18.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 16. MAJ 2012

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

18. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 16. maj 2012

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
18. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Studio Orca, Ljubljana

Obseg: 29 strani

Naklada: 100 izvodov

Ljubljana, 2012

CIP – Katenložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (18 ; 2012 ; Ljubljana)
[Osemnajsto]
18. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana, 16. maj 2012 / [pripravili] Dejan Zupan ... [et al.]. - V Ljubljani : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2012

ISBN 978-961-6884-10-5

1. Zupan, Dejan, 1973-
264712448

18. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2012

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 18. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Stane Srpčič,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola, Ljubljana) in
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 76 dijakinj in dijakov tretjega in 41 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 10. aprila 2012. Štiriintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 16. maja 2012 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime priimek	Letnik	Šola	Mentor
Mitja Avguštinčič	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Žiga Gazvoda	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Mitja Glavan	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Primož Lah	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Gašper Murn	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Gregor Šavorn	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Domen Žalec	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Jan Petković	3	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Simon Vrhovec	3	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Primož Kočevar	3	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Teja Šinkovec	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Klemen Penca	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Luka Jerele	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Patricija Štravs	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Aleš Šegula	3	SGŠG Maribor	Eva Dvorakova
Luka Starčevič	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Gregor Fujs	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Jernej Martun	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Jurij Žagar	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tomaž Bregar	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Luka Janežič	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Eva Vranjkovič	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Jernej Žagar	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Jure Bartol	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Rok Kastrevec	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Matic Muc	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Alen Plut	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
David Pungert	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Mihael Ogrinc	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Iztok Krajnc	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Sašo Lupša	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Mitja Bukovec	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Boštjan Kopinšek	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Peter Ugovšek	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGEŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 16. maja 2012 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom prof. dr. Roka Žarnića ogledali Konstrukcijsko prometni laboratorij.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Peter Češarek, Rado Flajs, Tomaž Hozjan, Aleš Kroflič, Goran Turk in Eva Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Gašper Murn	SEŠTG Novo mesto	1. nagrada	73%
Domen Žalec	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	57%
Simon Vrhovec	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	50%
4. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Tomaž Bregar	SEŠTG Novo mesto	1. nagrada	80%
Eva Vranjkovič	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	64%
Jernej Žagar	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	64%
David Pungert	SGLŠ Novo mesto	3. nagrada	53%
Luka Janežič	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	51%
Jure Bartol	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	51%

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	13.24	14.09	12.76	9.48	40.01
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	100

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	7.33	5.89	12.04	12.41	29.91
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	13	20	25	70

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	10.79	7.29	8.07	8.14	32.00
najnižja ocena	2	0	0	0	2
najvišja ocena	25	18	25	20	73

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	11.95	6.53	10.21	8.95	37.63
najnižja ocena	2	0	0	0	4
najvišja ocena	25	25	25	15	80

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom najtežje 4. naloga pri tretjih letnikih ter 1. in 2. naloga pri četrtih.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene nekoliko nižje kot na predtekmovanju. Naloge za tretje letnike so bile uravnotežene, pri četrtih letnikih pa glede povprečne ocene izstopa 2. naloga.

Zanimivo je, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je vsako nalogo pravilno rešilo vsaj šest dijakinj oziroma dijakov. Pri četrtih letnikih prvih dveh predtekmovalnih nalog ni povsem pravilno rešil nihče. Največ dijakov četrtega letnika je povsem pravilno rešilo 3. nalogo s predtekmovanja. Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Druge in četrte naloge pri tretjih letnikih in četrte pri četrtih letnikih ni povsem pravilno rešil nihče.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
6	27	26	6
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	0	12	2

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
3	0	1	0
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
1	1	1	0

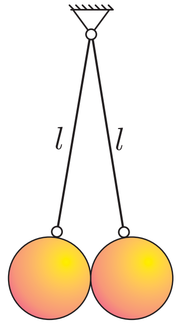
Letošnje tekmovanje je finančno podprla:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

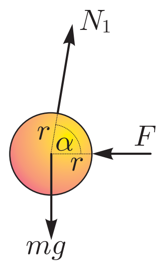
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Dve gladki kroglici enake mase m in polmera r obesimo na enako dolgi neraztegljivi vrvi, kot kaže slika. Določi sili med kroglicama in sili v vrveh! Vpliv trenja lahko zanemariš! Podatki: $m = 100$ g, $r = 2$ cm, $l = 15$ cm. Težnostni pospešek je 10 m/s^2.



Rešitev: Kroglici izrežemo, vpliv vrvi, teže in medsebojni vpliv nadomestimo s silami, kot kaže slika.



Problem je simetričen ($N_1 = N_2$), zato ravnotežni enačbi zapišemo le za eno izmed kroglic:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \cos\alpha - F = 0$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \sin\alpha - m\,g = 0.$$

Kosinus kota med silo v vrvi in vodoravno smerjo je

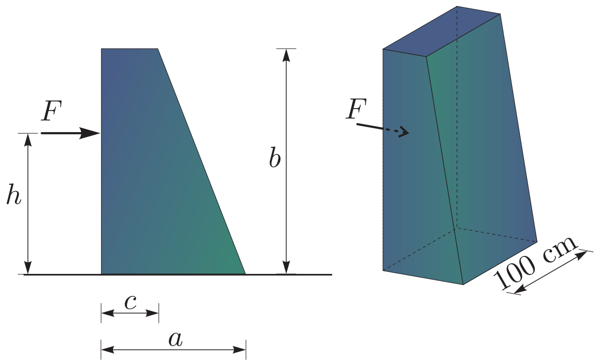
$$\cos\alpha = \frac{r}{r+l}.$$

Ko vrednosti vstavimo v gornje izraze, po kratkem računu dobimo:

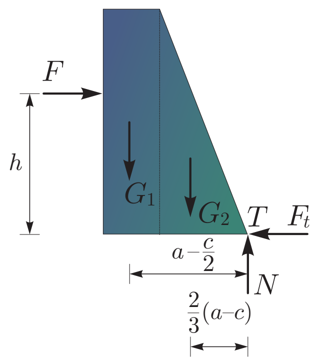
$$N_2 = N_1 = 1.007 \text{ N} \quad \rightarrow \quad F = 0.1185 \text{ N}.$$

2. naloga

Togo telo širine 100 cm trapeznega prereza stoji na hrapavi podlagi. Znane so dimenzije telesa in njegova gostota ρ. Določi najmanjšo višino h prijemališča vodoravne sile F, pri kateri se telo prekucne!
Podatki: $a = 50$ cm, $b = 80$ cm, $c = 20$ cm, $\rho = 2300\ \mathrm{kg/m^3}$, $F = 5000$ N.



Rešitev: Prerez navidezno razdelimo na pravokotni in trikotni del, kot kaže slika.



Za vsak del telesa izračunamo silo teže

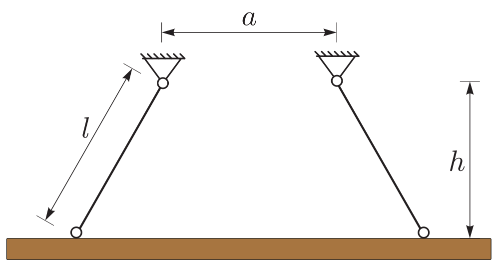
$$G_1 = \rho \cdot c \cdot b \cdot 1 \cdot g = 3680\ \mathrm{N}$$
$$G_2 = \frac{1}{2}\,\rho \cdot (a - c) \cdot b \cdot 1 \cdot g = 2760\ \mathrm{N},$$

kjer smo za težnostni pospešek vzeli vrednost 10 $\mathrm{m/s^2}$. Za sistem sil, ki deluje na telo v trenutku, preden se prekucne (glej sliko), zapišemo momentno ravnotežno enačbo glede na točko T v desnem spodnjem vogalu telesa:

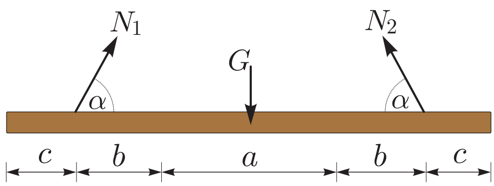
$$\sum M_Y^T = 0 \qquad \rightarrow \quad G_1\left(a - \frac{c}{2}\right) + G_2\,\frac{2}{3}\,(\,a - c) - F\,h = 0$$
$$\rightarrow \quad h = \frac{G_1\left(a - \frac{c}{2}\right) + \frac{2}{3}G_2\,(\,a - c)}{F}$$
$$\rightarrow \quad h = 40.5\text{ cm.}$$

3. naloga

Tram z maso m =20 kg in dolžine L = 2 m želimo obesiti na dve jekleni palici, ki sta vrtljivo pritrjeni na strop in tram, kot kaže slika. Kje moramo palici pritrditi na tram, da bo ta čim bližje stropu, osna sila v palicah pa ne bo presegla 200 N? Podatki: $a = 0.5$ m, $l = 0.8$ m. Težnostni pospešek je 10 m/s^2.



Rešitev: Palici odstranimo, njun vpliv pa nadomestimo z osnima silama, kot kaže slika.



Za sistem sil na tramu, zapišemo dve ravnotežni enačbi:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \quad N_1\cos\alpha - N_2\cos\alpha = 0 \qquad \rightarrow \quad N_1 = N_2$$
$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \quad G - N_1\sin\alpha - N_2\sin\alpha = 0 \qquad \rightarrow \quad N_1 = \frac{G}{2\sin\alpha}.$$

Sinus kota med palico in tramom izrazimo z razdaljo med tramom in stropom, ki jo označimo s h:

$$\sin\alpha = \frac{h}{l}.$$

Torej sta sila v palici in oddaljenost od stropa v obratnem sorazmerju, kar pomeni, da največji sili v palici ustreza najmanjša razdalja. Gornje enačbe preuredimo tako, da izrazimo oddaljenost od stropa s silo v palici

$$h_{\min} = \frac{G \cdot l}{2N_{1,\max}} = 0.4 \text{ m}.$$

Pritrdišče palice na tramu izrazimo z oddaljenostjo od roba, ki jo označimo s c :

$$c = \frac{L}{2} - \frac{a}{2} - b,$$

kjer b izrazimo po Pitagorovem izreku

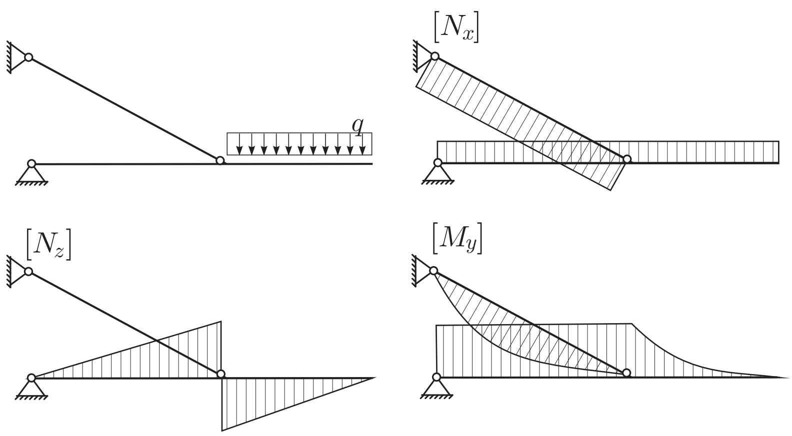
$$b = \sqrt{l^2 - h^2} = 0.69 \text{ m}.$$

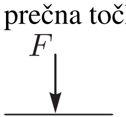
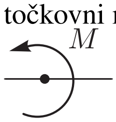
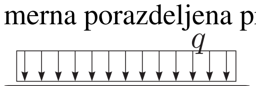
Torej je

$$c = 0.057 \text{ m} = 5.7 \text{ cm}.$$

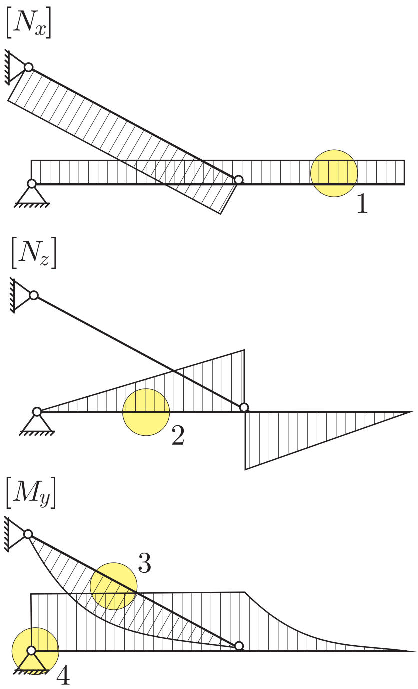
4. naloga

Janezek ima težave pri določanju diagramov notranjih sil. Njegovi diagrami so polni napak. Pomagaj Janezku in poišči (brez računanja) vse napake v spodnjih diagramih! Pomagaj si s pravili, ki so podana na naslednji strani.



Št.	**Kadar je...**	**...mora veljati**
Pravila, ki veljajo za celotno polje:		
1	obtežba le **točkovna** ni porazdeljene obtežbe	N_x je konstantna, N_z je konstantna, M_y je linearna funkcija.
2	obtežba **enakomerna** v prečni smeri	N_z je linearna, M_y je kvadratna funkcija.
3	**ni** porazdeljene momentne obtežbe	$\frac{dM_y}{dx} = N_z$, kjer je $N_z = 0$, ima M_y ekstrem.
4	element konstrukcije **palica**	$N_z = 0$, $M_y = 0$.
Pravila, ki veljajo v značilnih točkah konstrukcije:		
5	**členek** ali vrtljiva podpora in na tistem mestu ni obremenitve z momentom	$M_y = 0$, N_z nima skoka.
6	drsna vez ali drsna podpora v prečni smeri in na tistem mestu ni obremenitve v prečni smeri	$N_z = 0$.
7	drsna vez ali drsna podpora v smeri osi in na tistem mestu ni obremenitve v smeri osi	$N_x = 0$.
8	prečna točkovna sila 	N_z ima skok velikosti F; M_y ima prelom, nima pa skoka.
9	točkovni moment 	N_z se ne spremeni; M_y ima skok velikosti M.
10	v točki se prične ali konča enakomerna porazdeljena prečna obtežba 	N_z in M_y sta zvezna - brez skokov; N_z se lomi; M_y se ne lomi.

Rešitev: Deli, na katerih je Janezek naredil napake, so označeni na spodnji sliki.



Razložimo vsako napako posebej:

1. Previsni del ni obremenjen v smeri osi, zato je osna sila v celotnem delu enaka nič.

2. V tem delu ni porazdeljene obtežbe. Torej morajo biti prečne sile konstantne (pravilo št. 1).

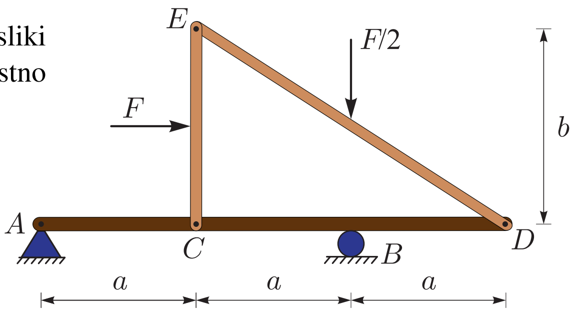
3. Ta element konstrukcije je palica, torej morajo biti upogibni momenti enaki nič (pravilo št. 4).

4. V vrtljivi podpori, kjer ni točkovne momentne obtežbe, mora biti upogibni moment M_y enak nič (pravilo št. 5). V polju desno od podpore so upogibni momenti linearni in ne konstantni.

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Za prikazano konstrukcijo na sliki določi reakcije in sile v vezeh! Lastno težo zanemari.
Podatki: $F = 20$ kN, $a = 2$ m, $b = 3$ m.

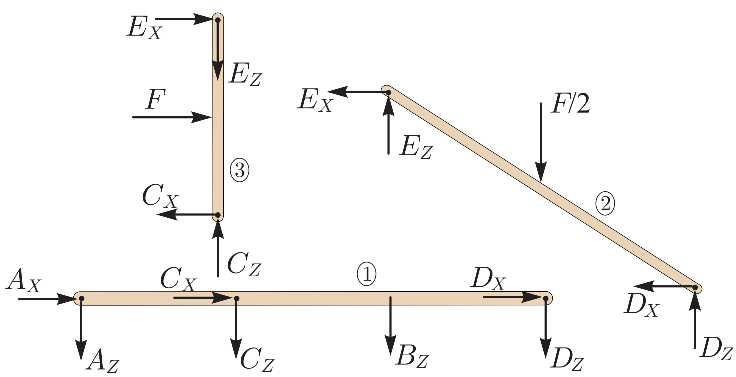


Rešitev: Podpore odstanimo in njihov vpliv nadomestimo z reakcijami. Za obravnavani ravninski sistem sil zapišemo tri ravnotežne enačbe:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + F = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -20\,\text{kN}.$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + B_Z + \frac{F}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = 7.5\,\text{kN}$$

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad -B_Z 2a - Fa - F\frac{b}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -17.5\,\text{kN}.$$



Konstrukcijo razstavimo v vezeh C, D in E na tri ločena toga telesa, medsebojne vplive pa opišemo z ustreznimi silami v vezeh. Ravnotežne pogoje izbiramo tako, da so enačbe čim preprostejše. Za tretje togo telo uporabimo prve nadomestne ravnotežne pogoje:

$$\sum M^E = 0 \quad \rightarrow \quad -C_X b + F\frac{b}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad C_X = 10\,\text{kN}$$

$$\sum M^C = 0 \quad \rightarrow \quad -E_X b - F\frac{b}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad E_X = -10\,\text{kN}$$

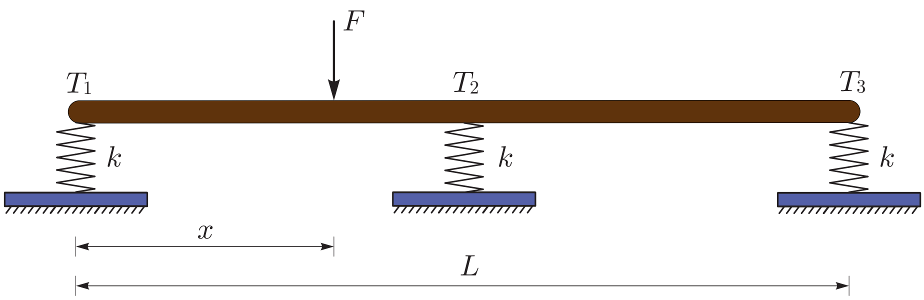
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad C_Z - E_Z = 0 \quad \rightarrow \quad C_Z = -2.5\,\text{kN}.$$

Za drugo togo telo pa zapišemo osnovne ravnotežne pogoje

$$
\begin{aligned}
&\sum M^D = 0 &&\rightarrow \quad E_X b - E_Z 2a + \frac{F}{2} a = 0 &&\rightarrow \quad E_Z = -2.5\,\mathrm{kN} \\
&\sum X = 0 &&\rightarrow \quad D_X + E_X = 0 &&\rightarrow \quad D_X = 10\,\mathrm{kN} \\
&\sum Z = 0 &&\rightarrow \quad D_Z - \frac{F}{2} + E_Z = 0 &&\rightarrow \quad D_Z = 12.5\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

2. naloga

Hlod dolžine $L = 6$ m in mase $m = 130$ kg je podprt s tremi vzmetmi enakih togosti k in na razdalji x obremenjen s prečno silo F, kot kaže slika. Določi sile v vzmeteh! *Namig: Nariši deformirano lego.* Težnostni pospešek je 10 m/s^2.
Podatki: $k = 50$ kN/cm, $x = L/3$ m, $F = 50$ kN.



Rešitev: Sile v vzmeteh najprej izrazimo s pripadajočimi pomiki

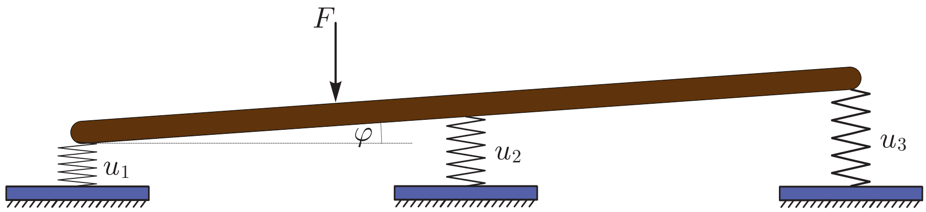
$$F_1 = k\,u_1 \qquad F_2 = k\,u_2 \qquad F_3 = k\,u_3.$$

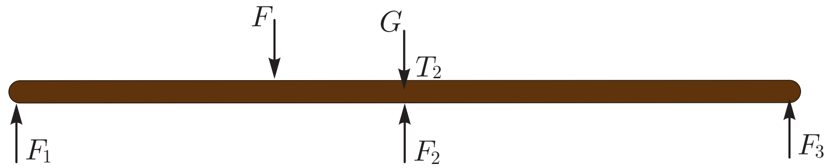
Iz slike deformirane lege je razvidno, da so pomiki vzmeti medsebojno odvisni. Ob predpostavki majhnega zasuka hloda glede na vodoravno ravnino lahko zapišemo dve preprosti zvezi med pomiki in zasukom:

$$
\begin{aligned}
u_2 &= u_1 - \frac{L}{2}\sin\varphi \approx u_1 - \frac{L}{2}\varphi \\
u_3 &= u_1 - L\sin\varphi \approx u_1 - L\varphi.
\end{aligned}
$$

Iz teh zvez neposredno sledita enačbi, ki povezujeta sile v vzmeteh:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= F_1 - k\frac{L}{2}\varphi \\
F_3 &= F_1 - kL\varphi.
\end{aligned}
$$





Za začetno nedeformirano lego zapišemo ravnotežni enačbi

$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \quad F_1 + F_2 + F_3 = F + G$$
$$\sum M_Y^{T_2} = 0 \qquad \rightarrow \quad -F_1\frac{L}{2} + F_3\frac{L}{2} + F\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) = 0$$

in upoštevamo zveze med silami in zasukom hloda. Tako po krajšem računu dobimo

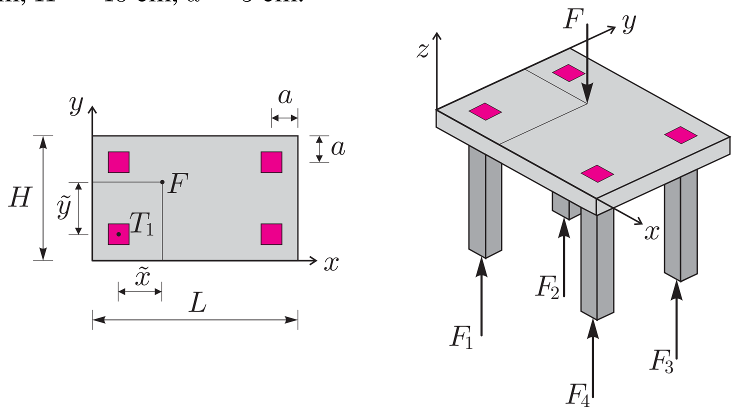
$$3F_1 - k\frac{3L}{2}\varphi - F - G = 0 \;\rightarrow\; F_1 = 25.43\,\mathrm{kN}$$
$$k\frac{L}{2}\varphi = \frac{F}{6} \qquad \rightarrow \; \varphi = \frac{1}{1800}\,\mathrm{rad.}$$

Za preostali sili v vzmeteh dobljena rezultata samo še vstavimo v ustrezni enačbi:

$$F_2 = 17.1\,\mathrm{kN} \qquad F_3 = 8.77\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Na stolček delujejo sile F, F_1, F_2, F_3 in F_4, kot kaže slika. Določi velikost in lego sile F, da bo stolček v ravnotežju!
Podatki: $F_1 = 150$ kN, $F_2 = 250$ kN, $F_3 = 300$ kN, $F_4 = 100$ kN,
$L = 50$ cm, $H = 40$ cm, $a = 5$ cm.



Rešitev: Obravnavamo sistem vzporednih sil. Za določitev velikosti sile F in njene lege $(\tilde{x}, \tilde{y})$ glede na točko T_1 zapišemo tri neidentično izpolnjene ravnotežne enačbe v prostoru:

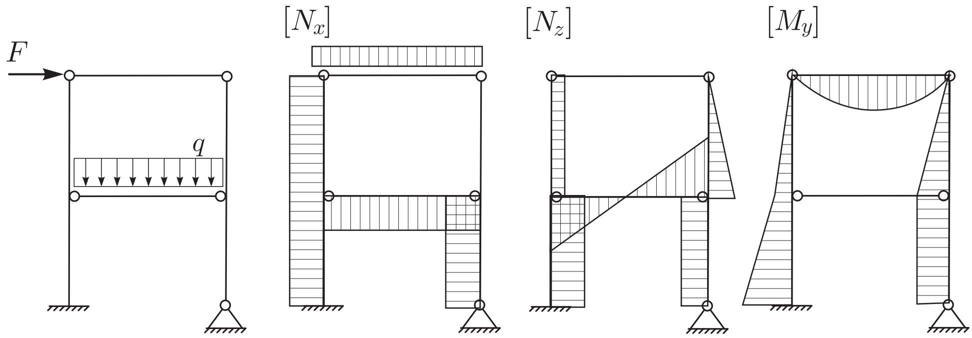
$$\sum z = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F = 0 \quad \rightarrow \quad F = 800\,\mathrm{N}$$
$$\sum M_x^{T_1} = 0 \quad \rightarrow \quad F_3 \cdot 30 + F_2 \cdot 30 - F\tilde{y} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{y} = 20.625\,\mathrm{cm}$$
$$\sum M_y^{T_1} = 0 \quad \rightarrow \quad F_3 \cdot 40 + F_4 \cdot 40 - F\tilde{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{x} = 20\,\mathrm{cm}.$$

Pri tem smo momentna pogoja zaradi preprostosti pisali na točko T_1 in ne na koordinatno izhodišče. Lega sile F glede na koordinatno izhodišče je potem

$$x = 5 + \tilde{x} = 25\,\mathrm{cm} \qquad y = 5 + \tilde{y} = 25.625\,\mathrm{cm}.$$

4. naloga

Janezek ima težave pri določanju diagramov notranjih sil. Njegovi diagrami so polni napak. Pomagaj Janezku in poišči (brez računanja) vse napake v spodnjih diagramih! Pomagaj si s pravili na strani 12.



Rešitev: Deli, na katerih je Janezek naredil napake, so označeni na spodnji sliki. Razložimo vsako napako posebej:

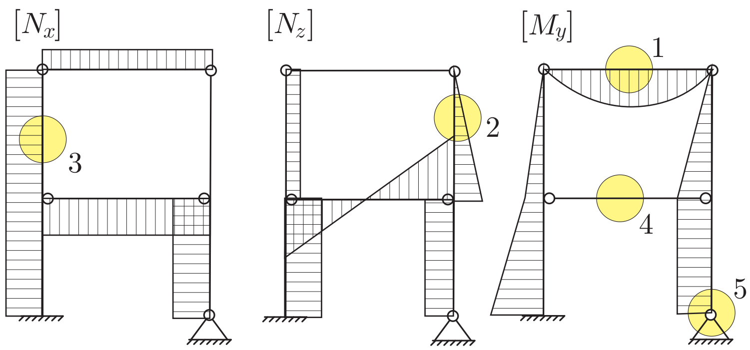
1. Ta element konstrukcije je palica, torej morajo biti upogibni momenti enaki nič (pravilo št. 4).

2. V tem delu ni porazdeljene obtežbe. Torej morajo biti prečne sile konstantne (pravilo št. 1).

3. To polje ni obremenjeno v smeri osi, saj vpliv palice v vozlišču zgoraj desno opišemo zgolj s prečno silo na obravnavano polje. Torej je osna sila v polju enaka nič.

4. To polje je obremenjeno z enakomerno obtežbo v prečni smeri. Upogibni momenti se spreminjajo po kvadratni paraboli (pravilo št. 2), ekstremna vrednost je tam, kjer so prečne sile enake nič (pravilo št. 3).

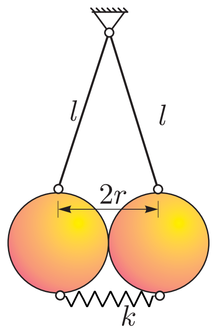
5. V vrtljivi podpori, kjer ni točkovne momentne obtežbe, mora biti upogibni moment M_y enak nič (pravilo št. 5). V polju desno od podpore so upogibni momenti linearni in ne konstantni.



Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

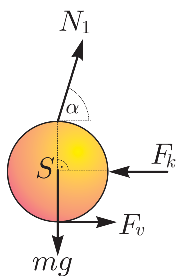
Dve gladki kroglici enake mase m in polmera r sta povezani z vzmetjo in obešeni na enako dolgih neraztegljivih vrveh tako, da je razdalja med pritrdiščema vrvi in vzmeti enaka $2r$. Določi sili med kroglicama in silo v vzmeti! Kolikšna je bila začetna dolžina vzmeti? Težnostni pospešek je $10\ \mathrm{m/s^2}$.
Podatki: $m = 200$ g, $r = 2$ cm, $l = 10$ cm, $k = 2\,\mathrm{N/cm}$.



Rešitev: Najprej določimo kot med vrvico in vodoravno ravnino

$$\cos\alpha = \frac{r}{l} \quad \to \quad \alpha = 78.5^\circ.$$

Izrežimo levo kroglico, vpliv vrvi, vzmeti, teže in medsebojni vpliv pa opišimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Ravnotežne enačbe za to kroglico so:

$$\begin{aligned}
&\sum Z = 0 &&\to \quad -N_1\sin\alpha + G = 0 &&\to \quad N_1 = 2.04\,\mathrm{N}\\
&\sum M_Y^S = 0 &&\to \quad F_v r - N_1\cos\alpha\, r = 0 &&\to \quad F_v = 0.41\,\mathrm{N}\\
&\sum X = 0 &&\to \quad F_v - F_k + N_1\cos\alpha = 0 &&\to \quad F_k = 0.82\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Spremembo dolžine vzmeti določimo iz razmerja

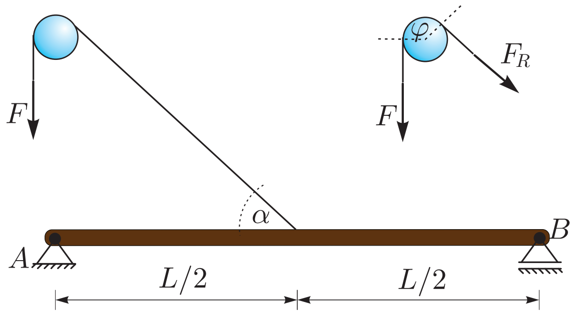
$$\Delta l_v = \frac{F_v}{k} = 0.20\,\mathrm{cm}.$$

Začetna dolžina vzmeti je bila

$$l_v^0 = 2r - \Delta l_v = 3.80\,\mathrm{cm}.$$

2. naloga

Na sredini razpona prostoležečega nosilca pripnemo vrv, s katero preko nepremičnega valja obesimo breme s težo F. Določi diagrame notranjih sil in upogibnih momentov v nosilcu.
Namig: zaradi trenja med vrvjo in valjem se sila v vrvi F_R sorazmerno zmanjša s faktorjem $e^{\mu\varphi}$, kjer je φ središčni kot, ki ga oklepa vrv, in μ koeficient trenja med vrvjo in valjem.
Podatki: $L = 4$ m, $F = 10$ kN, $\alpha = 60°$, $\mu = 0.5$.



Rešitev: Posebej obravnavamo škripec in zmanjšanje sile v vrvi zaradi trenja. Določimo najprej sorazmernostni faktor. Središčni kot, ki ga oklepa vrv, znaša $\varphi = \pi/2 + \alpha = 5\pi/6$. Torej je faktor

$$e^{\mu\varphi} = e^{0.5 \cdot 5\pi/6} = 3.7.$$

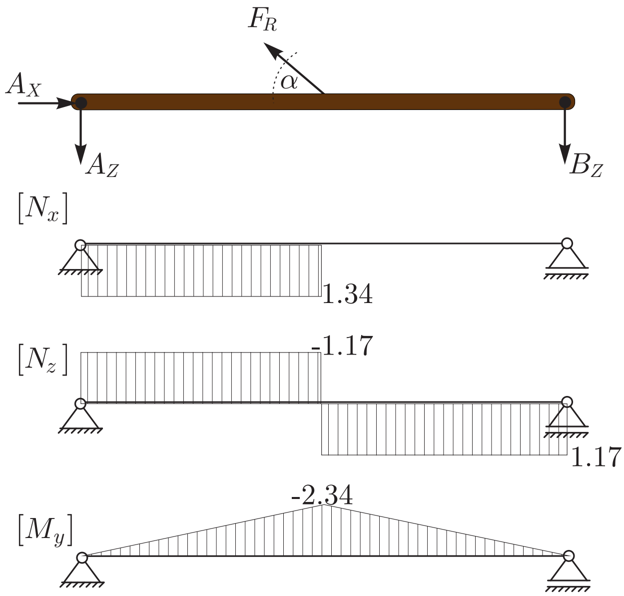
Sila v vrvi F_R je ustrezno zmanjšana, torej moramo silo teže deliti s sorazmernostnim faktorjem:

$$F_R = \frac{F}{e^{\mu\varphi}} \quad \rightarrow \quad F_R = 2.7\,\text{kN}.$$

V naslednjem koraku določimo reakcije podpor:

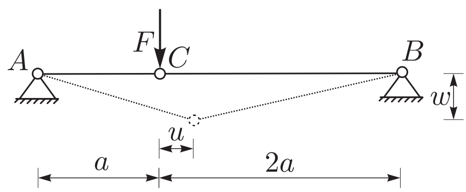
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -F_R \cos\alpha + A_X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = 1.35\,\text{kN}$$
$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad -F_R \sin\alpha \,\frac{L}{2} + A_Z L = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = 1.17\,\text{kN}$$
$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad F_R \sin\alpha \,\frac{L}{2} - B_Z L = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = 1.17\,\text{kN}.$$

Diagrame notranjih sil določimo za vsako polje posebej rezultate prikazujemo na naslednji sliki.

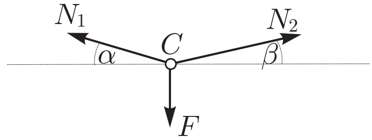


3. naloga

Dve palici različnih togosti k_1 in k_2 obremenimo s silo F, kot kaže slika. Na osnovi ravnotežja v deformirani legi določi osni sili v palicah in togosti obeh palic, če poznaš vodoravni pomik u in navpični pomik w vozlišča C! Podatki: $a = 2$ m, $F = 100$ kN, $u = 10^{-4}$ m, $w = 10^{-1}$ m.



Rešitev: Vozlišče C izrežemo, vpiv palic nadomestimo z osnimi silami in zapišemo ravnotežni enačbe v deformirani legi:



$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\beta = 0$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta + F = 0.$$

Enačbi lahko rešimo šele, ko določimo kota α in β :

$$\tan\alpha = \frac{w}{a+u} \quad \rightarrow \quad \alpha = 2.86^\circ$$
$$\tan\beta = \frac{w}{2a-u} \quad \rightarrow \quad \beta = 1.43^\circ.$$

Po krajšem računu potem dobimo

$$N_1 = 1335\,\mathrm{kN} \qquad N_2 = 1333.8\,\mathrm{kN}.$$

Za določitev osne togosti posamezne palice moramo izračunati še spremembo dolžine posamezne palice. Uporabimo Pitagorov izrek:

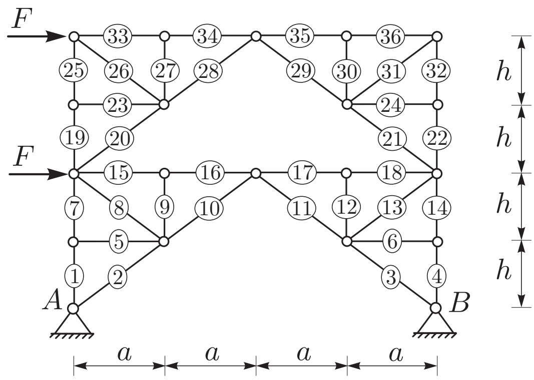
$$l_1' = \sqrt{(a+u)^2 + w^2} = 2.0026\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \quad \Delta l_1 = l_1' - a = 0.0026\,\mathrm{m}$$
$$l_2' = \sqrt{(2a-u)^2 + w^2} = 4.0011\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \quad \Delta l_2 = l_2' - 2a = 0.0011\,\mathrm{m}.$$

Togosti palic določimo kot razmerje med osno silo in spremembo dolžine

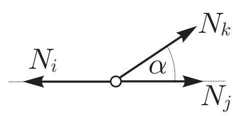
$$k_1 = \frac{N_1}{\Delta l_1} = 0.514 \cdot 10^6\,\mathrm{kN/m} \qquad k_2 = \frac{N_2}{\Delta l_2} = 1.16 \cdot 10^6\,\mathrm{kN/m}.$$

4. naloga

Za paličje na sliki določi osne sile v vseh palicah! *Namig: najprej ugotovi, katere osne sile so enake nič!*
Podatki: $a = 4$ m,
$h = 3$ m, $F = 100$ kN.



Rešitev: Najprej obravnavajmo dva posebna primera vozlišč v paličju. Oglejmo si poljubno vozlišče v paličju, za katerega velja:



i) v vozlišču so povezane tri palice;

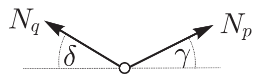
ii) osi dveh palic sta vzporedni, tretja pa leži pod poljubnim neničelnim kotom glede na prvi dve.

Ko zapišemo ravnotežni enačbi za tako vozlišče, dobimo

$$\begin{array}{llll} \sum x = 0 & \rightarrow & -N_i + N_j + N_k \sin\alpha = 0 & \rightarrow \quad N_i = N_j \\ \sum z = 0 & \rightarrow & N_k \cos\alpha = 0 & \rightarrow \quad N_k = 0. \end{array}$$

Ugotovitev je pomembna: osni sili v vzporednih palicah sta enaki, v tretji palici pa je osna sila enaka nič. Zaradi preprostosti smo koordinatni sistem izbrali tako, da sta vzporedni palici ležali vzdolž osi x. Poudarimo, da je ugotovitev splošnejša in velja za poljubno izbiro koordinatnega sistema.

Oglejmo si sedaj še poljubno vozlišče v paličju, za katerega velja:



i) v vozlišču sta povezani dve palici;

ii) osi dveh palic oklepata poljuben kot, različen od $180°$.

Ko zapišemo ravnotežni enačbi za tako vozlišče, dobimo

$$\begin{array}{llll} \sum x = 0 & \rightarrow & N_p \cos\gamma - N_q \cos\delta = 0 & \rightarrow \quad N_p = 0 \\ \sum z = 0 & \rightarrow & N_p \sin\gamma + N_q \sin\delta = 0 & \rightarrow \quad N_q = 0. \end{array}$$

Rezultat je pričakovan: dve nevzporedni sili s skupnim prijemališčem sta lahko v ravnotežju le, če sta obe enaki nič.

V paličju najprej poiščemo vozlišča, v katerih so povezane natanko tri palice, pri čemer sta dve vzporedni. Iz prejšnjih zaključkov vemo, da je osna sila v tretji palici enaka nič. Tako ugotovimo

$$N_5 = N_6 = N_9 = N_{12} = N_{23} = N_{24} = N_{27} = N_{30} = 0.$$

V naslednjem koraku lahko iz obravnave ravnotežja v vozliščih izločimo pravkar poiskane palice z ničelno osno silo, saj ne vplivajo na rezultat. Tako najdemo nova vozlišča, kjer lahko uporabimo pravilo o ničelni osni sili:

$$N_8 = N_{13} = N_{26} = N_{12} = N_{31} = 0.$$

Potem pa še

$$N_{25} = 0.$$

Ob upoštevanju izločenih ničelnih osnih sil lahko ugotovimo, da vozlišče zgoraj desno zadošča zahtevam drugega posebnega primera vozlišča. Zato je

$$N_{32} = N_{36} = 0.$$

Ko upoštevamo še enakost osnih sil v dveh vzporednih palicah, sledi

$$N_{19} = N_{22} = N_{35} = 0$$

in

$$N_{33} = N_{34} = -F.$$

Velja še:

$$N_1 = N_7 \quad N_2 = N_{10} \quad N_3 = N_{11} \quad N_4 = N_{14}$$
$$N_{15} = N_{16} \quad N_{17} = N_{18} \quad N_{20} = N_{28} \quad N_{21} = N_{29}.$$

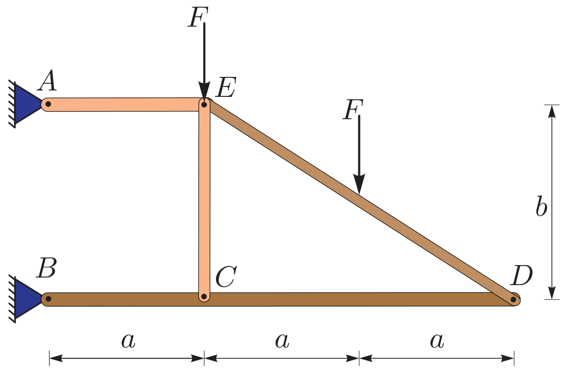
Torej moramo določiti le še 8 osnih sil. Uporabimo izrezovanje vozlišč. Pričnemo v vozlišču zgoraj na sredi razpona. Navedimo le še rezultate:

$$N_1 = 37.5\,\mathrm{kN} \quad N_2 = 125\,\mathrm{kN} \quad N_3 = -125\,\mathrm{kN} \quad N_4 = -37.5\,\mathrm{kN}$$
$$N_{15} = -150\,\mathrm{kN} \quad N_{17} = 50\,\mathrm{kN} \quad N_{20} = 62.5\,\mathrm{kN} \quad N_{21} = -62.5\,\mathrm{kN}.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

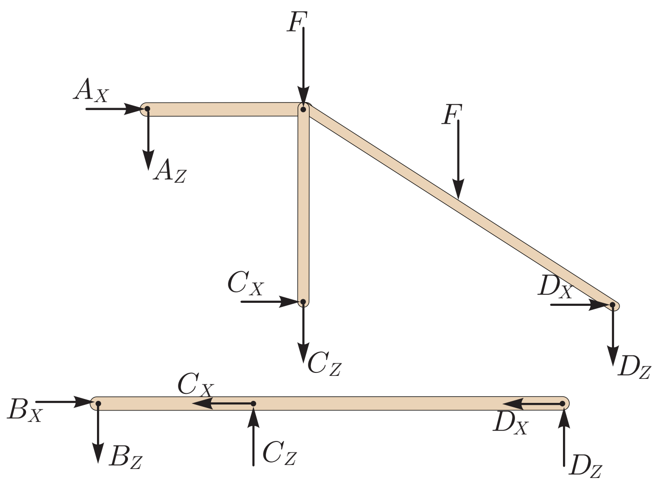
1. naloga

Za prikazano konstrukcijo na sliki določi reakcije in sile v vezeh C in D! Lastno težo zanemari.
Podatki: $F = 10$ kN, $a = 2$ m in $b = 3$ m.



Rešitev: Konstrukcijo razstavimo, vezi C in D pa izrežemo. Vpliv podpor in vezi nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika. Za celotno konstrukcijo zapišemo le dve ravnotežni enačbi:

$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad -A_X\, b - F\, a - F\, 2a = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -20\,\text{kN}$$
$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_X\, b - F\, a - F\, 2a = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = 20\,\text{kN}.$$



Preostalih šest neznanih sil določimo na razstavljeni konstrukciji

$$\sum_{AE} M_Y^E = 0 \qquad \rightarrow \quad A_Z\, a = 0 \qquad \rightarrow \quad A_Z = 0$$

$$\sum_{CE} M_Y^E = 0 \qquad \rightarrow \quad C_X\, b = 0 \qquad \rightarrow \quad C_X = 0$$

$$\sum_{\text{zgornji del}} X = 0 \qquad \rightarrow \quad A_X + C_X + D_X = 0 \qquad \rightarrow \quad D_X = 20\,\text{kN}$$

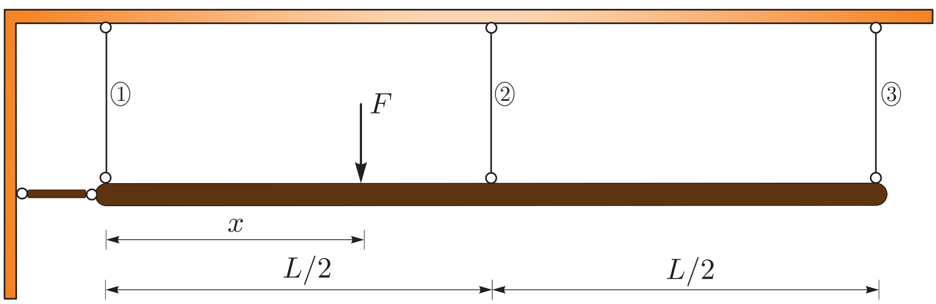
$$\sum_{DE} M_Y^E = 0 \qquad \rightarrow \quad D_X\, b - D_Z\, 2a - F\, a = 0 \qquad \rightarrow \quad D_Z = 10\,\text{kN}$$

$$\sum_{\text{zgornji del}} Z = 0 \qquad \rightarrow \quad A_Z + C_Z + D_Z + 2F = 0 \qquad \rightarrow \quad C_Z = -30\,\text{kN}$$

$$\sum_{\text{spodnji del}} Z = 0 \qquad \rightarrow \quad B_Z - C_Z - D_Z = 0 \qquad \rightarrow \quad B_Z = -20\,\text{kN}.$$

2. naloga

Togo telo dolžine $L = 4$ m in mase $m = 100$ kg obesimo na tri raztegljive vrvi enakih togosti k. Določi vse možne lege sile F, da bosta obremenjeni le vrvi 1 in 2! Težnostni pospešek je 10 m/s^2.
Namig: vrv nosi le v nategu.
Podatki: $k = 500$ N/cm, $F = 2500$ N.



Rešitev: Če silo F postavimo na levi rob telesa, tretja vrv zagotovo ne bo obremenjena. Zanima nas največja razdalja x, za katero lahko premaknemo silo v desno pa bo sila v tretji vrvi še vedno enaka nič. V tem skrajnem primeru bo tudi navpični pomik na desnem koncu enak nič:

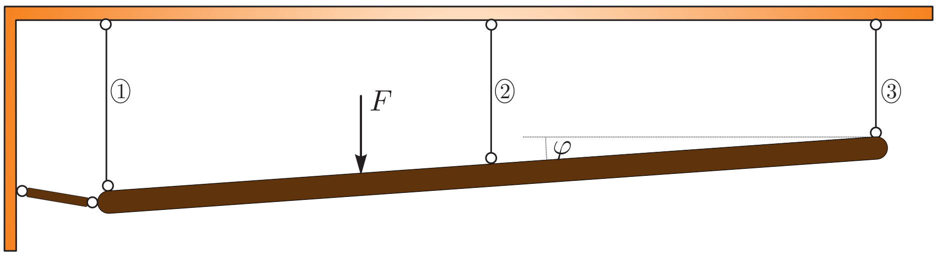
$$F_3 = 0 \qquad \text{in} \qquad w_3 = 0.$$

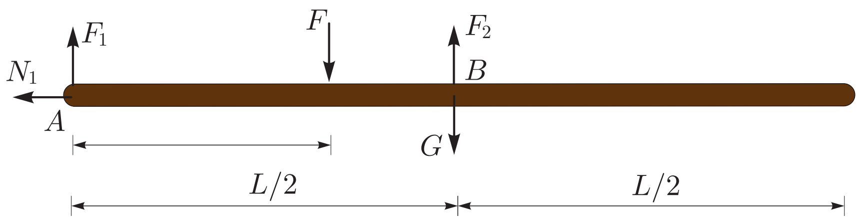
Iz slike deformirane lege je razvidno, da so pomiki v vrvi medsebojno odvisni. Ob predpostavki majhnega zasuka togega telesa glede na vodoravno ravnino lahko zapišemo dve preprosti zvezi (glej tudi 2. nalogo s predtekmovanja za 4. letnike):

$$w_2 = \frac{L}{2}\sin\varphi \approx \frac{L}{2}\varphi$$
$$w_1 = L\sin\varphi \approx L\varphi.$$

Natezni sili v vrveh 1 in 2 sta v tem primeru enaki

$$F_2 = k\frac{L}{2}\varphi \qquad F_1 = kL\varphi.$$





Za začetno nedeformirano lego zapišemo ravnotežni enačbi

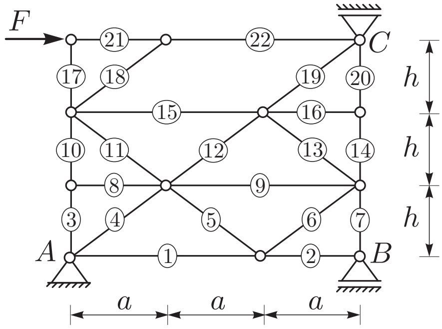
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 + F_2 - F - G = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}kL\varphi = 3.5\,\mathrm{kN}$$
$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad -F_1\frac{L}{2} + F\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{L}{2} - \frac{kL^2}{2F}\varphi.$$

Po vstavljanju podatkov dobimo

$$\varphi = 0.0117\,\mathrm{rad} \qquad x = 0.133\,\mathrm{m}.$$

3. naloga

Zgolj z uporabo ravnotežnih enačb določi osne sile v čim več palicah statično nedoločenega paličja na sliki!
Podatki: $a = 4$ m, $h = 3$ m,
$F = 30$ kN.



Rešitev: Pravila za posebna primera vozlišč ravninskega paličja (glej 4. nalogo s sklepnega tekmovanja za 3. letnike) veljajo tudi za statično nedoločena paličja.V paličju najprej poiščemo vozlišča, v katerih so povezane natanko tri palice, pri čemer sta dve vzporedni. Tako ugotovimo

$$N_2 = N_8 = N_{16} = N_{17} = N_{18} = 0.$$

Zaradi enakosti sil v vzporednih palicah velja še

$$N_{21} = N_{22} = -F.$$

Iz vsote sil v vozlišču C v vodoravni smeri pa sledi

$$-N_{19} \cos \alpha - N_{22} = 0,$$

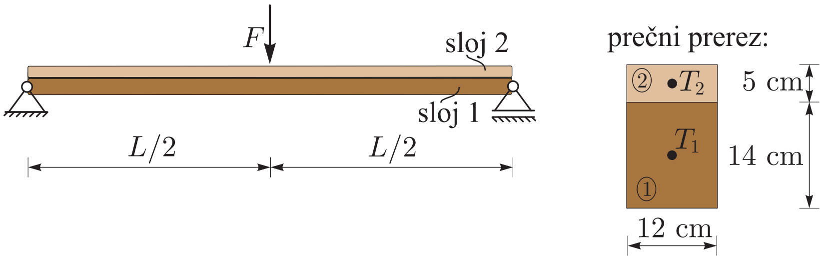
kjer je α kot, ki ga oklepata palici 19 in 22. Torej je

$$N_{19} = \frac{5}{4} F.$$

To so vse osne sile, ki jih za to paličje lahko določimo zgolj z ravnotežnimi enačbami.

4. naloga

Dvoslojni prostoležeči nosilec je obremenjen s prečno silo F na sredini razpona. V prečnem prerezu na sredini razpona določi osno silo in upogibni moment zgornjega sloja glede na težišče zgornjega sloja, če poznaš osno silo in upogibni moment spodnjega sloja glede na težišče spodnjega sloja. *Namig: Izračunaj osno silo in upogibni moment za celoten prerez.*
Podatki: $L = 3$ m, $F = 10$ kN, $N_x^1 = 17.13$ kN, $M_y^1 = 494.57$ kNcm.



Rešitev: Najprej določimo osno silo in upogibni moment v težišču celotnega nosilca na sredini razpona. Ker sta reakciji v levi podpori $A_X = 0$ in $A_Z = -F/2$ sledi

$$N_x = 0 \qquad \text{in} \qquad M_y = 750\,\text{kNcm}.$$

Osna sila in upogibni moment v težišču prereza statično enakovredno nadomeščata osni sili in momenta obeh slojev. Za osne sile tako velja

$$N = N_x^1 + N_x^2 \quad \rightarrow \quad N_x^2 = -N_x^1 = -17.13\,\text{kN}.$$

Rezultantni moment v težišču prereza pa lahko izrazimo kot

$$M_y = M_y^1 + M_y^2 + N_x^1 \cdot 2.5 - N_x^2 \cdot 7.$$

Torej je

$$M_y^2 = M_y - M_y^1 - N_x^1 \cdot 2.5 - N_x^1 \cdot 7 \quad \rightarrow \quad M_y^2 = 92.695\,\text{kNcm}.$$

ISBN 9789616884105