loka, ravnega nosilca in palice, določi notranje sile in momente v nosilcu BC in osno silo v palici ED!
Podatki:
$F_1 = 200$ N, $F_2 = 400$ N,
$F_3 = 500$ N,
$R = 2$ m.



Rešitev: Podpori odstranimo in ju nadomestimo z reakcijami, kot kaže slika.



Iz ravnotežnih enačb izračunamo neznane reakcije:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + F_1 + F_3 = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -700\,\mathrm{N}$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + B_Z + F_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = 116.5\,\mathrm{N}$$

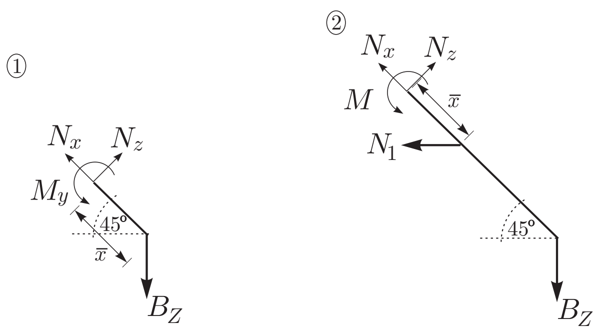
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad -B_Z\,2R - F_3 R\frac{\sqrt{3}}{2} - F_2 R - F_1 R = 0$$

$$\rightarrow \quad B_Z = -516.5\,\mathrm{N}.$$

Palico odstranimo, njen vpliv na preostalo konstrukcijo pa nadomestimo z osno silo. Momentni ravnotežni pogoj na točko C zapišemo za nosilec BC in izračunamo neznano osno silo:

$$\sum_{BC} M^C = 0 \quad \rightarrow \quad -B_Z\,R - N_1\frac{R}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 1033\,\mathrm{N}.$$

Nosilec BC razdelimo na dve polji. V vsakem polju posebej konstrukcijo prerežemo na dva dela in predpostavmo notranje sile, kot kaže slika.



Zaradi preprostosti obravnavamo desne dele nosilca glede na predpostavljeni koordinatni sistem. Za vsako polje posebej zapišemo ravnotežne enačbe. Za prvo polje velja

$$\sum x = 0 \quad \rightarrow \quad N_x = B_Z \frac{\sqrt{2}}{2} = -365.2\,\mathrm{N}$$

$$\sum z = 0 \quad \rightarrow \quad N_z = B_Z \frac{\sqrt{2}}{2} = -365.2\,\mathrm{N}$$

$$\sum M_y = 0 \quad \rightarrow \quad M_y = -B_Z \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x} = -365.2\,\bar{x}\,\mathrm{Nm},$$

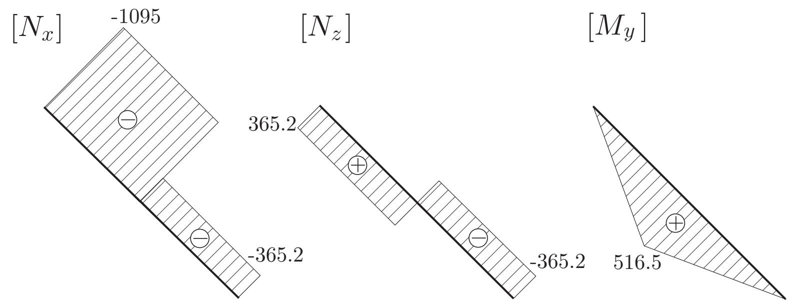
za drugo polje pa

$$\sum x = 0 \quad \rightarrow \quad N_x = B_Z \frac{\sqrt{2}}{2} - N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -1095.7\,\mathrm{N}$$

$$\sum z = 0 \quad \rightarrow \quad N_z = B_Z \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 365.2\,\mathrm{N}$$

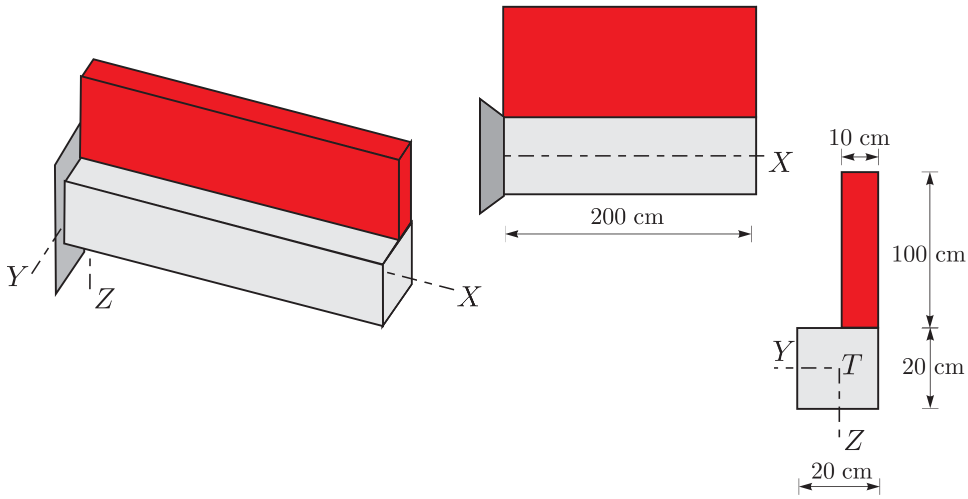
$$\sum M_y = 0 \quad \rightarrow \quad M_y = -B_Z \left(\bar{x} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{R}{2} \right) - N_1 \bar{x} \frac{\sqrt{2}}{2} = 516.5 - 365.2\,\bar{x}\,\mathrm{Nm}.$$

Diagrami notranjih sil in upogibnega momenta so prikazani na spodnji sliki.

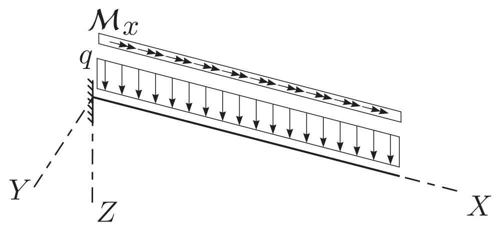


4. naloga

Previsni nosilec je togo vpet v konstrukcijo. Obtežen je s predelnim zidom z gostoto 1500 kg/m^3, kot kaže slika. Določi diagrame notranjih sil glede na os T, ki poteka v težišču prečnega prereza nosilca! Lastno težo nosilca lahko zanemariš!



Rešitev: Ker nosilec modeliramo z linijskim elementom, ki ga določa os, moramo na os nosilca reducirati tudi obtežbo. To je shematsko prikazano na spodnji sliki.



Obtežbo na os nosilca predstavljata enakomerna porazdeljena obtežba q v smeri osi Z, zaradi ekscentričnosti zidu pa še enakomerni torzijski moment $\mathcal{M}_x$. Obe statično enakovredni obtežbi določimo na osnovi podatkov o zidu:

$$q = 1500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1\,\mathrm{m} \cdot 0.1\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 1.5\,\mathrm{kN/m}$$
$$\mathcal{M}_x = -q \cdot 0.05\,\mathrm{m} = -0.075\,\mathrm{kNm/m}.$$

Glede na obtežbo se prečne sile v smeri osi Z vzdolž osi nosilca spreminjajo linearno, upogibni momenti okrog osi Y se spreminjajo po kvadratni paraboli, torzijski momenti pa linearno. Ostale notranje sile so enake nič. Diagrami notranjih sil, ki so različne od nič, so prikazani na spodnji sliki.