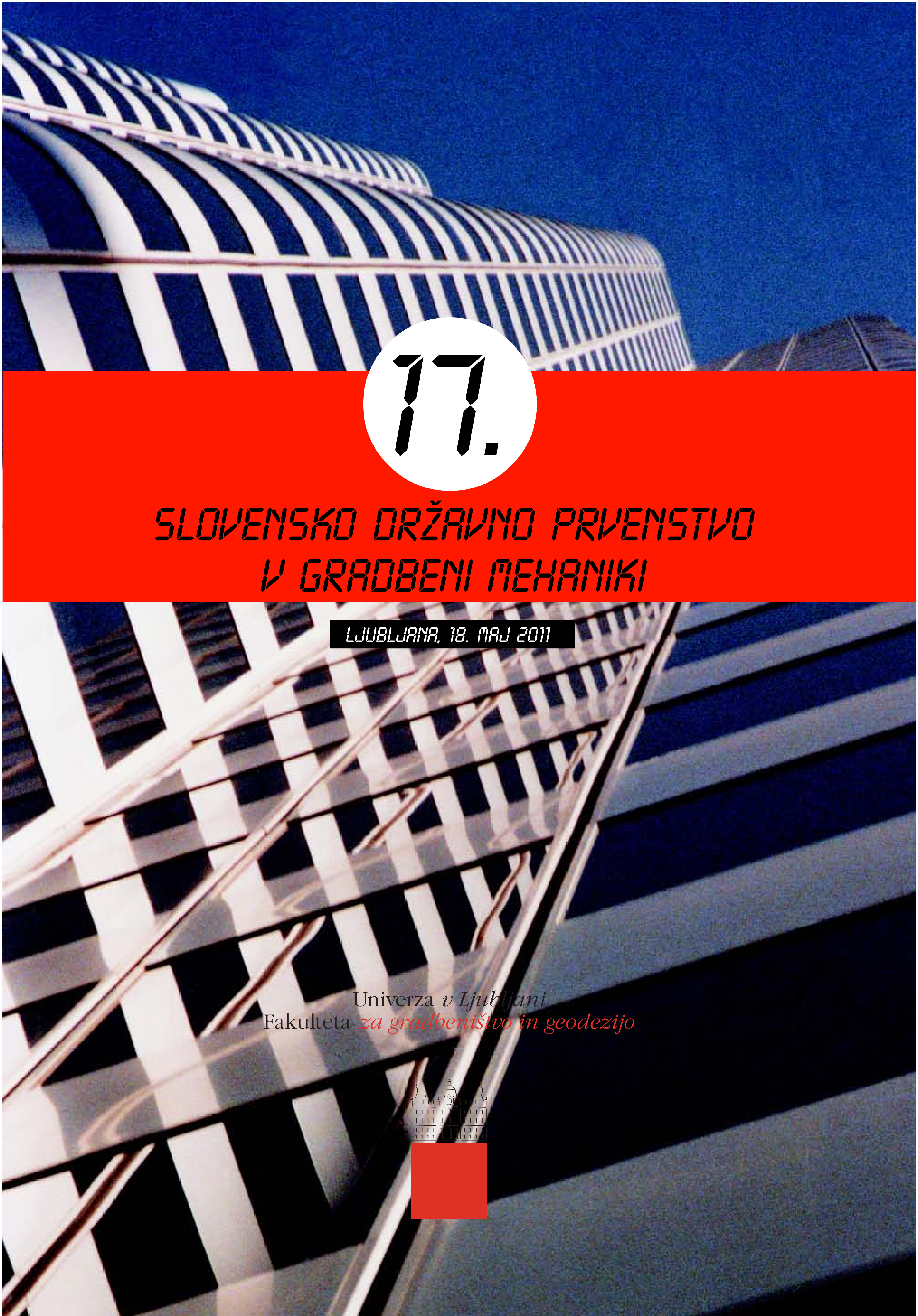


17.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 18. MAJ 2011

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

17. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Goran Turk, Dejan Zupan, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 18. maj 2011

TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
17. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Studio Orca, Ljubljana

Obseg: 28 strani

Naklada: 80 izvodov

Ljubljana, 2011

CIP – Katabožni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (17 ; 2011 ; Ljubljana)
[Sedemnajsto]
17. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana, 18. maj 2011 / Goran Turk ... [et al.]. - Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2011

ISBN 978-961-6884-01-3

1. Turk, Goran
259697152

17. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2011

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani organizirali že 17. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Stane Srpčič,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje) in
Duška Tomšič (Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola, Ljubljana).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 59 dijakinj in dijakov tretjega in 73 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 20. aprila 2011. Šestintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 18. maja 2011 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime in priimek	**Letnik**	**Šola**	**Mentor**
Jure Bartol	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Tomaž Bregar	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Luka Janežič	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Matic Jontez	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Rok Kastrevec	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Boštjan Kopinšek	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Mihael Krištof	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Matic Muc	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Michel Nikl	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger

Ime in priimek	Letnik	Šola	Mentor
Alen Plut	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
David Pungert	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Jan Redenšek	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Peter Ugovšek	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Eva Vranjković	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Jernej Žagar	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Martin Avguštin	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Klemen Bajc	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl
Kadrijan Balaj	4	SSŠ Maribor	Vili Vesenjak
Matic Češnovar	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Jernej Divjak	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Simon Dobelšek	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Špela Doles	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Mitja Furman	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Martin Jenko	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl
Benjamin Kuhar	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Luka Ošlaj	4	SSŠ Maribor	Vili Vesenjak
Rok Pahič	4	SSŠ Maribor	Vili Vesenjak
Peter Pezderšek	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Gašper Puš	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Miha Tomažič	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl
Denis Toplak	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Rok Turk	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tim Vauhnik	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Jaš Zakrajšek	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Miha Zupančič	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Matej Župan	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGEŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SSŠ Maribor	Srednja strojna šola Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 18. maja 2011 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom prof. dr. Franca Steinmana, doc. dr. Mojce Šraj, Alojzija Jagodica in Gorazda Novaka ogledali laboratorij Hidroinštituta na Hajdrihovi 28 v Ljubljani.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Peter Češarek, Rado Flajs, Tomaž Hozjan, Jerneja Kolšek, Aleš Kroflič, Nataša Zavrtanik in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
Ime in priimek	**Šola**	**Nagrada**	**Točke**
David Pungert	SGLŠ Novo mesto	1. nagrada	75 %
Matic Muc	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	55 %
Tomaž Bregar	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	53 %
Rok Kastrevec	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	54 %

4. letnik			
Ime in priimek	**Šola**	**Nagrada**	**Točke**
Simon Dobelšek	SEŠTG Novo mesto	1. nagrada	56 %
Rok Pahič	SSŠ Maribor	2. nagrada	51 %
Miha Zupančič	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	50 %

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

Predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
Povprečje	14.67	11.89	12.00	9.44	36.61
Mediana	10.00	10.00	10.00	10.00	30.00
Najnižja ocena	0	0	0	0	0
Najvišja ocena	25	25	25	25	100

Predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
Povprečje	13.07	9.47	10.96	8.07	32.47
Mediana	15.00	5.00	10.00	5.00	25.00
Najnižja ocena	5	0	0	0	0
Najvišja ocena	25	25	25	25	100

Sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
Povprečje	7.87	11.00	11.13	12.00	42.00
Mediana	8.00	10.00	8.00	10.00	43.00
Najnižja ocena	2	0	5	5	16
Najvišja ocena	11	20	23	25	75

Sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
Povprečje	10.95	5.95	11.21	4.47	29.48
Mediana	10.00	6.00	12.00	5.00	24.00
Najnižja ocena	0	2	0	0	0
Najvišja ocena	20	11	25	5	56

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom vse naloge približno enako težke. Zanimivo je tudi, da je pri vsaki nalogi vsaj en dijak dobil maksimalno število točk. Pri 2. nalogi za četrte letnike pa je en dijak dobil dodatne točke za posebno lepo rešitev. Povprečne ocene na sklepnem tekmovanju niso bile bistveno nižje od tistih na predtekmovanju, a so bile naloge vseeno bistveno težje, saj je vsaj en dijak rešil povsem pravilno le 4. nalogo pri tretjih in 3. nalogo pri četrtih letnikih.

Na zaključnem tekmovanju lahko med težje naloge prištejemo še 1. nalogo pri tretjih letnikih ter 2. in 4. nalogo pri četrtih letnikih.

Zanimiv je podatek, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju so vsako nalogo pravilno rešili vsaj štirje tekmovalci, kar kaže na enako težavnost nalog. Drugače je bilo na sklepnem tekmovanju, kjer so bile naloge zelo zahtevne, saj je bilo povsem pravilno rešenih nalog izredno malo. Le en dijak je rešil 4. nalogo pri tretjih letnikih, prav tako je le en dijak rešil

3. nalogo pri četrtih letnikih.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
Predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
17	15	17	4
Predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
4	11	13	4
Sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	0	0	1
Sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	0	1	0

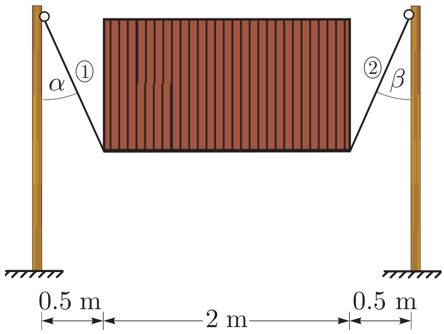
Letošnje tekmovanje je finančno podprla:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo in
Ministrstvo za šolstvo in šport.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/tekma.htm`.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

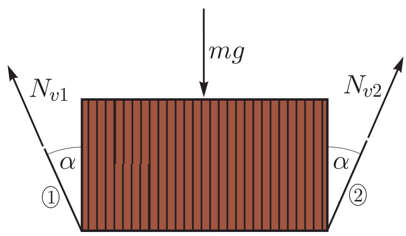
Zaboj z maso $500\,\mathrm{kg}$ postavimo na vrv, kot kaže slika. Dolžina vrvi je $L = 5\,\mathrm{m}$. Določi sili N_{v1} in N_{v2} v poševnem delu vrvi in kota α in β, ki ju vrv oklepa z navpično osjo! Upoštevaj, da je težnostni pospešek enak $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



Rešitev: Ob upoštevanju geometrije in podatka o dolžini vrvi izračunamo kot α:

$$L = 2 + 2\frac{0.5}{\sin\alpha} = 5 \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = \beta = 19.47°.$$

Vrvi prerežemo in vpliv nadomestimo s silama v vrveh.



Iz ravnotežnih pogojev za izrezan del konstrukcije določimo sili v vrvi

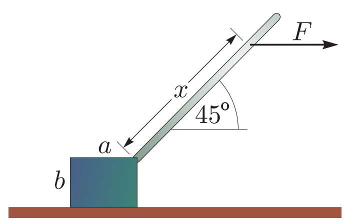
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -N_{v1}\sin\alpha + N_{v2}\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N_{v1} = N_{v2},$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad -N_{v1}\cos\alpha - N_{v2}\cos\alpha + m\,g = 0 \quad \rightarrow$$

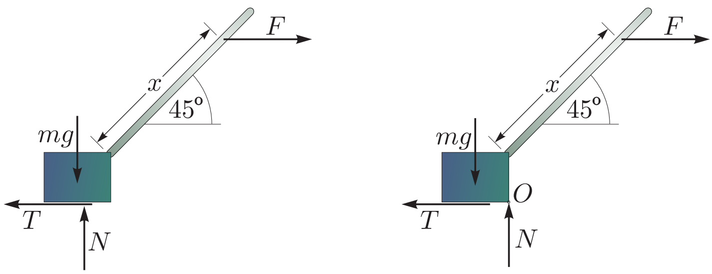
$$N_{v1} = N_{v2} = \frac{m\,g}{2\cos\alpha} = 2.65\,\mathrm{kN}.$$

2. naloga

Na togo telo z maso $20\,\mathrm{kg}$ je togo pritrjen vzvod, kot kaže slika. Vzvod obtežimo z vodoravno silo $50\,\mathrm{N}$. Določi najmanjšo razdaljo x, da se telo prevrne! Kolikšen koeficient trenja med telesom in podlago je potreben, da se telo prevrne prej, kot bi zdrsnilo. Upoštevaj, da je težnostni pospešek enak $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.
Podatki: $a = 60\,\mathrm{cm}$, $b = 40\,\mathrm{cm}$.



Rešitev: Podlago odstranimo in njen vpliv nadomestimo z reakcijama T in N.



Napišemo ravnotežne pogoje v vodoravni in navpični smeri:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F - T = 0 \quad \rightarrow \quad T = F = 50\,\mathrm{N},$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N - m\,g = 0 \quad \rightarrow \quad N = m\,g = 200\,\mathrm{N}.$$

Iz enačbe za trenje, ki povezuje normalno in prečno silo, lahko določimo mejni koeficient trenja

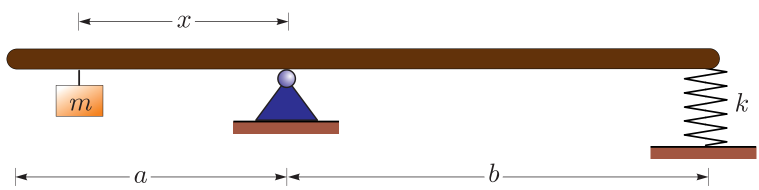
$$|T| \leq k_t\,|N| \quad \rightarrow \quad k_t \geq \frac{|T|}{|N|} = \frac{F}{m\,g} = 0.25.$$

Na zgornji sliki desno so prikazane sile na togem telesu v trenutku pred prevrnitvijo. Takrat normalna sila podlage deluje na skrajnem robu v točki O. Za določitev ročice x zapišemo momentni ravnotežni pogoj glede na točko O:

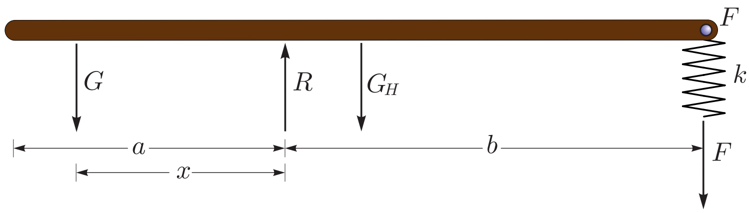
$$\sum M^O = 0 \quad \rightarrow \quad F(x\,\sin 45 + b) - m\,g\,\frac{a}{2} = 0 \quad \rightarrow$$
$$x = \frac{1}{F\,\sin 45}\left(m\,g\,\frac{a}{2} - F\,b\right) = 113\,\mathrm{cm}.$$

3. naloga

Hlod z maso $m_H = 80\,\mathrm{kg}$ postavimo na vrtljivo podporo in vzmet, kot kaže slika. Določi lego bremena z maso m tako, da se bo vzmet raztegnila za $u_v = 1\,\mathrm{cm}$! Upoštevaj, da je težnostni pospešek enak $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.
Podatki: $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 3\,\mathrm{m}$, $m = 70\,\mathrm{kg}$, $k = 200\,\mathrm{N/cm}$.



Rešitev: Vrtljivo podporo in podporo vzmeti odstranimo ter njun vpliv nadomestimo s silama R in F, kot prikazuje spodnja slika.



Najprej izračunajmo sili teže bremena G in teže hloda G_H in silo v vzmeti F zaradi raztezka $1\,\mathrm{cm}$:

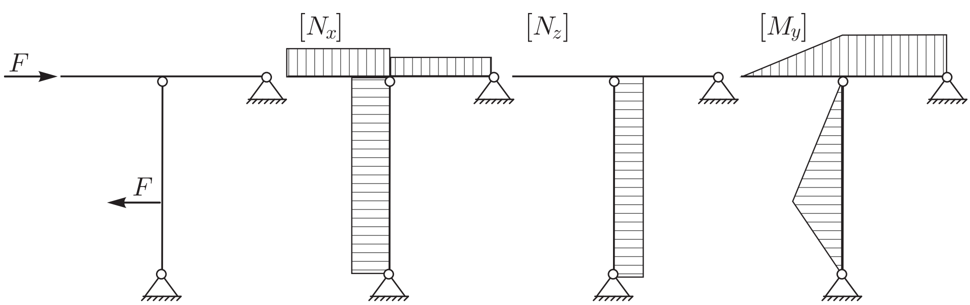
$$G = m\,g = 70 \cdot 10 = 700\,\mathrm{N},$$
$$G_H = m_H\,g = 80 \cdot 10 = 800\,\mathrm{N},$$
$$F = k\,u_v = 200 \cdot 1 = 200\,\mathrm{N}.$$

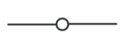
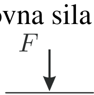
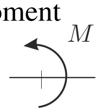
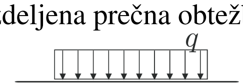
Zapišemo ravnotežni pogoj za navpično smer in momentni ravnotežni pogoj glede na točko F:

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \qquad G + G_H + F - R = 0 \quad \rightarrow$$
$$R = G + G_H + F = 700 + 800 + 200 = 1700\,\mathrm{N},$$
$$\sum M^F = 0 \quad \rightarrow \qquad G(x+b) - R\,b + G_H \frac{a+b}{2} = 0 \quad \rightarrow$$
$$x = \frac{1}{G}\left(-G\,b + R\,b - G_H \frac{a+b}{2}\right) = 1.43\,\mathrm{m}.$$

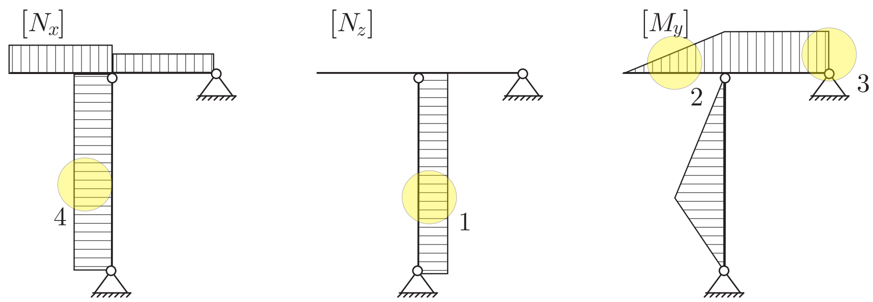
4. naloga

Janezek ima težave pri določanju diagramov notranjih sil. Njegovi diagrami so polni napak. Pomagaj Janezku in poišči (brez računanja) vse napake v spodnjih diagramih! Pri tem si lahko pomagaš s pravili za določanje diagramov notranjih sil na naslednji strani.



Št.	Kadar je ...	... mora veljati:
Pravila, ki veljajo za celotno polje:		
1	obtežba le **točkovna** – **ni** porazdeljene obtežbe	N_x je konstanten, N_z je konstanten M_y je linearen
2	obtežba **enakomerna** v prečni smeri	N_z je linearen M_y je kvadratna funkcija
3	**ni** porazdeljene momentne obtežbe	$\dfrac{dM_y}{dx} = N_z$ kjer je $N_z = 0$, ima M_y ekstrem
4	element konstrukcije je **palica**	$N_z = 0$ $M_y = 0$
Pravila, ki veljajo v značilnih točkah konstrukcije:		
5	členek ali vrtljiva podpora in na tistem mestu ni obtežbe z momentom 	$M_y = 0$ ni skoka prečne sile
6	drsna vez ali drsna podpora v prečni smeri in na tistem mestu ni obtežbe v prečni smeri 	$N_z = 0$
7	drsna vez ali drsna podpora v smeri osi in na tistem mestu ni obtežbe v smeri osi 	$N_x = 0$
8	prečna točkovna sila 	N_z ima skok velikosti F M_y ima prelom, nima pa skoka
9	točkovni moment 	N_z se ne spremeni M_y ima skok velikosti M
10	v točki se prične ali konča enakomerna porazdeljena prečna obtežba 	N_z in M_y sta zvezna – ni skokov N_z se lomi M_y se ne lomi

Rešitev: Mesta napak so označena na naslednji sliki.



Obrazložitev napak:

1. V točki, kjer deluje prečna točkovna sila, bi moral biti skok v prečni sili N_z (pravilo št. 8).

2. Odvod upogibnega momenta mora biti enak prečni sili; kjer je prečna sila enaka nič, mora imeti upogibni moment ekstrem (pravilo št. 3). Ta del konstrukcije je del previsnega nosilca, ki ni obtežen. Na takih delih nosilcev so prečne sile in upogibni momenti enaki nič.

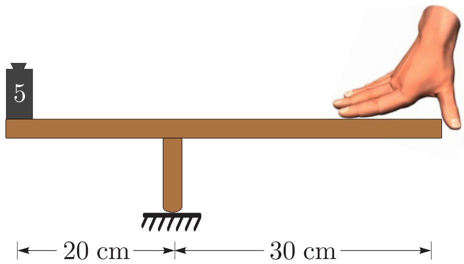
3. V vrtljivi podpori, kjer ni točkovne momentne obtežbe, mora biti upogibni moment M_y enak nič (pravilo št. 5).

4. Po krajšem razmisleku lahko ugotovimo, da sta obe navpični reakciji enaki nič. Zaradi tega je osna sila v navpičnem nosilcu enaka nič.

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Na lahko leseno ploščo z nogo, prikazano na sliki, želimo razporediti tri uteži z masami 2, 5 in 10 kg. Na skrajni levi konec plošče postavimo 5 kg utež. Kam moramo postaviti preostali uteži, da bo sistem v ravnotežju? Opiši vse možne rešitve! Težo plošče lahko pri reševanju zanemariš.

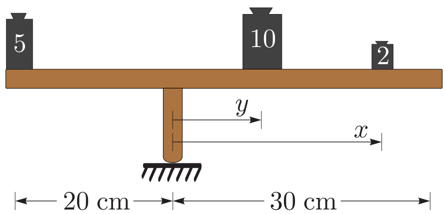


Rešitev: Zapišimo momentni ravnotežni pogoj glede na podporo plošče:

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow \quad 5\,g\,20 - 10\,g\,y - 2\,g\,x = 0 \quad \rightarrow \quad 100 - 10\,y - 2\,x = 0.$$

Zaradi geometrije plošče so vrednosti ročic x in y omejene na interval med -20 in 30. Ta omejitev določa možne lege dve- in deset-kilogramske uteži. Iz zgornje enačbe lahko izrazimo x:

$$x = 50 - 5\,y.$$



Če upoštevamo, da je ročica manjše uteži x omejena z neenačbama

$$-20 \leq x \leq 30,$$

lahko določimo interval, kamor lahko postavimo 10-kilogramsko utež

$$-20 \leq 50 - 5\,y \leq 30 \quad \rightarrow \quad -70 \leq -5\,y \leq -20 \quad \rightarrow \quad 4 \leq y \leq 14.$$

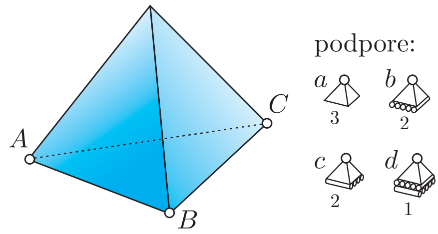
Iz zapisanega povzamemo, da lahko najmanjšo utež postavimo na poljubno mesto x na plošči, najtežjo utež pa posledično postavimo na mesto y, ki ga določa enačba:

$$y = 10 - \frac{1}{5}\,x.$$

Za ilustracijo opišimo tri značilne primere. Najprej najmanjšo utež postavimo na 5-kilogramsko utež ($x = -20\,\mathrm{cm}$). V tem primeru moramo največjo utež postaviti $14\,\mathrm{cm}$ desno od noge ($y = 14\,\mathrm{cm}$). Če najmanjšo utež postavimo na desni rob ($x = 30\,\mathrm{cm}$), moramo najtežjo utež postaviti $4\,\mathrm{cm}$ desno od noge ($y = 4\,\mathrm{cm}$). Če pa najmanjšo utež postavimo nad nogo ($x = 0\,\mathrm{cm}$), moramo najtežjo utež postaviti $10\,\mathrm{cm}$ desno od noge ($y = 10\,\mathrm{cm}$).

2. naloga

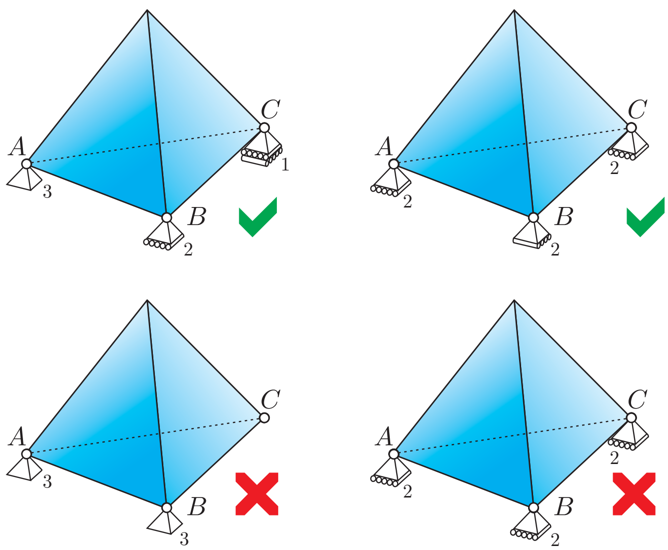
Za togo telo v obliki pravilnega tetraedra določi tak način podpiranja v točkah A, B in C, da bodo podpore telesu odvzele čim manjše število prostostnih stopenj, telo pa bo mirovalo! Številke pod podporami pomenijo število prostostnih stopenj, ki jih podpora odvzame telesu.



Rešitev: Nepodprto togo telo ima v prostoru šest prostostnih stopenj. S tremi podporami moramo teh šest prostostnih stopenj omejiti tako, da bo število prostostnih stopenj podprtega telesa enako nič. To lahko storimo na mnogo različnih načinov. Podpiranje mora izpolnjevati dva pogoja:

- vsota odvzetih prostostnih stopenj treh podpor mora biti enaka številu prostostnih stopenj telesa v prostoru (šest) in
- podpiranje mora biti tako, da je preprečeno kakršnokoli premikanje telesa.

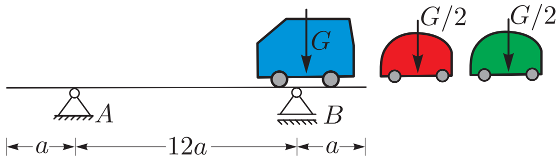
Na spodnji sliki sta prikazani dve pravilni in dve nepravilni podpiranji tetraedra, pa čeprav je pri vseh primerih vsota prostostnih stopenj, ki so jih odvzele podpore, enaka šest.

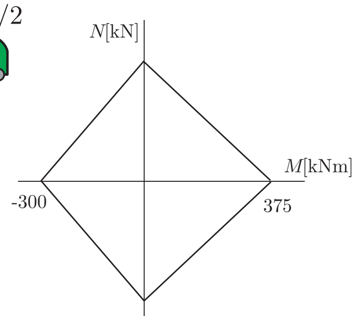


Zgornja dva primera podpiranja sta pravilna, spodnja dva pa napačna, saj je v enem primeru očitno možno vrtenje okoli osi AB, pri drugem pa je možno premikanje v smeri, ki jo dopuščajo vse tri podpore.

3. naloga

Pripelji vozilo teže $G = 50\,\mathrm{kN}$ čez most, ne da bi prekoračil omejitve največjih upogibnih momentov, podanih s preprostim interakcijskim diagramom mejne nosilnosti prečnega prereza. Pri tem si lahko pomagaš z dvema voziloma teže $G/2$. Podatki: $a = 3\,\mathrm{m}$. Opiši postopek tega izjemnega prevoza čez most.





Namig: Izračunaj upogibne momente v nosilcu za različne lege vozil in jih primerjaj z največjimi možnimi momenti v interakcijskem diagramu.

Rešitev: V prostoležečem nosilcu s previsoma se ekstremni upogibni momenti lahko pojavijo na mestu delovanja točkovne sile G ter na mestu podpor. Največji pozitivni upogibni moment bo nastopil takrat, ko bo vozilo na sredini razpona med obema podporama, največji negativni upogibni moment pa takrat, ko bo vozilo na levem ali desnem koncu mosta.

Največji negativni upogibni moment zaradi obtežbe G je torej

$$M_y^{\min} = -G\,a = -50 \cdot 3 = -150\,\mathrm{kNm}$$

največji pozitivni upogibni moment pa je

$$M_y^{\max} = \frac{G\,12a}{4} = \frac{50 \cdot 12 \cdot 3}{4} = 450\,\mathrm{kNm}.$$

Ker je $M_y^{\min} = -150\,\mathrm{kNm} > -300\,\mathrm{kNm}$ in $M_y^{\max} = 450\,\mathrm{kNm} > 350\,\mathrm{kNm}$, velikost največjega pozitivnega upogibnega momenta pogojuje kritični obtežni primer. Vrednost pozitivnega upogibnega momenta na mestu delovanja sile G lahko zmanjšamo tako, da na oba konca mosta postavimo manjši vozili s polovično težo $G/2$. V tem primeru je največji upogibni moment na sredini razpona mosta enak

$$M_y^{\max} = \frac{G\,12a}{4} - \frac{G\,a}{2} = \frac{50 \cdot 12 \cdot 3}{4} - \frac{50 \cdot 3}{2} = 450 - 75 = 375\,\mathrm{kNm}.$$

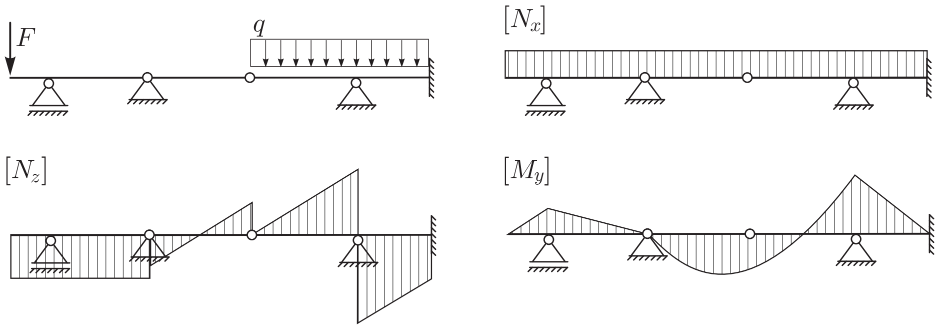
Največji negativni moment je takrat, ko sta na enem od koncev mosta dve vozili – eno večje in eno manjše. Tedaj je največji negativni moment enak

$$M_y^{\min} = -G\,a - \frac{G\,a}{2} = -50 \cdot 3 - \frac{50 \cdot 3}{2} = -150 - 75 = -225\,\mathrm{kNm}.$$

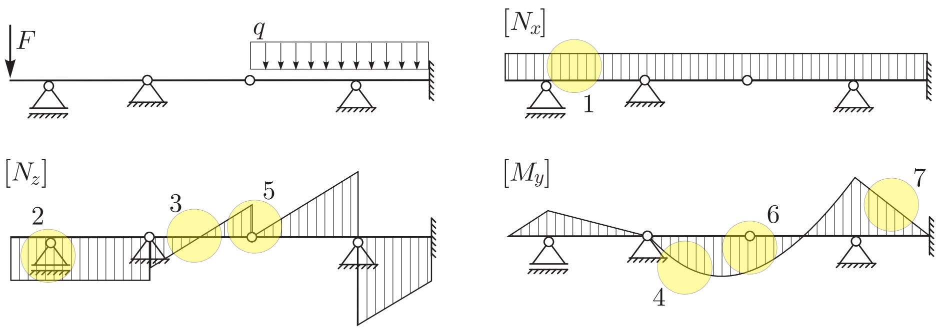
Ugotovili smo, da so v tem primeru vsi upogibni momenti v mejah, določenih v interakcijskem diagramu. Varen prevoz tega izjemnega tovora je: Postavimo manjši vozili na oba konca mosta, nato pa z večjim vozilom mirno peljemo čez most.

4. naloga

Janezek ima težave pri določanju diagramov notranjih sil. Njegovi diagrami so polni napak. Pomagaj Janezku in poišči vse napake v spodnjih diagramih! Pri tem lahko uporabiš pravila za določanje diagramov notranjih sil na strani 11.



Rešitev: Mesta napak so označena na spodnji sliki.



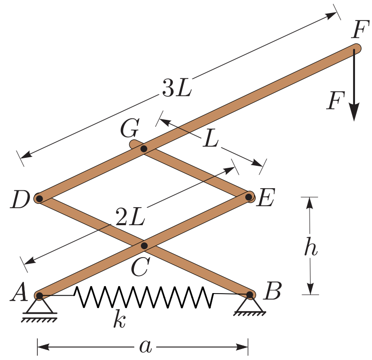
Obrazložitev napak:

1. Konstrukcija ni obremenjena s silami v vzdolžni smeri. Vsaj na delu, označenem na sliki, tudi zaradi tipa podpore ne more biti osnih sil.
2. Na mestu podpore, v kateri je reakcija očitno različna od nič, bi moralo priti do skoka v prečni sili (pravilo št. 8).
3. V palici je prečna sila N_z enaka nič (pravilo št. 4).
4. V palici je upogibni moment M_y enak nič (pravilo št. 4).
5. V členku, ki ni obremenjen s točkovno prečno obtežbo, ni skoka v prečni sili (pravilo št. 5).
6. V členku, ki ni obremenjen s točkovno momentno obtežbo, je upogibni moment M_y enak nič (pravilo št. 5).
7. Na delu konstrukcije z enakomerno prečno linijsko obtežbo je diagram upogibnega momenta M_y kvadratna parabola (pravilo št. 2).

Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Določi silo v vzmeti in razdaljo a, pri kateri je konstrukcija na sliki v ravnotežju! Predpostavimo, da je dolžina vzmeti v nedeformiranem stanju enaka nič.
Podatki: $F = 100\,\mathrm{N}$, $L = 20\,\mathrm{cm}$, $k = 15\,\mathrm{N/cm}$.



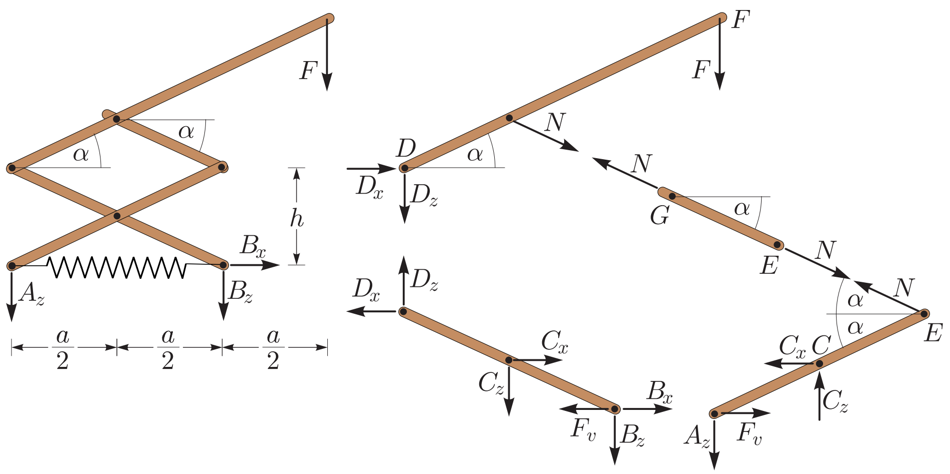
Rešitev: Podpore odstranimo in jih nadomestimo z reakcijami. Nato zapišemo ravnotežne pogoje za celotno konstrukcijo (glej sliko spodaj levo):

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0,$$

$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_z\, a - F\,\frac{a}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = \frac{F}{2} = \frac{100}{2} = 50\,\mathrm{N},$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_z + B_z + F = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad B_z = -F - A_z = -100 - 50 = -150\,\mathrm{N}.$$



Preden izračunamo silo v vzmeti, moramo izračunati silo N v palici EG. To izračunamo iz momentnega pogoja za del konstrukcije DF glede na točko D:

$$\sum_{DF} M_Y^D = 0 \quad \rightarrow \quad -N\,\sin\alpha\,\frac{a}{2} - N\cos\alpha\,\frac{a}{2}\,\tan\alpha - F\,\frac{3a}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad N = -\frac{3\,F}{2\,\sin\alpha}.$$

Silo v vzmeti F_v izračunamo iz momentnega ravnotežnega pogoja za del konstrukcije AE glede na točko C:

$$\sum_{AE} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad N \sin\alpha \frac{a}{2} + N \cos\alpha \frac{a}{2} \tan\alpha + A_z \frac{a}{2} + F_v \frac{a}{2} \tan\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad F_v &= -\frac{1}{\tan\alpha} (A_z + 2\,N \sin\alpha) \\ &= -\frac{1}{\tan\alpha} \left(\frac{F}{2} - \frac{3\,F \sin\alpha}{\sin\alpha} \right) = \frac{5\,F}{2\,\tan\alpha}. \end{aligned}$$

Sila v vzmeti je odvisna od raztezka vzmeti. Ob predpostavki, da je ima nedeformirana vzmet dolžino nič, je $F_v = k\,a$. Ta izraz izenačimo z zgornjo enačbo, kjer upoštevamo, da je $\tan\alpha = h/a$. Tako izračunamo navpično razdaljo h:

$$F_v = k\,a = \frac{5\,F\,a}{2\,h} \quad \rightarrow \quad h = \frac{5\,F}{2\,k} = 16.67\,\mathrm{cm}.$$

Ko uporabimo Pitagorov izrek, izračunamo razdaljo a z izrazom

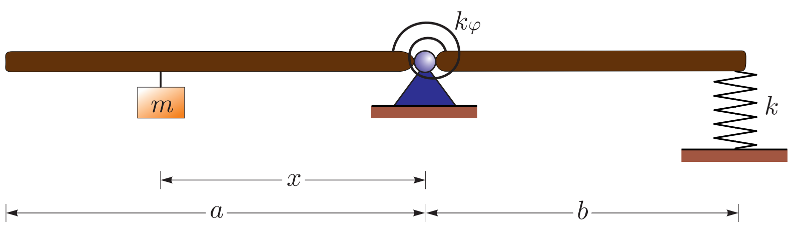
$$a = \sqrt{(2L)^2 - h^2} = \sqrt{40^2 - 16.67^2} = 36.36\,\mathrm{cm}.$$

Sila v vzmeti F_v je

$$F_v = k\,a = 15 \cdot 36.36 = 545.4\,\mathrm{N}.$$

2. naloga

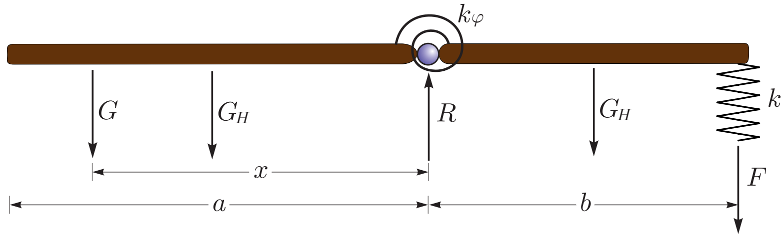
Dva lesena nosilca z masama $40\,\mathrm{kg}$ povežemo s torzijsko vzmetjo in podpremo z nepomično členkasto podporo in vzmetjo, kot kaže slika. Določi lego bremena z maso m, da se bo vzmet raztegnila za $1\,\mathrm{cm}$! Določi tudi zasuka obeh nosilcev!
Podatki: $a = 2.5\,\mathrm{m}$, $b = 2\,\mathrm{m}$, $m = 80\,\mathrm{kg}$, $k = 200\,\mathrm{N/cm}$, $k_\varphi = 5000\,\mathrm{kNcm/rad}$.



Rešitev: Podpore odstranimo in jih nadomestimo z reakcijami R in F (glej sliko na naslednji strani). Silo F izračunamo na osnovi predpisanega raztezka vzmeti

$$F = k \cdot 1 = 200\,\mathrm{N}.$$

Če za težnostni pospešek upoštevamo približno vrednost $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, je teža nosilca $G_H = 40 \cdot 10 = 400\,\mathrm{N}$, teža bremena pa $G = 80 \cdot 10 = 800\,\mathrm{N}$.



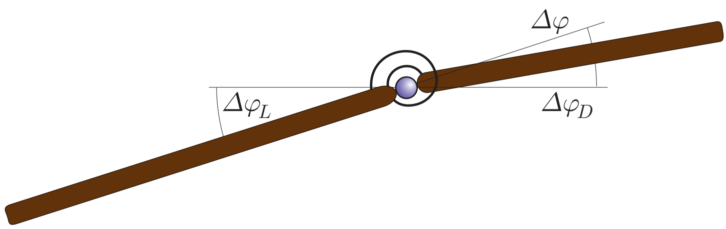
Iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na vrtljivo podporo na sredini nosilca lahko določimo lego bremena x:

$$\sum M_Y^R = 0 \quad \rightarrow \quad G\,x + G_H\,a/2 - G_H\,b/2 - F\,b = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{G_H\,b/2 + F\,b - G_H\,a/2}{G}$$

$$= \frac{400 \cdot 100 + 200 \cdot 200 - 400 \cdot 125}{800} = 37.5\,\mathrm{cm}.$$

Relativni zasuk levega nosilca glede na desnega je odvisen od momenta v podpori in togosti vzmeti k_φ. Zasuk desnega dela nosilca pa lahko preprosto določimo, saj je znan pomik na desni strani tega nosilca ($1\,\mathrm{cm}$). Zasuk levega dela je vsota relativnega zasuka in zasuka desnega dela, kot je razvidno s spodnje slike.



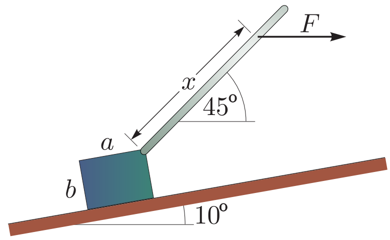
$$\Delta\varphi = \frac{M_y}{k_\varphi} = \frac{G\,x + G_H\,a/2}{k_\varphi} = \frac{800 \cdot 37.5 + 400 \cdot 125}{5000000} = 0.016\,\mathrm{rad},$$

$$\tan\varphi_D = \frac{1}{b} = \frac{1}{200} = 0.005 \quad \rightarrow \quad \varphi_D = 0.005\,\mathrm{rad},$$

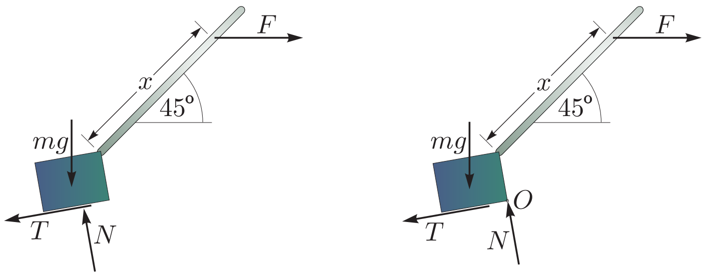
$$\varphi_L = \Delta\varphi + \varphi_D = 0.016 + 0.005 = 0.021.$$

3. naloga

Na togo telo z maso $20\,\mathrm{kg}$ je togo pritrjen vzvod, kot kaže slika. Vzvod vlečemo z vodoravno silo $50\,\mathrm{N}$. Določi najmanjšo razdaljo x, pri kateri se telo prevrne! Kolikšen koeficient trenja med telesom in podlago je potreben, da se telo prevrne prej, kot zdrsne?
Podatki: $a = 60\,\mathrm{cm}$, $b = 40\,\mathrm{cm}$.



Rešitev: Podlago odstranimo in njen vpliv nadomestimo z reakcijama T in N.



Reakciji T in N izračunamo iz ravnotežnih pogojev v smeri vzdolž podlage in v smeri pravokotno na podlago:

$$\begin{aligned}
\sum t = 0 \quad &\rightarrow \quad F\cos 10 - m\,g\sin 10 - T = 0 \quad \rightarrow \\
&\rightarrow \quad T = F\cos 10 - m\,g\sin 10 = 14.51\,\mathrm{N}, \\
\sum n = 0 \quad &\rightarrow \quad N - m\,g\cos 10 - F\sin 10 = 0 \quad \rightarrow \\
&\rightarrow \quad N = m\,g\cos 10 + F\sin 10 = 205.6\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Iz enačbe za določitev sile trenja določimo mejni koeficient trenja

$$|T| \leq k_t\,|N| \quad \rightarrow \quad k_t \geq \frac{|T|}{|N|} = \frac{14.51}{205.6} = 0.0706.$$

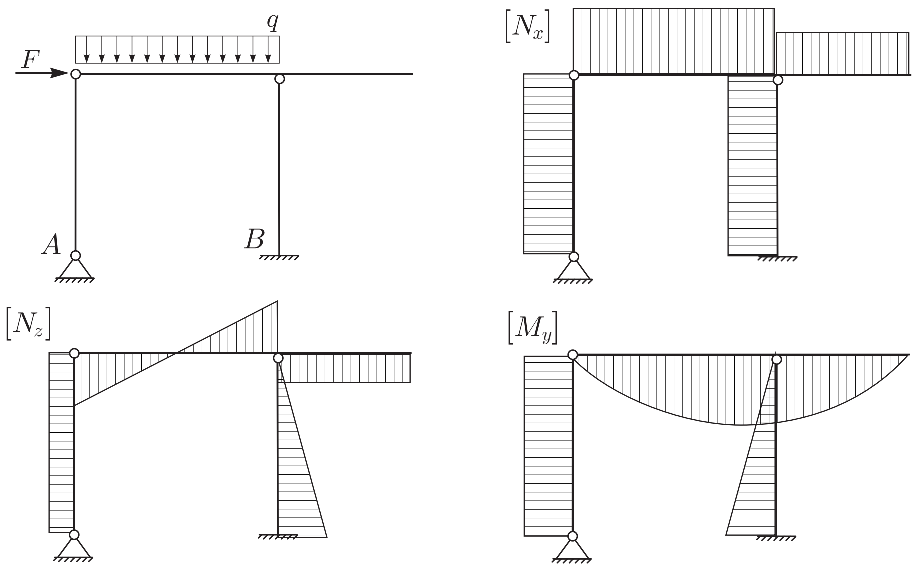
Na zgornji sliki desno so prikazane sile v trenutku tik preden se telo prevrne. Takrat normalna sila podlage deluje na skrajnem robu v točki O. Za določitev ročice x zapišemo momentni ravnotežni pogoj glede na točko O:

$$\sum M^O = 0 \rightarrow F(x\,\sin 45 + b\cos 10) - mg\left(\frac{a}{2}\cos 10 + \frac{b}{2}\sin 10\right) = 0 \rightarrow$$

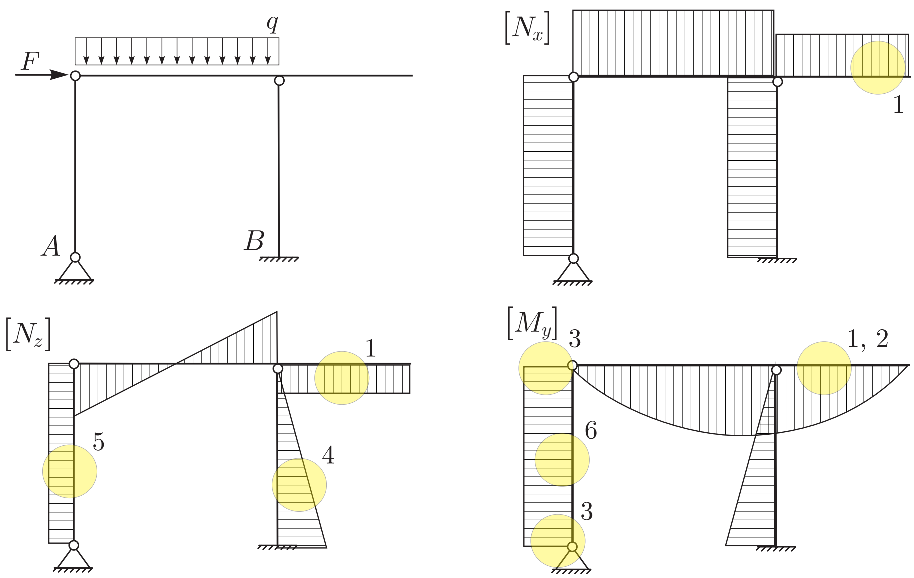
$$x = \frac{1}{F\,\sin 45}\left(mg\left(\frac{a}{2}\cos 10 + \frac{b}{2}\sin 10\right) - F\,b\cos 10\right) = 185\,\mathrm{cm}.$$

4. naloga

Janezek ima težave pri določanju diagramov notranjih sil. Njegovi diagrami so polni napak. Pomagaj Janezku in poišči vse napake v spodnjih diagramih! Pomagaj s pravili za določanje diagramov notranjih sil na strani 11. Napake označi neposredno na diagramih, oštevilči in utemelji vsako posebej!



Rešitev: Mesta z napakami so označena na spodnji sliki.



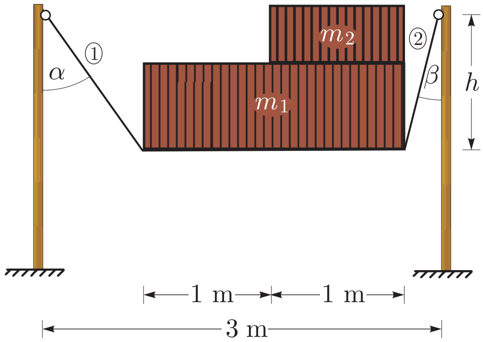
Obrazložitev napak:

1. Previsni del konstrukcije (konzola) je neobremenjena, zato so vse notranje sile v tem delu enake nič.
2. Na delu konstrukcije, kjer ni zvezne prečne obtežbe, je moment linearen ali konstanten (pravilo št. 1).
3. V členku, ki ni obremenjen s točkovno momentno obtežbo, je upogibni moment M_y enak nič (pravilo št. 5).
4. V delu konstrukcije, kjer ni porazdeljene obtežbe, je prečna sila konstantna (pravilo št. 5).
5. V palici je prečna sila N_z enaka nič (pravilo št. 4).
6. V palici je upogibni moment M_y enak nič (pravilo št. 4).

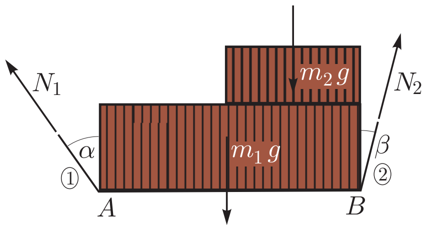
Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Zaboja z masama $m_1 = 250\,\mathrm{kg}$ in $m_2 = 100\,\mathrm{kg}$ podpremo z vrvjo, kot kaže slika. Dolžina desnega poševnega konca vrvi je $d_2 = 2\,\mathrm{m}$. Določi velikosti sil N_1 in N_2 v poševnem delu vrvi, kot β in dolžino levega poševnega konca vrvi, če veš, da je kot $\alpha = 16.3°$!



Rešitev: Vrvi prerežemo in vpliv nadomestimo s silama v vrveh.



Iz ravnotežnih pogojev za izrezan del konstrukcije določimo sili v vrvi N_1 in N_2 ter kot β

$$\sum M_y^B = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 \cos\alpha\, 2 + m_1\, g\, 1 + m_2\, g\, \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad N_1 = \frac{m_1\, g + m_2\, g\, \frac{1}{2}}{2\, \cos\alpha} = \frac{2500 + 500}{2 \cos 16.3} = 1563\,\mathrm{N},$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\beta = 0,$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\beta + m_1\, g + m_2\, g = 0.$$

Iz zadnjih dveh enačb lahko izrazimo:

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{N_1 \sin\alpha}{m_1\, g + m_2\, g - N_1 \cos\alpha} = 0.2193 \quad \rightarrow$$

$$\beta = \arctan(0.2193) = 12.4°,$$

$$N_2 = \frac{N_1\, \sin\alpha}{\sin\beta} = 2048\,\mathrm{N}.$$

Iz izraza za navpično razdaljo med vpetiščema vrvi in spodnjim robom bremena m_1 izračunamo

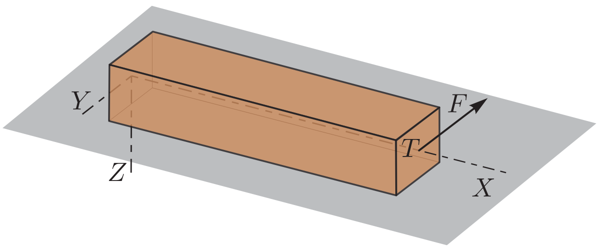
$$h = d_1\, \cos\alpha = d_2\, \cos\beta \quad \rightarrow \quad d_1 = \frac{d_2\, \cos\beta}{\cos\alpha} = 1.97\,\mathrm{m}.$$

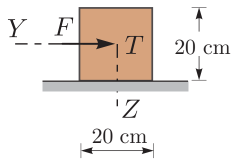
2. naloga

Glej 1. nalogo s sklepnega tekmovanja za 3. letnike.

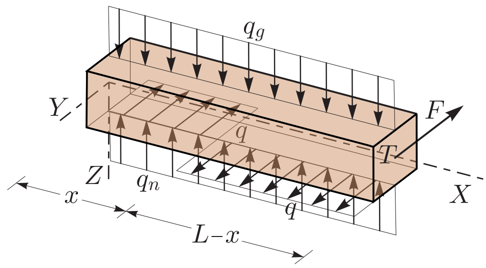
3. naloga

Nosilec z dolžino $L = 3\,\mathrm{m}$ in maso $m = 30\,\mathrm{kg}$ leži na hrapavi podlagi s koeficientom trenja $k_t = 0.3$. Nosilec je na robu obtežen z vodoravno točkovno silo F, kot kaže slika. Izračunaj in nariši diagrame notranjih sil in momentov pri največji sili, ko nosilec še miruje! Pri računu lahko predpostaviš, da se trenje odsekoma enakomerno razporedi po spodnji ploskvi.





Rešitev: Podlago odstranimo in njen vpliv nadomestimo z ustreznimi porazdeljenimi silami: $q_g = m\,g/L = 100\,\mathrm{N/m}$ je porazdeljena sila teže, $q_n = q_g$ je porazdeljena normalna sila, $q \leq k_t\,q_n$ pa je porazdeljena sila zaradi trenja.



Porazdeljena sila trenja q na delu dolžine x deluje v nasprotno smer. Iz ravnotežnega pogoja glede na desni rob nosilca lahko določimo razdaljo x:

$$\sum M_z^{\text{desni rob}} = 0 \quad \rightarrow \quad -q\,x\left(L - \frac{x}{2}\right) + q\,\frac{(L-x)^2}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^2 - 2\,x\,L + \frac{L^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = L\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

V zadnjem izrazu moramo upoštevati negativni predznak, ki da fizikalno smiselno rešitev:

$$x = L\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 0.879\,\mathrm{m}, \qquad L - x = 3 - 0.879 = 2.121\,\mathrm{m}.$$

Največjo silo $F_{\max}$, ko nosilec še ne zdrsne, določimo iz ravnotežja v smeri Y

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad q\,x - q\,(L-x) + F_{\max} = -k_t\,q_g(L - 2\,x) + F_{\max} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F_{\max} = k_t\,q_g(L - 2\,x) = 37.28\,\mathrm{N}.$$

Od nič različna sta le prečna sila N_y in upogibni moment M_z. Izračunamo ju iz ravnotežnih pogojev za levi del prerezanega nosilca. Izračun opravimo za dve polji:

1. polje: $x' < x$

$$\sum_{\text{levi del}} Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_y - q\,x' = 0 \quad \rightarrow \quad N_y = q\,x',$$

$$\sum_{\text{levi del}} M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M_z + \frac{q\,x'^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad M_z = -\frac{q\,x'^2}{2},$$

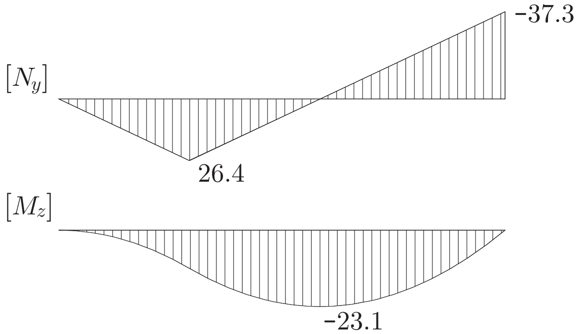
2. polje: $x' > x$

$$\sum_{\text{levi del}} Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_y - q\,x + q\,(x' - x) = 0 \quad \rightarrow \quad N_y = q(2x - x'),$$

$$\sum_{\text{levi del}} M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M_z + q\,x\left(x' - \frac{x}{2}\right) - q\,\frac{(x' - x)}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

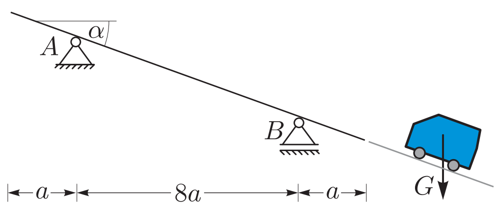
$$\rightarrow \quad M_z = -\frac{q}{2}\left(x'^2 - 4\,x\,x' + 2\,x^2\right).$$

Diagrama od nič različnih notranjih sil in momentov prikazujemo na naslednji sliki.

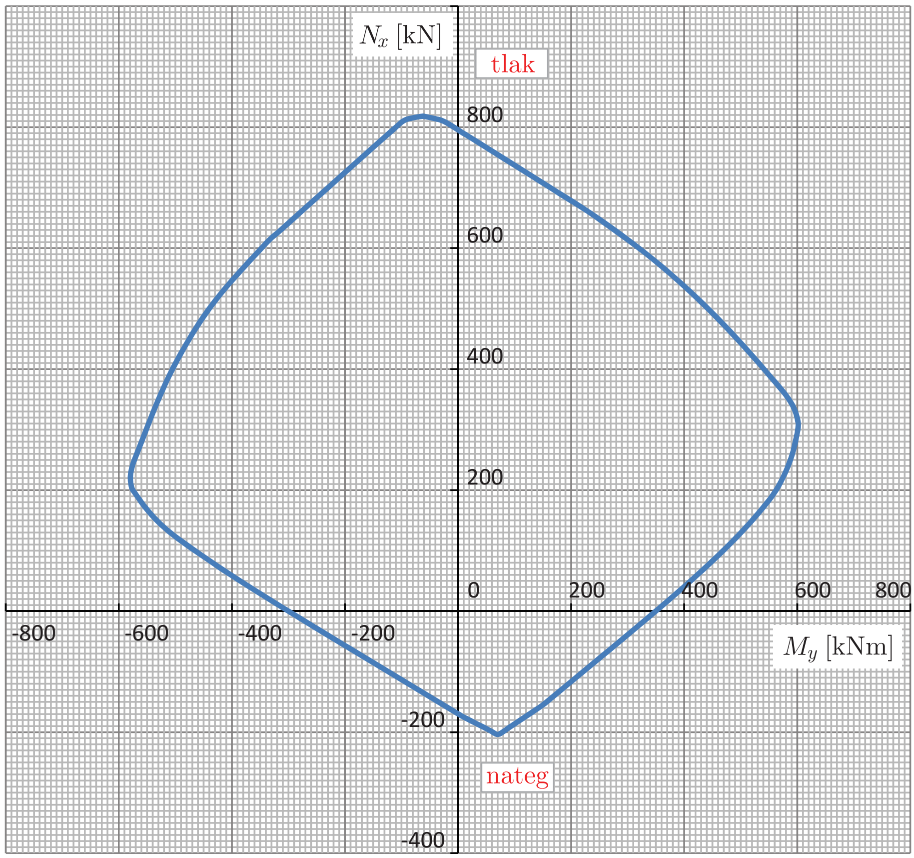


4. naloga

Določi največjo težo vozila G, da pri prečkanju mostu ne bo prekoračena njegova nosilnost, ki je prikazana z interakcijskim diagramom mejne nosilnosti prečnega prereza. Mreža na diagramu je narisana za korak $10\,\mathrm{kNm}$ za upogibne momente na abscisi in $10\,\mathrm{kN}$ za osne sile na ordinati. Podatki: $a = 3\,\mathrm{m}$, $\alpha = 20°$.



Obremenitve kritičnih prečnih prerezov prikaži v interakcijskem diagramu!



Rešitev: Preverimo obremenitve prerezov za tri lege vozila, ki so verjetno najbolj kritične: vozilo je na levem ali desnem koncu nosilca in vozilo je na sredini nosilca oziroma mosta. Določimo upogibne momente in osne sile v nosilcu za te tri primere!

Primer 1: Vozilo je na levem koncu nosilca. Reakcije izračunamo iz ravnotežnih pogojev za cel nosilec:

$$A_x = 0, \qquad A_z = -\frac{9G}{8}, \qquad B_z = \frac{G}{8}.$$

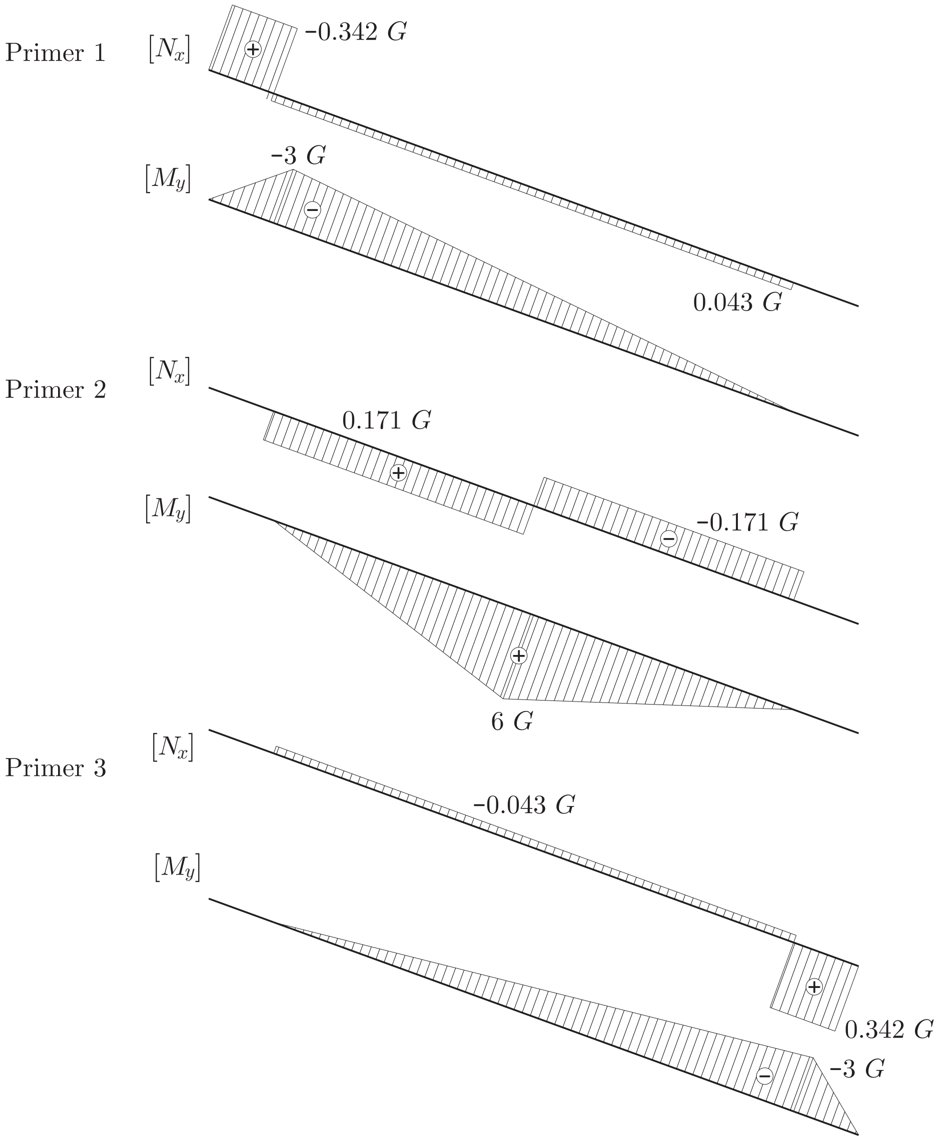
Primer 2: Vozilo je na sredini nosilca. Reakcije izračunamo iz ravnotežnih pogojev za cel nosilec:

$$A_x = 0, \qquad A_z = -\frac{G}{2}, \qquad B_z = -\frac{G}{2}.$$

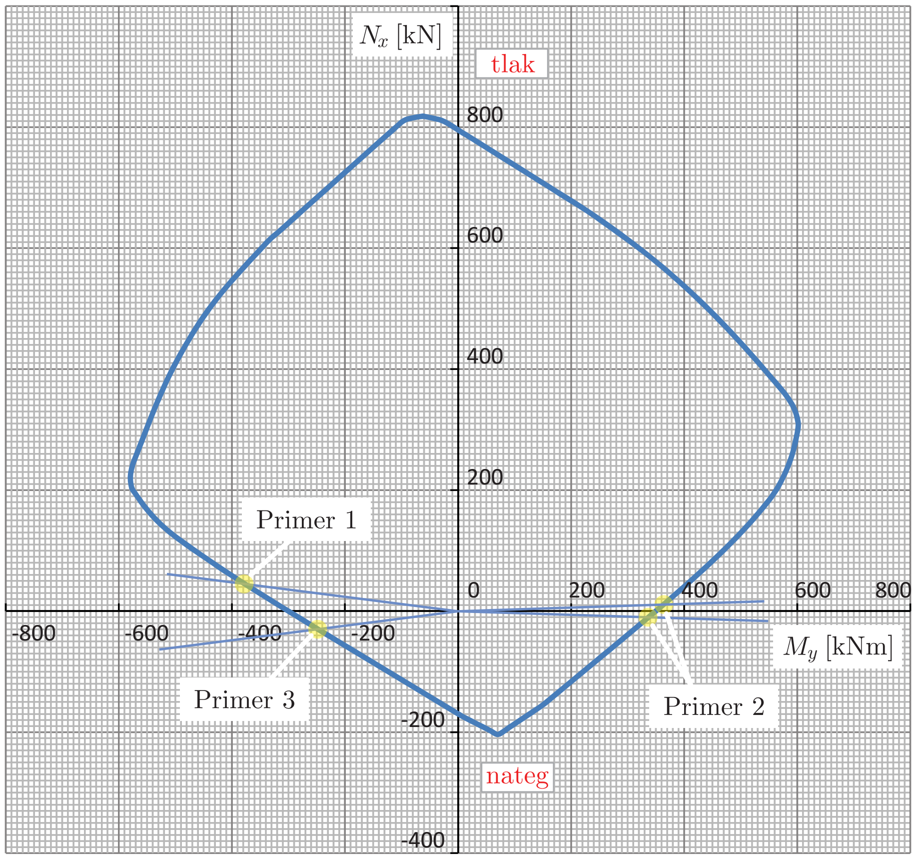
Primer 3: Vozilo je na desnem koncu nosilca. Reakcije izračunamo iz ravnotežnih pogojev za cel nosilec:

$$A_x = 0, \qquad A_z = \frac{G}{8}, \qquad B_z = -\frac{9G}{8}.$$

Diagrame osnih sil in upogibnih momentov prikazujemo na naslednji sliki.



Iz zgornje slike lahko ugotovimo, da je za prvi obtežni primer kritičen prečni prerez nad podporo A. Tam sta $N_x = -0.342\,G$ in $M_y = -3\,G$. Za drugi obtežni primer je kritičen prečni prerez na sredini nosilca. Tam sta $N_x = \pm 0.171\,G$ in $M_y = 6\,G$. Za tretji obtežni primer pa je kritičen prečni prerez nad podporo B. Tam sta $N_x = 0.342\,G$ in $M_y = -3\,G$. Za poljubno vrednost sile G lahko za vse tri obtežne primere v interakcijskem diagramu označimo obremenitve prečnega prereza, ki jih predstavljajo poltraki z začetno točko v koordinatnem izhodišču. Ta točka predstavlja obremenitev pri $G = 0$.



Na interakcijskem diagramu smo označili mejne vrednosti za vse tri primere. Ugotovimo lahko:

- Primer 1: najmanjši $M_y = -380 = -3\,G \;\rightarrow\; G = 126.7\,\mathrm{kN}$,
- Primer 2 (natezna osna sila): največji $M_y = 335 = 6\,G \;\rightarrow\; G = 55.8\,\mathrm{kN}$,
- Primer 2 (tlačna osna sila): največji $M_y = 365 = 6\,G \;\rightarrow\; G = 60.8\,\mathrm{kN}$,
- Primer 3: najmanjši $M_y = -250 = -3\,G \;\rightarrow\; G = 83.3\,\mathrm{kN}$.

Zaključimo, da sme biti vozilo za varno prečkanje mosta težko največ $55.8\,\mathrm{kN}$.