21.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 20. MAJ 2015

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

21. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Tomaž Hozjan, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 20. maj 2015

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; HOZJAN, Tomaž; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
21. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk:XXX, Ljubljana

Obseg: 26 strani

Naklada: 100 izvodov

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2017

CIP – KatKatalošni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (21 ; 2015 ; Ljubljana)
[Enaindvajseto]
21. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana,
20. maj 2015 / [pripravili] Dejan Zupan ... [et al.]. - Ljubljana :
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2017

ISBN 978-961-6884-45-7
1. Zupan, Dejan, 1973-
289380608

21. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2015

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 21. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Tomaž Hozjan,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 68 dijakinj in dijakov tretjega in 71 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 13. aprila 2015. Enainštirideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 20. maja 2015 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime priimek	Letnik	Šola	Mentor
Martina Eftimova	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Jakob Fabjan	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Matej Gorenjc	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Urban Gramc	3	GK Krškoo	Erika Broz Žižek
Dušan Kašič	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Davor Kaučič	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Marko Klavžer	3	GK Krško	Erika Broz Žižek
Anja Lukšič	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
David Macedoni	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Aleks Mahmutović	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Gašper Majer	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Ana Mečan	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Nejc Novak	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Anja Pacek	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Kaja Pirnar	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Sebastian Recek	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Marko Rihter	3	SGŠG Maribor r	Maja Lorger
David Rožman	3	GK Krško	Erika Broz Žižek
Katjuša Skledar	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Karmen Sotošek	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Samo Umek	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Martin Zupet	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Kristjan Živičnjak	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tomaž Brzin	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Florjan
Jan Drab	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Aleš Durjava	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Tine Hren	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Luka Jug	4	GK Krško	Franci Uduč
Jernej Koretič	4	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Jaka Krek	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Jan Muc	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Tina Novinec	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
David Penca	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Žan Pirnar	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Andrej Preskar	4	GK Krško	Franci Uduč
Jovana Rakić	4	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Jure Smole	4	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Barbara Škorjanc	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tadej Štempohar	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Toni Udovč	4	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Alex Želj	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger

KRATICE ŠOL:

GK Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško
SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 20. maja 2015 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom mag. Gašperja Raka ogledali laboratorij Katedre za mehaniko tekočin.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Urška Bajc, Peter Češarek, Tomaž Hozjan, Sabina Huč, Robert Pečenko, Klara Pirmanšek, Anita Treven in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Priznanja in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Srebrna priznanja so prejeli vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
3. letnik			
Martin Zupet	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	98
David Rožman	GK Krško	1. mesto	97
Jakob Fabjan	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	88
Samo Umek	SEŠTG Novo mesto	3. mesto	85
Davor Kaučič	SGLŠ Novo Mesto	zlato priznanje	
Dušan Kašič	SŠGVO Celje	zlato priznanje	
4. letnik			
Žan Pirnar	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	81
David Penca	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	65
Alex Želj	SGŠG Maribor	3. mesto	58
Tomaž Brzin	SEŠTG Novo mesto	3. mesto	56
Jaka Krek	SGGOŠ Ljubljana	zlato priznanje	
Jernej Koretič	SGLŠ Novo Mesto	zlato priznanje	

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.17	9.66	21.95	8.98	55.76
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	100

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	13.57	6.61	14.02	6.70	40.89
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	90

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.00	8.48	22.33	6.81	52.62
najnižja ocena	0	0	5	0	15
najvišja ocena	25	25	25	20	98

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	12.65	6.82	10.65	4.71	34.82
najnižja ocena	0	0	0	0	4
najvišja ocena	25	25	25	15	81

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom tretjih letnikov najtežji 2. in 4. naloga, dijakinjam in dijakom četrtih letnikov pa prav tako 2. in 4. naloga.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene nekoliko nižje kot na predtekmovanju. Dijaki 3. letnikov so najbolje reševali 3. nalogo, dijaki 4. letnikov pa 1. nalogo.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je tretjo nalogo pravilno rešilo kar 50 udeležencev, prav tako so bili zelo uspešni pri reševanju prve in druge naloge. Četrti letniki so zelo uspešno reševali prvo predtekmovalno nalogo. Uspešno so reševali tudi tretjo in četrto nalogo. Drugo nalogo pa je povsem pravilno rešil le en dijak. Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Izjemi sta prva in tretja naloga pri tretjih letnikih, ki ju je povsem pravilno rešilo po devet tekmovalcev.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
26	17	50	5
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
19	1	10	6

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
9	2	9	0
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
2	1	3	0

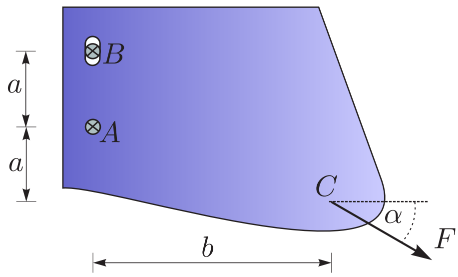
Letošnje tekmovanje je v celoti finančno podprla:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

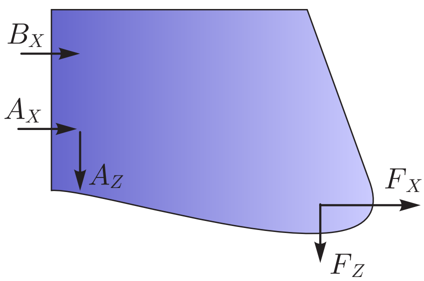
1. naloga

Na togo ploščico deluje poševna sila v ravnini ploščice, kot kaže slika. Ploščica je pritrjena z dvema vijakoma, pri čemer je zgornji vijak izveden tako, da dopušča pomike v smeri zveznice med točkama A in B. Določi sile v vijakih! Lastno težo ploščice lahko zanemariš.
Podatki: $F = 200\,\mathrm{N}$, $\alpha = 30°$,
$a = 30$ cm, $b = 40$ cm.



Rešitev: Podpori odstranimo, njun vpliv pa nadomestimo z reakcijami. Silo F razstavimo vzdolž koordinatnih osi:

$$F_X = F\cos\alpha = 100\sqrt{3}\,\mathrm{N} = 173.2\,\mathrm{N}$$
$$F_X = F\sin\alpha = 100\,\mathrm{N}.$$

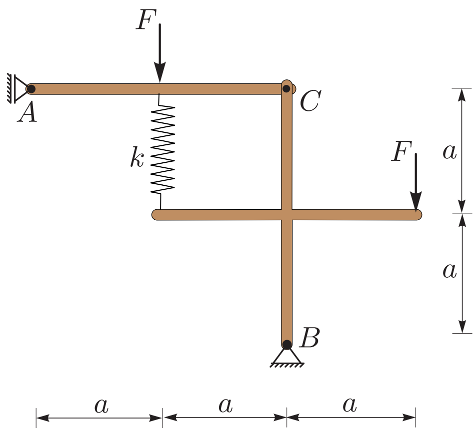


Neznane reakcije določimo iz sistema treh ravnotežnih enačb:

$$\begin{aligned}
&\sum X = 0 &&\rightarrow\quad A_X + B_X + F_X = 0 &&\rightarrow\quad A_X = -213.1\,\mathrm{N}\\
&\sum Z = 0 &&\rightarrow\quad A_Z + F_Z = 0 &&\rightarrow\quad A_Z = -100\,\mathrm{N}\\
&\sum M^A = 0 &&\rightarrow\quad -30B_X + 30F_X - 40F_Z = 0 &&\rightarrow\quad B_X = 39.9\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

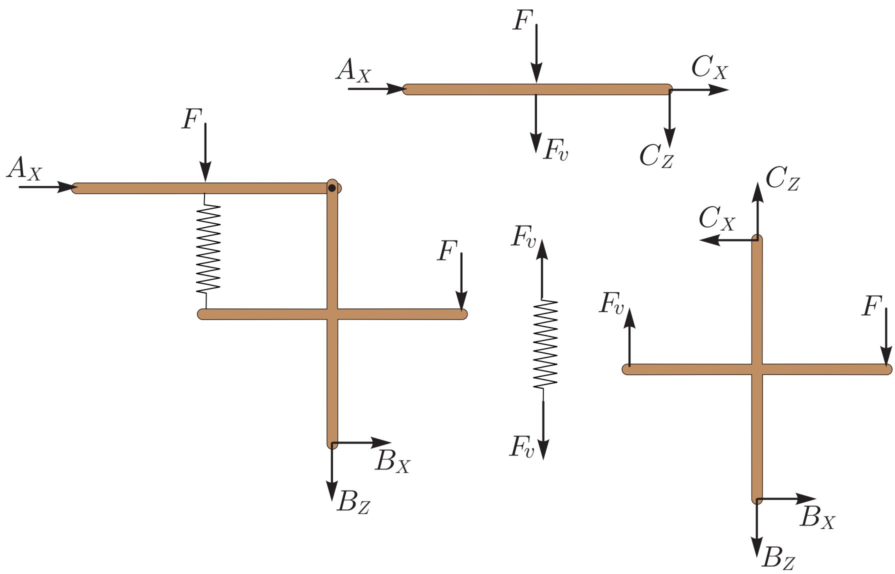
2. naloga

Na sliki je preprost sistem vzmetenja. Določi silo v vzmeti, pri kateri se sistem nahaja v narisani legi! Določi tudi sile v vezi C!
Podatki: $a = 30$ cm, $F = 5$ kN, $k = 10$ kN/cm.



Rešitev: Najprej določimo reakcije podpor:

$$\begin{array}{llll}
\sum X = 0 & \rightarrow \quad A_X + B_X = 0 & \rightarrow & B_X = 0 \\
\sum Z = 0 & \rightarrow \quad B_Z + 2F = 0 & \rightarrow & B_Z = -2F \\
\sum M^B = 0 & \rightarrow \quad -2aA_X + aF - aF = 0 & \rightarrow & A_X = 0.
\end{array}$$



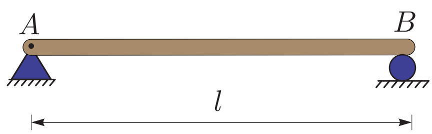
Sedaj sistem razstavimo, kot kaže slika, in za desni del (BC) zapišemo raznotežne enačbe:

$$\begin{aligned}
\sum M^B = 0 \quad &\rightarrow \quad -aF_v - aF + 2aC_X = 0 \quad &&\rightarrow \quad F_v = -F \\
\sum X = 0 \quad &\rightarrow \quad B_X - C_X = 0 &&\rightarrow \quad C_X = 0 \\
\sum Z = 0 \quad &\rightarrow \quad -C_Z - F_v + F + B_Z = 0 &&\rightarrow \quad C_Z = 0.
\end{aligned}$$

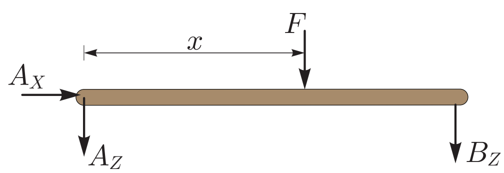
Sila v vzmeti je torej tlačna in nasprotno enaka sili F, vez C pa je za dano obtežbo neobremenjena.

3. naloga

Prostoležeči nosilec je v točki C obtežen z neznano točkovno silo velikosti F in momentom velikosti M. Določi velikost sile in momenta, če poznaš reakcije v podporah A in B! Kje je prijemališče zunanjega momenta?
Podatki: $a = 1$ m, $b = 2$ m,
$A_Z = -5$ kN, $B_X = 0$ kN, $B_Z = -10$ kN.



Rešitev: Reakcija v vodoravni smeri je enaka nič, zato na nosilec deluje le navpična sila. Silo postavimo na nosilec, razdaljo od levega krajišča pa označimo z x

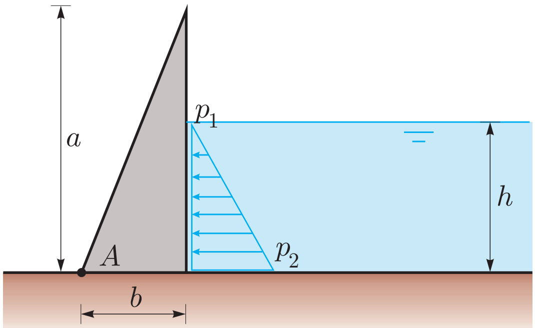


Iz ravnotežja sil sledi

$$\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\rightarrow \quad A_X = 0 \\
\sum Z = 0 \quad &\rightarrow \quad A_Z + B_Z + F = 0 \quad &&\rightarrow \quad F = 15\,\text{kN} \\
\sum M^A = 0 \quad &\rightarrow \quad -lB_Z - xF = 0 &&\rightarrow \quad x = 1.33\,\text{m}.
\end{aligned}$$

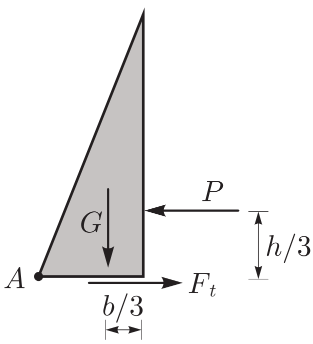
4. naloga

Betonska težnostna pregrada trikotnega prečnega prereza je temeljena v neprepustni podlagi. Specifična teža betona je $g_B = 24$ kN/m^3, specifična teža vode pa $g_V = 10$ kN/m^3. Koeficient trenja med podlago in pregrado je $k_t = 0.8$. Tlak vode p deluje pravokotno na pregrado in se z globino enakomerno povečuje, na gladini je enak $p_1 = 0$, na globini h pa je enak $p_2 = hg_V$. Določi najvišjo gladino vode, da pregrada ne zdrsne! Ali se pri tej višini vode pregrada lahko prevrne okoli točke A? Podatki: $a = 5$ m, $b = 2$ m.



Rešitev: Določimo sile, ki delujejo na pregrado:

$$G = g_B \frac{ab}{2} = 120\ \mathrm{kN/m}$$
$$P = g_V h \frac{h}{2} = 5h^2$$
$$F_t = k_t G = 96\ \mathrm{kN/m}$$



Pregrada ne zdrsne, dokler je sila trenja večja od rezultantne sile vode

$$F_t = P \quad \to \quad 96 = 5h^2 \quad \to \quad h = 4.38\ \mathrm{m}.$$

Preverimo še zvrnitev pri mejni višini vode. Pregrada se lahko prevrne, če je moment glede na točko A, ki ga povzroča sila P, večji od momenta sile G. Preveriti torej moramo, če je $2Gb/3 < Ph/3$. Za naše podatke velja

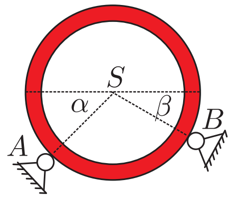
$$G\frac{2b}{3} = 160\,\mathrm{kNm/m} > P\frac{h_{mejni}}{3} = 140\,\mathrm{kNm/m}.$$

Pri mejni višini vode se pregrada ne prevrne.

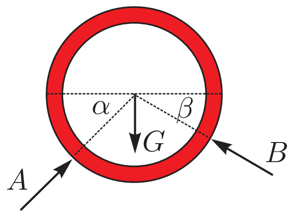
Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Obroč z maso 5 kg postavimo brez trenja na dve nepomični členkasti podpori, kot kaže slika. Polmer obroča je 30 cm. Določi reakciji v podporah! Podatki: $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $g = 10$ m/s^2.



Rešitev: Podpori izrežemo, njun vpliv pa nadomestimo z reakcijama, kot kaže slika.

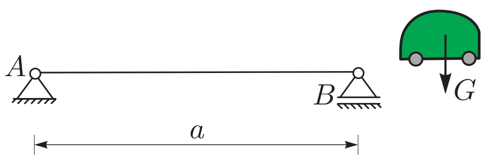


Momentni pogoj je za ta sistem sil izpolnjen, saj se smernice vseh sil sekajo v težišču obroča. Iz ravnotežja sil pa sledi

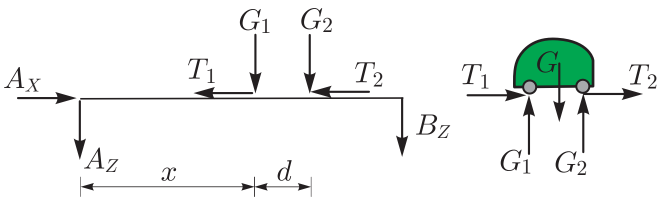
$$\sum X = 0 \quad \to \quad A\cos\alpha - B\sin\beta = 0 \quad \to \quad A = 44.8\,\mathrm{N}$$
$$\sum Z = 0 \quad \to \quad A\sin\alpha + B\sin\beta = G = 5g \quad \to \quad B = 36.6\,\mathrm{N}.$$

2. naloga

Vozilo z maso 1200 kg in medosno razdaljo 4 m zapelje na poledenel most. Ob vstopu na most voznik močno zavre, pri čemer zablokirajo vsa štiri kolesa. Vozilo potem drsi po celotni dolžini mostu. Dinamični koeficient trenja znaša 0.8. Določi obtežbo, s katero vozilo deluje na vozišče! Opiši tudi spreminjaje notranjih sil v mostu zaradi drsenja vozila! Vztrajnostne sile lahko zanemariš.
Podatki: $a = 20$ m, $g = 10$ m/s^2.



Rešitev: Medsebojni vpliv med konstrukcijo in vozilom opišemo z enako velikimi, nasprotno usmerjenimi silami, kot prikazujemo na sliki.



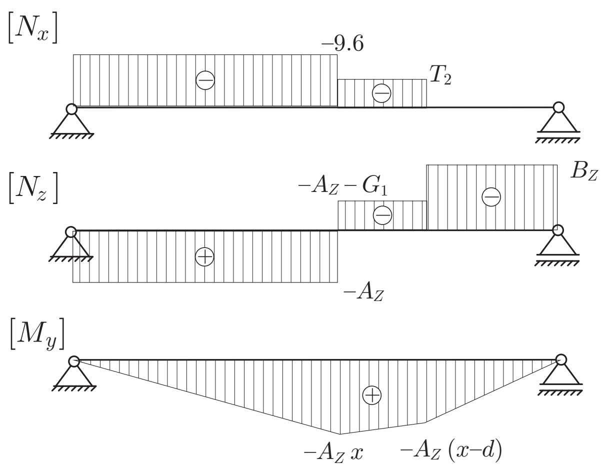
Sil, ki delujeta na posamezni osi ne poznamo, lahko pa določimo njuno vsoto in rezultantno silo trenja

$$
\begin{aligned}
G &= G_1 + G_2 = 12\,\mathrm{kN} \\
T &= T_1 + T_2 = k_t G = 9.6\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

Reakcije podpor so odvisne od lege vozila. Reakcije izrazimo v odvisnosti od teže vozila iz ravnotežnih enačb. Te zapišemo za lego vozila, ko je leva os oddaljena za razdaljo x od podpore A:

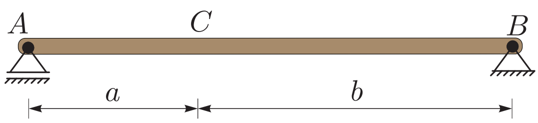
$$
\begin{aligned}
&\sum X = 0 && \rightarrow\ A_X - T_1 - T_2 = 0 && \rightarrow\ A_X = 9.6\,\mathrm{kN} \\
&\sum Z = 0 && \rightarrow\ A_Z + B_Z + G = 0 && \rightarrow\ A_Z = \frac{x-a}{a}G + \frac{d}{a}G_2 \\
&\sum M^A = 0 && \rightarrow\ -xG_1 - (x+d)G_2 - aB_z = 0 && \rightarrow\ B_Z = -\frac{x}{a}G - \frac{d}{a}G_2.
\end{aligned}
$$

Seveda se s premikanjem vozila spreminjajo tudi notranje sile. Osne sile so negativne in na levem delu mostu po velikosti enake rezultatni sili trenja. Pod levo osjo ima osna sila skok velikosti T_1, na desnem delu mostu pa je enaka nič. Prečne sile so odsekoma konstantne, na obeh koncih po velikosti enake reakcijam, skoka vmes pa ustrezata silam v oseh vozila. Momenti so odsekoma linearni, največje vrednosti pa zavzamejo pod kolesi vozila. Shematski prikaz notranjih sil predstavljamo še z diagrami.

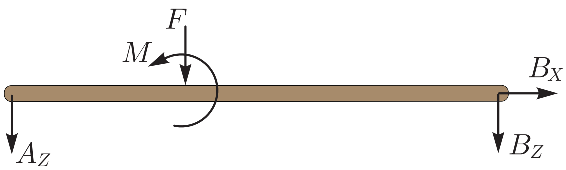


3. naloga

Prostoležeči nosilec je v točki C obtežen z neznano točkovno silo velikosti F in momentom velikosti M. Določi velikost sile in momenta, če poznaš reakcije v podporah A in B! Kje je prijemališče zunanjega momenta?
Podatki: $a = 1$ m, $b = 2$ m,
$A_Z = -5$ kN, $B_X = 0$ kN, $B_Z = -10$ kN.



Rešitev: Reakcija v vodoravni smeri je enaka nič, zato na nosilec deluje le navpična sila. Silo in moment postavimo na nosilec, kot kaže slika



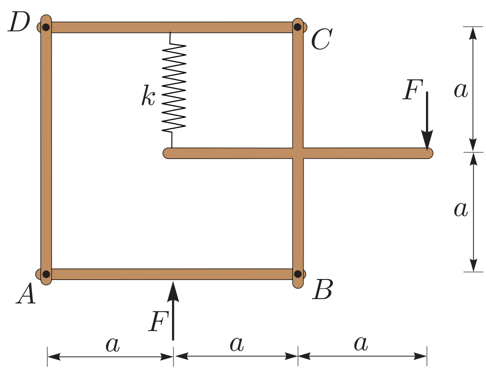
Iz ravnotežja sil sledi

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + B_Z + F = 0 \quad \rightarrow \quad F = 15\,\text{kN}$$
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad (a+b)B_Z - aF + M = 0 \quad \rightarrow \quad M = -15\,\text{kNm}.$$

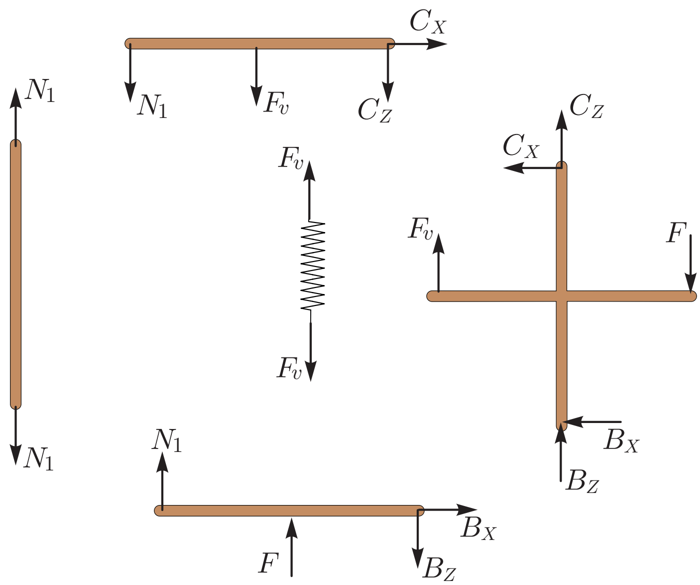
Moment M lahko postavimo kamorkoli na nosilec.

4. naloga

Na sliki je preprost sistem vzmetenja. Določi silo v vzmeti, pri kateri se sistem nahaja v narisani legi! Določi tudi sile v vseh vezeh!
Podatki: $a = 30$ cm, $F = 5$ kN, $k = 10$ kN/cm.



Rešitev: Sistem razstavimo, medsebojne vplive pa nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Najprej si oglejmo spodnji nosilec AB. Zanj velja

$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad -2aN_1 - aF = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = -\frac{F}{2} = -2.5\,\text{kN}$$
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = 0\,\text{kN}$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 - F + B_Z = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = 2.5\,\text{kN}.$$

Iz ravnotežja nosilca DC potem sledi

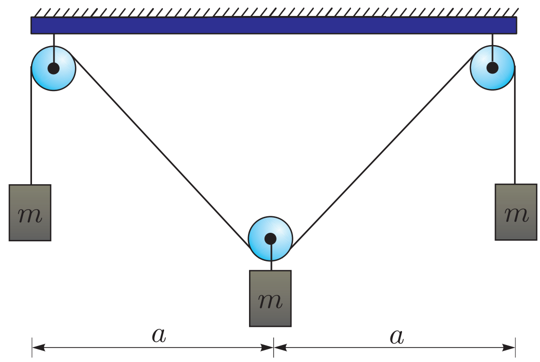
$$\sum M^C = 0 \quad \rightarrow \quad 2aN_1 + aF_v = 0 \quad \rightarrow \quad F_v = -F = -5\,\text{kN}$$
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad C_X = 0 \quad \rightarrow \quad C_X = 0\,\text{kN}$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 + F_v + C_Z = 0 \quad \rightarrow \quad C_Z = -2.5\,\text{kN}.$$

Iz ravnotežja desnega nosilca BC lahko preverimo, če smo pravilno določili vse sile v vezeh.

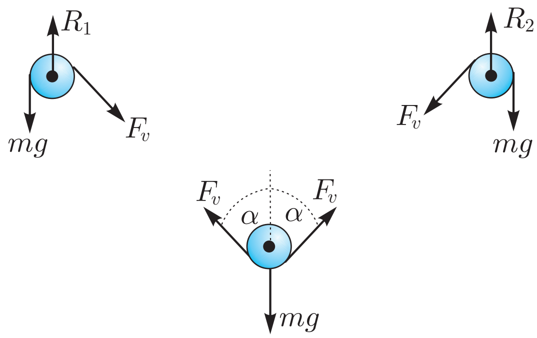
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Tri uteži enake mase so povezane prek breztežne neraztegljive vrvi in obešene na škripce, kot kaže slika. Določi lego srednje uteži, pri kateri bo sistem v ravnotežju! Trenje med vrvjo in škripci lahko zanemariš.
Podatki: $a = 30$ cm,
$m = 2$ kg.



Rešitev: Lega uteži v vodoravni smeri je natanko določena, lahko pa utež premikamo v navpični smeri. Določimo kot α, ki ga mora vrvica oklepati z navpričjo osjo, da bo sistem v ravnotežju.



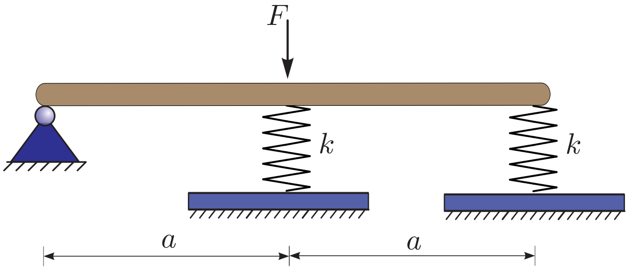
Ravnotežje sil v navpični smeri za srednjo utež določa:

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad -2F_v \cos\alpha + mg = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{mg}{2F_v}.$$

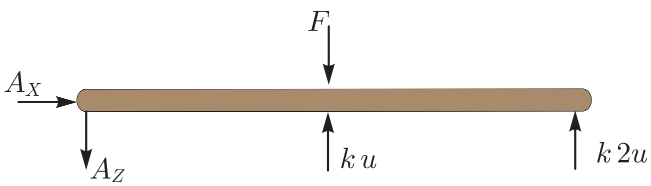
Za stranska škripca pa velja $F_v = mg$, zato je $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ in $\alpha = 60°$.

2. naloga

Tog hlod postavimo na vrtljivo podporo in dve podajni podpori (vzmeti), kot kaže slika. Na sredi razpona hlod obtežimo s točkovno silo F. Določi zasuk hloda in reakcije v podporah! Lastno težo hloda lahko zanemariš.
Podatki: $a = 2$ m, $F = 800$ N, $k = 200$ N/cm.



Rešitev: Podporo in vzmeti odstranimo. Njihov vpliv na konstrukcijo nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika



Ravnotežne enačbe zapišemo za začetno, nezavrteno lego hloda:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = 0$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + F - 3ku = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -320\,\text{N}$$

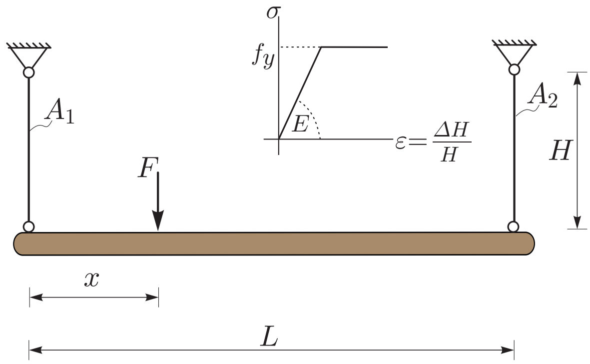
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad aku - aF - 4aku = 0 \quad \rightarrow \quad u = \frac{F}{5k} = 0.8\,\text{cm}.$$

Poudariti moramo, da naredimo pri zapisu ravnotežnih enačb glede na nedeformirano lego napako, ki pa je majhna, kadar je majhna sprememba lege. Ker je izračunani pomik u majhen, je prikazani postopek smiselen. Pripadajoči zasuk določimo iz razmerja stranic v pravokotnem trikotniku:

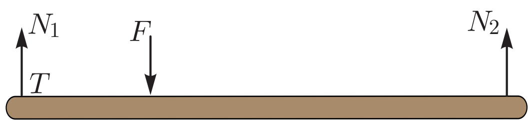
$$\sin\varphi = \frac{u}{a} \quad \rightarrow \quad \varphi = \operatorname{asin} 0.004 \quad \rightarrow \quad \varphi = 0.23^\circ.$$

3. naloga

Tog drog je obešen na dve vešalki. Vešalki sta iz materiala, ki ima mejo tečenja f_y in elastični modul E. Prereza vešalk sta različna, njuni ploščini sta A_1 in A_2. Določi položaj x in velikost sile F, s katero še lahko obtežimo drog, da se ta ne zavrti! Izračunaj tudi navpični pomik droga!
Podatki: $A_1 = 1$ cm^2, $A_2 = 1.5$ cm^2, $f_y = 25$ kN/cm^2, $E = 21000$ kN/cm^2, $L = 5$ m, $H = 2$ m.



Rešitev: Oglejmo si sile, ki delujejo na drog.



Pogoj, da se drog ne zavrti, določa razmerje med silama v vešalkah

$$u_1 = u_2 \quad \rightarrow \quad \frac{H}{EA_1}N_1 = \frac{H}{EA_2}N_2 \quad \rightarrow \quad N_2 = 1.5N_1.$$

Ob sta sili omejeni še vrednostjo na meji tečenja

$$N_1 = A_1 f_y = 25\,\text{kN} \quad N_2 = A_2 f_y = 37.5\,\text{kN}$$

Iskano silo in njeno lego dobimo z reševanjem ravnotežnih enačb

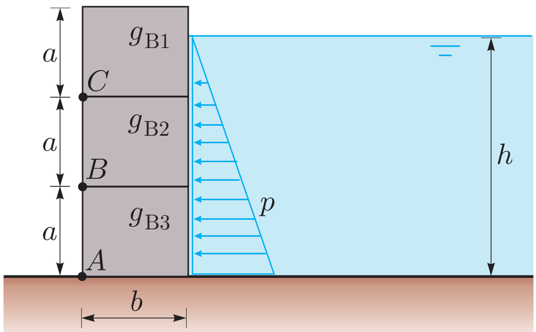
$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad -N_1 - N_2 + F = 0 \qquad \rightarrow \qquad F = 62.5\,\text{kN}$$

$$\sum M^T = 0 \qquad \rightarrow \qquad LN_2 - xF = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{3}{5}L.$$

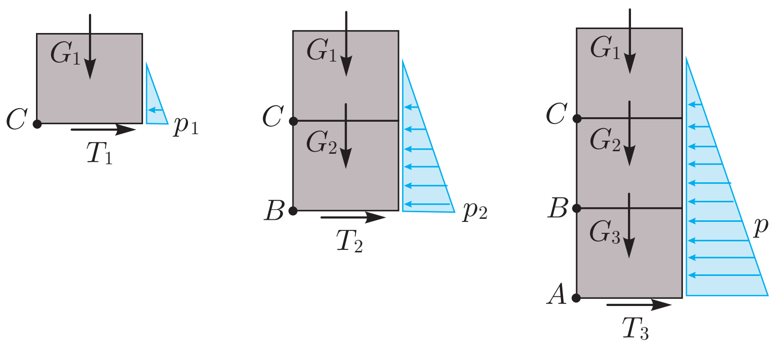
Izračunajmo še navpični pomik droga $u = u_1 = u_2 = 23.8$ cm.

4. naloga

Vodno pregrado sestavljajo trije betonski bloki enakih dimenzij. Specifična teža zgornjega bloka znaša $g_{B1} = 10$ kN/m^3, spodnjega pa $g_{B3} = 19$ kN/m^3. Koeficient trenja med bloki ter med blokom in podlago je $k_t = 0.8$. Višina vode h je 10 m, specifična teža vode pa $g_V = 10$ kN/m^3. Določi najmanjšo specifično težo srednjega bloka, da noben del pregrade ne zdrsne! Ali se lahko pri tej vrednosti specifične teže srednjega bloka kateri del pregrade prevrne okoli točk A, B ali C? Podatki: $a = 4$ m, $b = 2$ m.



Rešitev: Obravnavamo tri sisteme teles: zgornji blok, zgornji in srednji blok ter vse tri bloke skupaj. Obravnavane sisteme, skupaj s silami, ki nanje delujejo, prikazujemo na sliki.



Določimo sile, ki delujejo na zgornji blok:

$$G_1 = g_{B1} a b = 80 \text{ kN/m}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} g_V \left(h - 2a\right)^2 = 20 \text{ kN/m}$$

$$T_1 \leq k_t G_1 = 64 \text{ kN/m}.$$

Teža zgornjega bloka je dovolj velika, da za dani koeficient trenja blok ne zdrsne. Iz kontrole zvrnitve okoli točke C:

$$G_1 \frac{b}{2} = 80\,\mathrm{kNm/m} > P_1 \frac{(h-2a)}{3} = 13.3\,\mathrm{kNm/m}$$

ugotovimo še, da se zgornji blok ne prevrne.

Teža vode, ki deluje na zgornja dva bloka, je

$$P_2 = \frac{1}{2} g_V \left(h-a\right)^2 = 180\,\mathrm{kN/m}.$$

Srednji blok ne bo zdrsnil glede na spodnji blok, če bo specifična teža srednjega sloja večja od

$$T_2 = P_2 \leq k_t(G_1 + G_2) \quad \rightarrow \quad k_t G_2 \geq P_2 - k_t G_1$$
$$\rightarrow \quad g_{B2} \geq \frac{P_2 - k_t G_1}{k_t a b} = 18.125\,\mathrm{kN/m}^3.$$

Teža vode, ki deluje na vse tri bloke, je

$$P_3 = \frac{1}{2} g_V h^2 = 500\,\mathrm{kN/m},$$

teža spodnjega bloka pa

$$G_3 = g_{B3} a b = 152\,\mathrm{kN/m}.$$

Bloki ne bodo zdrsnili glede na podlago, če bo specifična teža srednjega sloja večja od

$$T_3 = P_3 \leq k_t(G_1 + G_2 + G_3) \quad \rightarrow \quad G_2 \geq \frac{P_3}{k_t} - G_1 - G_3$$
$$\rightarrow \quad g_{B2} \geq \frac{P_3 - k_t\left(G_1 + G_3\right)}{k_t a b} = 49.125\,\mathrm{kN/m}^3.$$

Potrebna specifična teža srednjega bloka je večja izmed obeh izračunanih vrednosti, torej mora biti $g_{B2} \geq 49.125\,\mathrm{kN/m}^3$.

Preverimo še zvrnitev blokov okrog točk B in A. Primerjava momentov zgornjih dveh blokov glede na točko B pokaže

$$\left(G_1 + G_2\right) \frac{b}{2} = 473\,\mathrm{kNm/m} > P_2 \frac{(h-a)}{3} = 360\,\mathrm{kNm/m},$$

za momente vseh treh blokov glede na točko A pa velja

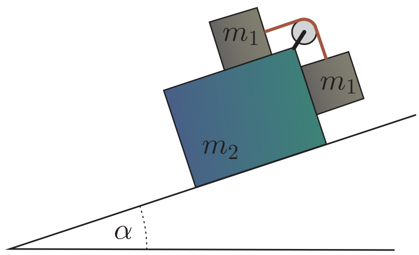
$$\left(G_1 + G_2 + G_3\right) \frac{b}{2} = 625\,\mathrm{kNm/m} < P_3 \frac{h}{3} = 1666.6\,\mathrm{kNm/m}.$$

Kljub veliki teži srednjega bloka, se pregrada lahko prevrne okoli točke A.

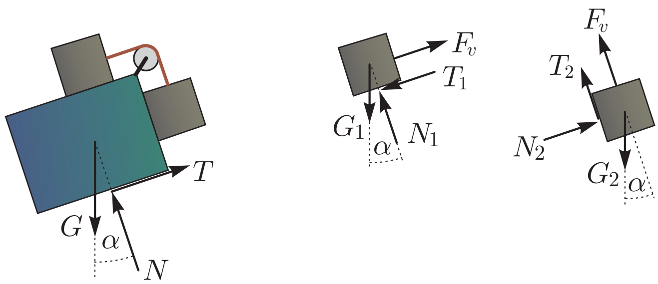
Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Obravnavamo sistem treh klad, prikazan na sliki. Manjši kladi sta povezani preko idealnega škripca z breztežno vrvico. Koeficient trenja med kladami ter med kladami in podlago znaša $k_t = 0.6$. Opiši obnašanje klad pri treh različnih vrednostih kota α: $\alpha = 10°$, $\alpha = 20°$ in $\alpha = 35°$!
Podatki: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg.



Rešitev: Pri opazovanem sistemu klad se lahko zgodi, da zdrsne celoten sistem glede na klanec, lahko pa zdrsne tudi sistem dveh manjših klad glede na veliko klado. Oba sistema obravnavamo ločeno.



Najprej si oglejmo vse klade skupaj. Zanje velja

$$G = (2m_1 + m_2)\, g = 80 \text{ N}$$

$$\left.\begin{array}{l} N = G\cos\alpha \\ T = G\sin\alpha \le k_t N \end{array}\right\} \quad \to \frac{G\sin\alpha}{G\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{T}{N} \le k_t .$$

Zadnja vrstica enačb predstavlja pogoj za mirovanje sistema. Dokler bo kot α dovolj majhen, da bo $\tan\alpha \le 0.6$, velika klada ne bo zdrsnila. Za kota $10°$ in $20°$ je tangens manjši od koeficienta trenja in do zdrsa ne pride, pri kotu $35°$ pa sistem klad zdrsne po klancu.

Za manjši kladi velja

$$N_1 = G_1\cos\alpha = m_1 g\cos\alpha \qquad N_2 = G_2\sin\alpha = m_1 g\sin\alpha$$

$$T_1 \le k_t N_1 = k_t m_1 g\cos\alpha \qquad T_2 \le k_t N_2 = k_t m_1 g\sin\alpha$$

Za vsako od manjših klad zapišemo ravnotežni pogoj v smeri vrvice

$$F_v - T_1 - G_1 \sin\alpha = 0$$
$$F_v + T_2 - G_2 \cos\alpha = 0.$$

Prvo enačbo odštejemo od druge

$$T_1 + T_2 + m_1 g\,(\sin\alpha - \cos\alpha) = 0$$

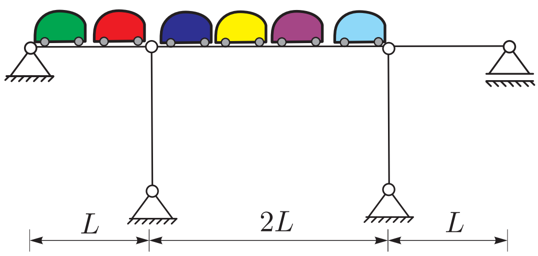
in upoštevamo mejne vrednosti sile trenja

$$m_1 g\,(\cos\alpha - \sin\alpha) \leq k_t m_1 g\,(\cos\alpha + \sin\alpha) \quad \rightarrow \quad \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} \leq 0.6.$$

Dobljeni pogoj preverimo za dane kote. Pri kotu 10° manjši kladi zdrsneta glede na veliko klado, pri ostalih dveh kotih pa mirujeta. Sistem povsem miruje le pri kotu 20°.

2. naloga

Kolona šestih vozil s povprečno maso 1500 kg nenadoma zavre. Dinamični koeficient trenja znaša 0.8. Določi porazdeljeno obtežbo, s katero bi modelirali vpliv vozil na vozišče, ko se vozila nahajajo v legi, prikazani na sliki! Določi tudi lego in velikosti ekstremnih vrednosti notranjih sil za to obtežbo!
Vztrajnostne sile lahko zanemariš.
Podatki: $L = 10$ m, $g = 10$ m/s^2.



Rešitev: Vpliv kolone vozil opišemo s porazdeljeno navpično in vodoravno obtežbo. Celotna sila teže šestih vozil znaša

$$F = 6 \cdot 1500 \cdot g = 90\ \mathrm{kN}.$$

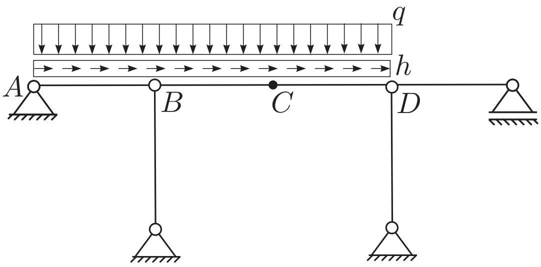
Težo enakomerno razporedimo po dolžini dela vozišča, kjer se nahajajo vozila

$$q = \frac{F}{3L} = 3\ \mathrm{kN/m}.$$

Zaradi trenja deluje na vozišče tudi vodoravna obtežba

$$h = 0.8\,q = 2.4\ \mathrm{kN/m}.$$

Model konstrukcije in obtežbe prikazujemo na sliki, kjer smo s črkami A, B, C in D označili lego ekstremnih notranih sil



Največja osna sila je tik ob levi podpori v točki A. Njena velikost je enaka celotni sili trenja

$$N_x^{\max} = N_x^A = 3Lh = 72\ \mathrm{kN}.$$

Prečni sili sta po absolutni vrednosti največji na obeh krajiščih najdaljšega razpona v točkah B in D. Njuna velikost je enaka polovici prečne sile , ki deluje na ta del konstrukcije

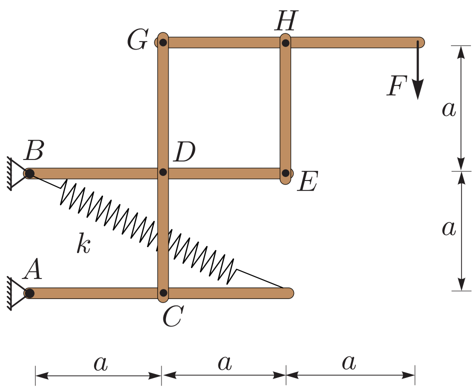
$$|N_z^{\max}| = \left|N_z^B\right| = \left|N_z^D\right| = Lq = 30\ \mathrm{kN}.$$

Upogibni momenti so največji na sredi največjega razpona v točki C

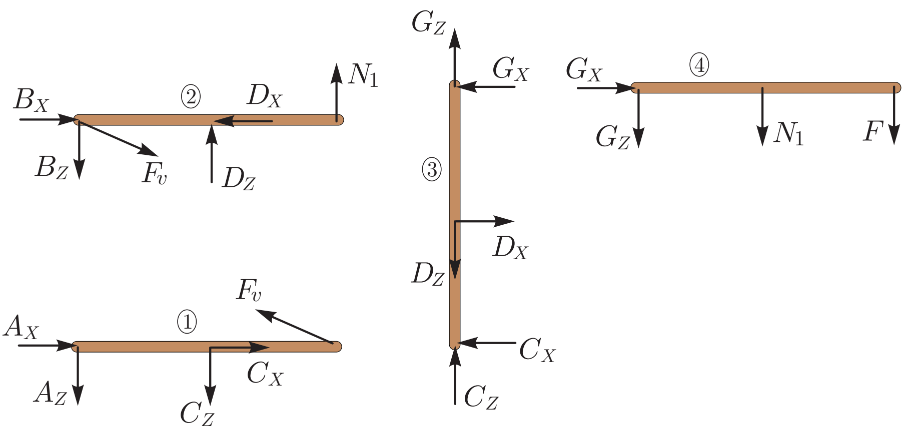
$$M_y^{\max} = M_y^C = q\frac{(2L)^2}{8} = 150\ \mathrm{kNm}.$$

3. naloga

Na sliki je preprost sistem vzmetenja. Določi silo v vzmeti, pri kateri se sistem nahaja v narisani legi! Določi tudi sile v vseh vezeh!
Podatki: $a = 30$ cm, $F = 5$ kN.



Rešitev: Sistem teles razstavimo na posamezna telesa, medsebojne vplive pa nadomestimo z ustreznimi silami.



Zapišemo lahko 12 ravnotežnih enačb za 12 neznanih sil. Reakcije nas ne zanimajo, poleg tega pa bi radi nalogo rešili čimbolj spretno. Pričnimo s telesom z oznako 4, saj nanj delujejo le tri neznane sile.

$$
\begin{aligned}
\sum X = 0 &\quad\rightarrow\quad G_X = 0 &&\quad\rightarrow\quad G_X = 0\,\mathrm{kN} \\
\sum Z = 0 &\quad\rightarrow\quad G_Z + N_1 + F = 0 &&\quad\rightarrow\quad G_Z = F = 5\,\mathrm{kN} \\
\sum M^G = 0 &\quad\rightarrow\quad -aN_1 - 2aF = 0 &&\quad\rightarrow\quad N_1 = -2F = -10\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

Za drugo telo zapišimo le momentni ravnotežni pogoj glede na točko B

$$
\sum M^B = 0 \quad\rightarrow\quad aD_Z + 2aN_1 = 0 \quad\rightarrow\quad D_Z = -2N_1 = 20\,\mathrm{kN}.
$$

Za tretje telo potem velja

$$
\begin{aligned}
\sum M^D = 0 &\quad\rightarrow\quad aG_X - aC_X = 0 &&\quad\rightarrow\quad C_X = 0\,\mathrm{kN} \\
\sum M^C = 0 &\quad\rightarrow\quad 2aG_X - aD_X = 0 &&\quad\rightarrow\quad D_X = 0\,\mathrm{kN} \\
\sum Z = 0 &\quad\rightarrow\quad -C_Z + D_Z - G_Z = 0 &&\quad\rightarrow\quad C_Z = 15\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

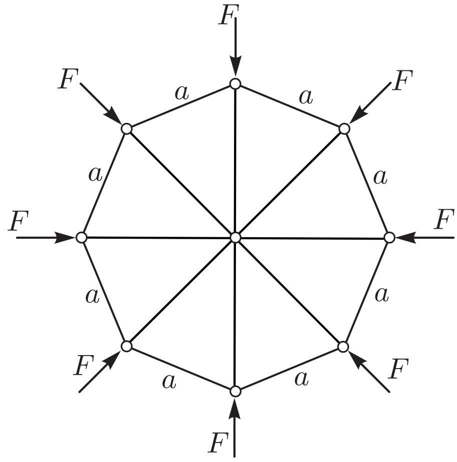
Določiti moramo le še silo v vzmeti. Uporabimo momentni ravnotežni pogoj za prvo telo glede na točko A

$$
\sum M^A = 0 \quad\rightarrow\quad 2aF_v \sin\alpha - aC_Z \quad\rightarrow\quad F_v = \frac{C_Z}{2\sin\alpha},
$$

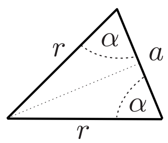
pri čemer za kot α velja $\tan\alpha = 1/2$. Sila v vzmeti je torej $\quad F_v = 16.77$ kN.

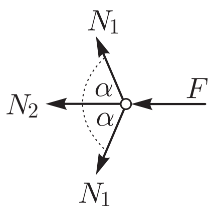
4. naloga

Simetrično paličje iz linearno elastičnega materiala je obteženo, kot kaže slika. Določi osne sile v palicah, če veš, da je sila v palici sorazmerna skrčku palice $N_p = k_p \Delta u$, kjer je k_p osna togost palice! Togosti vseh palic so enake.
Podatki: $F = 10\,\mathrm{kN}$, $a = 1\,\mathrm{m}$, $k_p = 10^6\,\mathrm{kN/m}$.



Rešitev: Zaradi simetrije so vse osne sile na obodu enake. Ravno tako so enake vse osne sile v palicah, ki potekajo od središča do oboda. Oglejmo si poljubno vozlišče na obodu.





Iz ravnotežja sil sledi

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -2N_1 \cos\alpha - N_2 + F = 0.$$

Paličje ima obliko pravilnega osemkotnika, zato je

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(180 - \frac{360}{8}\right) = 67.5^\circ.$$

Zaradi simetrije se ohrani oblika paličja in s tem razmerje stranic, kar določa zvezi med pomikoma in osnima silama

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r}{a} = \frac{\frac{a}{2\cos\alpha}}{a} = \frac{1}{2\cos\alpha} = 1.307 \quad \rightarrow \quad N_2 = 1.307 N_1.$$

Ta rezultat le še vstavimo v ravnotežno enačbo in dobimo

$$N_1 = -4.826\ \mathrm{kN}, \qquad N_2 = -6.307\ \mathrm{kN}.$$