Naloge za Matlab – 1. sklop

1. Definiraj matriki

$$\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathsf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

   in izračunaj:

   (a) vsoto F in G;
   (b) produkt vsote F in G s F;
   (c) produkt iz točke (b) po komponentah;
   (d) kvadrat matrike G;
   (e) koren komponent matrike F − G;

2. Naj bo $\mathsf{x} = [3\ 2\ 6\ 8]^T$ in $\mathsf{y} = [4\ 1\ 3\ 5]^T$

   (a) seštej komponete x in y;
   (b) potenciraj komponente x z istoležnimi komponentami y;
   (c) deli vsako komponento y z istoležno komponento x;
   (d) množi vsako komponento x z istoležno komponeto y in rezultat zapiši v z;
   (e) izračunaj $\mathsf{x}^T\mathsf{y} - \mathsf{z}$ in interpretiraj rezultat.

3. Za matrike x = [1 4 8], y = [2 1 5] in A = [3 1 6 ; 5 2 7] ugotovi, kateri izrazi so izračunljivi (smiselni). Izračunljive izraze izvrednoti, za ostale pa utemelji, zakaj izraz ni dopusten!

   (a) x + y
   (b) x + A
   (c) x' + y
   (d) A − [x' y']
   (e) [x ; y']
   (f) [x ; y]
   (g) A − 3

4. Za dano matriko A = [2 7 9 7 ; 3 1 5 6 ; 8 1 2 5] napovej in preveri rezultate naslednjih ukazov!

   (a) A'
   (b) A(: , [1 4])
   (c) A([2 3] , [3 1])
   (d) A(:)
   (e) [A ; A(end,:)]
   (f) A(1:3 , :)
   (g) [A ; A(1:2 , :)]

5. Za matriko A = [2 7 9 7 ; 3 1 5 6 ; 8 1 2 5] napiši ukaze, s katerimi

   (a) prirediš lihe stolpce A matriki B;
   (b) prirediš sode vrstice matrike A matriki C;

(c) izračunaš inverze vseh komponent matrike A.

6. Naj bo x = [3 1 5 7 9 2 6]! Napovej in preveri rezultate naslednjih ukazov!

   (a) x(3)
   (b) x(1:7)
   (c) x(1:end)
   (d) x(1:end–1)
   (e) x(6:–2:1)
   (f) x([1 6 2 1 1])
   (g) sum(x)

7. Definiraj vektor x z elementi

   (a) 2, 4, 6, 8, ...;
   (b) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...;
   (c) 0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, ...

8. Definiraj vektor y, katerega komponente so določene s predpisom

$$\mathsf{y}_n = -\frac{n+1}{2n-1}.$$

9. Definiraj vektor t=1:0.2:2. Za tako definiran vektor pravilno zapiši ukaz v Matlabu in izračunaj naslednje izraze!

   (a) $ln\left(2+\mathsf{t}+\mathsf{t}^2\right)$
   (b) $\mathrm{e}^{\mathsf{t}}\left(1+\cos\left(3\mathsf{t}\right)\right)$
   (c) $\cos^2\mathsf{t}+\sin^2\mathsf{t}$
   (d) $\tan^{-1}\left(\mathsf{t}\right)$ (inverz funkcije tangens)

10. V Matlab vnesi matrike

$$\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathsf{A}_2 \end{bmatrix};$$

   (a) poišči tretji stolpec in sedmo vrstico matrike A_3;
   (b) v matriki A_3 naj element v šesti vrstici in v petem stolpcu postane 7, element v osmi vrstici in četrtem stolpcu pa naj bo 8;
   (c) v matriki A_3 spremeni v bloku ničel v spodnjem levem kotu diagonalne elemente v enice, blok ničel v zgornjem desnem kotu pa nadomesti s števili 3;
   (d) matriko A_3 prepiši v matriko B. Matriki B zbriši 4., 5. in 6. stolpec ter prve tri vrstice;
   (e) izračunaj determinanto matrike B in njene lastne vrednosti.

11. Reši sistem enačb po naslednjih korakih:

   (a) konstruiraj naključno matriko A;
   (b) konstruiraj naključen vektor b;

(c) reši sistem enačb $\mathsf{A\,x = b}$;

(d) preveri rezutat.

12. Za dane vektorje e1 = [1 1 -1 1], e2 = [1 -1 -1 1], e3 = [1 1 1 1] in e4 = [-1 1 1 1] dokaži, da tvorijo bazo štirirazsežnega prostora. Poišči komponente stolpeca a = $[2\ \text{-}3\ 1\ 5]^T$ v bazi e1, e2, e3, e4.

13. Za n = 50 in n = 100 vpiši matriko

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

na preprost (hiter) način v Matlab in izračunaj determinato. Rešitvi preveri še z računoma: d50=0.5*51(-50)^49 in d100=0.5*101(-100)^99

13. **Podobni matriki.** Dani sta matriki

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preveri, da sta podobni! Izračunaj tudi matriko P, za katero je $\mathsf{A} = \mathsf{PBP}^{-1}$!

14. (Rotacijska matrika) Rotacija v prostoru je določena z enotskim vektorjem $\mathsf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ in s kotom zasuka ϑ. Če definiramo matriko

$$\mathsf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix},$$

je s formulo

$$\mathsf{R} = \mathsf{I} + \sin\vartheta \mathsf{N} + (1 - \cos\vartheta)\,\mathsf{N}^2$$

določena rotacijska matrika. Za vektor rotacije $\mathsf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1\ -1\ \ 1]^T$ in kot rotacije $\vartheta = \pi/6$ izračunaj:

(a) pripadajočo rotacijsko matriko in jo shrani kot R;

(b) transponirano matriko R' in inverzno matriko k R – kaj lahko sklepaš;

(c) lastne vrednosti in lastne vektorje matrike R;

(d) lastne vektorje matrike N in jih zapiši v matriko Vn;

(e) inv(Vn)*R*Vn – kaj opaziš;

(f) izberi bazne vektorje, kam se bazni vektorji preslikajo z opisano rotacijo;

(g) izračunaj rotacijsko matriko, ki nadomesti tri rotacije za Eulerjeve kote $\pi/3$, $\pi/6$ in $\pi/4$ (vrtenja okrog osi [0 ; 0 ; 1], R_1[0 ; 1 ; 0] in $\mathsf{R}_2\mathsf{R}_1$[0 ; 0; 1]).

15. **Splošno reševanje sistema enačb.** Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} 3\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 6\,x_1 - 4\,x_2 + 4\,x_3 + 3\,x_4 &= 3 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 + 5\,x_3 + 4\,x_4 &= 2 \\ 9\,x_1 - 6\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 &= a \end{aligned}$$

za $a = 4$ in $a = 3$. Uporabi splošni algoritem, ki deluje za poljuben sistem enačb (tudi, če je enačb premalo). Shema algoritma:

i) Vnesi nalogo v obliki matrike koeficientov A in stolpca desnih strani b;

ii) Izračunaj rešitev x0 po metodi najmajših kvadratov: x0 = pinv(A) * b;

iii) Preveri, če rešitev x0 , dobljena po metodi najmajših kvadratov zadošča enačbi A x0 =b. Če ji zadošča, potem obstaja vsaj ena rešitev $\Longrightarrow$ pojdi na korak (iv). Če ji ne zadošča, rešitve ni $\Longrightarrow$ KONEC.

iv) Izračunaj jedro matrike A: Ker = null(A); Če je jedro prazna matrika $\Longrightarrow$ obstaja natanko ena rešitev x = x0; Če jedro ni prazna matrika, ga napenja k vektorjev x1, x2, ..., xk in obstaja neskončno mnogo rešitev $\Longrightarrow$ splošna rešitev je oblike (za poljubno izbrane vrednosti c1, c2, ..., ck

$$\mathsf{x} = \mathsf{x0} + \mathsf{c1} * \mathsf{x1} + \mathsf{c2} * \mathsf{x2} + \cdots + \mathsf{ck} * \mathsf{xk}, \quad \text{KONEC.}$$

16. Reši sistem enačb

$$\begin{aligned}
(1+a)\,x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + (1+a)\,x_2 + x_3 &= a \\
x_1 + x_2 + (1+a)\,x_3 &= a^2
\end{aligned}$$

po splošnem algoritmu za $a = -3, 0, 1$. Kaj pa dobiš z običajnim reševanjem (x = A\b)?

17. Reši matrično enačbo A*X + B = 0 za matriki

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

18. Reši sistem oblike A X - XB = C za primer

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathsf{X} - \mathsf{X} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uporabi prevedbo na linearen sistem enačb po naslednjem splošnem algoritmu:

i) Matrika ekvivalentnega linearnega sistema enačb je

$$\mathsf{M} = \mathsf{kron}(\mathsf{eye}(2), \mathsf{A}) - \mathsf{kron}(\mathsf{B}', \mathsf{eye}(2)).$$

ii) Desne strani ekvivalentnega linearnega sistema enačb so

$$\mathsf{c} = \mathsf{C}(:).$$

iii) Rešimo linearni sistem enačb x = M\c in rešitev preuredimo v matriko

$$\mathsf{X} = \mathsf{reshape}(\mathsf{x}, 2, 2).$$

Preveri dobljene rezultate. Opomba. kron je Kroneckerjev tenzorski produkt; več o tem izveš z ukazom help kron.