23.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 17. MAJ 2017

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

23. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Tomaž Hozjan, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 17. maj 2017

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; HOZJAN, Tomaž; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
23. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk:XXX, Ljubljana

Obseg: 26 strani

Naklada: 100 izvodov

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2017

CIP – Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (23 ; 2017 ; Ljubljana)
[Triindvajseto]
23. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana,
17. maj 2017 / [pripravili] Dejan Zupan ... [et al.]. - Ljubljana :
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2018

ISBN 978-961-6884-53-2
1. Zupan, Dejan, mehanik
294873600

23. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2017

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 23. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Tomaž Hozjan,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 130 dijakinj in dijakov. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 12. aprila 2017. 36 najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 17. maja 2017 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

ime	priimek	letnik	šola	mentor
Miha	Babič	3	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Uroš	Bevk	3	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Dejan	Češnjevar	3	GK Krško	Franci Udič
Toni	Dragovan	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Zarja	Fabjan	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Katarina	Gršič	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Christian	Janjac	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Lara	Koglot	3	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Lenart	Kolić	3	SPSŠ Krško	Erika Broz Žižek
Žiga	Kralj	3	GK Krško	Franci Udič
Miha	Pečarič	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Nebojša	Panić	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Domen	Peklar	3	GK Krško	Franci Udič
Aljaž	Pirnar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Matjaž	Pongrac	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Iva	Rakoše	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Jernej	Repše	3	GK Krško	Franci Udič
Sabina	Rožac	3	GK Krško	Franci Udič
Andrej	Saje	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Nastja	Saje	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Petra	Šporar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Filip	Bezovnik	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Nik	Blatnik	4	GK Krško	Erika Broz Žižek
Marko	Čistar	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Jurij	Govednik	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Pavel	Hočevar	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Anže	Hribšek	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Jan	Krnc	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Tilen	Omerzo	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Klara	Part	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Kristjan	Perko	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Žak	Rožman	4	GK Krško	Erika Broz Žižek
Aleksej	Rikić	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Urška	Steiner	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Marko	Tibaut	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Matej	Umek	4	GK Krško	Erika Broz Žižek

KRATICE ŠOL:

GK Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško
SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 17. maja 2017 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom izr. prof. dr. Vlatka Bosiljkova ogledali Konstrukcijsko prometni laboratorij.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Urška Dolinar, Igor Planinc, Anita Treven in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Priznanja in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Najuspešnejši so bili:

Toni	Dragovan	3	SEŠTG Novo mesto	**1**	**100**
Žiga	Kralj	3	GK Krško	**2**	**84**
Aljaž	Pirnar	3	SEŠTG Novo mesto	**2**	**83**
Jernej	Repše	3	GK Krško	**2**	**83**
Uroš	Bevk	3	SGGOŠ Ljubljana	zlato priznanje	
Andrej	Saje	3	SGLŠ Novo Mesto	zlato priznanje	
Aleksej	Rikić	4	SGŠG Maribor	**1**	**95**
Urška	Steiner	4	SGŠG Maribor	**2**	**75**
Nik	Blatnik	4	GK Krško	**3**	**70**
Anže	Hribšek	4	SGGOŠ Ljubljana	zlato priznanje	

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	10.83	13.70	13.07	8.33	32.22
najnižja ocena	0	0	5	0	5
najvišja ocena	25	25	25	25	100

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	18.67	14.05	6.28	10.41	36.36
najnižja ocena	0	0	0	0	10
najvišja ocena	25	25	25	15	78

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.95	16.43	9.67	16.10	58.14
najnižja ocena	0	0	5	0	15
najvišja ocena	25	25	25	25	100

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	18.00	15.38	9.08	10.38	52.85
najnižja ocena	2	5	0	5	0
najvišja ocena	25	25	20	25	95

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom tretjih letnikov najtežji 1. in 4. naloga. Dijakinjam in dijakom četrtih letnikov pa sta bili najtežji 3. in 4. naloga.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene celo nekoliko višje kot na predtekmovanju. Dijaki 3. letnikov so najbolje reševali 2. nalogo, dijaki 4. letnikov pa 1. nalogo.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je tretjo nalogo povsem pravilno rešilo 13 udeležencev. Uspešni so bili tudi pri reševanju prve in druge naloge. Četrti letniki so uspešno reševali prvo predtekmovalno nalogo. Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Izjemi sta prva in druga naloga pri tretjih letnikih. Drugo nalogo pri tretjih letnikih je povsem pravilno rešilo kar 13 tekmovalcev.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
11	10	13	7
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
13	7	3	0

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
10	13	2	2
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
5	5	0	1

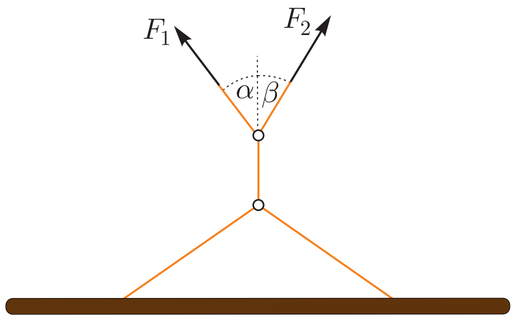
Tekmovanje financirata:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Zavod RS za šolstvo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

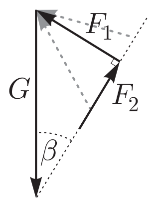
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Homogen lesen tram s težo 300 N je obešen na dveh vrveh, kot kaže slika. Določi velikosti sil F_1 in F_2 ter kot α tako, da bo velikost sile F_1 najmanjša!
Namig: nalogo lahko rešiš grafično!
Podatki: $\beta = 30°$.



Rešitev: Kota, pri katerem bo sila F_1 najmanjša, ni težko določiti, če problem predstavimo grafično. Na sliki prikazujemo navpično silo teže, smernico sile F_2 in nekaj izbir sile F_1. Velikost sile F_1 bo najmanjša, ko bo ta pravokotna na smernico sile F_2. Torej mora biti kot $\alpha = 60°$.

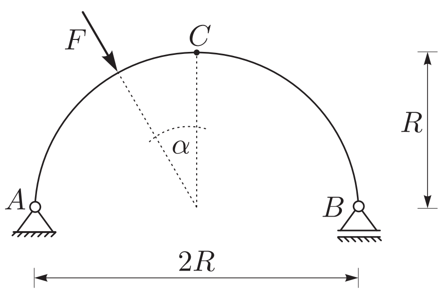


Neznani sili potem določimo iz ravnotežnih enačb:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\beta = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 = 150\,\mathrm{N}$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\beta - G = 0 \quad \rightarrow \quad F_2 = 259.8\,\mathrm{N}.$$

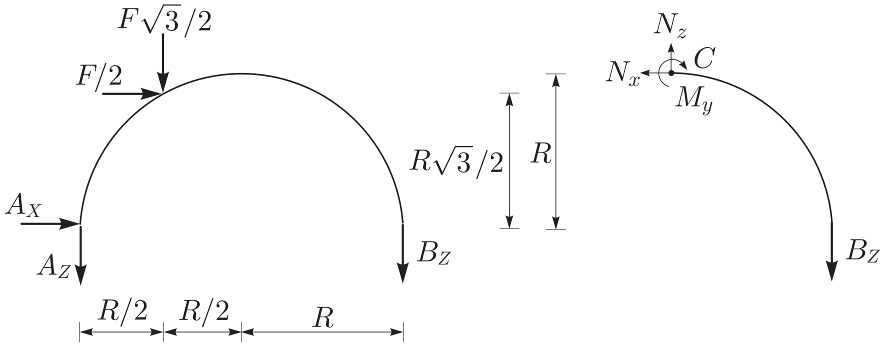
2. naloga

Postoležeči nosilec je oblikovan kot krožni lok s polmerom R. Določi reakcije v podporah A in B ter notranji sili in upogibni moment v točki C!
Podatki: $R = 3$ m,
$F = 200$ kN, $\alpha = 30°$.



Rešitev: Najprej določimo reakcije:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + \frac{1}{2}F = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -100\,\mathrm{kN}$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + B_Z + \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -86.6\,\mathrm{kN}$$
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad -2RB_Z - \frac{\sqrt{3}}{4}RF - \frac{\sqrt{3}}{4}RF = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -86.6\,\mathrm{kN}.$$

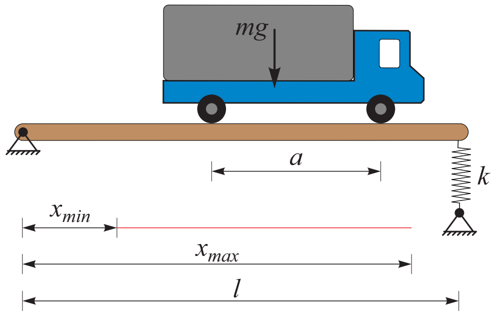


Sedaj lok prerežemo v točki C, kot kaže slika, in za desni del (BC) zapišemo raznotežne enačbe:

$$\sum x = 0 \quad \rightarrow \quad N_x = 0 \quad \rightarrow \quad N_x = 0\,\mathrm{kN}$$
$$\sum z = 0 \quad \rightarrow \quad N_z - B_Z = 0 \quad \rightarrow \quad N_z = -86.6\,\mathrm{kN}$$
$$\sum M^C = 0 \quad \rightarrow \quad M_y + RB_Z = 0 \quad \rightarrow \quad M_y = 259.8\,\mathrm{kN}.$$

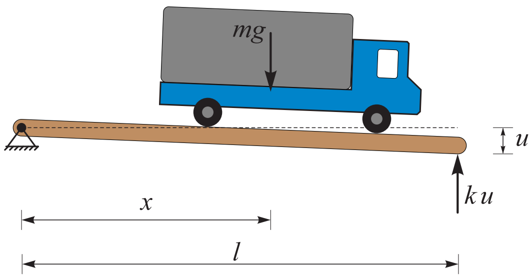
3. naloga

Opazujemo preprosto tehtnico vozil, ki tehta vozila iz izmerjenega skrčka vzmeti togosti k. Natančnost meritve je največja, če je velikost izmerjenega skrčka v območju $[u_{min}, u_{max}]$. Določi območje $[x_{min}, x_{max}]$ lege vozila z maso m na tehtnici, da bo izmerjena teža vozila dovolj natančna! Vozilo je obteženo tako, da 60 % teže odpade na zadnjo os in 40 % na sprednjo os.
Podatki: $l = 12$ m, $a = 6$ m, $m = 8$ t, $k = 20$ kN/cm,
$u_{min} = 1$ cm, $u_{max} = 2$ cm, $g = 10$ m/s^2.



Rešitev:
Iz momentnega ravnotežnega pogoja na nepomično podporo izrazimo lego prijemališča sile teže:

$$x = \frac{ku}{mg} l.$$



Pri ekstremnih optimalnih vrednostih pomikov dobimo

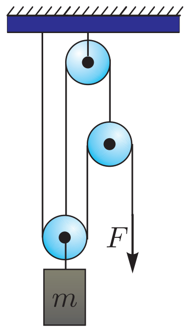
$$x\left(u_{min}\right) = 3 \text{ m}$$
$$x\left(u_{max}\right) = 6 \text{ m}.$$

Tem vrednostim pa dodamo še odmik osi koles od prijemališča sile teže:

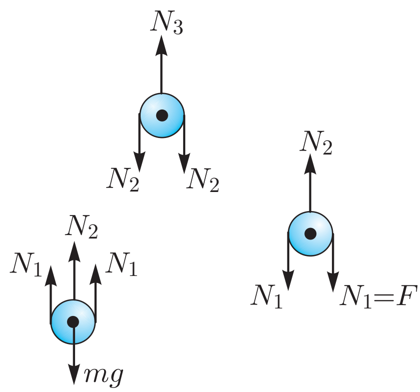
$$x_{min} = x\left(u_{min}\right) - 0.4a = 0.6 \text{ m}$$
$$x_{min} = x\left(u_{max}\right) + 0.6a = 9.6 \text{ m}.$$

4. naloga

S kolikšno silo moramo vleči vrv, da bo sistem škripcev v ravnotežju? Trenje v škripcih, trenje med škripci in vrvjo ter maso škripcev in vrvi zanemarimo.
Podatki: $m = 40$ kg, $g = 10$ m/s^2.



Rešitev: Sistem razstavimo na posamezne škripce, sili v vrveh pa označimo z N_1 in N_2. Pri tem upoštevamo, da je sila v vrvi na obeh straneh škripca enaka.



Najprej si oglejmo desni škripec. Zanj velja

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 + N_1 - N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 2F.$$

Iz ravnotežja spodnjega škripca pa sledi

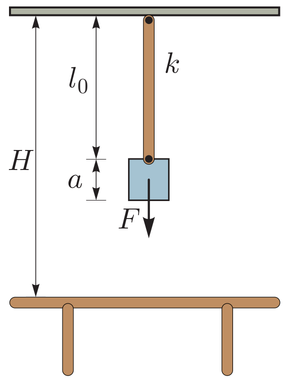
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad -2N_1 - N_2 + mg = 0 \quad \rightarrow \quad F = \frac{mg}{4}.$$

Vleči moramo torej s silo, ki je enaka četrtini teže bremena. Za naše podatke je $F = 100\,\mathrm{N}$.

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Pri $20°C$ s stropa visi palica začetne dolžine l_0 in osne togosti k. Nanjo obesimo togo in temperaturno neodvisno kocko s stranico a in težo F. Nato palico, ki ima koeficient linearnega toplotnega raztezka palice α, segrevamo s hitrostjo $5°C/\text{min}$. Koliko časa moramo segrevati palico, da se bo utež dotaknila mize? Razdalja med mizo in stropom je H.



Predpostavi, da je k neodvisen od temperature in da raztezek zaradi temperature računamo glede na začetno nedeformirano lego palice.
Podatki: $l_0 = 112$ cm, $H = 130$ cm, $a = 10$ cm, $F = 40$ N, $k = 25$ N/cm, $\alpha = 0.0015°C^{-1}$.

Rešitev: Palica se zaradi teže uteži raztegne na dolžino

$$l_1 = l_0 + \frac{F}{k} = 113.6\,\text{cm}.$$

Razdalja, za katero se mora palica še raztegniti, da se dotakne mize zaradi temperaturne razlike, je

$$l_2 = H - l_1 - a = 6.4\,\text{cm}.$$

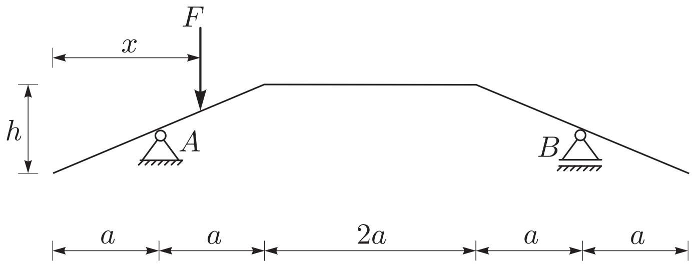
Iz znanega temperaturnega raztezka določimo spremembo temperature

$$l_2 = l_0\alpha\Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta T = \frac{l_2}{l_0\alpha} = 38°C \quad \rightarrow \quad t_s = \frac{\Delta T}{5}.$$

Palico moramo torej segrevati 7.6 minut.

2. naloga

Lomljeni prostoležeči nosilec je obtežen s pomično navpično silo F. Določi lego x te sile tako, da bo v nosilcu: (i) dosežen po absolutni vrednosti največji upogibni moment; (ii) dosežena po absolutni vrednosti največja osna sila; in (iii) dosežena po absolutni vrednosti največja prečna sila.
Če je rešitev več, poišči vsaj eno.
Podatki: $a = 2$ m, $h = 1$ m, $F = 10$ kN.



Rešitev: Zaradi simetrije obravnavamo le sile, ki delujejo na levo polovico konstrukcije: $x \in [0, 3a]$. Vodoravna reakcija v podpori A je enaka nič, navpična reakcija pa je odvisna od prijemališča sile:

$$A_Z = -F\frac{5a - x}{4a}.$$

Najprej si oglejmo upogibne momente. Obtežba na nosilec je točkovna, zato so momenti odsekoma linearni. Odsekoma linearna funkcija, ki opisuje momente, je enaka nič na obeh prostih koncih in ima prelome le v prijemališču sile in na mestih obeh podpor. Ločiti moramo dve možnosti: i) prijemališče sile F leži levo od podpore A in ii) prijemališče sile F leži med A in sredino konstrukcije. Za obe možnosti so vrednosti momentov v točkah prelomov podane v spodnji preglednici:

	prijemališče sile	
	$x \in [0, a]$	$x \in [a, 3a]$
moment na mestu prijemališča sile	0	$-A_Z\,(x - a)$
moment v točki A	$-F(a - x)$	0
moment v točki B	0	0

Kadar leži sila F levo od podpore A, je moment po absolutni vrednosti največji, ko je $x = 0$, in znaša $M_y^{ext} = -Fa = -20\,\text{kNm}$. Kadar je prijemališce sile desno od podpore A, določimo tisti x, pri katerem ima funkcija

$$M_y\,(x) = \frac{F}{4a}\,(5a - x)\,(x - a) = -\frac{F}{4a}\left(5a^2 - 6ax + x^2\right)$$

ekstrem. Funkcijo odvajamo po spremenljivki x:

$$M_y'\,(x) = -\frac{F}{4a}\,(-6a + 2x) = 0.$$

Od tu sledi

$$x_E = 3a \quad \text{in} \quad M_y^{\max} = M_y\,(3a) = Fa = 20\,\text{kNm}.$$

Osna in prečna sila sta odsekoma konstantni. Točke, v katerih se spremenita, so prijemališče zunanje sile F, podpori A in B ter oba loma konstrukcije. Naklon levega dela vpliva na velikosti osne in prečne sile, zato najprej izračunajmo

$$\tan\alpha = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = 0.97, \quad \sin\alpha = 0.24,$$

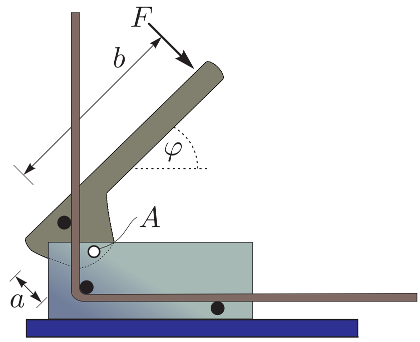
kjer smo z α označili kot med vodoravno osjo in poševnim delom nosilca. Če bo sila F ležala na levem prostem koncu, bosta notranja osna in prečna sila na območju $[0, x)$ enaki nič, za območje $[x, a)$ pa velja

$$N_x = F\sin\alpha = 2.4\,\mathrm{kN} \quad \text{in} \quad N_z = -F\cos\alpha = -9.7\,\mathrm{kN}.$$

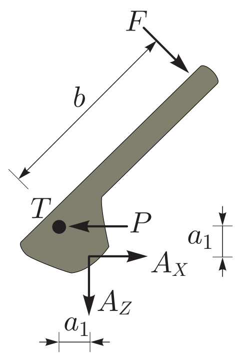
Za te primere je reakcija A_Z negativna, vsota $F + A_Z$ pa je po absolutni vrednosti največ $F/4$, kar je manj kot F in tudi manj kot $F\cos\alpha$. Torej so velikosti osne in prečne sile na območju $[a, 2a]$ manjše kot na območju $[x, a)$. Če bo sila F ležala med podporama A in B, bo reakcija A_Z zavzela vrednosti z intervala $(-F, 0)$. Tako bodo velikosti notranjih osnih in prečnih sil kvečjemu manjše kot v prejšnjem primeru.

3. naloga

Določi obremenitev osi A v napravi za krivljenje armaturnih palic! Podatki: $a = 0.1$ m, $b = 1$ m, $F = 500$ N, $\varphi = 45°$.



Rešitev: Obravnavamo ročico naprave, vpliv armaturne palice in osi A pa nadomestimo z silami, kot kaže slika ($a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$)



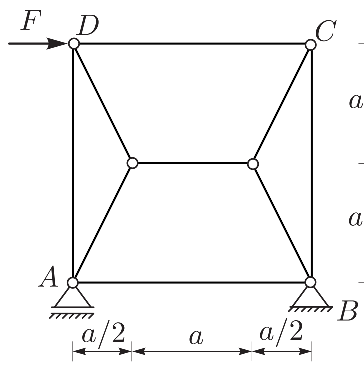
Iz ravnotežja sil sledi

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -353.5\,\mathrm{N}$$
$$\sum M^T = 0 \quad \rightarrow \quad -bF + a\frac{\sqrt{2}}{2}A_X - a\frac{\sqrt{2}}{2}A_Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = 6717.5\,\mathrm{N}.$$

Na os A torej deluje rezultantna sila velikosti $6727.8\,\mathrm{N}$.

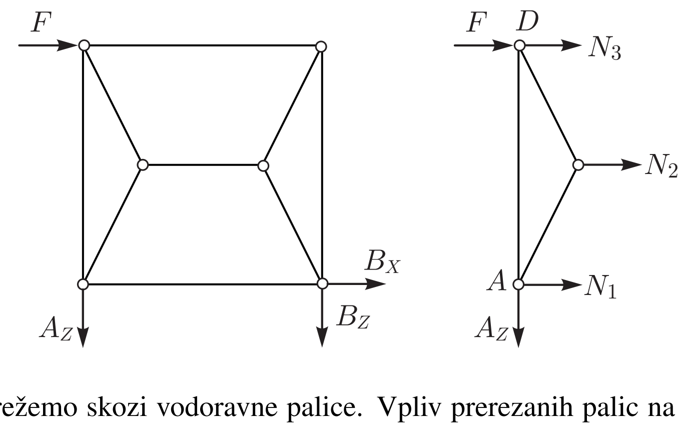
4. naloga

Paličje je v členku D obteženo z vodoravno silo F. Najprej določi reakcije paličja, potem pa zapiši ravnotežne enačbe za vodoravne palice!
Kakšne so te enačbe? Jih lahko rešiš? Odgovor utemelji!
Podatki: $a = 4$ m, $F = 10$ kN.



Rešitev: Najprej določimo reakcije:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow B_X + F = 0 \quad \rightarrow B_X = -10\,\mathrm{kN}$$
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow -2aB_Z - 2aF = 0 \quad \rightarrow B_Z = -10\,\mathrm{kN}$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow A_Z + B_Z = 0 \quad \rightarrow A_Z = 10\,\mathrm{kN}.$$



Paličje prerežemo skozi vodoravne palice. Vpliv prerezanih palic na preostali del paličja nadomestimo z neznanimi osnimi silami. Za levi del konstrukcije zapišemo ravnotežne pogoje

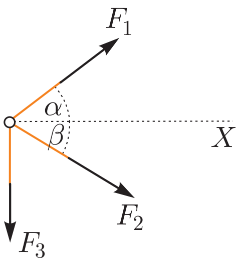
$$\sum M^D = 0 \qquad \rightarrow \; 2aN_1 + aN_2 = 0$$
$$\sum M^A = 0 \qquad \rightarrow \; -aN_2 - 2aN_3 - 2aF = 0$$
$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \; A_Z = 0 \qquad\qquad \rightarrow \; \text{protislovje.}$$

Zapisali smo tri ravnotežne enačbe, v katerih nastopajo tri neznane osne sile. Vendar te enačbe niso enoličnorešljive. To je nabolj razvidno iz zadnje enačbe, ki zahteva, da je navpična reakcija enaka nič in ne 10 kN, kot smo izračunali iz enačb za reakcije. Zaključimo lahko, da paličje pri dani obtežbi ne miruje.

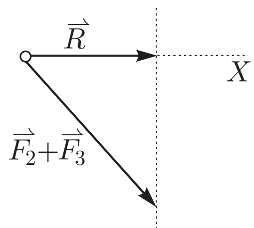
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Na nek členek v konstrukciji delujejo tri zunanje sile, kot prikazuje slika. Določi silo F_1 in njeno smer tako, da bo velikost F_1 najmanjša, rezultata sil pa bo ležala v pozitivni smeri osi X! Določi tudi velikost rezultante sil!
Namig: nalogo lahko rešiš grafično!
Podatki: $F_2 = 20$ kN, $F_3 = 10$ kN, $\beta = 30°$.



Rešitev: Seštejmo sili $\vec{F}_2$ in $\vec{F}_3$ in narišimo rezultanto vseh treh sil.

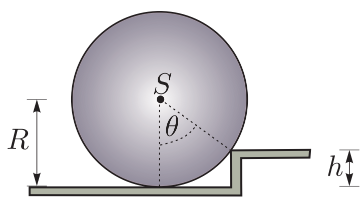


Velikost sile $\vec{F}_1$ bo najmanjša, ko bo sila $\vec{F}_1$ pravokotna na os X. Torej je $\alpha = 90°$. Iskane velikosti sil so potem

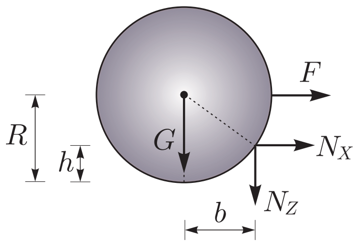
$$
\begin{aligned}
F_1 &= F_{1Z} = F_{2Z} + F_{3Z} = F_2 \sin 30° + F_3 = 20\,\mathrm{kN} \\
R &= F_{2X} + F_{3X} = F_2 \cos 30° = 17.3\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

2. naloga

Med košnjo kolo vrtne kosilnice, na katero deluje sila teže G, naleti na oviro višine h. Kolikšna vodoravna sila je potrebna, da bomo kolo potisnili preko ovire?
Podatki: $R = 12$ cm, $h = 4$ cm,
$G = 85$ N.



Rešitev: Oglejmo si sistem sil, ki delujejo na kolo.



Zapišimo enačbi ravnotežja sil v navpični smeri in ravnotežja momentov glede na os kolesa:

$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \quad N_Z + G = 0 \qquad \rightarrow \quad N_Z = -85\,\mathrm{N}$$
$$\sum M^S = 0 \qquad \rightarrow \quad N_X\,(R-h) - N_Z b = 0 \qquad \rightarrow \quad N_X = -95\,\mathrm{N}.$$

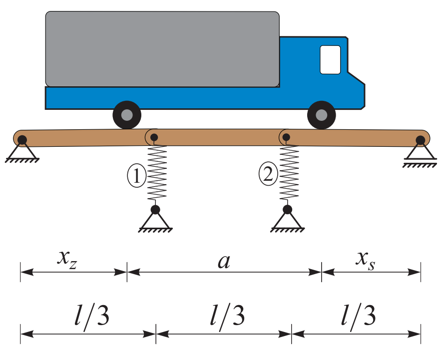
Oviro lahko torej premagamo z vodoravno silo F, ki znaša vsaj $95\,\mathrm{N}$.

3. naloga

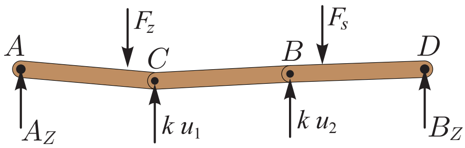
Sestavili smo tehtnico tovornih vozil, ki lahko izmeri obremenitev posamezne osi vozila. Toga vozna ploskev je sestavljena iz treh delov, ki so členkasto povezani in v vezeh podprti z vzmetema togosti k. Če želimo določiti obremenitev posamezne osi vozila, izmerimo skrčke vzmeti, poznati pa moramo natančno lego vozila na tehtnici.

Kolikšna je obremenitev na posamezno os vozila z medosno razdaljo a, ki se je ustavilo pri x_s, če sta izmerjena skrčka vzmeti enaka u_1 in u_2?

Podatki: l = 12 m, a = 7 m, x_s = 2 m, k = 20 kN/cm, u_1 = 1.5 cm, u_2 = 1 cm.



Rešitev: Oglejmo si sile, ki delujejo na tehtnico.



V sistemu sil so 4 neznane: sili na oseh tovornjaka F_z in F_s, ter reakciji A_Z in B_Z. Zapišemo lahko 4 neodvisne ravnotežne enačbe, na primer:

$$\sum Z = 0 : A_Z + B_Z + ku_1 + ku_2 - F_s - F_z = 0$$
$$\sum_{BD} M^D = 0 : B_Z \frac{l}{3} - F_s \left(\frac{l}{3} - x_s \right) = 0$$
$$\sum_{BC} M^C = 0 : B_Z \frac{2l}{3} - F_s \left(\frac{2l}{3} - x_s \right) + ku_2 \frac{l}{3} = 0$$
$$\sum M^A = 0 : B_Z l - F_s (l - x_s) + ku_2 \frac{2l}{3} + ku_1 \frac{l}{3} - F_z (l - x_s - a) = 0$$

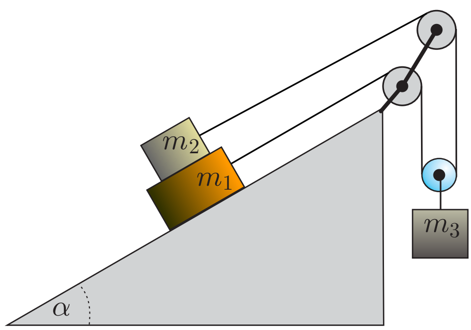
Sistem je hitro rešljiv, iz druge enačbe izrazimo B_Z, iz tretje enačbe potem določimo F_s, nato pa iz zadnje enačbe še F_z. Rešitvi za neznani sili na osi vozila sta:

$$F_s = ku_2 \frac{l}{3x_s}$$
$$F_z = ku_1 \frac{l}{3(l - x_s - a)} = ku_1 \frac{l}{3x_z}.$$

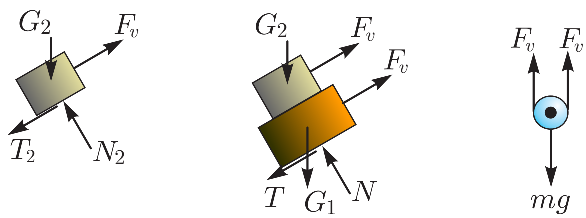
Za izbrane podatke pa sta velikosti obremenitve osi vozila enaki $F_s = F_z = 40$ kN.

4. naloga

Določi koeficient trenja med kladama na klancu in med klado in klancem, da bo sistem miroval! Trenje v škripcih, trenje med škripci in vrvjo, maso škripcev in vrvi zanemarimo.
Podatki: $\alpha = 30°$, $m_1 = 50$ kg, $m_2 = 120$ kg, $m_3 = 220$ kg, $g = 10$ m/s^2.



Rešitev: Obravnavamo tri sisteme teles: škripec, zgornjo klado in obe kladi skupaj. Obravnavane sisteme, skupaj s silami, ki nanje delujejo, prikazujemo na sliki.



Za škripec velja

$$2F_v + m_3 g = 0 \qquad \rightarrow F_v = 1.1\ \mathrm{kN}.$$

Za zgornjo klado zapišemo ravnotežna pogoja v smeri vrvi in pravokotno na vrv

$$F_v - T_2 - m_2 g \sin\alpha = 0 \qquad \rightarrow T_2 = 0.5\ \mathrm{kN}.$$
$$N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0 \qquad \rightarrow N_2 = 1.04\ \mathrm{kN}.$$

Dokler bo koeficient trenja med kladama tako velik, da bo

$$T_2 \leq k_t N_2 \qquad \rightarrow k_t \geq 0.48$$

zgornja klada ne bo zdrsnila.

Mirovanje obeh klad glede na podlago določata enačbi

$$2F_v - T - (m_1 + m_2)\, g \sin\alpha = 0 \qquad \rightarrow T = 1.35\ \mathrm{kN}$$
$$N - (m_1 + m_2)\, g \cos\alpha = 0 \qquad \rightarrow N = 1.47\ \mathrm{kN}.$$

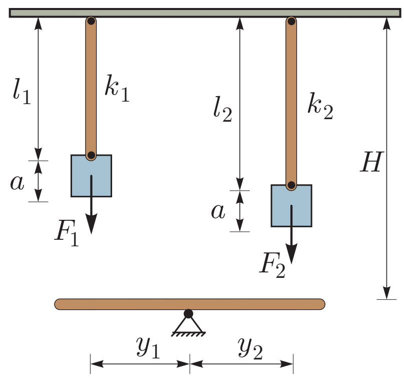
Za koeficient trenja med spodnjo klado in podlago, ki zagotavlja mirovanje sistema, velja

$$T \leq k_t N \qquad \rightarrow k_t \geq 0.917.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

S stropa visita palici, ki sta pri 20°C dolgi l_1 in l_2. Palici segrejemo na 300°C. Koeficient linearnega toplotnega raztezka palic je α, segreti palici pa imata osni togosti k_1 in k_2. Na segreti palici obesimo uteži s težama F_1 in F_2.
Kolikšni morata biti teža prve uteži in dolžina druge palice, da se bosta uteži ravno dotaknili tehtnice?
Kakšna mora biti razdalja y_2, da bo tehtnica ostala v ravnovesju? Pri tem predpostavi, da težo uteži v celoti prevzame tehtnica.
Podatki: $H = 110$ cm, $a = 10$ cm, $l_1 = 83$ cm, $\alpha = 0.0005\ \mathrm{K}^{-1}$, $k_1 = 15$ N/cm, $k_2 = 35$ N/cm, $y_1 = 20$ cm, $F_2 = 28.7$ N.



Rešitev: Vsako palico obravnavamo ločeno. Raztezek prve palice zaradi spremembe temperature je

$$d_{1T} = l_1 \alpha \Delta T = 11.62\,\mathrm{cm}.$$

Raztezek zaradi vpliva uteži zapišemo kot

$$d_{1F} = \frac{F_1}{k_1}.$$

Dovoljeni skupni raztezek je

$$d_1 = H - l_1 - a = d_{1T} + d_{1F} \quad \rightarrow \quad F_1 = k_1 \left(H - l_1 - a - d_{1T}\right) = 80.7\ \mathrm{N}.$$

Podobno velja za drugo palico

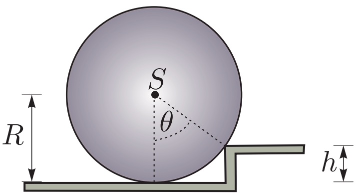
$$d_2 = H - l_2 - a = d_{2T} + d_{2F} \quad \rightarrow \quad l_2 = \frac{H - a - F_2/k_2}{1 + \alpha \Delta T} = 86.2\ \mathrm{cm}.$$

Zadnji del naloge rešimo z zapisom momentnega ravnotežnega pogoja glede na os tehtnice:

$$\sum M = 0 \rightarrow \quad F_1\, y_1 - F_2\, y_2 = 0 \rightarrow \quad y_2 = 56.23\,\mathrm{cm}.$$

2. naloga

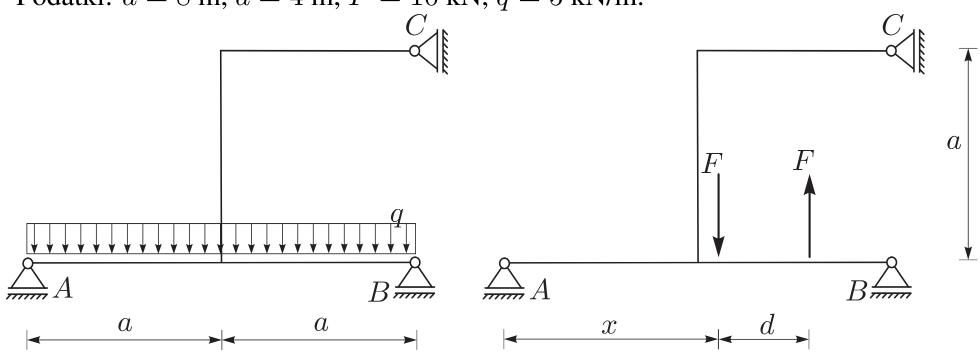
Med košnjo kolo vrtne kosilnice, na katero deluje sila teže G, naleti na oviro višine h. Kolikšna najmanjša vodoravna sila je potrebna, da bomo kolo potisnili preko ovire?
Podatki: $R = 12$ cm, $h = 4$ cm,
$G = 85$ N.



Rešitev: Glej rešitev druge naloge sklepnega tekmovanja za tretje letnike!

3. naloga

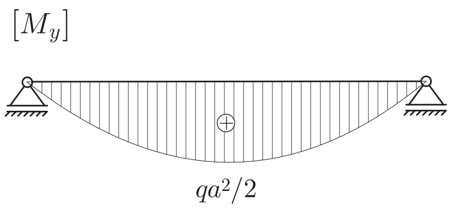
Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno prečno linijsko obtežbo q, ki deluje na nosilcu AB. Okvir dodatno obtežimo z dvojico sil, kot kaže slika. Določi najbolj neugodno lego x dvojice sil tako, da bodo v okvirju doseženi po absolutni vrednosti največji upogibni momenti. Če je rešitev več, poišči vsaj eno.
Podatki: $a = 8$ m, $d = 4$ m, $F = 10$ kN, $q = 5$ kN/m.

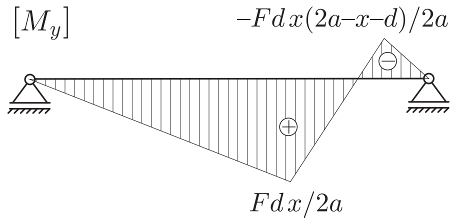


Rešitev: Notranje sile v zgornjem delu okvirja so enake nič, saj je reakcija v podpori C za dana obtežna primera enaka nič. Torej lahko obravnavamo le prostoležeči nosilec AB, ki je obtežen z enakomerno prečno linijsko obtežbo in dvojico sil. Momente zaradi porazdeljene obtežbe izrazimo kot funkcijo oddaljenosti od leve podpore:

$$M_y^q(x) = 40x - \frac{5}{2}x^2, \quad x \in [0, 16] .$$

Reakcije zaradi dvojice sil niso odvisne od njune lege. Za vertikalni reakciji velja $A_Z = -Fd/2a$ in $B_Z = Fd/2a$. Upogibni momenti so potem določeni z zvezno, odsekoma linearno funkcijo, katere graf prikazujemo na desni sliki.





Ker so momenti zaradi porazdeljene obtežbe pozitivni, nas zanima le pozitivna veja momentov zaradi dvojice sil. Največji pozitivni moment zaradi dvojice sil je seveda odvisen od x in znaša $M_y^F(x) = \frac{5}{2}x$. Celoten moment (pri koordinati x) bo po zakonu superpozicije enak

$$M_y(x) = M_y^q(x) + M_y^F(x) = \frac{85}{2}x - \frac{5}{2}x^2.$$

Iščemo torej vrednost x, pri kateri bo skupni moment največji. Ekstremno vrednost kvadratne parabole določimo z iskanjem ničle njenega odvoda:

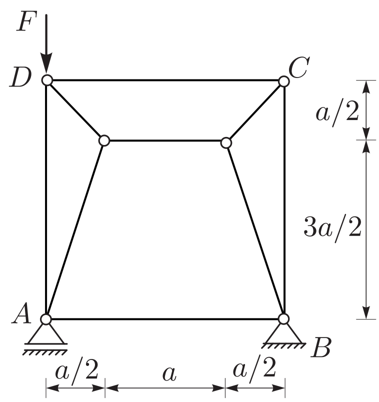
$$M_y'(x) = \frac{85}{2} - 5x = 0.$$

Od tu sledi

$$x_E = \frac{17}{2} = 8.5\,\mathrm{m} \quad \text{in} \quad M_y^{\max} = M_y(x_E) = 180.625\,\mathrm{kNm}.$$

4. naloga

Paličje je v členku D obteženo z navpično silo F. Najprej določi reakcije paličja, potem pa zapiši ravnotežne enačbe za vodoravne palice!
Kakšne so te enačbe? Jih lahko rešiš? Odgovor utemelji!
Podatki: $a = 4$ m, $F = 10$ kN.

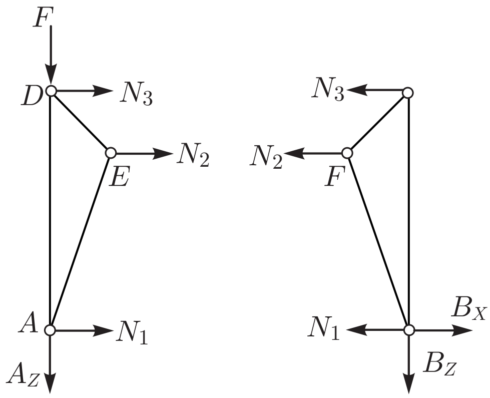


Rešitev: Najprej določimo reakcije:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow\ B_X = 0\,\mathrm{kN}$$

$$\sum M^A = 0 \qquad \rightarrow\ -2aB_Z = 0 \qquad \rightarrow\ B_Z = 0\,\mathrm{kN}$$

$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow\ A_Z + B_Z + F = 0 \qquad \rightarrow\ A_Z = -10\,\mathrm{kN}.$$



Paličje prerežemo na dva dela skozi vodoravne palice, njihov vpliv pa nadomestimo z neznanimi osnimi silami. Za levi del konstrukcije zapišemo ravnotežne pogoje

$$\sum M^D = 0 \quad \rightarrow \quad 2aN_1 + \frac{a}{2}N_2 = 0 \qquad \rightarrow \quad N_2 = -4N_1$$

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{3a}{2}N_2 - 2aN_3 = 0 \qquad \rightarrow \quad N_3 = -\frac{3}{4}N_2 = 3N_1$$

$$\sum M^E = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2}A_Z + \frac{a}{2}F + \frac{3a}{2}N_1 - \frac{a}{2}N_3 = 0 \quad \rightarrow \quad N_3 = 3N_1.$$

Zapisali smo tri ravnotežne enačbe, v katerih nastopajo tri neznane osne sile. Ker so te enačbe medsebojno odvisne, z njimi ne moremo določiti enolične rešitve. Zaključimo lahko, da je paličje sposobno prevzeti navpično obtežbo, vendar bi se ob poljubno majhni vodoravni sili močno premaknilo.