

$E\epsilon_{ii} = (1+\nu)\sigma_{ii} -$
napetostna kom-
ponenta $i \neq j$. Fikci-
jski napetosti σ

Kuhljevi dnevi '02

Slovensko društvo za mehaniko

Kuhljevi dnevi '02

Izdalo in založilo

SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO

v spomin na akademika in profesorja Univerze v Ljubljani
dr. Antona Kuhlja (1902-1980)

ZBORNİK DEL

Uredila Leopold Škerget in Jure Marn

Kuhljevi dnevi '02

Ribno pri Bledu, 26.-27. september 2002

Slovensko društvo za mehaniko

Kuhljevi dnevi 2002

Ribno pri Bledu, 26. – 27. september 2002

ZBORNİK DEL

Uredila:

Leopold Škerget
Jure Marn

Recenzija:

Andro Alujevič
Marko Kegl
Jure Marn
Matej Požarnik
Miran Saje
Stane Šrpčič
Brane Širok
Leopold Škerget
Boris Štok

Izdalo in založilo:

SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO
Jamova 2, Ljubljana
september, 2002

Grafično oblikovanje:

Veronika Saje
Darja Veselič

Tisk in vezava:

Tiskarna tehniških fakultet, Maribor

Naklada:

100 izvodov

VSEBINA

M. Saje, D. Zupan

KOTALJENJE TOGE PLOŠČICE PO TOGI HRAPAVI RAVNINI: VPLIV
ZRAČNEGA UPORA, VETRA IN PODRSAVANJA: 1. del: OSNOVE 1

D. Zupan, M. Saje

KOTALJENJE TOGE PLOŠČICE PO TOGI HRAPAVI RAVNINI: VPLIV
ZRAČNEGA UPORA, VETRA IN PODRSAVANJA: 2. del: PRIMERI 9

D. Zupan, M. Saje

POMEN ROTACIJSKIH INVARIANT PRI NUMERIČNEM REŠEVANJU ENAČB
PROSTORSKIH NOSILCEV 17

R. Flajs, M. Saje, E. Zakrajšek

ALI JE IRONSOV PATCH TEST POTREBEN POGOJ ZA KONVERGENCO V
METODI NEKONFORMNIH KONČNIH ELEMENTOV 25

S. Bratina, M. Saje, I. Planinc

ANALIZA NOSILNOSTI ARMIRANOBETONSKIH OKVIRNIH KONSTRUKCIJ 33

B. Čas, S. Vratuša, M. Saje, I. Planinc

ANALIZA UKRIVLJENIH KOMPOZITNIH NOSILCEV 41

M. Batista, F. Kosel

DRSENJE TOGEGA TELESA PO HRAPAVI HORIZONTALNI PODLAGI 49

G. Bobovnik, J. Kutin, I. Bajsić

TOK TEKOČINE V NIHAJOČI CEVI CORIOLISOVEGA MERILNIKA 57

A. Bombač, I. Žun

METODE PREPOZNAVE POPLAVNEGA STANJA MEŠALA PRI AREACIJI V
POSODI S TURBINSKIM MEŠALOM 65

M. Mesarič, F. Kosel

NESTACIONAREN NESTISLJIV POTENCIALEN TOK OKROG PROFILA
SPREMENLJIVE UKRIVLJENOSTI 73

J. Mencinger

IZRAČUN ČASOVNEGA RAZVOJA TEMPERATURNEGA POLJA PRI
POLKONTINUIRNEM ULIVANJU ALUMINIJA 81

Z. Rek, I. Žun

NUMERIČNA SIMULACIJA VRTINČNEGA TOKA V 2D KANALU 89

R. Bergant, I. Tiselj

VPLIV PRANDTLOVEGA ŠTEVILA PRI NUMERIČNIH SIMULACIJAH
TURBULENTNEGA PRENOSA TOPLOTE 95

A. Petrovič, B. Širok, M. Hočvar, M. Novak MODELIRANJE TOKOVNIH RAZMER NA DEFORMABILNEM TELESU V ZRAČNEM TOKU	103
V. Šajn, F. Kosel ANALIZA FREKVENČNEGA ODZIVA ANEMOMENTRA Z VROČO ŽIČKO S FREKVENČNO ODVISNIM OJAČEVALNIKOM	111
A. Hribernik, G. Bombek, I. Markočič MERJENJE HITROSTI DELCEV V STROJU ZA PESKANJE.....	119
D. Kanduti, J. Marn EKSPERIMENTALNA DOLOČITEV TOKA ZMESI PEPELA IN VODE	129
S. Eržen, Z. Ren, I. Anžel NUMERIČNA ANALIZA ALUMINIJASTEGA BOČNEGA OJAČITVENEGA DROGA V VRATIH OSEBNEGA AVTOMOBILA	137
M. Ramšak ZVEZNA DISKRETIZACIJA Z UPORABO PODOBMOČIJ V METODI ROBNIH ELEMENTOV	147
J. Petrišič, F. Kosel UČINKOVITE METODE ZA REŠEVANJE NELINEARNE ENAČBE	155
F. Kosel, R. Dražumerič GEOMETRIJSKA OPTIMIZACIJA PROCESA ZVRNITVE KONZOLE.....	163
M. Vesenjajk, Z. Ren KONSTRUIRANJE DISTANČNIKA CESTNE VARNOSTNE OGRAJE.....	171
V. Bratuš, F. Kosel, J. Petrišič DOLOČITEV ORTOTROPIJE V ELEKTROPLOČEVINI KOT POSLEDICA PLASTIČNE DEFORMACIJE	179
M. Kegl OPTIMIRANJE OBLIKE KONSTRUKCIJ: TRISTRANIČNI PROJEKTNI ELEMENT	187
B. Bremec, F. Kosel DOLOČANJE KRITIČNE OBREMENTITVE KROŽNIH KOLOBARJEV V ELASTO-PLASTIČNEM OBMOČJU	195
M. Kovač, I. Simonovski, L. Cizelj VPLIV ZRNATE STRUKTURE NA ELASTO-PLASTIČNI ODZIV POLIKRISTALNEGA SKUPKA	203

T. Videnič, F. Kosel PROCES ENOOSNE OVIRANE POVRAČLJIVOSTI PRI MATERIALIH Z OBLIKOVNIM SPOMINOM.....	211
I. Simonovski, M. Kovač, L. Cizelj DOLOČITEV KORELACIJSKE DOLŽINE V STOHAŠTIČNEM MATERIALNEM MODELU.....	219
F. Kosel, J. Pipan, J. Petrišič OSNOSIMETRIČNO PREOBLIKOVANJE DEBELOSTENSKE CEVI POD VPLIVOM TLAČNE SILE IN NOTRANJEGA NADTLAKA	227
M. Delič, J. Marn, Z. Žunič SISKOV MODEL TOKA NENEWTONSKIH TEKOČIN V GNANI KOTANJI Z METODO KONTROLNIH VOLUMNOV.....	235
P. Ternik, J. Marn VPLIV DELEŽA TRDNIH DELCEV NA REOLOGIJO DISPERZNE ZMESI	243
T. Bajcar, B. Širok, F. Trenc, D. Jošt ANALIZA KINEMATIKE TOKA V ROTIRAJOČEM DIFUZORJU	251
M. Dular, B. Širok, F. Vehar RAZVOJ METODE NAPOVEDI KAVITACIJSKE EROZIJE NA HIDRAVLIČNIH STROJIH.....	259
L. Škerget, M. Požarnik MRE ZA VISKOELASTIČEN TOK V KANALU Z NENADNO ZOŽITVIJO	269
R. Jecl, L. Škerget, E. Petrešin ROIM ZA NARAVNO KONVEKCIJO V POROZNI KOTANJI ZASIČENI Z NE- NEWTONSKO TEKOČINO	279
M. Volmajer, B. Kegl NUMERIČNA ANALIZA KARAKTERISTIK CURKA PLINSKEGA OLJA IN ALTERNATIVNIH GORIV	287
F. Kokalj, N. Samec ANALIZA POGOJEV ZGOREVANJA V SEKUNDARNI KOMORI SEŽIGALNE NAPRAVE S POMOČJO RAČUNSKE DINAMIKE TEKOČIN	295
J. Maučec, M. Hriberšek, S. Bašič DOLOČITEV MOČI ZA MEŠANJE ZMESI MELASA VODA V HOMOGENIZATORJU S POMOČJO NUMERIČNE SIMULACIJE.....	303
M. Stanek, G. Turk RAZLIČNE DEFINICIJE STRIŽNEGA IN TORZIJSKEGA SREDIŠČA	311

P. Rus, B. Štok, N. Mole PARALELNO REŠEVANJE FIZIKALNIH PROBLEMOV	319
K. Gotlih DOLOČITEV ROBNIH POGOJEV ZA REŠEVANJE PROBLEMA GLOBALNEGA OPTIMALNEGA VODENJA REDUNDANTNE ODPRTE KINEMATIČNE VERIGE	327
B. Vohar, K. Gotlih, J. Flašker OPTIMIRANJE POGONSKEGA MEHANIZMA STISKALNICE ZA GLOBOKI VLEK	335
J. Slavič, I. Simonovski, M. Boltežar UPORABA VALČNE TRANSFORMACIJE PRI IDENTIFIKACIJI DUŠENJA NIHAJOČIH SISTEMOV Z VEČ PROSTOSTNIMI STOPNJAMI.....	345
G. Mejak VOGALNA SINGULARNOST TORZIJE KOMPOZITNE PALICE	353
M. Rozman, B. Brank OSNOSIMETRIČNI UPOGIB KROŽNIH PLOŠČ	361

Kotaljenje toge ploščice po togi hrapavi ravnini: vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. 1. del: Osnove

Miran Saje¹ in Dejan Zupan²

Motion of a disk on a rough horizontal surface: effects of air resistance, wind and sliding. Part 1: Basic equations

POVZETEK

Članek govori o tem, kakšno je kotaljenje ploščice, če nanjo deluje zračni upor, veter in če je kotaljenje izmenično brez in s podrsavanjem. Sestavljen iz dveh delov. V 1. delu so navedene enačbe kotaljenja brez in s podrsavanjem. Ob prehodu iz ene v drugo fazo kotaljenja se spremeni tudi sistem enačb, kar je, posebej numerično, zelo zahtevna naloga. V 2. delu članka prikazujemo in analiziramo numerične rešitve večih primerov.

SUMMARY

Rolling and sliding of a disk on a rough horizontal plane is studied. Air resistance and constant wind on the surfaces of the disk are accounted for, too. Basic differential and algebraic equations of the two motions are given, as well as the switching conditions from rolling to sliding, and vice versa. The initial value problem is stated and the computer code in the Matlab environment is made for the numerical solution. The paper is divided into two parts. In Part 1, a description of variables and the list of basic equations are presented. In Part 2, numerical solutions of characteristic examples of rolling and sliding of a disk are given.

1. UVOD

Togo ploščico postavimo na vodoravno ravnino, jo nagnemo in zakotalimo. Če je kotaljenje brez podrsavanja, ploščica opiše po podlagi lepe, gladke krivulje, hkrati pa se vrti, ziblje,

¹prof. dr. Miran Saje, univ. dipl. ing. gradb.

²mag. Dejan Zupan, univ. dipl. ing. mat., oba Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za mehaniko, Jamova 2, Ljubljana

niha, manevrira, vse s ciljem, da se "obdrži". Ključno oporo pri tem ji nudi hrapava podlaga. Če postane sila, s katero se ploščica želi opreti na podlago, prevelika, ploščica zdrсне in značaj gibanja se spremeni. V 1. delu članka podajamo enačbe kotaljenja ploščice brez in s podrsavanjem ter jih pripravimo za reševanje s komercialnim programom Matlab. V 2. delu prikažemo numerične rešitve značilnih primerov. Da bi se čim bolj približali stvarnim razmeram, upoštevamo tudi vplive zračnega upora in morebitnega vetra.

2. ENAČBE

Uporabljamo dva kartezična koordinatna sistema, oba desnosučna. Prvega imenujemo 'izbrani koordinatni sistem' in je določen s koordinatami x, y, z in baznimi vektorji $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ z začetkom v težišču ploščice, z osjo z pravokotno nanjo, in z osema x in y v ravnini ploščice; os x je med gibanjem usmerjena k dotikalnišču ploščice s podlago. Drugi koordinatni sistem je mirujoč, 'prostorski', s koordinatami X, Y, Z in z baznimi vektorji $\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z$; osi X in Y določata ravnino kotaljenja, os Z je nanjo pravokotna in usmerjena navzgor. Koordinatni začetek je v poljubno izbrani točki ravnine.

Kotaljenje ploščice vodijo: izreka o (i) gibalni in (ii) vrtilni količini, (iii) razmere na stiku ploščice in podlage, ter (iv) zunanje sile. Od sil so najpomembnejše sile trenja, sile zračnega upora in sile vetra; zanje je potrebno privzeti dodatna pravila. Za velikost sile trenja privzamemo Coulombov zakon, za smer sile trenja pa, da je nasprotna vektorju hitrosti dotikalnišča. Za sili zračnega upora in vetra vzamemo, da sta usmerjeni vzdolž normale na ploščico, po velikosti pa sta sorazmerni normalni komponenti relativne hitrosti glede na zrak.

Izrek o gibalni količini zapišemo glede na prostorski koordinatni sistem, izrek o vrtilni količini pa glede na izbranega. Ker so pogoji v dotikalnišču za obe vrsti kotaljenja različni in zaradi stabilnosti numeričnega reševanja, moramo enačbe obravnavati ločeno.

2.1. KOTALJENJE BREZ PODRSAVANJA

Kadar se ploščica kotali brez podrsavanja, so vse tri komponente hitrosti dotikalnišča \mathcal{B} enake nič: $V_{\mathcal{B}X} = 0, V_{\mathcal{B}Y} = 0, V_{\mathcal{B}Z} = 0$. Enačbe kotaljenja brez podrsavanja so zbrane v oknu 1. Količine v njih pomenijo: X_T, Y_T, Z_T , prostorske koordinate težišča ploščice; V_X, V_Y, V_Z , komponente hitrosti težišča v smereh X, Y, Z ; ψ, ϑ, φ , Eulerjevi koti, ki določajo lego izbranega koordinatnega sistema glede na prostorskega; $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, komponente kotne hitrosti ploščice glede na izbrani koordinatni sistem x, y, z ; A, C , težiščna glavna vztrajnostna momenta ploščice; a , polmer ploščice; m , masa ploščice; μ_z , koeficient zračnega upora; W_X, W_Y, W_Z , komponente hitrosti vetra v smereh X, Y, Z ; R_X, R_Y, R_Z , komponente kontaktne sile na stiku ploščice s podlago v smereh X, Y, Z ; T , rezultantna sila trenja v ravnini kotaljenja; α , kot, ki ga oklepa rezultantna sila trenja z baznim vektorjem \mathbf{E}_X ; v_B , velikost hitrosti dotikalnišča, ki je v primeru kotaljenja brez podrsavanja enaka nič.

Izpeljave zaradi pomanjkanja prostora opuščamo. Podrobnosti so prikazane v javno dostopnem delu [4].

Naloga ima 12 osnovnih neznank – $X_T, Y_T, Z_T, V_X, V_Y, V_Z, \psi, \vartheta, \varphi$ in $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, in pet od njih odvisnih neznank R_X, R_Y, R_Z, α in v_B . Za določitev osnovnih neznank je v oknu 1 podanih 12 diferencialnih enačb, v oknu 2 pa so pripadajoči začetni pogoji. Sistem diferencialnih enačb s pripadajočimi začetnimi pogoji, ki ga moramo rešiti, je prvega reda. V matričnem zapisu ima ta začetni problem obliko

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{M}_b^{-1} \mathbf{f}_b, \quad \mathbf{x}_b(t_0) = \mathbf{x}_{b0}. \quad (1)$$

(Indeks 'b' označuje 'brez podrsavanja', pika nad simbolom pa odvod po času.) Izrek o obstoju in enoličnosti rešitev takega začetnega problema zagotavlja obstoj in enoličnost rešitve, če je desna stran diferencialne enačbe dovolj 'lepa' funkcija [7]. Stolpec \mathbf{f}_b zadošča temu pogoju, inverz \mathbf{M}_b^{-1} pa, če je matrika \mathbf{M}_b regularna. Njena determinanta je $\det \mathbf{M}_b = -A(A + ma^2)(C + ma^2) \sin \vartheta$ in je enaka nič le pri $\vartheta = 0$ in $\vartheta = \pi$. Zato sta obstoj in enoličnost, razen pri $\vartheta = 0$ ali π , zagotovljena.

2.2. KOTALJENJE S PODRSAVANJEM

Kadar ploščica podrsava, komponenti hitrosti težišča V_X, V_Y zamenjamo s hitrostjo dotikaljšča $v_B \in (-\infty, \infty)$ in s kotom $\alpha \in [0, 2\pi]$, ki ga oklepa sila trenja \mathbf{T} z baznim vektorjem \mathbf{E}_X (kot, ki ga oklepa vektor hitrosti dotikaljšča s tem baznim vektorjem je $\alpha + \pi$). Tedaj dobimo za osnovne neznanke naloge 12 količin: $X_T, Y_T, Z_T, v_B, \alpha, V_Z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, 10 količin je enakih kot prej, dve (v_B, α) pa sta drugačni.

Enačbe kotaljenja s podrsavanjem so zbrane v oknu 3. Izpeljave so podrobno prikazane v delu [4].

Naloga ima 12 osnovnih neznank in šest od njih odvisnih neznank T, R_X, R_Y, R_Z, V_X in V_Y . Zanje je v oknu 3 podanih 12 diferencialnih enačb, v oknu 4 pa so podani pripadajoči začetni pogoji. Sistem diferencialnih enačb, ki ga moramo rešiti, je prvega reda. V matričnem zapisu ima ta začetni problem obliko

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{f}_s, \quad \mathbf{x}_s(t_0) = \mathbf{x}_{s0}. \quad (2)$$

(Indeks 's' označuje 's podrsavanjem'.) Izrek o obstoju in enoličnosti rešitev takega začetnega problema zagotavlja obstoj in enoličnost rešitve, če je desna stran diferencialne enačbe dovolj 'lepa' funkcija. Stolpec \mathbf{f}_s zadošča temu pogoju, inverz \mathbf{M}_s^{-1} pa, če je matrika \mathbf{M}_s regularna. Njena determinanta je $\det \mathbf{M}_s = -m^2 AC v_B \sin \vartheta \{A + ma^2 \cos \vartheta [\mu \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta + \cos \vartheta]\}$. Determinanta je različna od nič, razen pri $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$, $v_B = 0$ in/ali ko je zaviti oklepaj enak nič. Prva sta singularna primera, ki nastaneta tedaj, ko ploščica pade na ravnino; tretji ($v_B = 0$), ko ploščica iz kotaljenja brez podrsavanja preide v podrsavanje, pa je povsem običajen. Ta ne spada k singularnim primerom, zato lahko dela težave.

Okno 1: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja

Osnovne neznanke: $X_T, Y_T, Z_T, V_X, V_Y, V_Z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$

$$\dot{X}_T = V_X$$

$$\dot{Y}_T = V_Y$$

$$\dot{Z}_T = V_Z$$

$$A\Omega_y\dot{\varphi} + A\dot{\Omega}_x = (A - C)\Omega_y\Omega_z - \frac{\mu_z\pi a^4}{4}\Omega_x$$

$$(ma \cos \psi \sin \vartheta) \dot{V}_X + (ma \sin \psi \sin \vartheta) \dot{V}_Y + (ma \cos \vartheta) \dot{V}_Z$$

$$- A\Omega_x\dot{\varphi} + A\dot{\Omega}_y = (C - A)\Omega_x\Omega_z - mga \cos \vartheta - \frac{\mu_z\pi a^4}{4}\Omega_y - \mu_z\pi a^3(v_z - w_z)$$

$$(ma \sin \psi) \dot{V}_X - (ma \cos \psi) \dot{V}_Y + C\dot{\Omega}_z = 0$$

$$\sin \vartheta \dot{\psi} = -\Omega_x$$

$$\dot{\vartheta} = \Omega_y$$

$$\cos \vartheta \dot{\psi} + \dot{\varphi} = \Omega_z$$

$$\dot{V}_X - a[-(\Omega_y \sin \psi \sin \vartheta + \Omega_z \cos \psi)\dot{\psi} + \Omega_y \cos \psi \cos \vartheta \dot{\vartheta} + \cos \psi \sin \vartheta \dot{\Omega}_y + \sin \psi \dot{\Omega}_z] = 0$$

$$\dot{V}_Y + a[-(\Omega_y \cos \psi \sin \vartheta + \Omega_z \sin \psi)\dot{\psi} - \Omega_y \sin \psi \cos \vartheta \dot{\vartheta} - \sin \psi \sin \vartheta \dot{\Omega}_y + \cos \psi \dot{\Omega}_z] = 0$$

$$\dot{V}_Z + a(\Omega_y \sin \vartheta \dot{\vartheta} - \cos \vartheta \dot{\Omega}_y) = 0$$

Odvisne neznanke: $R_X, R_Y, R_Z, \alpha, v_B$

$$R_X = m\dot{V}_X + \mu_z\pi a^2(v_z - w_z) \cos \psi \sin \vartheta$$

$$R_Y = m\dot{V}_Y + \mu_z\pi a^2(v_z - w_z) \sin \psi \sin \vartheta$$

$$R_Z = m(\dot{V}_Z + g) + \mu_z\pi a^2(v_z - w_z) \cos \vartheta$$

$$T = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$$

$$\sin \alpha = R_Y/T, \quad \cos \alpha = R_X/T \Rightarrow \alpha \in [0, 2\pi]$$

$$v_B = 0, \quad V_{BX} = 0, \quad V_{BY} = 0, \quad V_{BZ} = 0$$

Pomožna enačba:

$$v_z - w_z = (V_X - W_X) \cos \psi \sin \vartheta + (V_Y - W_Y) \sin \psi \sin \vartheta + (V_Z - W_Z) \cos \vartheta$$

Okno 2: Začetni pogoji pri kotaljenju brez podrsavanja

Začetni pogoji:

$$X_T(t_0) = X_T^0, \quad Y_T(t_0) = Y_T^0, \quad Z_T(t_0) = Z_T^0$$

$$V_X(t_0) = V_X^0, \quad V_Y(t_0) = V_Y^0, \quad V_Z(t_0) = V_Z^0$$

$$\psi(t_0) = \psi_0, \quad \vartheta(t_0) = \vartheta_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0$$

$$\Omega_x(t_0) = \Omega_x^0, \quad \Omega_y(t_0) = \Omega_y^0, \quad \Omega_z(t_0) = \Omega_z^0$$

Vezne enačbe:

$$V_X^0 - a(\Omega_y^0 \cos \psi_0 \sin \vartheta_0 + \Omega_z^0 \sin \psi_0) = 0$$

$$V_Y^0 + a(-\Omega_y^0 \sin \psi_0 \sin \vartheta_0 + \Omega_z^0 \cos \psi_0) = 0$$

$$V_Z^0 - a\Omega_y^0 \cos \vartheta_0 = 0$$

$$Z_T^0 - a \sin \vartheta_0 = 0$$

2.3. IZMENIČNO KOTALJENJE

Prehod iz kotaljenja brez v kotaljenje s podrsavanjem

Kotaljenje ploščice brez podrsavanja vodijo enačbe v oknu 1. Te enačbe veljajo toliko časa, dokler je $\nu = \frac{T}{N} < \mu_s$. μ_s je *statični koeficient trenja* ('koeficient lepenja'). Brž ko je $\nu = \frac{T}{N} = \mu_s$, se sproži podrsavanje. Čas, pri katerem se to zgodi, označimo s $t_{b \rightarrow s}$.

Prehod iz kotaljenja s podrsavanjem v kotaljenje brez podrsavanja

Odslej se ploščica kotali s podrsavanjem (enačbe okna 3). Čas začetka novega gibanja je čas zaključka prejšnjega: $t_0 = t_{b \rightarrow s}$. Začetni pogoji k enačbam gibanja so prikazani v oknu 4. Začetne vrednosti $X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, v_B^0, \alpha_0, V_Z^0, \psi_0, \vartheta_0, \varphi_0, \Omega_x^0, \Omega_y^0, \Omega_z^0$ so izračunane pri času $t_{b \rightarrow s}$ po enačbah kotaljenja s podrsavanjem iz okna 3.

Ker se je ploščica doslej kotalila brez podrsavanja, je $v_B^0 = 0$. Ker je det \mathbf{M}_s sorazmerna s hitrostjo v_B , je masna matrika \mathbf{M}_s pri $t_{b \rightarrow s}$ v prvem koraku integracije singularna. Metoda numerične integracije po času, uporabljena v Matlabu, potrebuje njen inverz, zato ne dopušča singularnosti masne matrike. To pomeni, da z izbrano numerično metodo reševanja ne bi mogli napraviti prvega koraka integracije in tako sprožiti prehoda iz kotaljenja brez v kotaljenje s podrsavanjem. Težavo rešimo tako, da v začetku prvega koraka vzamemo namesto $v_B = 0$ zelo majhno (pozitivno) število, ki je dovolj veliko, da je inverz numerično možen, in dovolj majhno, da ne vpliva na rezultate. S tem metodi omogočimo izračun inverza v prvem integracijskem koraku, od tod dalje pa račun teče normalno, če je le hitrost različna od nič (kar pa je, ker gre za podrsavanje). Izkaže se, da je za majhno vrednost hitrosti največkrat primerna kar Matlabova spremenljivka eps.

Vrednost α_0 ob začetku kotaljenja s podrsavanjem, to je pri času $t_{b \rightarrow s}$, izračunamo po enačbi

$$\cos \alpha_0 = \frac{R_X^0}{T_0}, \quad \sin \alpha_0 = \frac{R_Y^0}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 \in [0, 2\pi).$$

(glej okno 1) (Ničla označuje, da je količina izračunana pri času $t_{b \rightarrow s}$). Velja opozoriti, da sila trenja T_0 v splošnem ne leži na tangenti na tir dotikališča.

Ker se dinamični koeficient trenja μ_d ('koeficient trenja') nekoliko razlikuje od statičnega ($\mu_d \neq \mu_s$), za koeficient trenja μ v enačbah okna 3 vzamemo μ_d . To pomeni, da sta μ in sila v stiku nezvezni funkciji časa pri $t_{b \rightarrow s}$. Ta nezveznost lahko povzroči težave pri numeričnem računu.

Odslej se ploščica kotali s podrsavanjem. Hitrost dotikališča je različna od nič (lahko je pozitivna ali negativna) in se med gibanjem spreminja. V nekem kritičnem trenutku – označimo ga s t_{s0} – lahko zopet postane enaka nič, kar pove, da v tem trenutku ni podrsavanja. V nadaljevanju sta v splošnem dve možnosti: (i) da sledi kotaljenje brez podrsavanja; ali (ii) da hitrost dotikališča spremeni predznak in se podrsavanje nadaljuje. Poglejmo podrobnosti!

Okno 3: Sistem enačb pri kotaljenju s podrsavanjem

Osnovne neznanke: $X_T, Y_T, Z_T, v_B, \alpha, V_Z, \psi, \vartheta, \varphi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$

$$\dot{X}_T = -v_B \cos \alpha + a(\Omega_y \cos \psi \sin \vartheta + \Omega_z \sin \psi)$$

$$\dot{Y}_T = -v_B \sin \alpha + a(\Omega_y \sin \psi \sin \vartheta - \Omega_z \cos \psi)$$

$$\dot{Z}_T = V_Z$$

$$m v_B \dot{\alpha} + m a [-\Omega_y \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta + \Omega_z \sin(\alpha - \psi)] \dot{\psi}$$

$$+ m a \Omega_y \sin(\alpha - \psi) \cos \vartheta \dot{\vartheta} + m a \sin(\alpha - \psi) \sin \vartheta \dot{\Omega}_y$$

$$+ m a \cos(\alpha - \psi) \dot{\Omega}_z = -\mu_z \pi a^2 (v_z - w_z) \sin(\alpha - \psi) \sin \vartheta$$

$$- m \dot{v}_B - \mu m \dot{V}_Z$$

$$+ m a [\Omega_y \sin(\alpha - \psi) \sin \vartheta + \Omega_z \cos(\alpha - \psi)] \dot{\psi}$$

$$+ m a \Omega_y \cos(\alpha - \psi) \cos \vartheta \dot{\vartheta} + m a \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta \dot{\Omega}_y$$

$$- m a \sin(\alpha - \psi) \dot{\Omega}_z = \mu m g + \mu_z \pi a^2 (v_z - w_z) [\mu \cos \vartheta - \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta]$$

$$A \Omega_y \dot{\varphi} + A \dot{\Omega}_x = (A - C) \Omega_y \Omega_z - \frac{\mu_z \pi a^4}{4} \Omega_x$$

$$m a [\mu \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta + \cos \vartheta] \dot{V}_Z - A \Omega_x \dot{\varphi} + A \dot{\Omega}_y =$$

$$(C - A) \Omega_x \Omega_z - m g a [\mu \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta + \cos \vartheta]$$

$$- \frac{\mu_z \pi a^4}{4} \Omega_y - \mu_z \pi a^3 (v_z - w_z) \cos \vartheta [\mu \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta + \cos \vartheta]$$

$$- \mu m a \sin(\alpha - \psi) \dot{V}_Z + C \dot{\Omega}_z = \mu m g a \sin(\alpha - \psi) + \mu \mu_z \pi a^3 (v_z - w_z) \cos \vartheta \sin(\alpha - \psi)$$

$$\sin \vartheta \dot{\psi} = -\Omega_x$$

$$\dot{\vartheta} = \Omega_y$$

$$\cos \vartheta \dot{\psi} + \dot{\varphi} = \Omega_z$$

$$\dot{V}_Z + a(\Omega_y \sin \vartheta \dot{\vartheta} - \cos \vartheta \dot{\Omega}_y) = 0$$

Odvisne neznanke: $T, R_X, R_Y, R_Z, V_X, V_Y$

$$T = \mu m (\dot{V}_Z + g) + \mu \mu_z \pi a^2 (v_z - w_z) \cos \vartheta$$

$$R_X = T \cos \alpha$$

$$R_Y = T \sin \alpha$$

$$R_Z = T / \mu$$

$$V_X = -v_B \cos \alpha + a(\Omega_y \cos \psi \sin \vartheta + \Omega_z \sin \psi)$$

$$V_Y = -v_B \sin \alpha + a(\Omega_y \sin \psi \sin \vartheta - \Omega_z \cos \psi)$$

Pomožna enačba:

$$v_z - w_z = (V_X - W_X) \cos \psi \sin \vartheta + (V_Y - W_Y) \sin \psi \sin \vartheta + (V_Z - W_Z) \cos \vartheta$$

Okno 4: Začetni pogoji pri kotaljenju s podrsavanjem

Začetni pogoji:	Vežni enačbi:
$X_T(t_0) = X_T^0, \quad Y_T(t_0) = Y_T^0, \quad Z_T(t_0) = Z_T^0$	$V_Z^0 - a\Omega_y^0 \cos \vartheta_0 = 0$
$v_B(t_0) = v_B^0, \quad \alpha(t_0) = \alpha_0, \quad V_Z(t_0) = V_Z^0$	$Z_T^0 - a \sin \vartheta_0 = 0$
$\psi(t_0) = \psi_0, \quad \vartheta(t_0) = \vartheta_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0$	
$\Omega_x(t_0) = \Omega_x^0, \quad \Omega_y(t_0) = \Omega_y^0, \quad \Omega_z(t_0) = \Omega_z^0$	

(i) *Ploščica preneha podrsavati.* To se zgodi, če v tistem trenutku gibanja (pri času t_{s0}) trenjska sila podlage T postane zadosti majhna (manjša od $\mu_s N$). To ugotovimo tako, da pri času t_{s0} izračunamo sili podlage T_b in N_b , kakršni dajejo enačbe kotaljenja brez podrsavanja (okno 1):

$$T_b = \sqrt{(R_X^b)^2 + (R_Y^b)^2}, \quad N_b = R_Z^b = m(\dot{V}_Z + g) + \mu_z \pi a^2 (v_z - w_z) \cos \vartheta,$$

kjer R_X^b in R_Y^b pomenita: $R_X^b = m\dot{V}_X + \mu_z \pi a^2 (v_z - w_z) \cos \psi \sin \vartheta$, $R_Y^b = m\dot{V}_Y + \mu_z \pi a^2 (v_z - w_z) \sin \psi \sin \vartheta$. Odvode komponent hitrosti težišča \dot{V}_X , \dot{V}_Y in \dot{V}_Z , ki jih potrebujemo za račun zgornjih količin, izračunamo iz diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{M}_b^{-1} \mathbf{f}_b$ za kotaljenje brez podrsavanja iz trenutnih vrednosti količin brez pik \mathbf{x}_s ; te so zaradi zveznosti enake \mathbf{x}_b , izračunane po enačbah za podrsavanje pri času t_{s0} . Odvodi hitrosti težišča so pri t_{s0} nezvezni; če bi jih izračunali na podlagi enačb za kotaljenje s podrsavanjem ($\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{f}_s$) (okno 3), bi bili drugačni.

Če za izračunano razmerje sil velja $T_b/N_b < \mu_s$, je pri času t_{s0} razmerje sil tako, da bo gibanje v nadaljevanju kotaljenje brez podrsavanja. Pripadajoči čas označimo s $t_{s \rightarrow b} = t_{s0}$. Če pa je $T_b/N_b \geq \mu_s$, se bo kotaljenje s podrsavanjem nadaljevalo. Sicer pa bo kotaljenje brez podrsavanja.

Začetni pogoji k enačbam kotaljenja brez podrsavanja so podani v oknu 2. Začetne vrednosti $X_T^0, Y_T^0, Z_T^0, V_X^0, V_Y^0, V_Z^0, \psi_0, \vartheta_0, \varphi_0, \Omega_x^0, \Omega_y^0, \Omega_z^0$ so vrednosti teh količin ob zaključku podrsavanja, pri času $t_{s \rightarrow b}$. Komponenti hitrosti težišča V_X^0 in V_Y^0 , ki sta pri kotaljenju s podrsavanjem odvisni spremenljivki, izračunamo iz vrednosti osnovnih spremenljivk za kotaljenje s podrsavanjem po enačbah podanih v oknu 2.

(ii) *Podrsavanje ostaja.* Če za izračunano razmerje sil pri času t_{s0} velja $T_b/N_b \geq \mu_s$, je razmerje sil tako, da bo gibanje v nadaljevanju še vedno kotaljenje s podrsavanjem, čeprav je v obravnavanem trenutku hitrost dotikališča enaka nič. Enačbe okna 3 ostajajo v veljavi, sprememb stanja ni. Predvidevamo, da bo hitrost dotikališča spremenila predznak.

Prehod iz enega načina kotaljenja v drugega se lahko večkrat ponovi. Ob vsaki ponovitvi moramo določiti čas prehoda, izračunati začetne vrednosti spremenljivk in zamenjati sistem enačb. Ob tem moramo preveriti predznak normalne sile R_Z ; negativna sila R_Z bi pomenila odlepitev ploščice od podlage. Tega enačbe ne predvidevajo, zato moramo v takem primeru reševanje ustaviti.

Kotaljenje, pri katerem se izmenjujeta kotaljenje brez in s podrsavanjem, opisujeta dva, po obliki enaka, a sicer različna sistema diferencialnih enačb prvega reda. V trenutku prehoda iz

ene v drugo vrsto kotaljenja so komponente stolpcev \mathbf{f}_b in \mathbf{f}_s enake, iz njih izračunani matriki \mathbf{M}_b^{-1} in \mathbf{M}_s^{-1} pa nista. Od tod sledi *nezveznost* prvih odvodov spremenljivk v prehodu. Vendar vsi odvodi niso nezvezni. Le odvoda komponent hitrosti težišča (\dot{V}_X in \dot{V}_Y) sta nezvezna. Zato sta nezvezni tudi sili podlage T in N .

3. NUMERIČNO REŠEVANJE V OKOLJU MATLABA

Enačbe kotaljenja ploščice smo rešili numerično v okolju komercialnega programskega paketa Matlab [8]. Paket ima vgrajenih vrsto integratorjev sistemov navadnih diferencialnih enačb prvega reda s predpisanimi začetnimi pogoji iz družine metod Runge-Kutta. S posebnim parametrom 'Events' omogoča preprosto zaznavanje časov kritičnih dogodkov integracije, kakršna sta na primer prehod iz ene vrste kotaljenja v drugo in padec ploščice na ravnino kotaljenja. Matlab omogoča bogato 2D in 3D grafično predstavitev rezultatov in izdelavo animacij.

V programskem jeziku Matlab je bilo narejenih več modulov, s katerimi poiščemo numerično rešitev in jo grafično predstavimo. Moduli so preobsežni, da bi jih lahko opisali v tem članku. Javnosti so v celoti na voljo na spletnem naslovu <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>. Podrobno razlago modulov bralec najde v [4], osnove, potrebne za razumevanje programiranja v okolju Matlab, pa v [2] in [5].

LITERATURA

- [1] M. Saje, *Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini, 1. del: Osnovne enačbe*, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>, 2001.
- [2] D. Zupan, *Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini, 2. del: Numerično reševanje enačb*, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>, 2000.
- [3] M. Saje, *Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini, 3. del: Stabilnost ravnotežnih točk*, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>, 2002.
- [4] M. Saje, D. Zupan, *Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini, 4. del: Vplivi zračnega upora, vetra in podrsavanja*, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>, 2002.
- [5] D. Zupan, *Osnove programa Matlab*, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>, 2002.
- [6] M. Saje, D. Zupan, *Kotaljenje toge ploščice po hrapavi vodoravni ravnini*, Kuhljevi dnevi 2000, Maribor, 21.-22.9.2000, Zbornik del, str. 183-190, 2000.
- [7] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.
- [8] The MathWorks, Inc. *MATLAB, Using MATLAB*, Natick, 1999.

Kotaljenje toge ploščice po togi hrapavi ravnini: vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. 2. del: Primeri

Dejan Zupan¹ in Miran Saje²

Motion of a disk on a rough horizontal surface: effects of air resistance, wind and sliding. Part 2: Examples

POVZETEK

Članek o vplivih zračnega upora, vetra in podrsavanja na kotaljenje toge okrogle ploščice po togi vodoravni ravnini v svojem 2. delu podaja numerične rešitve značilnih primerov.

SUMMARY

Effects of air resistance, wind and sliding on motion of a disk are shown through numerical solutions of characteristic examples.

1. RAČUNSKI PRIMERI

V vseh primerih obravnavamo ploščico z maso 0.01 kg in s polmerom 0.1 m. Opazujemo vpliv začetnih pogojev, statičnih in dinamičnih koeficientov trenja, zračnega upora in vetra na gibanje. Časovni korak pri integraciji in interval računa prilagodimo tako, da so rezultati dovolj 'gladki' za risanje grafov in da zajamemo značilnosti posameznega gibanja. Dotikališče ploščice je na začetku postavljeno v koordinatno izhodišče ($X_T^0 = Y_T^0 = Z_T^0 = 0$), zasuk okrog lastne osi je nič ($\varphi_0 = 0$) in ploščica je na začetku postavljena v smeri osi Y . Lokalna os y je torej na začetku vzporedna z osjo Y , kar pomeni, da je začetni kot $\psi_0 = 0$. Tako postavljena ploščica je za vrednosti kota ϑ , manjše od $\frac{\pi}{2}$, nagnjena proti osi $-X$.

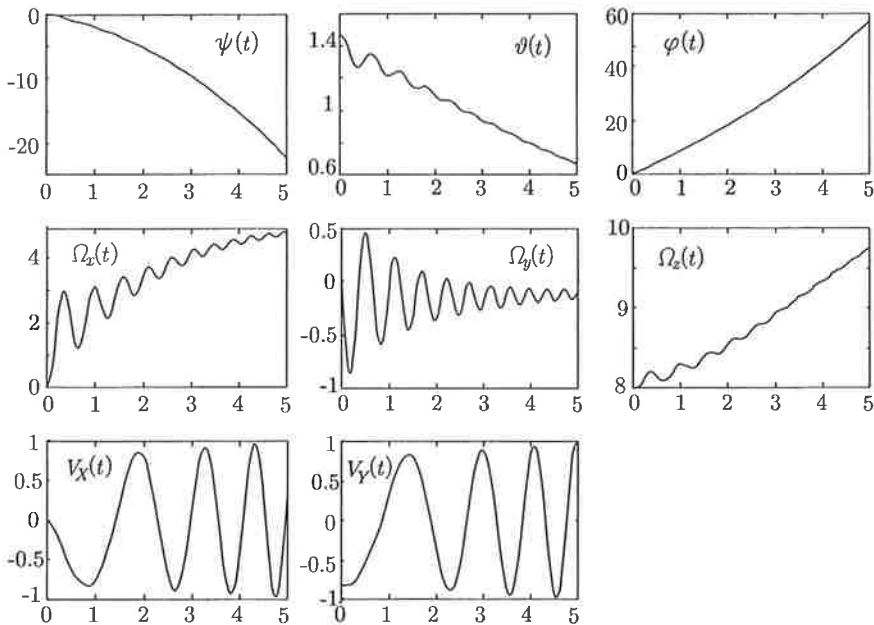
¹mag. Dejan Zupan, univ.dipl.ing.mat.

²prof. dr. Miran Saje, univ.dipl.ing.gradb., oba Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za mehaniko, Jamova 2, Ljubljana

1.1. PRIMERI KOTALJENJA BREZ PODRSAVANJA

Najprej si oglejmo vpliv samo zračnega upora, veter in podrsavanje pa zanemarimo! Podrsavanje izključimo tako, da za statični koeficient trenja izberemo veliko vrednost ($\mu_s = 20$). V vseh primerih, ki sledijo, je začetna kotna hitrost ploščice okrog lastne osi 8 s^{-1} . Začetni nakloni ϑ_0 se razlikujejo. Navpična ploščica se bo, če jo bomo pognali okrog lastne osi, kljub zračnemu uporu gibala po premici. Že pri majhnem odmiku od navpičnice ($\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - 0.001$) rezultati kažejo znaten odklik od premice.

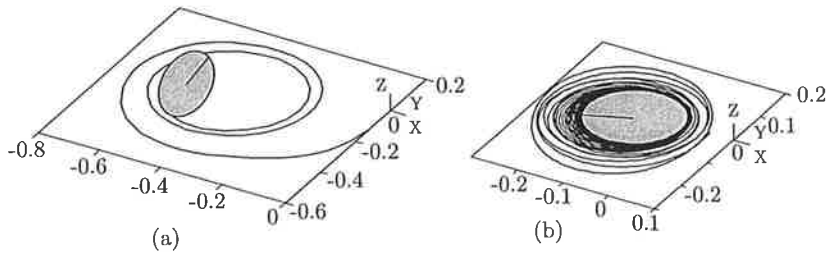
Na sliki 1 prikazujemo rezultate za primer, ko je ploščica na začetku za 0.1 radiana izmaknjena iz navpične lege. Koeficient zračnega upora je $\mu_z = 0.2$. Ploščica prečno niha levo in desno. Naklon se s časom manjša. Iz sledi ploščice (slika 2(a)) razberemo, da se ploščica močno odkloni od osi $-Y$ in da po ravnini opisuje spiralo.



SLIKA 1. Grafi kotaljenja ploščice brez podrsavanja ($\vartheta_0 = \pi/2 - 0.1$).

Če ploščico na začetku še bolj nagnemo ($\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - 0.5$) in povečamo zračni upor ($\mu_z = 0.6$), je prečno nihanje ploščice še hitrejše, špiralasta sled je nekajkrat manjša (glej sliko 2(b)), ploščica pa precej hitreje pade v ravnino. Rešitev se s časom zelo hitro spreminja, zato je za 'gladke' rezultate potrebno izbrati majhen časovni korak integracije (na primer 0.005 s za metodo Runge-Kutta reda 4/5).

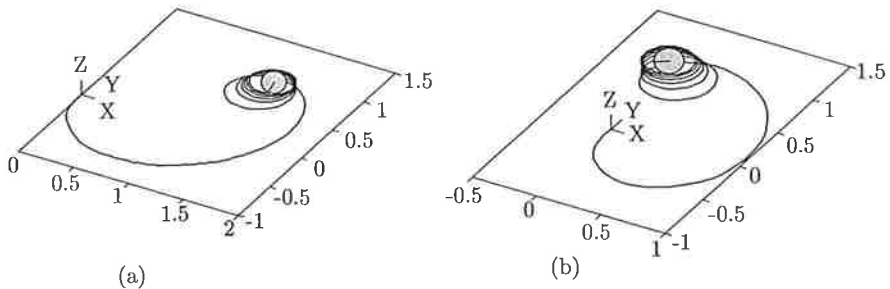
Veter je definiran kot gibanje okoliškega zraka s konstantno velikostjo. Podan je z vektorjem $W = [W_X, W_Y, W_Z]$. Če je ploščica na začetku navpična, veter pa deluje prečno nanjo ($W =$



SLIKA 2. Sled ploščice pri kotaljenju brez podrsavanja. (a) $\vartheta_0 = \pi/2 - 0.1$; (b) $\vartheta_0 = \pi/2 - 0.5$

$[1, 0, 0]$ m/s), se ta zaradi sile prečno odkloni in dotikališče opiše špiralo (slika 3(a)). Gibanje je grobo sestavljeno iz dveh faz. V prvi fazi je ploščica skoraj navpična, hitrost težišča se spreminja počasi. Tu dominira vpliv vetra, ki povzroči odmik od premice, zato ta v ravni opiše sorazmerno velik lok. V drugi fazi je ploščica že toliko nagnjena, da veter ne vpliva več bistveno, gibanje pa je podobno kot pri nagnjeni ploščici brez vetra.

Če veter dodatno učinkuje tudi v smeri vzporedno z začetno lego ($W = [1, 1, 0]$), je gibanje podobno (slika 3(b)).

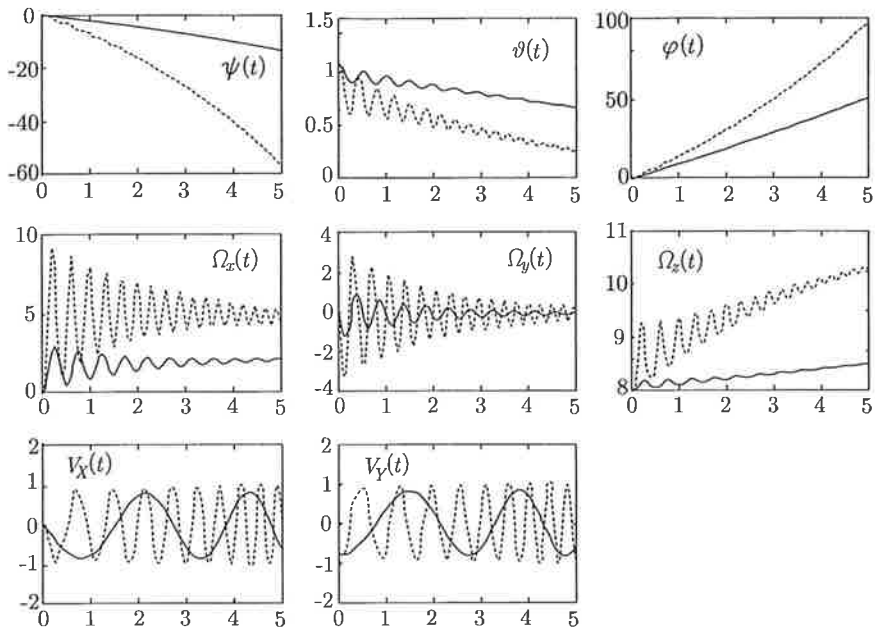


SLIKA 3. Sled kotaljenja brez podrsavanja z vetrom. (a) $W = [1, 0, 0]$; (b) $W = [1, 1, 0]$.

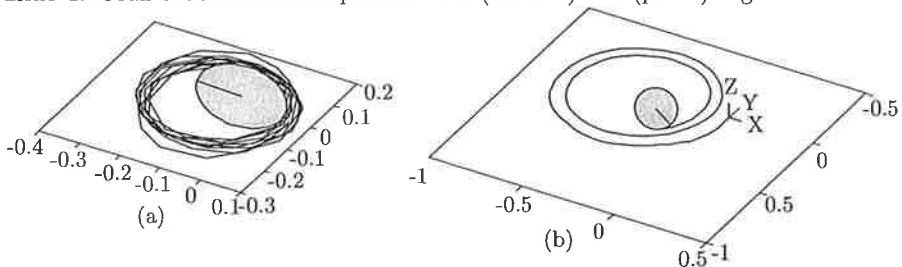
Na ploščico, nagnjeno na začetku, močno vpliva veter v smeri navpičnice. Oglejmo si primerjavo med gibanjem nagnjene ploščice ($\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - 0.5$) brez in z 'vzgonskim' vetrom $W = [0, 0, 10]$. Primerjava rezultatov je predstavljena na sliki 4. Rezultati brez vzgona so prikazani črtkano, z vzgonom polno. Razlike so velike. Vzgon bistveno poveča polmer špiralne sledi, ki jo načrta dotikališče. Sled kotaljenja s prečnim vetrom je predstavljena na sliki 5(a), z vetrom v dveh smereh pa na sliki 5(b).

1.2. PRIMERI S PODRSAVANJEM

Oglejmo si vpliv različno velike začetne hitrosti dotikališča na gibanje dokaj nagnjene ploščice. Začetni naklon je $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - 0.5$, hitrost dotikališča je v prvem primeru 10 m/s,



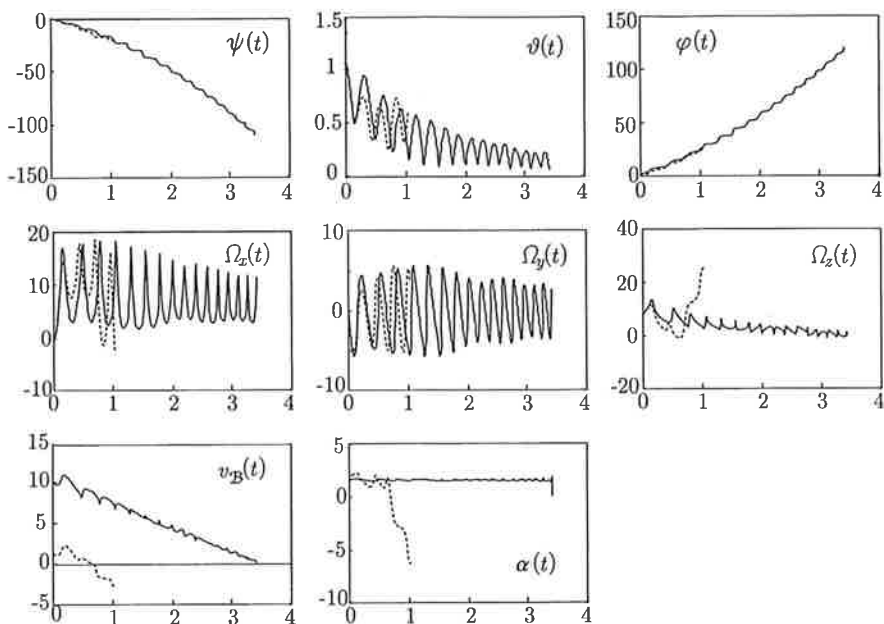
SLIKA 4. Grafi značilnih količin ploščice brez (črtkano) in z (polno) vzgonskim vetrom.



SLIKA 5. Sledi ploščice brez (a) in z vzgonskim vetrom (b).

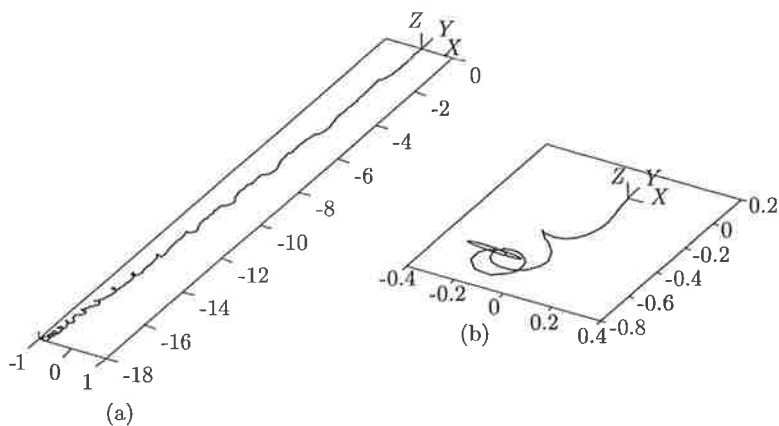
v drugem pa 1 m/s. Ploščico zavrtimo s kotno hitrostjo 8 s^{-1} okrog lastne osi. Sila trenja deluje v smeri, določeni z začetnim kotom $\alpha = \frac{\pi}{2}$; začetna hitrost podrsavanja je tej nasprotna. Vsi ostali podatki so enaki prej privzetim.

Primerjavo rezultatov prikazujemo na grah na sliki 6; s polno črto so narisani rezultati za $v_B^0 = 10$, črtkano pa za $v_B^0 = 1$. V primeru, ko je bil $v_B^0 = 10$, smo z računom prenehali zaradi padca hitrosti dotikališča na vrednost nič (ploščica je prenehala podrsavati). Pri $v_B^0 = 1$ se je račun končal prej, saj se je ploščica odlepila od podlage. Tokrat je hitrost dotikališča ob tem dogodku različna od nič. Še več, je negativna, ob začetku kotaljenja pa je bila pozitivna. Zanimiv je potek krivulj Eulerjevih kotov, ker se, kljub različnim hitrostim dotikališča, presenetljivo dobro ujemajo.



SLIKA 6. Grafi značilnih količin kotaljenja ploščice s podrsavanjem za veliko (polna črta) in majhno (črtkano) hitrost dotikališča.

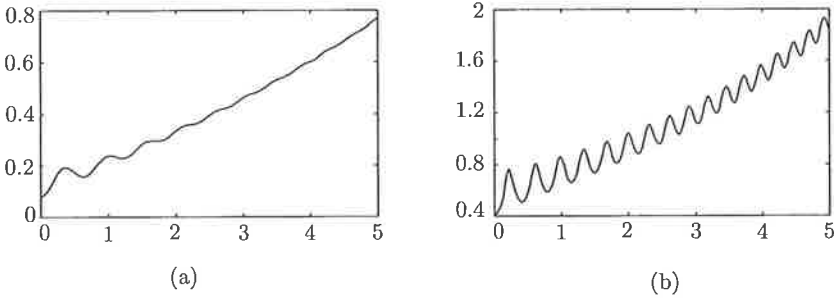
Sledi, ki ju ploščici opisujeta, sta precej drugačni (slika 7). Na levi strani je sled, ki jo je opisala ploščica z začetno hitrostjo dotikališča 10 m/s, na desni pa z začetno hitrostjo dotikališča 1 m/s pri času 0.8 s. Iz grafov razberemo, da ploščica z manjšo hitrostjo dotikališča prične opisovati 'kroge', medtem ko te pri večji hitrosti dotikališča opazimo šele po daljšem času.



SLIKA 7. Sled kotaljenja s podrsavanjem za veliko (a) in majhno (b) hitrost dotikališča.

1.3. PRIMERI IZMENIČNEGA KOTALJENJA

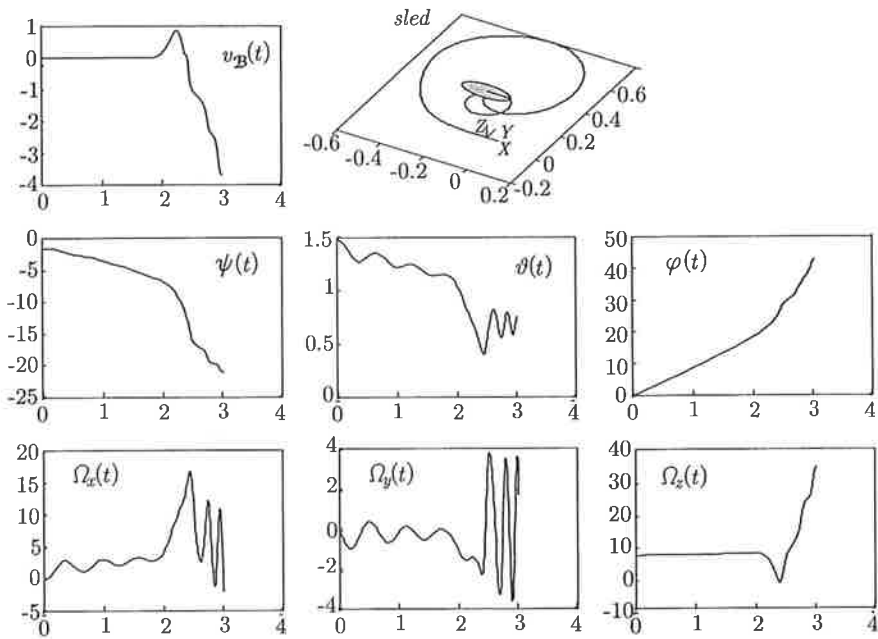
Pri gibanju brez podrsavanja smo vzeli velike vrednosti statičnega koeficienta trenja, da bi s tem izločili morebitno podrsavanje. Poglejmo, kakšne so dejanske izračunane vrednosti razmerja med tangencialno in normalno silo podlage ($\frac{T}{N}$) v dveh značilnih primerih! Na sliki 8 prikazujemo razmerje sil za kotaljenje brez podrsavanja za v začetku malo ($\frac{\pi}{2} - 0.1$) in precej nagnjeno ploščico ($\frac{\pi}{2} - 0.5$). Za prvi primer (slika 8(a)) je bilo začetno razmerje sil manjše kot 0.1, vendar pa je vrednost s časom naraščala in ob koncu časovnega intervala preseгла 0.7. Pri $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - 0.5$ (slika 8(b)) je višja že začetna vrednost (približno 0.4), vrednosti pa nihajo okrog precej strme premice, ki na koncu preseže vrednost 1.8. Če bi bil statični koeficient trenja manjši od največjega doseženega razmerja med silama, bi prišlo do zdrsa in dobljeni rezultati ne bi bili realistični.



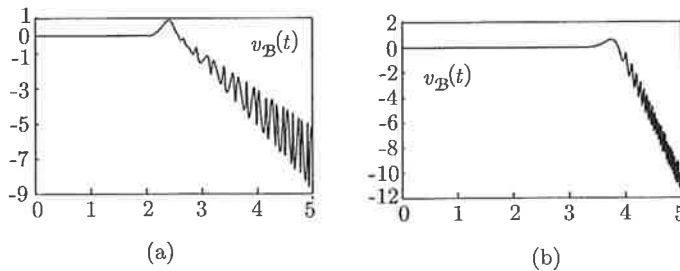
SLIKA 8. Razmerje med tangencialno in normalno silo podlage na stiku za malo (a) in bolj nagnjeno ploščico (b).

Na sliki 9 prikazujemo rešitev za primer podlage, kjer sta statični in dinamični koeficient trenja enaka $\mu_s = \mu_d = 0.3$, kjer je začetni prečni naklon $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - 0.1$ in za enake ostale parametre kot pri gibanju brez podrsavanja. Ploščica se najprej giblje brez podrsavanja, kasneje pa podrsava, dokler se ne odlepi od podlage. Do odlepitve pride po približno treh sekundah. Iz grafov razberemo tri faze gibanja: gibanje brez podrsavanja, podrsavanje, ko je hitrost dotikališča pozitivna in podrsavanje z negativno hitrostjo dotikališča. Po posameznih fazah opazimo povsem različno obnašanje spremenljivk. Sled, ki jo ploščica opiše po podlagi (slika 9 desno zgoraj), je pri kotaljenju brez podrsavanja v obliki špirale, med podrsavanjem pa je tir drugačen in celo seka stari tir. Če le malo povečamo koeficient trenja, na $\mu_s = \mu_d = 0.35$, je gibanje precej drugačno. Vpliv koeficienta trenja je torej znaten.

Doslej smo vzeli, da je dinamični koeficient trenja enak statičnemu. Kadar ni tako, so rezultati lahko precej drugačni. Graf dotikališčne hitrosti za primer, ko je $\mu_s = 0.35$ in $\mu_d = 0.3$, je prikazan na sliki 10(a). Očitno gre za povsem drugačno gibanje, kar pa ne pomeni, da tak tip gibanja ni možen za enaki vrednosti statičnega in dinamičnega koeficienta. Na sliki 10(b) je prikazan zelo podoben graf dotikališčne hitrosti, vendar izračunan za $\mu_s = \mu_d = 0.5$.

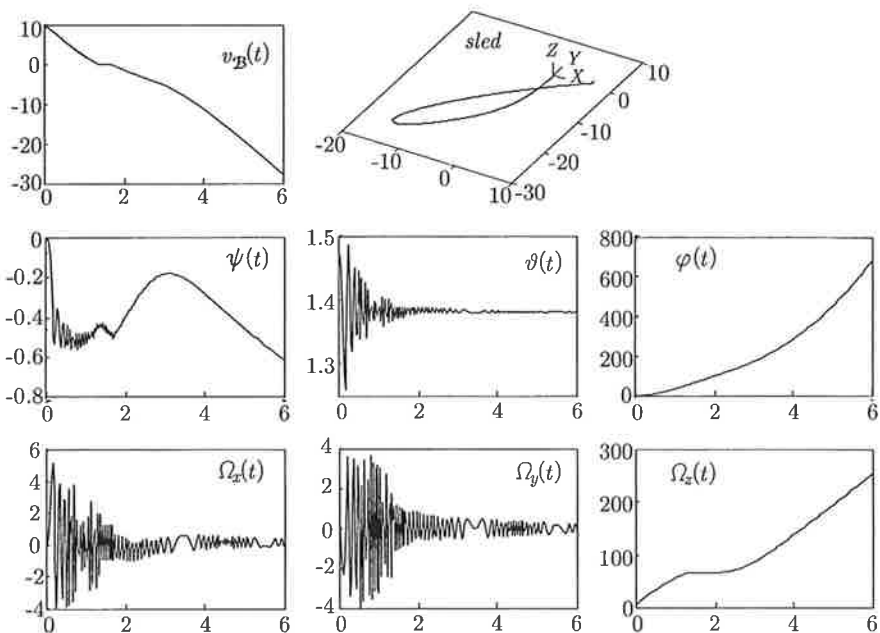


SLIKA 9. Izmenično kotaljenje ploščice za $\vartheta_0 = \pi/2 - 0.1$ in $\mu_s = \mu_d = 0.3$.



SLIKA 10. Hitrost dotikališča za drugo izbiro koeficienta trenja. (a) $\mu_s = 0.35$, $\mu_d = 0.3$; in (b) $\mu_s = \mu_d = 0.5$.

Podatki zadnjega primera, pri katerem vzamemo, da se kotaljenje prične s podrsavanjem, so: $\vartheta_0 = \pi/2 - 0.1$, $\mu_x = 0.2$, $\mu_s = \mu_d = 0.3$, $v_{B0} = 10$ m/s, smer sile trenja je $\alpha = \pi/2$. Grafe rešitev prikazujemo na sliki 11. Ploščica najprej podrsava, se nato giblje brez podrsavanja, in nato do konca časovnega intervala spet podrsava. Amplitude ϑ , Ω_x in Ω_y se zmanjšujejo – gibanje se s časom ‘ustali’. Grafi povejo, da v fazi brez podrsavanja ploščica v kratkem času povsem spremeni smer gibanja in se prične približevati koordinatnemu izhodišču. Tir sledi se seka malo pred izhodiščem in tako opiše dolgo, ozko zanko v ravnini.



SLIKA 11. Izmenično kotaljenje s podrsavanjem na začetku.

2. SKLEP

Med kotaljenjem s podrsavanjem lahko hitro pride do pojava 'bananinega olupka'. Posledica je odlepitev ploščice od podlage, njen prosti let in nato ponoven trk s podlago. Po trku se kotaljenje lahko nadaljuje, lahko pa se ploščica ponovno odbije. Zaporedje 'odboj-prosto letenje-trk-kotaljenje' se lahko še večkrat ponovi. O matematičnem modeliranju tega zanimivega pojava bomo poročali drugje.

LITERATURA

- [1] M. Saje, D. Zupan, *Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini, 4. del: Vplivi zračnega upora, vetra in podrsavanja*, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>, 2002.

Pomen rotacijskih invariant pri numeričnem reševanju enačb prostorskih nosilcev

Dejan Zupan¹ in Miran Saje²

Rotational invariants in numerical formulation of three-dimensional beam theories

POVZETEK

V delu predstavljamo izpeljavo nove formulacije enačb teorije prostorskih kinematično točnih linijskih nosilcev, obremenjenih s statično obtežbo. Predstavljena formulacija temelji na prevedbi problema v obliko, kjer so rotacijsko invariantne deformacijske količine edine neznanke vzdolž težiščne osi nosilca. Pomembna značilnost formulacije je zahtevana enakost ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil.

SUMMARY

New formulation of the kinematically exact theory of space beams subjected to static load is presented. The main characteristic of the present formulation is that the only independent unknown functions are rotational invariants – the strain vectors. The consistency condition that the equilibrium and the constitutive internal force and moment vectors are equal, is also included in the formulation.

1. UVOD

V članku analiziramo vlogo in pomen deformacijskih količin pri numeričnem reševanju enačb prostorskih nosilcev po "kinematično točni teoriji", kot sta jo zasnovala Reissner [5] in Simo [6]. Pomembna lastnost deformacijskih količin je, da se pri togi rotaciji nosilca ne spremenijo. Torej so deformacijske količine rotacijske invariante. Za sodobne numerične metode večinoma zahtevamo, da ohranjajo invariante problema. Jelenić in Crisfield [3] opozarjata, da sodobne

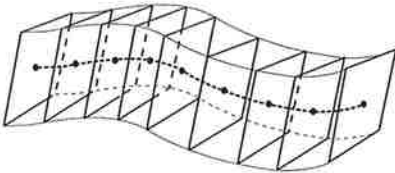
¹mag. Dejan Zupan, univ. dipl. ing. mat., Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za mehaniko, Jamova 2, Ljubljana

²prof. dr. Miran Saje, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za mehaniko, Jamova 2, Ljubljana

formulacije prostorskih nosilcev po metodi končnih elementov ne zagotavljajo invariantnosti deformacijskih količin. Težave lahko odpravimo s posebno interpolacijo zasukov, vendar v članku izberemo drugačno možnost. V nasprotju s klasičnimi numeričnimi formulaciji, kjer so avtorji interpolirali zasuke (in pomike), raje sledimo ideji, ki jo je za ravninske nosilce predstavil Planinc s sodelavci [4], in za osnovne neznanke problema izberemo deformacijske količine. Izbira deformacijskih količin kot osnovnih neznan diskretiziranega problema ni pomembna zgolj zaradi neposredne objektivnosti dobljene formulacije, temveč tudi zaradi uspešnejšega vključevanja zahtevnejših materialnih modelov.

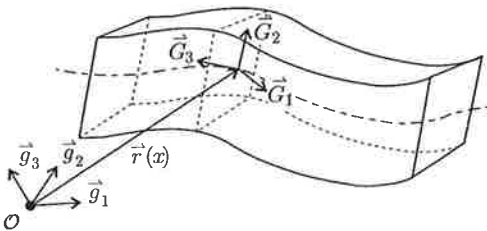
2. KINEMATIČNE ENAČBE PROSTORSKEGA NOSILCA

Prostorski nosilec opišemo z družino prečnih prereзов, katerih težišča so povezana s krivuljo, imenovano težiščna os. Pri opisu privzamemo predpostavko o ravnih prereзih, ki določa, da ravni prečni prereзи nosilca ostanejo ravni tudi po deformaciji nosilca. Pri tem, zaradi upoštevanja strižnih deformacij, prereзи niso nujno pravokotni na težiščno os.



Slika 1: Matematični model nosilca.

Ker se nosilec z delovanjem obtežbe spreminja, posebej odlikujemo stanje nosilca na začetku opazovanj, kjer poznamo geometrijo in deformacije nosilca. Poljubno deformirano stanje nosilca lahko potem opišemo s pomočjo naravnega parametra x težiščne osi v začetnem stanju. Poleg tega za lažji opis zasukov prečnih prereзов izberemo še (poljubno) referenčno točko \mathcal{O} in (poljuben) fiksni desnosučni sistem ortonormiranih vektorjev $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, ki predstavljajo prostorsko bazo.



Slika 2: Model nosilca v abstraktnem vektorskem prostoru.

Težiščno os prostorskega nosilca matematično opišemo s prostorsko krivuljo, družino prečnih prereзов pa z območji v ustreznih ravninah. Pri tem je za računski model potrebno prostorsko krivuljo in družino ravnin še ustrezno parametrizirati.

Deformirano stanje nosilca opišemo s krajevnim vektorjem težiščne osi $\vec{r}(x)$ in z desnosučno ortonormirano bazo $\vec{G}_1(x), \vec{G}_2(x)$ in $\vec{G}_3(x)$. Pri tem vektorja $\vec{G}_2(x)$ in $\vec{G}_3(x)$ ležita vzdolž glavnih vztrajnostnih osi prečnega prereза, $\vec{G}_1(x)$ pa je nanj normalen. Ker je baza $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$ prirejena materialnim točkam osi nosilca, jo imenujemo *materialna baza*.

Ker sta prostorska in materialna baza ortonormirani, sta med sabo povezani z rotacijami. Za opis rotacije imamo številne možnosti, ker pa prostorske rotacije določajo le trije neodvisni

parametri, kot smiselno parametrizacijo izberemo rotacijski vektor (podobno Jelenić in Saje [3]). Rotacijski vektor (označevali ga bomo s $\vec{\vartheta}(x)$) je vektor, ki leži na osi rotacije, njegova dolžina pa je enaka kotu rotacije.

Tako smo natanko opisali geometrijo nosilca. Posebnost "kinematično točne teorije" pa je vpeljava šestih skalarnih (rezultantnih) deformacijskih količin kot neposrednih funkcij naravnega parametra težiščne osi. Deformacijske količine so opisane z dvema vektorjema:

- i) vektor dveh specifičnih strižnih in specifične normalne deformacije $\vec{\gamma}$ in
- ii) vektor dveh specifičnih upogibnih in specifične torzijske deformacije $\vec{\kappa}$.

Vektor $\vec{\kappa}$ se v primerih, ko so normalna in strižni deformaciji enake nič, ujema z ukrivljenostjo prostorske krivulje, s katero opišemo težiščno os nosilca. V splošnem to ne velja, zato $\vec{\kappa}$ imenujemo psevdo-ukrivljenost.

Vektorja \vec{r} in $\vec{\vartheta}$, ki določata geometrijo nosilca (imenujemo ju tudi kinematični količini), sta odvisna od vpeljanih deformacijskih vektorjev $\vec{\gamma}$ in $\vec{\kappa}$. Po kinematično točni teoriji določimo medsebojne zveze tako, da zadoščajo principu virtualnega dela, ne glede na velikost kinematičnih količin in deformacij. Tako dobimo naslednji kinematični zvezi med pomiki, zasuki in deformacijami nosilca (glej [5] in [6]):

$$\vec{\gamma} = \vec{r}' + \vec{c} \quad (1)$$

$$\vec{\kappa} = \mathcal{T}\vec{\vartheta}' + \vec{d}. \quad (2)$$

Vektorja \vec{c} in \vec{d} sta variacijski konstanti, ki ju določimo iz znane začetne geometrije in deformacij nosilca. S \mathcal{T} pa smo označili linearno transformacijo, ki je odvisna zgolj od rotacijskega vektorja $\vec{\vartheta}$. Operator \mathcal{T} je določen z naslednjim predpisom

$$\mathcal{T}\vec{\vartheta}' = \vec{\vartheta}' + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \vec{\vartheta} \times \vec{\vartheta}' + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \vec{\vartheta} \times \left(\vec{\vartheta} \times \vec{\vartheta}' \right),$$

kjer smo z '×' označili običajen vektorski produkt v trirazsežnem prostoru.

3. ENAČBE NOSILCA

Osnovne enačbe nosilca izpeljemo iz principa virtualnega dela za prostorski gredni nosilec dolžine L :

$$\int_0^L \left(\vec{N} \cdot \delta(\vec{\gamma})_{rel} + \vec{M} \cdot \delta(\vec{\kappa})_{rel} \right) dx = \int_0^L \left(\vec{n} \cdot \delta\vec{r} + \vec{m} \cdot \delta\vec{\vartheta} \right) dx + \vec{S}^0 \cdot \delta\vec{r}(0) + \vec{P}^0 \cdot \delta\vec{\vartheta}(0) + \vec{S}^L \cdot \delta\vec{r}(L) + \vec{P}^L \cdot \delta\vec{\vartheta}(L), \quad (3)$$

kjer pomenijo: $\vec{n}(x)$ in $\vec{m}(x)$ porazdeljeno zunanjo silo in moment; $\vec{N}(x)$ in $\vec{M}(x)$ rezultanti notranjih sil in momentov prečnega prereza pri ločni koordinati x ; $\delta\vec{r}(0)$, $\delta\vec{r}(L)$, $\delta\vec{\vartheta}(0)$ in $\delta\vec{\vartheta}(L)$ variacije krajevnega vektorja težiščne osi in rotacijskega vektorja pri $x = 0$ in $x = L$;

\vec{S}^0 in \vec{S}^L sta vektorja zunanjih krajiščnih sil; \vec{P}^0 in \vec{P}^L pa zunanja krajiščna momenta. Za porazdeljeno in krajiščno zunanjo obtežbo običajno privzamemo, da jo opisujejo znane funkcije oziroma skalarne vrednosti. Za notranjo silo in moment \vec{N} in \vec{M} , ki nastopata v principu virtualnega dela, pa privzamemo, da sta odvisna od deformacijskih vektorjev $\vec{\gamma}$ in $\vec{\kappa}$ prek enačb snovi. Ker se ne želimo omejiti z materialnim modelom nosilca, predpostavimo splošno obliko enačb snovi:

$$\vec{N} = \mathcal{C}_N \left(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_0, \vec{\kappa} - \vec{\kappa}_0 \right) \quad (4)$$

$$\vec{M} = \mathcal{C}_M \left(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_0, \vec{\kappa} - \vec{\kappa}_0 \right), \quad (5)$$

kjer sta \mathcal{C}_N in \mathcal{C}_M znana, vsaj enkrat odvedljiva nelinearna operatorja, $\vec{\gamma}_0$ in $\vec{\kappa}_0$ sta vrednosti deformacijskih količin na začetku opazovanj. Opozorimo še, da v principu virtualnega dela nastopajo celotne (absolutne) variacije kinematičnih količin in relativne variacije deformacijskih količin. Relativna variacija upošteva spreminjanje vektorja brez vpliva spreminjanja materialne baze.

Enačbi (1) in (2) sta vezni enačbi za količine $\vec{\gamma}$, $\vec{\kappa}$, $\vec{\vartheta}$ in \vec{r} . Vezni enačbi skalarno pomnožimo z zveznima in vsaj enkrat odvedljivima vektorskima funkcijama $\vec{a}(x)$ in $\vec{b}(x)$. Produkte integriramo vzdolž nosilca

$$\int_0^L \vec{a} \cdot \left(\vec{\gamma} - \vec{r}' - \vec{c} \right) dx = 0 \quad \int_0^L \vec{b} \cdot \left(\vec{\kappa} - \mathcal{T}\vec{\vartheta} - \vec{d} \right) dx = 0,$$

variiramo in prištejemo izreku o virtualnem delu. Tako dobimo modificiran princip virtualnega dela, v katerem so variacije $\delta \left(\vec{\gamma} \right)_{rel}$, $\delta \left(\vec{\kappa} \right)_{rel}$, $\delta \vec{\vartheta}$, $\delta \vec{r}$, $\delta \vec{a}$ in $\delta \vec{b}$ poljubne neodvisne funkcije koordinate x . Variacije $\delta \vec{r}^0$, $\delta \vec{r}^L$, $\delta \vec{\vartheta}^0$ in $\delta \vec{\vartheta}^L$ so poljubni neodvisni parametri. Izrazi pri neodvisnih parametrih morajo biti enaki nič, zato iz modificiranega principa virtualnega dela neposredno razberemo Euler-Lagrangeve enačbe prostorskega nosilca:

$$\vec{N} - \vec{a} = \vec{0} \quad (6)$$

$$\vec{M} - \vec{b} = \vec{0} \quad (7)$$

$$\vec{n} + \vec{a}' = \vec{0} \quad (8)$$

$$\vec{m} + \vec{b}' - \vec{a} \times \left(\vec{\gamma} - \vec{c} \right) = \vec{0} \quad (9)$$

$$\vec{\gamma} - \vec{r}' - \vec{c} = \vec{0} \quad (10)$$

$$\vec{\kappa} - \mathcal{T}\vec{\vartheta} - \vec{d} = \vec{0} \quad (11)$$

s pripadajočimi naravnimi robnimi pogoji

$$\vec{S}^0 + \vec{a}(0) = \vec{0} \quad \vec{S}^L - \vec{a}(L) = \vec{0} \quad (12)$$

$$\vec{P}^0 + \vec{b}(0) = \vec{0} \quad \vec{P}^L - \vec{b}(L) = \vec{0}. \quad (13)$$

Iz enačb (8) in (9) lahko razberemo fizikalni pomen Lagrangevih množiteljev $\vec{a}(x)$ in $\vec{b}(x)$. Ob upoštevanju zveze $\vec{\gamma} - \vec{c} = \vec{r}'$ ugotovimo, da je $\vec{a}(x)$ vektor notranjih sil, $\vec{b}(x)$ pa vektor notranjih momentov glede na levo krajšiče težiščne osi. Ta ugotovitev zahteva dodatna pojasnila, saj smo v principu virtualnega dela že predstavili vektorja notranjih sil in momentov \vec{N} in \vec{M} . Opis notranjih sil in momentov z dvema naboroma vektorskih funkcij je pomemben zaradi numeričnega reševanja problema. V enačbah smo predpostavili, da sta \vec{N} in \vec{M} funkciji deformacijskih količin, kot določajo enačbe snovi (4) in (5), vendar pri numeričnem reševanju ne zadoščata več ravnotežnim enačbam v prerezu nosilca. Zato moramo ločiti: *konstitucijsko notranjo silo in moment* \vec{N} in \vec{M} , ki zadoščata enačbam snovi, in *ravnotežno notranjo silo in moment* \vec{a} in \vec{b} , ki zadoščata ravnotežnim enačbam. Enačbi (6) in (7) torej zahtevata enakost ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil in momentov.

4. REŠEVANJE ENAČB NOSILCA

Enačbe (6)–(11) lahko smiselno delimo na dva sklopa. Enačbi (6) in (7) predstavljata nelinearni algebrajski enačbi, določeni v vsaki točki težiščne osi. Take enačbe diskretiziramo in rešujemo z iteracijskimi metodami. Preostale enačbe (8)–(11) so navadne diferencialne enačbe prvega reda. Enačbe (8)–(10) so dovolj preproste, da lahko njihovo rešitev formalno izrazimo v integralni obliki ne glede na obliko obtežbe ali materialni model:

$$\vec{a}(x) = \vec{a}(0) - \int_0^x \vec{n}(\xi) d\xi \quad (14)$$

$$\vec{b}(x) = \vec{b}(0) + \int_0^x \left[\vec{a}(\xi) \times (\vec{\gamma}(\xi) - \vec{c}(\xi)) - \vec{m}(\xi) \right] d\xi \quad (15)$$

$$\vec{r}(x) = \vec{r}(0) + \int_0^x (\vec{\gamma}(\xi) - \vec{c}(\xi)) d\xi. \quad (16)$$

Kadar so integrandi prezahtevni, namesto analitične uporabimo numerično integracijo. Tako enačbam (8)–(10) zadostimo do napake numerične integracije natančno. Povsem analogno razmišljamo pri reševanju enačbe (11), le da rešitev poiščemo z uporabo numeričnih metod za reševanje sistemov navadnih diferencialnih enačb prvega reda. To je spet približna rešitev, saj smo z numeričnim reševanjem naredili napako. Rešitev enačbe (11) lahko formalno zapišemo z ekvivalentno integralno enačbo

$$\vec{\vartheta}(x) = \vec{\vartheta}(0) + \int_0^x \mathcal{T}^{-1}(\vec{\vartheta}(\xi)) (\vec{\kappa}(\xi) - \vec{d}(\xi)) d\xi. \quad (17)$$

Tako lahko ob znanih funkcijah $\vec{n}(x)$, $\vec{m}(x)$, $\vec{\kappa}(x)$ in $\vec{\gamma}(x)$ določimo neznane količine $\vec{a}(x)$, $\vec{b}(x)$, $\vec{r}(x)$ in $\vec{\vartheta}(x)$. Funkciji $\vec{\kappa}(x)$ in $\vec{\gamma}(x)$ pa moramo izračunati iz algebrajskih enačb (6) in (7). Tudi enačbe (6)–(7) rešimo numerično. Uporabimo iteracijske metode, kar pomeni, da začetna približka za $\vec{\kappa}(x)$ in $\vec{\gamma}(x)$ postopoma izboljšujemo do zahtevane natančnosti. Pri

tem v vsakem koraku iteracije izračunamo pripadajoče količine $\vec{a}(x)$, $\vec{b}(x)$, $\vec{r}(x)$ in $\vec{\vartheta}(x)$ po enačbah (14)–(17).

Enačbe nosilca smo tako razdelili na dva smiselna sklopa, ustrezno pa moramo upoštevati še robne pogoje. S prevedbo problema na iteracijsko reševanje enačb (6) in (7) postaneta osnovni količini, s katerima opišemo nosilec, deformacijski količini $\vec{\kappa}(x)$ in $\vec{\gamma}(x)$. Iz kinematičnih enačb (1) in (2) lahko razberemo, da sta deformacijski količini funkciji prvih odvodov kinematičnih količin $\vec{r}(x)$ in $\vec{\vartheta}(x)$. Če torej želimo enolično opisati nosilec, moramo poznati vrednosti pomikov in zasukov vzdolž nosilca. Vendar z integracijo po enačbah (14)–(17) rešimo zgolj začetni problem. Ker rešujemo robni problem, moramo zahtevati ustrezne pomike in zasuke tudi v desnih krajiščih. Enačbe (14)–(17) zato izrazimo pri $x = L$ in vključimo med osnovne enačbe nosilca. Tako dobimo celoten sistem nelinearnih enačb, ki vodijo deformiranje prostorskega nosilca:

$$\vec{N}(x) - \vec{a}(x) = \vec{0} \quad (18)$$

$$\vec{M}(x) - \vec{b}(x) = \vec{0} \quad (19)$$

$$\vec{r}(L) - \vec{r}(0) - \int_0^L [\vec{\gamma}(x) - \vec{c}(x)] dx = \vec{0} \quad (20)$$

$$\vec{\vartheta}(L) - \vec{\vartheta}(0) - \int_0^L \mathcal{T}^{-1}(\vec{\vartheta}(x)) (\vec{\kappa}(x) - \vec{d}(x)) dx \quad (21)$$

$$\vec{S}^0 + \vec{a}(0) = \vec{0} \quad (22)$$

$$\vec{P}^0 + \vec{b}(0) = \vec{0} \quad (23)$$

$$\vec{S}^L - \vec{a}(0) + \int_0^L \vec{n}(x) dx = \vec{0} \quad (24)$$

$$\vec{P}^L - \vec{b}(0) - \int_0^L [\vec{a}(x) \times (\vec{\gamma}(x) - \vec{c}(x)) - \vec{m}(x)] dx = \vec{0}. \quad (25)$$

Enačbe (18)–(25) predstavljajo formulacijo problema, kjer sta edini neznani funkciji vzdolž osi nosilca deformacijska vektorja $\vec{\gamma}$ in $\vec{\kappa}$. Poleg tega formulacija zagotavlja enakost ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil. Enačbe so zapisane v abstraktni obliki, za reševanje pa jih je potrebno preoblikovati. Vektorje izrazimo v primernih bazah in enačbe prevedemo v komponentno – skalarno obliko. Za vsak vektor lahko bazo še poljubno izberemo (prostorska ali materialna baza), vendar zaradi določenih fizikalnih in računskih omejitev izbiro baz ponotimo z virom [3]. Skalarnе enačbe diskretiziramo in lineariziramo v smislu prve variacije sistema enačb. Klub temu, da za izpeljavo diskretnega sistema enačb uporabimo kolokacijo, neznanki problema interpoliramo, saj lahko potem uporabimo natančnejše numerične metode za račun integralov, ki nastopajo v problemu. Tako dobimo tangentno togostno matriko nosilca, ki jo lahko neposredno uporabimo v Newtonovi iteraciji.

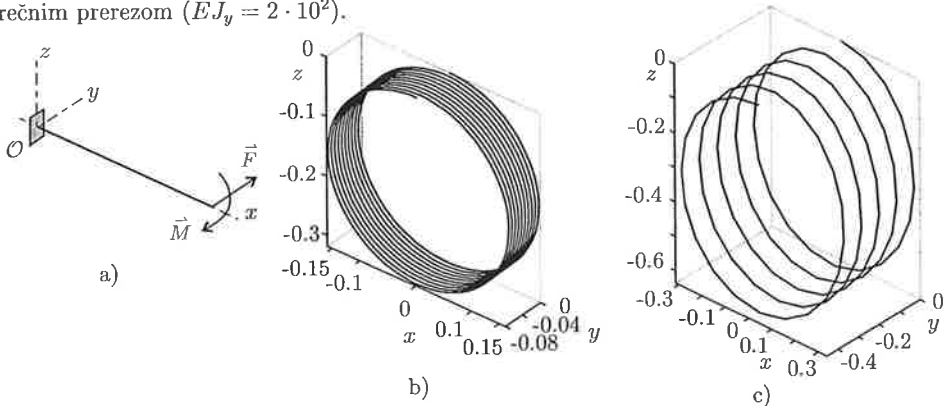
5. RAČUNSKI PRIMERI

Če raven ravninski previsni nosilec obremenimo s točkovnim momentom v prostem krajišču, se upogne v del kroga. Veliko bolj zanimiv primer deformacije nosilca pa je, kadar poleg točkovnega momenta v prostem krajišču deluje še točkovna sila (slika 3a), ki povzroči bočni pomik nosilca. V članku [1] je prikazano, da se tak nosilec zvije v vijačnico, kadar je izbran simetričen prečni prerez nosilca. V pričujočem primeru pa analiziramo tudi vpliv nesimetrije prereza in začetnega torzijskega navitja. Obravnavali smo nosilec z naslednjimi geometrijsko-materialnimi podatki:

$$GA_y = GA_z = EA = 10^4, \quad L = 10$$

$$EJ_z = GJ_t = 10^2, \quad EJ_y = 2 \cdot 10^2.$$

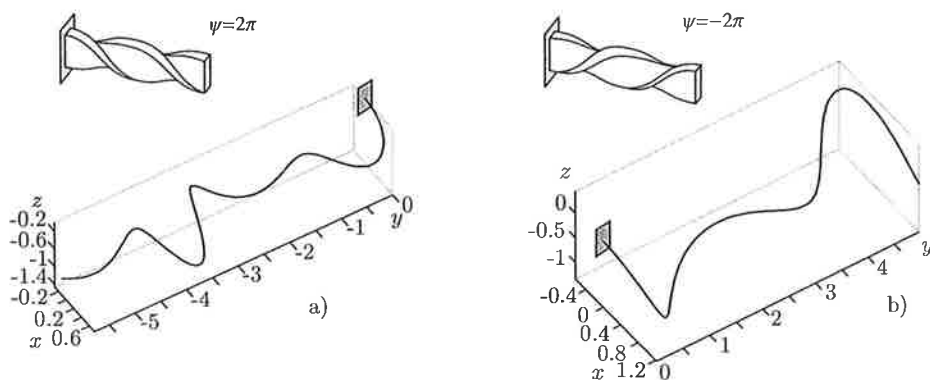
Obtežba na prostem krajišču je znašala $M = 200$, $F = 50$, večali pa smo jo inkrementno v 1000 enakih korakih. Na sliki 3b prikazujemo deformirano težiščno os nosilca za simetričen prerez ($EJ_y = 10^2$); ta se ujema z rezultati v [1]. Slika 3c prikazuje nosilec z nesimetričnim prečnim prerezom ($EJ_y = 2 \cdot 10^2$).



Slika 3: Shema začetne oblike nosilca z obtežbo (a) in končni deformirani obliki težiščne osi (b), (c).

Opazimo zelo podobno obnašanje pri nesimetričnem prerezu nosilca. Ker je bil nosilec bolj tog v z smeri so 'zanke' večjega polmera, predvsem pa so pomiki iz ravnine nosilca bistveno večji. Opozorimo še, da se je (malce presenetljivo) nosilec 'navil' ravno na nasprotno stran, kot je delovala sila.

Pri nesimetričnem prečnem prerezu ima lahko precejšen vliv začetni torzijski zasuk prečnih prerezov, tudi če težiščna os ostane ravna. Obravnavali smo nosilec kot v 3c, le da smo predpostavili linearno zavrtene prečne prereze vzdolž težiščne osi med 0 v vpetišču in 2π na prostem koncu. Pri tem smo ločili še desnosučni potek (slika 4a) in levosučni (slika 4b) potek navijanja prečnih prerezov. Rezultati kažejo povsem drugačni končni obliki težiščne osi kot na sliki 3c. Torzijsko prednavitje 'prepreči' pravilno zvijanje nosilca, poleg tega pa smer navitja vpliva na to, na kateri strani ravnine xz leži deformirani nosilec.



Slika 4: Deformirani obliki težiščne osi za torzijsko prednavita nosilca.

6. SKLEP

V delu smo opisali izpeljavo formulacije prostorskih nosilcev, s katero določamo deformirano stanje prostorskih nosilcev ob delovanju statične obtežbe. Glavne značilnosti predstavljenega postopka so: (i) obravnavamo lahko prostorske nosilce s poljubno začetno geometrijo in začetnimi deformacijami; (ii) posebno vlogo imata oba deformacijska vektorja $\vec{\gamma}$ in $\vec{\kappa}$, ki sta hkrati rotacijski invarianti in osnovna parametra v materialnih enačbah; (iii) ujemanje ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil in momentov v prečnih prerezih postane del osnovnih enačb problema.

LITERATURA

- [1] A. Ibrahimbegovic, *On the choice of finite rotation parameters*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **149**, 49–71 (1997).
- [2] G. Jelenić, M. A. Crisfield, *Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **171**, 141–171 (1999).
- [3] G. Jelenić, M. Saje, *A kinematically exact space finite strain beam model—finite element formulation by generalized virtual work principle*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **120**, 131–161 (1995).
- [4] I. Planinc, M. Saje, B. Čas, *On the local stability condition in the planar beam finite element*, Struct. Eng. Mech. **12**, 507–526 (2001).
- [5] E. Reissner, *On finite deformation of space-curved beams*, J. Appl. Math. Phys. **32**, 734–744 (1981).
- [6] J. C. Simo, *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **49**, 55–70 (1985).

Ali je Ironsov patch test potreben pogoj za konvergenco v metodi nekonformnih končnih elementov?

Flajs, R.¹; Saje, M.²; Zakrajšek, E.³

Is Irons patch test a necessary condition for convergence in the nonconforming finite element method?

Povzetek: V prispevku pokažemo, da Ironsov patch test sam po sebi še ne predstavlja potrebnega pogoja za konvergenco v metodi nekonformnih končnih elementov. Predstavimo reševanje robnega problema za navadno diferencialno enačbo drugega reda s preprostimi, posebej izbranimi nekonformnimi končnimi elementi. Kljub dejstvu, da konstruirano zaporedje približnih rešitev ne zadošča Ironsovernu patch testu, pa rešitve z ustreznim večanjem števila elementov konvergirajo k točni rešitvi.

Summary: We present a simple nonconforming approximation of the linear two point boundary value problem which violates patch test requirements. Nevertheless the solutions, obtained from these type of approximations converge to the exact solution.

1 Uvod

Patch test je prvi uvedel Irons z sodelavci v člankih [4] in [1]. Na začetku je prevladovalo mnenje, da nudi Ironsov patch test v metodi nekonformnih končnih elementov potreben in zadosten pogoj za konvergenco. Teoretično vsebino patch testa sta prva podala Strang in Fix v odlični knjigi [13]. Po teh dogodkih so patch test uporabljali kot konvergenčni test v inženirski literaturi in praksi.

Sander in Beckers sta v članku [8] podala primere, kjer je bila konvergenca dosežena, patch testu pa ni bilo zadoščeno. S tem sta postavila pod vprašaj veljavnost patch testa kot potrebnega pogoja za konvergenco. Obravnavo teh vprašanj zasledimo tudi v članku Oliveire [7].

¹Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, Univerza v Ljubljani, (rflajs@fgg.uni-lj.si)

²Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, Univerza v Ljubljani, (msaje@fgg.uni-lj.si)

³Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Univerza v Ljubljani, (egon.zakrajsek@uni-lj.si)

Leta 1979 Stummel v [14] izpelje posplošeni patch test, ki nudi pri reševanju linearnih robnih problemov potrebni in zadostni pogoj za konvergenco v metodi nekonformnih končnih elementov. Hkrati v članku [15] s protiprimerom spodbije veljavnost Ironsovega patch testa kot zadostnega pogoja za konvergenco.

Njegovo delo sproži plaz različnih mnenj glede potrebnosti in zadostnosti patch testa, kot je ravidno iz literature [5, 9, 10, 11, 12, 16, 18].

Kod možnega razsodnika v sporu velja omeniti najnovejši rezultat avtorja Wanga [17], ki podaja zvezo med Ironsovim patch testom in Stummelovim posplošenim patch testom. V tem članku je hkrati podana ali predlagana tudi bolj precizna definicija metode nekonformnih končnih elementov predvsem v smislu, kaj je dovoljeno in kaj ne. Številni zapleti so nedvomno posledica nepreciznih definicij in s tem neusklajenih pojmovanj v sami metodi nekonformnih kočnih elementov.

Namen tega članka je pokazati na preprostem primeru, da Ironsov patch test sam po sebi še ne predstavlja potrebnega pogoja za konvergenco. Hkrati s tem članek kaže na potrebo po bolj precizni definiciji metode nekonformnih končnih elementov.

2 Aproksimacija z nekonformnimi končnimi elementi

Obravnavamo variacijsko enačbo

$$u \in V; \quad \int_I (a_1 u' v' + a_0 u v) dx = \int_I (f_1 v' + f_0 v) dx \quad \forall v \in V,$$

kjer I predstavlja odprt interval $(0, 1)$ in V prostor

$$V = \{v \in H^1(I), \quad v(0) = 0\}.$$

S $H^1(I)$ smo označili prostor Soboljeva opremljen z normo

$$\|\cdot\|_I : v \mapsto \sqrt{\int_I ((v')^2 + v^2) dx}.$$

Koeficienta a_1 in a_0 bodita merljivi funkciji na območju I , funkciji f_1 in f_2 pa naj ležita v Hilbertovem prostoru $L^2(I)$.

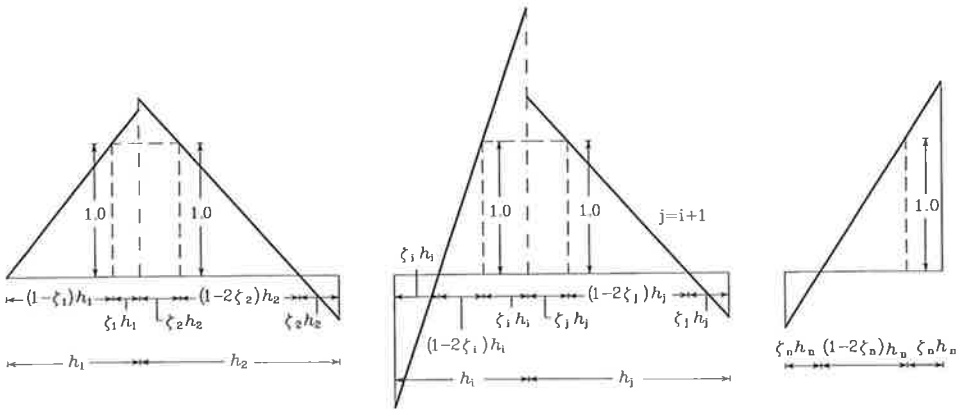
Interval I razdelimo z delilnimi točkami x_0, \dots, x_n na n odprtih intervalov $I_i = (x_{i-1}, x_i)$; $1 \leq i \leq n$ dolžin h_i . Rešitev u aproksimiramo z nastavkom

$$u_h = \sum_{i=1}^n z_i w_i \in W_h,$$

kjer smo izbrali posebej določene nekonformne bazne funkcije w_1, \dots, w_n , prikazane na sliki 1. Pomen amplitud z_i je razviden s slike 2.

Gornjo nalogo prepisemo v šibko obliko: "Poišči rešitev $u_h \in W_h$ enačbe

$$\sum_{i=1}^n \int_{I_i} (u_h' v_h' + u_h v_h) dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} (f_1 v_h' + f_0 v_h) dx \quad \forall v_h \in W_h."$$



Slika 1: Bazne funkcije $w_1, w_i; 2 \leq i \leq n-1$ in w_n .

W_h označuje prostor aproksimacij z bazo w_1, \dots, w_n .

Podobno kot Ciarlet v svoji knjigi [3, p. 94] definiramo končni element (v R^1) s trojico (I, P, Σ) , kjer:

- (i) I predstavlja odprt interval v R^1 dolžine h ;
- (ii) P je končno-dimenzionalen prostor realnih funkcij na intervalu I . Naj bo $\dim(P) = 2$;
- (iii) Σ je množica linearnih funkcionalov (prostostnih stopenj) $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2\}$, za katere velja:

$$\phi_1 : v_h \mapsto v_h(t_0), \tag{1a}$$

$$\phi_2 : v_h \mapsto v_h(t_1). \tag{1b}$$

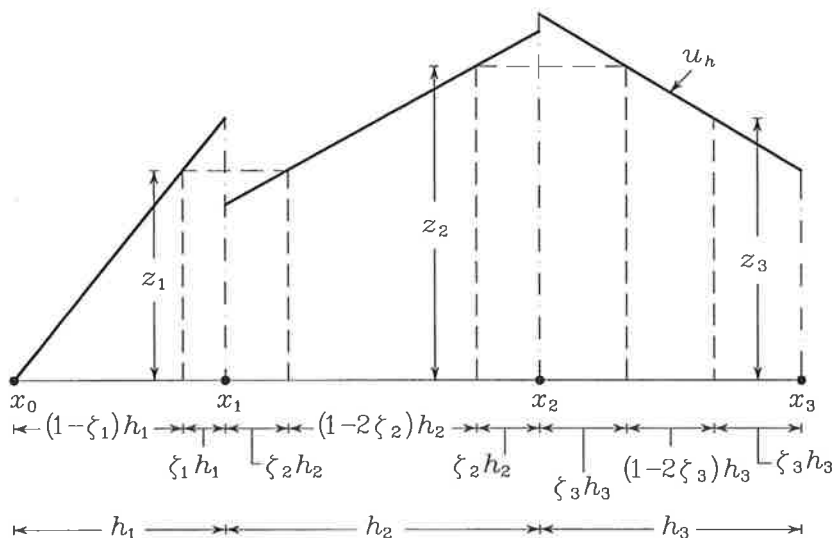
Točki $t_0, t_1 \in I$ sta za razdaljo $\zeta h = \min(\frac{h}{3}, o(h))$ oddaljeni od obeh krajišč intervala I . Pri zapisu smo uporabili poznani Landauov simbol o^4 .

Ker za vsak par realnih števil α_0 in α_1 obstaja natanko en tak polinom $p \in P$, da velja $\phi_1(p) = p(t_0) = \alpha_0$ in $\phi_2(p) = p(t_1) = \alpha_1$ (to je kar polinom-premica, ki gre skozi točki (t_0, α_0) in (t_1, α_1)), je tako izbrana množica funkcionalov P -enolično rešljiva. Po Ciarletu [3, p. 94] so naši končni elementi dopustni.

Vendar sami končni elementi še niso vse. Povedati moramo, kako so elementi povezani med sabo. Zanima nas tip aproksimacije. Ali je ta dopusten? Izbrano aproksimacijo prikazuje slika 2. Ciarlet v svojem učbeniku [3], kot tudi Wang v svojem članku dopuščata tudi takšen tip aproksimacije. Vozla t_0 in t_1 ne ležita na robu intervala I . Takšna aproksimacija po Wangu [17] ni šibko zvezna, ker krši zahtevo A3 v omenjenem članku. Iz zgodovine so

⁴Če obstaja konstanta $A \neq 0$, da velja $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = A$, potem pišemo $f(h) = O(g(h))$. Če velja $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$, potem to zapišemo lahko z enačbo $f(h) = o(g(h))$.

poznani tudi drugi (manj očitni) primeri, ki kršijo omenjeno zahtevo, npr. končni element, ki ga je Stummel uporabil v članku [15]. Večina znanih nekonformnih elementov omenjene zahteve A3 ne krši. Ostalim zahtevam v [17] pa naš nekonformni element kot tudi predlagana aproksimacija zadoščata.



Slika 2: Aproksimacija z nekonformnimi elementi u_h ($n > 3$) (prvi trije elementi so vidni).

3 Konvergenca

V nadaljevanju bomo uporabili F-E-M konvergenčni test, ki ga je izpeljal Shi [11]. Ta test predstavlja samo zadostni pogoj za konvergenco. Njegova prednost je v tem, da ga lažje preverimo kot Stummelov posplošeni patch test.

Označimo skok poljubne funkcije v_h iz končno razsežnega prostora W_h na stičišču dveh sosednjih intervalov I_1 in I_2 z $[v_h]$. Podobno kot Shi rečemo, da prostor W_h zadošča F_1 -testu za probleme drugega reda, če za vsako funkcijo v_h iz W_h velja:

$$\left| \int_{\mathcal{F}} [v_h] dx \right| \leq o\left(h_I^{1/2}\right) \|v_h\|_{I_1 \cup I_2}, \quad h_I = \max(h_{I_1}, h_{I_2}). \quad (2)$$

Na delu roba $x_i \in \{x_0 \equiv 0, x_n \equiv 1\}$ s predpisanimi Dirichletovimi robnimi pogoji, $[v_h] \equiv v_h(x_i)$, zahtevo (2) razumemo kot

$$|v_h(0)| \leq o\left(h_1^{1/2}\right) \|v_h\|_{I_1} \text{ or } |v_h(1)| \leq o\left(h_n^{1/2}\right) \|v_h\|_{I_n}.$$

Preverjamo del F-E-M testa, posebej F_1 -test v R^1 , tj. enačbo (2) iz članka [11]. Obravnavamo poseben primer, ko so $\zeta = \zeta_1 = \dots = \zeta_n$ in $h = h_1 = \dots = h_n$. Iz slike 2 sta razvidni enakosti

$$\int_{F_i} [v_h] dx = \frac{\zeta}{2\zeta - 1} ((z_{i+1} - z_i) + (z_i - z_{i-1})),$$

$$\|v_h\|_{1, I_i \cup I_{i+1}} = \sqrt{\frac{(z_{i+1} - z_i)^2 + (z_i - z_{i-1})^2}{(1 - 2\zeta)^2 h}} + O(h).$$

Z I_i in I_{i+1} pri $i = 3, \dots, n-1$ smo označili intervale, s $F_i = I_i \cap I_{i+1}$ pa njihova presečišča. Uvedemo okrajšavi $a = z_{i+1} - z_i$ in $b = z_i - z_{i-1}$ in enačbo (2) iz [11] prevedemo v obliko

$$\frac{\zeta^2}{(1 - 2\zeta)^2} (a + b)^2 \leq \left(\frac{o(\sqrt{h})}{\sqrt{h}} \right)^2 \frac{a^2 + b^2}{(1 - 2\zeta)^2} + o(h).$$

Obravnava za $i = 2$ je podobna gornji. Enostavno je videti, da z izbiro $\zeta = O(h)$ zadostimo neenakosti (2). Po izreku 1 iz [11] imamo s tem zagotovljeno konvergenco k točni rešitvi.

4 Numerični primer

Obravnavamo robni problem za navadno diferencialno enačbo drugega reda

$$-u'' = 0 \text{ on } I = (0, 1) \quad u(0) = 0, u'(1) = 1$$

s točno rešitvijo $u = x$.

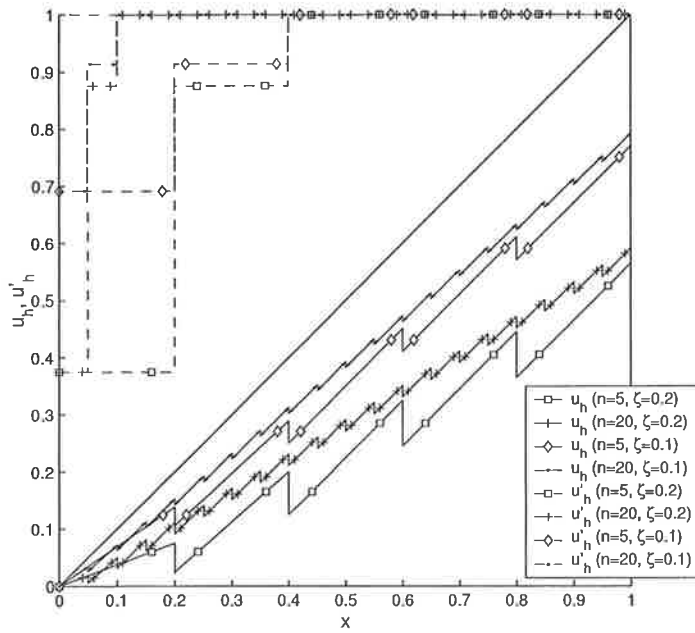
Nalogo prepisemo v šibko obliko: "Poišči rešitev $u \in V$ enačbe

$$\int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 v' dx \quad \forall v \in V.$$

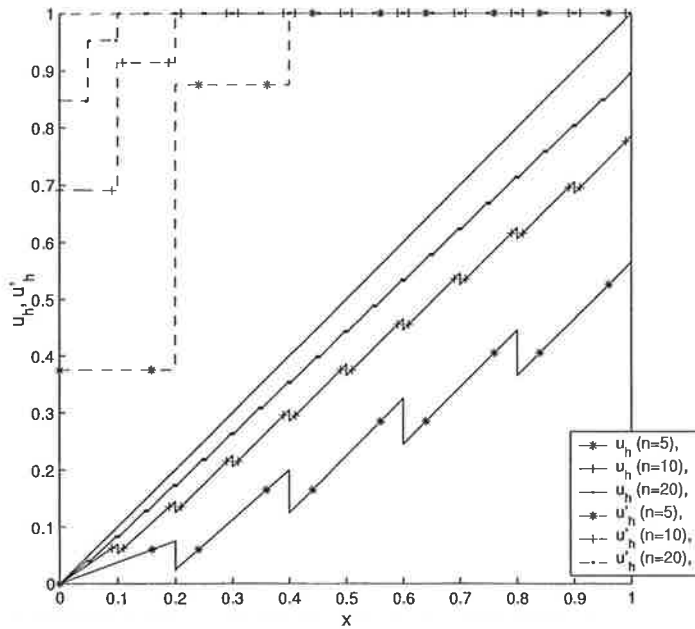
Interval $I = (0, 1)$ razdelimo na n enakih podintervalov I_i širine $h = 1/n$ in izberemo enake $\zeta_i = \zeta$ za vse $i = 1, 2, \dots, n$. Potem poiščemo približno rešitev $u_h \in W_h$ enačbe

$$\sum_{i=1}^n \int_{I_i} u_h' v_h' dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} v_h' dx \quad \forall v_h \in W_h.$$

Podobno kot v [9] lahko pokažemo, da gresta $\|u_n - x(1 - 2\zeta)\|_2$ in $\|u_n' - 1\|_2$ z naraščajočim n proti nič. Z izbiro $\zeta = O(h)$ dosežemo, da gresta tudi $\|u_n - x\|_2$ in $\|u_n' - 1\|_2$ proti nič. Obnašanje numeričnih rešitev pri različnih ζ je razvidno s slik 3 in 4.



Slika 3: Nekonformne aproksimacije za linearno rešitev $u = x$ pri fiksnih $\zeta = 0.2$ in $\zeta = 0.1$.



Slika 4: Nekonformne aproksimacije za linearno rešitev $u = x$ pri $\zeta = h$.

Hitro lahko opazimo, da patch test, katerega lahko po [12] zapišemo z enačbo

$$d_h(u^*, v_h) = a_h(u^*, v_h) - a_h(u_h, v_h) = 0 \quad \forall u^* \in P_1, \forall v_h \in W_h,$$

ni izpolnjen. V zadnji enačbi smo uporabili tele okrajšave: rešitev robnega problema u^* , aproksimacija po metodi končnih elementov u_h , prostor polinomov prve stopnje P_1 in bilinearni funkcional $a_h(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} u' v' dx$.

5 Zaključek

Obnašanje takšnih aproksimacij ni presenetljivo, saj "gredo" nekonformne aproksimacije proti konformni. Prav tako je razvidno, da so takšni "neinženirski" elementi v smislu matematične teorije sprejemljivi. Potreba po natančnejši definiciji nekonformnih končnih elementov je torej nujna.

Nenazadnje je iz članka [17] razvidno, da do nesporazumov prihaja zaradi zahteve A3. Z njo takšne tipe končnih elementov, kakršen je predstavljen zgoraj, izločimo iz igre.

Literatura

- [1] Bazeley, G. P., Cheung, Y. K., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C: Triangular elements in bending: Conforming and nonconforming solutions, in: *Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson A. F. B., Dayton, OH, 547-576, 1965.
- [2] Brezzi, F., Bathe, K. J.: A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 82, 27-57 (1990).
- [3] Ciarlet, P. G., Lions, J. L.: *Handbook of numerical analysis, Volume II, Finite element methods (Part 1)*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [4] Irons, B. M., Razzaque, A.: Experience with the patch test for convergence of finite elements, in: A. K. Aziz, ed., *The mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations* (Academic Press, New York) 557-587, 1972.
- [5] Irons, B. M., Loikkanen, M.: An engineer's defence of the patch test, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 19, 1391-1401 (1983).
- [6] Krysl, P., Belytschko, T.: Element-free Galerkin method: Convergence of the continuous and discontinuous shape functions, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 148, 257-277 (1997).
- [7] Oliveira, E. R. A.: The patch test and the general convergence criteria of the finite element method, *International journal of solids and structures*, vol. 13, 159-178 (1977).

- [8] Sander, G., Beckers, P.: The influence of the choice of connectors in the finite element method, *Proc. conf. on the mathematical aspects of the finite element methods (Rome 75)*, Galligani, I., Magenes, E., eds., Lecture notes in mathematics, 606, Springer-Verlag, New York, 316–340 (1977).
- [9] Shi, Z. C.: An explicit analysis of Stummel's patch test examples, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 20, 1233–1246 (1984).
- [10] Shi, Z. C.: A convergence condition for the quadrilateral Wilson element, *Numerische mathematik*, vol. 44, 394–361 (1984).
- [11] Shi, Z. C.: The F–E–M–test for convergence of nonconforming finite elements, *Mathematics of computation*, vol. 49, no. 40, 391–405 (1987).
- [12] Shi, Z. C.: On Stummel's examples to the patch test, *Computational mechanics*, vol. 5, 81–87 (1989).
- [13] Strang, G., Fix, G. J.: *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [14] Stummel, F.: The generalised patch test, *SIAM Journal of numerical analysis*, vol. 16, no. 3, 449–471 (1979).
- [15] Stummel, F.: The limitations of the patch test, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 15, 177–188 (1980).
- [16] Taylor, R. L., Simo, J. C., Zienkiewicz, O. C., Chan, A. C. H.: The patch test—a condition for assessing FEM convergence, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 22, 39–62 (1986).
- [17] Wang, M.: On the necessity and sufficiency of the patch test for convergence of nonconforming finite elements *SIAM Journal of numerical analysis*, vol. 39, no. 2, 363–384 (2001).
- [18] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The finite element patch test revisited. A computer test for convergence, validation and error estimates, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 149, 223–254 (1997).

Analiza nosilnosti armiranobetonskih okvirnih konstrukcij

Sebastjan Bratina*, Miran Saje[†] in Igor Planinc[‡]

Bearing capacity of reinforced concrete planar frames

POVZETEK

V članku z Galerkinovo metodo končnih elementov analiziramo vpliv geometrijske in materialne nelinearnosti na izračunano nosilnost armiranobetonskih ravninskih okvirnih konstrukcij, obteženih s kratkotrajno konservativno obtežbo. Pri analizi uporabimo t.i. deformacijske končne elemente. Za te elemente sta značilni velika natančnost in neobčutljivost na vse vrste blokiranja. Obtežno-deformacijsko krivuljo izračunamo z znano Crisfieldovo metodo ločne dolžine. Z računskimi primeri pokažemo: (i) da analiza nosilnosti armiranobetonskih konstrukcij ni odvisna samo od materialne nelinearnosti, kot to pogosto zasledimo v literaturi, temveč v veliki meri tudi od geometrijske nelinearnosti in (ii) da pri armiranobetonskih konstrukcijah metoda plastičnih členkov v splošnem ni primerna za analizo nosilnosti.

SUMMARY

The effect of geometric nonlinearities on the bearing capacity of reinforced concrete planar frames is assessed. The effect is shown to be substantial for columns. The effect of strain softening of concrete is valued, too. It is shown that the plastic-hinge concept is not appropriate for the determination of the bearing capacity of concrete structures because concrete exhibits strain softening. New planar, strain-based, geometrically nonlinear beam finite elements are proposed that are able to solve with large precision the issues like local softening of material and global softening of the structure.

*Sebastjan Bratina, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

[†]prof. dr. Miran Saje, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

[‡]doc. dr. Igor Planinc, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

1 UVOD

Nelinearna analiza armiranobetonskih konstrukcij je z razvojem zmogljivih računalnikov postala pomemben sestavni element pri projektiranju zahtevnih gradbenih konstrukcij. Uspešnost oziroma natančnost analize pa je odvisna predvsem od izbranega materialnega modela za beton in armaturo ter od natančnosti numeričnega postopka. Čeprav je fenomenološko obnašanje betona in armiranobetonskih konstrukcij relativno dobro znano, sta določitev materialnega modela za beton, s katerim bi zajeli vse značilne nelinearne pojave betona s čim manj parametri, in izbira računskega postopka za analizo armiranobetonskih konstrukcij v fazi mehčanja še vedno predmet intenzivnega raziskovanja [3] [4].

Med značilne nelinearne pojave armiranobetonskih okvirnih konstrukcij prištevamo lokalno mehčanje, duktilnost, poškodovanost, prerazporeditev notranjih sil, mejno nosilnost in podobno [1]. V tem članku se ne bomo ukvarjali z vsemi naštetimi nelinearnimi pojavi, temveč samo z analizo nosilnosti armiranobetonskih okvirjev, ki je posledica kratkotrajne statične obtežbe. Nosilnost armiranobetonskih okvirjev bomo analizirali na dva načina. Najprej bomo ugotavljali, ali lahko geometrijska nelinearnost nosilcev kakorkoli vpliva na nosilnost armiranobetonskih okvirjev, glede na dejstvo, da so armiranobetonske konstrukcije razmeroma toge, torej so pomiki, zasuki in deformacije tudi pri mejni obtežbi relativno majhne količine. V nadaljevanju pa bomo numerično analizirali primernost t.i. *metode plastičnih členkov*, ki je standardna metoda za določitev mejne nosilnosti jeklenih konstrukcij, za določitev nosilnosti armiranobetonskih konstrukcij v primerih, ko v analizi upoštevamo tudi lokalno mehčanje prereзов.

V literaturi obstaja veliko različnih končnih elementov za statično analizo ravnih ravninskih nosilcev. V tem članku analiziramo nosilnost armiranobetonskih konstrukcij z Galerkinovimi končnimi elementi, ki so zasnovani na interpolaciji deformacijskih količin referenčne osi nosilca. Izhodišče analize je Reissnerjeva teorija nosilcev. Pri analizi upoštevamo membranske in upogibne deformacije, ki skupaj s pomiki in zasuki lahko zavzamejo številčno poljubno velike vrednosti. Poleg znane (i) Bernoullijeve predpostavke o ravnih prerezi, ki določa, da ravni prerezi, pravokotni na težiščno os nosilca v nedeformirani legi, ostanejo tudi v deformirani legi ravni in pravokotni na težiščno os nosilca, in (ii) predpostavke, da oblika in velikost prečnega prereza ostaneta med deformiranjem nosilca nespremenjena, smo dodatno predpostavili (iii) kompatibilnost deformacij betona in armature na medsebojnem stiku. Predstavljena družina deformacijskih končnih elementov je v bistvu razširitev elementov, ki so bili predstavljeni v [9] in pri katerih interpoliramo samo psevdoukrivljenost referenčne osi nosilca. Največja prednost novih končnih elementov je v tem, da lahko z njimi lokalno mehčanje prereзов enostavno upoštevamo v globalnih ravnotežnih enačbah. Pri analizi nosilnosti armiranobetonskih okvirjev uporabimo konstitutivni zakon za beton in armaturo, kot ju priporočajo Evropski predpisi EC 2 [7] oziroma zakon za beton po Desayiju in Krishnanu [6]. S tem modelom betona upoštevamo ugoden vpliv stremen na nosilnost in duktilnost armiranobetonskih okvirnih konstrukcij.

Članek je poleg Uvoda razdeljen še na tri kratka poglavja. V drugem poglavju na kratko predstavimo družino deformacijskih končnih elementov. Vpliv geometrijske nelinearnosti in lokalnega mehčanja prereзов na nosilnost armiranobetonskih konstrukcij numerično analiziramo v tretjem poglavju. Na koncu podajamo zaključke.

2 OSNOVNE ENAČBE GREDNEGA RAVNINSKEGA NOSILCA

2.1 Modificirani izrek virtualnega dela

Izrek o virtualnem delu za raven nosilec začetne dolžine L in konstantnega prečnega prereza A , obtežen s konservativno linijsko obtežbo p_x, p_z, m_y in konservativnimi robnimi silami S_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) je [2]

$$\delta W = \int_0^L \mathcal{N}_c \delta \varepsilon dx + \int_0^L \mathcal{M}_c \delta \kappa dx - \int_0^L p_x \delta u dx - \int_0^L p_z \delta w dx - \int_0^L m_y \delta \varphi dx - \sum_{k=1}^6 S_k \delta U_k = 0. \quad (1)$$

Pomen oznak v funkcionalu (1): u, w sta pomika težiščne osi nosilca v smeri koordinat x in z ; φ je zasuk težiščne osi; U_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) so posplošeni robni pomiki; ε je specifična sprememba dolžine težiščne osi; κ je psevdoukrivljenost težiščne osi; \mathcal{N}_c in \mathcal{M}_c sta konstitucijska osna sila in konstitucijski upogibni moment. Deformacijske (ε, κ) in kinematične (u, w, φ) količine v enačbi (1) so povezane s kinematičnimi enačbami [2]

$$1 + u' - (1 + \varepsilon) \cos \varphi = 0, \quad (2)$$

$$w' + (1 + \varepsilon) \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

$$\varphi' - \kappa = 0. \quad (4)$$

V nadaljevanju izrek o virtualnem delu (1) zapišemo v odvisnosti od deformacijskih količin (ε, κ). V skladu z metodo Lagrangevih množiteljev pri vezanih nalogah variacijskega računa kinematične enačbe (2)–(4) pomnožimo z vsaj enkrat odvedljivimi funkcijami $\mathcal{R}_1(x), \mathcal{R}_2(x), \mathcal{M}(x)$ in integriramo vzdolž nosilca. Tako dobljene izraze variiramo in prištejemo k (1). Ko izraze $\int_0^L \mathcal{R}_1 \delta u' dx$, $\int_0^L \mathcal{R}_2 \delta w' dx$ in $\int_0^L \mathcal{M} \delta \varphi' dx$ integriramo po delih, ko vpeljemo ravnotežno osno silo $\mathcal{N} = \mathcal{R}_1 \cos \varphi - \mathcal{R}_2 \sin \varphi$ in ravnotežno prečno silo $\mathcal{Q} = \mathcal{R}_1 \sin \varphi + \mathcal{R}_2 \cos \varphi$, dobimo Hu-Washizujev funkcional. Njegove Euler-Lagrangeve enačbe so ravnotežne enačbe, kinematične enačbe, konstitucijske enačbe in njim pripadajoči statični robni pogoji. Ko v nadaljevanju z integracijo točno zadostimo kinematičnim in ravnotežnim enačbam, postane Hu-Washizujev funkcional odvisen samo od statičnih robnih vrednosti ($\mathcal{R}_1(0), \mathcal{R}_2(0), \mathcal{M}(0)$) in od deformacijskih količin $\varepsilon(x)$ in $\kappa(x)$. V nadaljevanju mu dodamo še kinematične robne vezi [2] in dobimo t.i. *modificirani posplošeni izrek o virtualnem delu*

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}^* = & \int_0^L (\mathcal{N}_c - \mathcal{N}) \delta \varepsilon dx + \int_0^L (\mathcal{M}_c - \mathcal{M}) \delta \kappa dx + (U_6 - U_3 - \int_0^L \kappa dx) \delta \mathcal{M}(0) + \\ & [U_4 - U_1 - \int_0^L ((1 + \varepsilon) \cos \varphi) dx + L] \delta \mathcal{R}_1(0) + \\ & [U_5 - U_2 + \int_0^L ((1 + \varepsilon) \sin \varphi) dx] \delta \mathcal{R}_2(0) - \\ & (S_1 + \mathcal{R}_1(0)) \delta U_1 - (S_2 + \mathcal{R}_2(0)) \delta U_2 - (S_3 + \mathcal{M}(0)) \delta U_3 - \\ & (S_4 - \mathcal{R}_1(L)) \delta U_4 - (S_5 - \mathcal{R}_2(L)) \delta U_5 - (S_6 - \mathcal{M}(L)) \delta U_6 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

kjer so U_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) posplošene kinematične robne vrednosti. Modificirani posplošeni izrek o virtualnem delu (5) je s tem pripravljen za implementacijo v metodi končnih elementov.

2.2 Konstitucijske enačbe za beton in armaturo

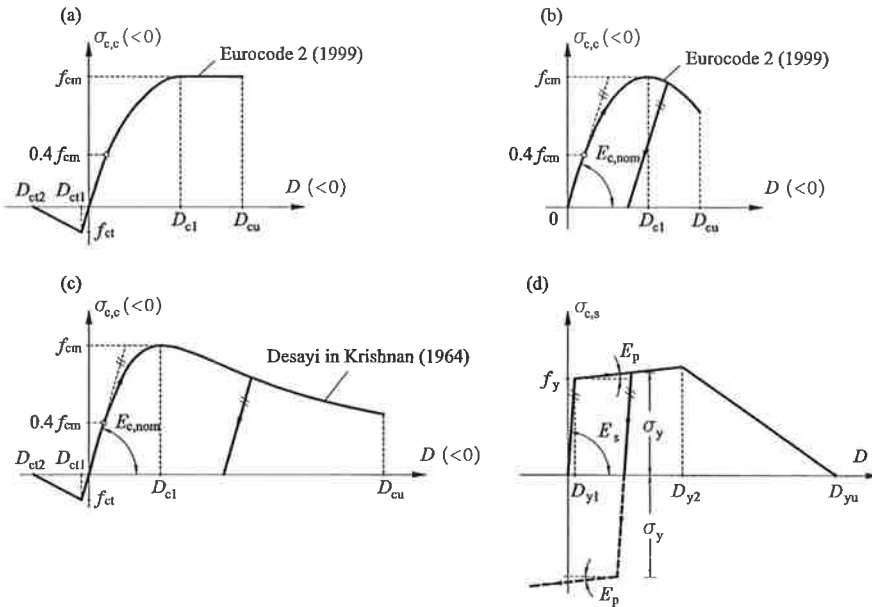
Za povezavo ravnotežne osne sile \mathcal{N} in ravnotežnega momenta \mathcal{M} z deformacijskima količinama ε in κ vpeljemo konstitucijsko osno silo \mathcal{N}_c in konstitucijski moment \mathcal{M}_c in zahtevamo enakost

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_c(x, \varepsilon(x), \kappa(x)) = \int_A \sigma_c(x, y, z) dA = \int_{A_c} \sigma_{c,c}(x, y, z) dA + \int_{A_s} \sigma_{c,s}(x, y, z) dA,$$

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}_c(x, \varepsilon(x), \kappa(x)) = \int_A z \sigma_c(x, y, z) dA = \int_{A_c} z \sigma_{c,c}(x, y, z) dA + \int_{A_s} z \sigma_{c,s}(x, y, z) dA.$$

Konstitucijski funkciji \mathcal{N}_c in \mathcal{M}_c sta podrejeni izbranemu materialnemu modelu, torej sta podrejeni izrazoma $\sigma_{c,c} = \mathcal{F}_c(\varepsilon + z\kappa)$ in $\sigma_{c,s} = \mathcal{F}_s(\varepsilon + z\kappa)$. Pri tem predstavlja $\sigma_{c,c}$ fizikalno normalno napetost v betonu, $\sigma_{c,s}$ je fizikalna normalna napetost v jeklu, funkciji \mathcal{F}_c in \mathcal{F}_s pa sta poljubni in ju določimo s preskusi.

V članku analiziramo armiranobetonske okvirje s konstitucijskimi zakoni za beton, kot jih priporočajo Evropski predpisi EC 2 [7] in Desayi in Krishnan [6], armaturo pa modeliramo z trilinearnim diagramom. Vse uporabljene konstitucijske diagrame z značilnimi parametri prikazuje slika 1.



Slika 1: Konstitucijski diagrami; (a) diagram betona za dimenzioniranje AB konstrukcij po EC 2, (b) diagram betona za analizo AB konstrukcij po EC 2, (c) diagram betona po Desayiju in Krishnanu in (d) diagram za armaturo.

2.3 Metoda končnih elementov

Za aproksimacijo specifične spremembe referenčne osi nosilca $\varepsilon(x)$ izberemo Lagrangeve polinome $P_{n\varepsilon}(x)$ ($n = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) stopnje $N_\varepsilon - 1$. Podobno izberemo za aproksimacijo pse-

doukrivljenost referenčne osi $\kappa(x)$ tudi Lagrangeve polinome $P_{n\kappa}(x)$ ($n = 1, 2, \dots, N_\kappa$) stopnje $N_\kappa - 1$.

V nadaljevanju nastavke za $\varepsilon(x)$ in $\kappa(x)$ vstavimo v funkcional (5) in po znanih postopkih variacijskega računa določimo Euler-Lagrangeve enačbe. Te imenujemo *diskretne posplošene ravnotežne enačbe končnega elementa*. Za znano zunanjo obtežbo sestavljajo sistem $N_\varepsilon + N_\kappa + 9$ enačb za določitev $N_\varepsilon + N_\kappa + 9$ neznanek. Med neznančkami je $N_\varepsilon + N_\kappa + 3$ notranjih prostostnih stopenj ε_n ($n = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$), κ_n ($n = 1, 2, \dots, N_\kappa$), $\mathcal{R}_1(0)$, $\mathcal{R}_2(0)$, $\mathcal{M}(0)$ in šest zunanjih prostostnih stopenj U_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) elementa. V nadaljevanju po znanih postopkih v MKE sestavimo diskretne posplošene ravnotežne enačbe konstrukcije

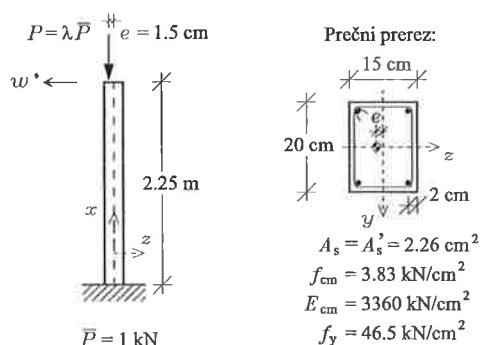
$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{P} = 0. \quad (6)$$

V enačbi (6) \mathbf{x} označuje vektor vozliščnih pomikov in zasukov in λ obtežni faktor konstrukcije. V članku enačbe (6) rešimo z znano t.i. konsistentno linearizirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine [5].

3 RAČUNSKA PRIMERA

3.1 Fourejev steber

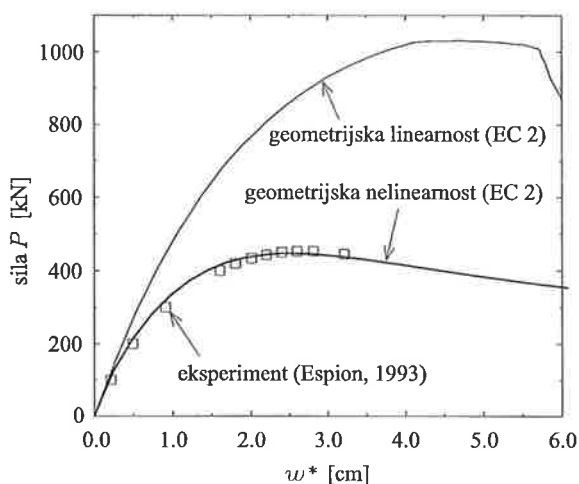
Prvi računski primer je t.i. Fourejev steber. Rezultate laboratorijskih preiskav je predstavil Espion [8]. Podatke o obtežbi ter geometrijske in materialne podatke o stebru prikazuje slika 2. Ker je Espion [8] podal samo tlačno trdnost betona f_{cm} , elastični modul betona E_{cm} in trdnost jekla f_y , ostale parametre, ki so potrebni za račun, določimo skladno z Evropskimi predpisi za armiranobetonske konstrukcije EC 2 [7]. Ti so: $D_{cl} = -2.3 \text{ ‰}$, $D_{cu} = -3.5 \text{ ‰}$, $E_s = 20\,000 \text{ kN/cm}^2$, $E_p = 0$, $D_{y2} = D_{yu} = 20 \text{ ‰}$ (mehčanja jekla ne upoštevamo).



Slika 2: Fourejev steber. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.

Slika 3 prikazuje primerjavo med eksperimentalno in izračunano obtežno-deformacijsko krivuljo oziroma med projekcijama obtežno-deformacijske krivulje na ravnino $P - w^*$. Eksperimentalno obtežno-deformacijsko krivuljo smo povzeli po literaturi [8]. Preostali dve krivulji na sliki 3 pa smo izračunali. Prvo z enačbami za geometrijsko nelinearno teorijo nosilcev, drugo pa z enačbami za geometrijsko linearno teorijo nosilcev. Obe krivulji smo izračunali s konsistentno linearizirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine. V obeh primerih smo beton

modelirali z materialnim modelom, ki ga za analizo armiranobetonskih linijskih konstrukcij priporočajo Evropski predpisi EC 2 [7]. Na sliki 3 opazimo odlično ujemanje med eksperimentalno in izračunano obtežno deformacijsko krivuljo v primeru, ko pri analizi uporabimo geometrijsko nelinearno teorijo nosilcev. Tako je izmerjena kritična sila oziroma nosilnost stebra $P_{cr} = 454$ kN. Pripadajoči horizontalni pomik nepodprtega roba stebra je $w_{cr}^* = 2.61$ cm. Izračunana nosilnost stebra je $P_{cr,cal} = 447$ kN, kar je samo za 7 kN manj od izmerjene. Pripadajoči izračunani horizontalni pomik nepodprtega roba stebra pa je $w_{cr,cal}^* = 2.51$ cm, kar je samo za 1 mm manj od izmerjenega. Popolnoma napačno nosilnost stebra pa izračunamo z geometrijsko linearno teorijo nosilcev. Slika 3 nedvoumno dokazuje, da moramo za določitev nosilnosti armiranobetonskih konstrukcij s tlačno obremenjenimi stebri nujno poleg materialne nelinearnosti upoštevati tudi geometrijsko nelinearnost.



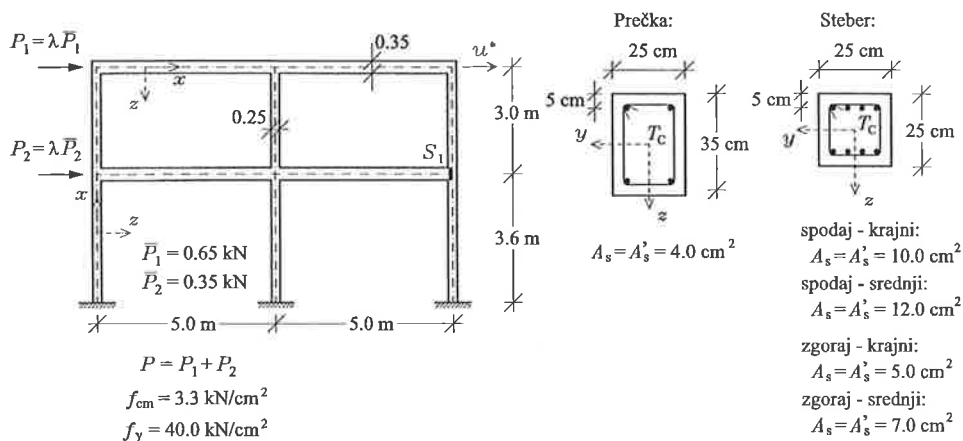
Slika 3: Fourejev steber. Obtežno-deformacijske krivulje.

3.2 Dvoetažni okvir

V drugem računskem primeru analiziramo nosilnost armiranobetonskega dvoetažnega okvirja. Okvir je v vsaki etaži obtežen s horizontalno točkovno silo ter z lastno težo stebrov in prečk. Geometrijske podatke o okvirju, podatke o količini in razporeditvi armature, materialne podatke ter podatke o obtežbi prikazuje slika 4. Glede na izbrano trdnost betona in armature v nadaljevanju s pomočjo Evropskih predpisov EC 2 [7] in konstitucijskega modela po Desayiju in Krishnanu [6] določimo še preostale parametre betona in armature: $D_{c1} = -2.2$ ‰, D_{cu} (EC 2) = -3.5 ‰, D_{cu} (Desayi in Krishnan) = -8 ‰, $D_{ct1} = -0.04$ ‰, $D_{ct2} = -0.8$ ‰, $E_{cm} = 3150$ kN/cm², $D_{y2} = 4$ ‰, $D_{yu} = 20$ ‰, $E_s = 20000$ kN/cm², $E_p = 0$.

Slika 5 prikazuje projekcijo obtežno-deformacijsko krivuljo na ravnino $P - u^*$. Obtežno-deformacijske krivulje na sliki 5 se razlikujejo glede na to, s katerima konstitucijskima diagramoma za beton in armaturo smo jo izračunali. Vse krivulje smo izračunali s konsistentno linearizirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine. Okvir smo modelirali z dvajsetimi končnimi

elementi. Z velikim številom elementov smo točneje zajeli vpliv lokalizacije deformacij [2].

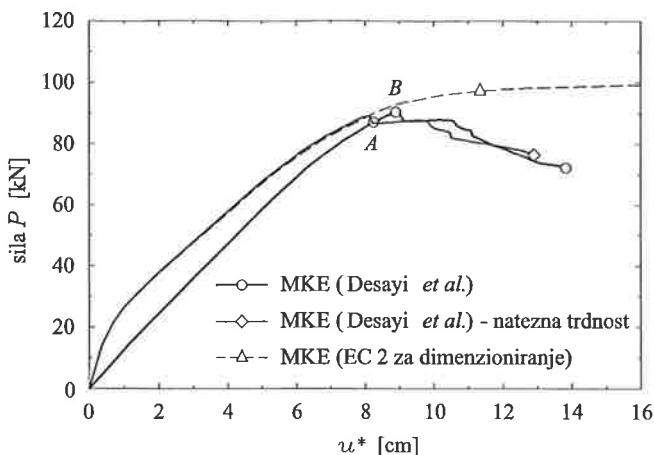


Slika 4: Dvoetažni okvir. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.

Najprej smo obtežno deformacijsko krivuljo izračunali tako, da smo pri računu upoštevali delovni diagram betona in armature brez utrditve, ki se uporablja za dimenzioniranje po EC 2 [7]. Tako smo nosilnost armiranobetonskega okvirja izračunali skladno z metodo plastičnih členkov. Na sliki 5 opazimo, da tako izračunana obtežno-deformacijska krivulja nima območja mehčanja konstrukcije. Popolnoma drugačna je obtežno-deformacijska krivulja in s tem tudi nosilnost okvirja v primeru, ko v analizi upoštevamo konstitucijski zakon betona po Desayiju in Krishnanu [6] in ko armaturo modeliramo z trilinearnim modelom. Tako izbrana konstitucijska zakona omogočata modeliranje za armiranobetonske konstrukcije značilnega lokalnega mehčanja prereza. Analiza je pokazala, da je samo prerez S_1 prešel v področje mehčanja (točka A na obtežno-deformacijski krivulji), preden je okvir dosegel kritično obtežbo (točka B). Vsi nadaljni prerezi, ki so prešli v območje mehčanja, so se pojavili v postkritičnem območju obtežno-deformacijske krivulje. To je ravno nasprotno, kot v primeru, ko nosilnost okvirja izračunamo z metode plastičnih členkov. V tem primeru se vsi t.i. plastični členki pojavijo, še preden okvir doseže kritično obtežbo.

4 SKLEP

V članku smo z Galerkinovo metodo končnih elementov analizirali vpliv geometrijske in materialne nelinearnosti na nosilnost armiranobetonskih ravninskih okvirnih konstrukcij, obteženih s kratkotrajno konservativno obtežbo. Pri analizi smo uporabili nove deformacijske končne elemente. Največja prednost predstavljenih elementov je v tem, da lahko z njimi lokalno mehčanje prerezov enostavno upoštevamo v globalnih ravnotežnih enačbah. Z računskimi primeri smo pokazali: (i) da nosilnost armiranobetonskih konstrukcij ni odvisna samo od materialne nelinearnosti – trditve, ki jo pogosto zasledimo v literaturi, temveč je odvisna v veliki meri tudi od geometrijske nelinearnosti in (ii) da pri armiranobetonskih konstrukcijah metoda plastičnih členkov v splošnem ni primerna za analizo nosilnosti.



Slika 5: Dvoetažni okvir. Obtežno-deformacijske krivulje.

LITERATURA

- [1] Z. BAŽANT, G. PIJAUDIER-CABOT & J. PAN (1987) Ductility, snapback, size effect, and redistribution in softening beams or frames. *Journal of Structural Engineering ASCE* **113**, 2348–2364.
- [2] S. BRATINA, M. SAJE & I. PLANINC (2002) On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced-concrete planar frames. V pripravi.
- [3] Z. CHEN & H. L. SCHREYER (1995) *Formulation and computational aspects of plasticity and damage models with application to quasi-brittle materials*. Sandia National Laboratories, SAND95-0329.
- [4] J. COLEMAN & E. SPACONE (2001) Localization issues in force-based frame elements. *Journal of Structural Engineering ASCE* **127**, 1257–1265.
- [5] M. A. CRISFIELD (1981) A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Computers and Structures* **13**, 55–62.
- [6] P. DESAYI & S. KRISHNAN (1964) Equation for the stress-strain curve for concrete. *Journal of American Concrete Institute (ACI)* **61**, 345–350.
- [7] EUROCODE 2 (1999) Design of concrete structures, Part 1: General rules for buildings. *prEN 1992-1, 2001 (1st draft)*.
- [8] B. ESPION (1993) *Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs, Creep and shrinkage of concrete*. TC 114 RILEM, E&FN Spon.
- [9] I. PLANINC, S. BRATINA, F. SAJE & M. SAJE (2000) Nelinearna analiza armiranobetonskih ravnih ravninskih okvirjev. V zborniku *Kuhljevi dnevi 2000* (uredil L. ŠKERGET), Slovensko društvo za mehaniko, 263–270.

Analiza ukrivljenih kompozitnih nosilcev

Bojan Čas*, Srečko Vratuša†, Miran Saje‡ in Igor Planinc§

Nonlinear analysis of curved composite planar beams

POVZETEK

V članku predstavimo družino novih končnih elementov za analizo ukrivljenih kompozitnih nosilcev, ki so obteženi s statično konservativno obtežbo. Elemente izpeljemo s pomočjo modificiranega Hu-Washizujevega funkcionala. Značilnost funkcionala je v tem, da transparentno upošteva konsistentnost med konstitucijskimi in ravnotežnimi količinami in da so deformacije edine neznane funkcije funkcionala. Posamezne lamele kompozitnega ukrivljenega nosilca modeliramo z ortotropnim elastičnim materialnim modelom s poljubno orientacijo glede na vzdolžno os nosilca. Prednosti predstavljenih deformacijskih končnih elementov pred standardnimi elementi so: (i) odlična konvergenca, (ii) velika natančnost in (iii) neobčutljivost na membransko in strižno blokiranje. Računske prednosti predstavljenih deformacijskih kompozitnih končnih elementov prikažemo z računskim primerom.

SUMMARY

The finite element formulation of static analysis of slender arbitrary curved planar composite beams is presented. The formulation is based on Reissner's finite-strain beam theory. The present approach uses the concept of the consistent equilibrium of constitutive and equilibrium-based stress-resultants, and employs the deformation variables of the beam as the basic unknown functions of the problem. Displacements and rotations need not be approximated. Any kind of locking, poor convergence, and stress oscillations are absent in these finite elements.

*Bojan Čas, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

†asist. dr. Srečko Vratuša, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, FA, Zoisova 12, Ljubljana

‡prof. dr. Miran Saje, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

§doc. dr. Igor Planinc, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

1 UVOD

V članku predstavljamo družino novih končnih elementov za kinematično točno statično analizo ravninskih ukrivljenih kompozitnih nosilcev. Končni elementi so zasnovani na Reissnerjevi teoriji ravninskih nosilcev [4]. Ta teorija nosilcev upošteva membranske, upogibne in strižne deformacije, ki skupaj s pomiki in zasuki lahko zavzamejo številčno poljubno velike vrednosti. Osnovni kinematični predpostavki Reissnerjevega modela nosilca sta: (i) Bernoullijeva hipoteza o ravnih prerezih, ki določa, da ravni prerezi, pravokotni na referenčno os nosilca v nedeformirani legi, ostanejo tudi v deformirani legi ravni, toda ne več pravokotni na referenčno os nosilca (ii) oblika in velikost prečnega prereza ostaneta med deformiranjem nosilca nespremenjena.

V literaturi obstaja veliko različnih končnih elementov za analizo ravnih in ukrivljenih ravninskih nosilcev; obširen seznam literature na to temo je podan v [6]. Skupna značilnost večine elementov je v tem, da interpolirajo po elementu predvsem pomike in zasuke. Če je interpoliranih funkcij več in če so različne po fizikalnem izvoru, to pripelje do t.i. problema nekonsistentnosti interpolacijskih polj in posledično do membranskega in strižnega blokiranja elementov [6] ter do nekonsistentnosti ravnotežnih in konstitucijskih količin vzdolž referenčne osi nosilca [3].

V tem članku predstavljamo za statično analizo ukrivljenih ravninskih kompozitnih nosilcev družino končnih elementov, ki nimajo omenjenih numeričnih slabosti. Elemente izpeljemo s pomočjo modificiranega Hu-Washizujevega funkcionala. V njem eksplicitno nastopa pogoj konsistence med konstitucijskimi in ravnotežnimi količinami. Edine neznane funkcije so deformacijske količine referenčne osi nosilca. Prednosti teh Galerkinovih končnih elementov so predvsem: (i) neobčutljivost elementov na membransko in strižno blokiranje, (ii) konsistentno upoštevanje konstitucijskih enačb, (iii) velika transparentnost osnovnih enačb in (iiii) velika natančnost. Podobne deformacijske končne elemente sta za geometrijsko linearno in elastično teorijo ukrivljenih nosilcev predlagala Ryu in Sin [5], ter za geometrijsko nelinearno in elastično teorijo ukrivljenih nosilcev Planinc in sodelavci [2]. Glede na povedano lahko naše elemente interpretiramo kot (i) razširitev elementov Ryuja in Sina na geometrijsko nelinearne razmere, s tem da v analizi konsistentno upoštevamo konstitucijske enačbe ter (ii) razširitev končnih elementov, ki so predstavljeni v [2], tako da ohranimo vse dobre lastnosti teh elementov in da v analizi kompozitnih ukrivljenih nosilcev konsistentno zadostimo poleg momentne konstitucijske enačbe tudi konstitucijskima enačbama za osno in prečno silo.

Članek je poleg Uvoda razdeljen še na štiri kratka poglavja. V drugem poglavju opišemo osnovne enačbe ukrivljenega grednega kompozitnega nosilca. V naslednjem poglavju izpeljemo modificirani izrek o virtualnem delu in družino novih končnih elementov. Natančnost elementov analiziramo v petem poglavju. Na koncu podajamo zaključke.

2 OSNOVNE ENAČBE UKRIVLJENEGA KOMPOZITNEGA RAVNINSKEGA NOSILCA

Opazujemo ukrivljen gredni kompozitni nosilec z začetno dolžino L in konstantnega prečnega prereza A . Deformiranje nosilca analiziramo v ravnini (x, z) evklidskega ambientnega prostora, kjer smo izbrali fiksni desnosučni kartezični koordinatni sistem (x, y, z) s pripadajočimi ortonormalnimi baznimi vektorji e_x , e_z in $e_y = e_z \times e_x$. Nosilec parametriziramo s parametri $(s, r, t) \in [0, L] \times A \subset \mathbb{R}^3$ in sicer tako, da krivulja $r_0(s) = (x(s), 0, z(s))$ določa referenčno

os nosilca (s je v nedeformirani legi naravni parameter), medtem ko ravnina $\mathbf{R}(r, t) = (x(s = \text{const.}, r, t), y(s = \text{const.}, r, t), z(s = \text{const.}, r, t))$ določa prečni prerez nosilca. Materialne točke nosilca identificiramo s krivuljskimi materialnimi koordinatami (ξ, η, ζ) . Materialna koordinatna os $\mathbf{r}_0(s) = (\xi(s), 0, 0)$ je identična z referenčno osjo nosilca. Pri opisu deformiranih leg nosilca upoštevamo že omenjeno Bernoullijevo hipotezo o ravnih prerezih. V tem primeru je ugodno, da izberemo za pomično bazo tri med seboj vzajemno pravokotne vektorje. To bazo sestavljajo vektorji: $\mathbf{g}_\eta, \mathbf{g}_\zeta$, ki ležita v deformirani ravnini prečnega prereza, in vektor \mathbf{g}_ξ , ki je pravokoten na njo.

Deformirano lego nosilca definiramo s referenčno osjo nosilca $\mathbf{r}_0(s)$ in z družino prečnih prereзов, katere določa enotski vektor $\mathbf{g}_\xi(s)$. Lega poljubne točke nosilca je v simetrijski ravnini ($y = 0$) določena s krajevnim vektorjem

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_0(s) + \zeta \mathbf{g}_\zeta(s) = (x(s) + u(s)) \mathbf{e}_x + (z(s) + w(s)) \mathbf{e}_z + \zeta \mathbf{g}_\zeta(s), \quad (1)$$

kjer u in w predstavljata pomika referenčne osi nosilca v smeri koordinatnih osi x in z .

Deformacijske ($\varepsilon, \gamma, \kappa$) in kinematične (u, w, φ) količine povezujejo kinematične enačbe [4]

$$x' + u' - (1 + \varepsilon) \cos \varphi - \gamma \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

$$z' + w' + (1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi = 0, \quad (3)$$

$$\varphi' - \kappa_0 - \kappa = 0. \quad (4)$$

V enačbah (2)–(4) in v nadaljevanju označuje (') odvod po parametru s ; ε je specifična sprememba dolžine referenčne osi, γ je strižna deformacija; κ je psevdoukrivljenost referenčne osi nosilca, φ je zasuk prečnega prereza in κ_0 začetna ukrivljenost referenčne osi nosilca.

Ravnotežne enačbe ukrivljenega grednega nosilca, ki je obtežen s konservativno linijsko obtežbo p_x, p_z, m_y in s konservativnimi robnimi silami S_k ($k = 1, 2, \dots, 6$), so [4]:

$$\mathcal{R}'_1 + p_x = (\mathcal{N} \cos \varphi + \mathcal{Q} \sin \varphi)' + p_x = 0, \quad (5)$$

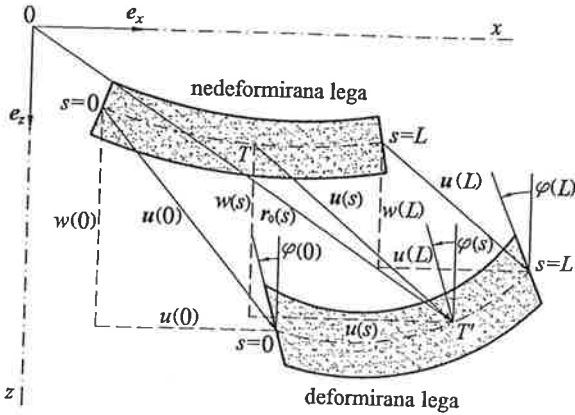
$$\mathcal{R}'_2 + p_z = (\mathcal{Q} \cos \varphi - \mathcal{N} \sin \varphi)' + p_z = 0, \quad (6)$$

$$\mathcal{M}' - (1 + \varepsilon) \mathcal{Q} + \gamma \mathcal{N} - m_y = 0, \quad (7)$$

kjer $\mathcal{N} = \mathcal{R}_1 \cos \varphi - \mathcal{R}_2 \sin \varphi$ predstavlja ravnotežno osno silo, $\mathcal{Q} = \mathcal{R}_1 \sin \varphi + \mathcal{R}_2 \cos \varphi$ ravnotežno prečno silo in \mathcal{M} ravnotežni moment.

Zadnjo skupino osnovnih enačb ukrivljenega kompozitnega nosilca sestavljajo konstitucijske enačbe. Izpeljemo jih iz konstitucijskih enačb za kompozitne plošče, kar v nadaljevanju na kratko opišemo [7].

Vsako lamelo kompozitne plošče modeliramo z ortotropnim elastičnim materialnim modelom. Ta je lahko za vsako lamelo različen, prav tako je lahko za vsako lamelo orientacija osi ortotropije poljubna glede na lokalni koordinatni sistem kompozitne plošče (x, y, z) . Z znano Kirchhoffovo predpostavko za tanke plošče izračunamo posplošene sile kompozitne plošče ($\mathbf{N} = [N_x, N_y, N_{xy}]^T$ in $\mathbf{M} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$) z integracijo ustreznih komponent napetostnega tenzorja σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) po prečnem prerezu:



Slika 1: Nedeformirana in deformirana lega ukrivljenega grednega nosilca.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

kjer so A , B in C matrike materialnih parametrov, vektorja ε in κ pa predstavljata deformacijske količine tankih plošč. Podobno izračunamo tudi rezultanti strižnih napetosti:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x A_{44} & \sqrt{k_x k_y} A_{45} \\ \sqrt{k_x k_y} A_{45} & k_y A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

kjer sta k_x in k_y strižna korekcijska faktorja, A_{44} , A_{45} in A_{55} so materialni parametri, γ_{xz} in γ_{yz} sta strižni deformaciji.

Za teorijo ravninskih nosilcev veljajo enačbe: $N_y = N_{xy} = M_x = M_{xy} = Q_{yz} = 0$. Te vstavimo v enačbi (8) in (9) ter v nadaljevanju s postopkom 'kondenzacije' izpeljemo konstitucijske enačbe kompozitnega nosilca, ki so:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_c \\ M_c \\ Q_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

V enačbi (10) so C_{11} , C_{12} , C_{22} in C_{33} materialni parametri kompozitnega nosilca.

3 METODA KONČNIH ELEMENTOV

3.1 Modificirani princip virtualnega dela

Izrek o virtualnem delu zahteva, da je razlika virtualnega dela notranjih sil in virtualnega dela zunanjih sil enaka nič, torej [2]

$$\delta W = \int_0^L N_c \delta \varepsilon ds + \int_0^L Q_c \delta \gamma ds + \int_0^L M_c \delta \kappa ds -$$

$$\int_0^L p_x \delta u \, ds - \int_0^L p_z \delta w \, ds - \int_0^L m_y \delta \varphi \, ds - \sum_{k=1}^6 S_k \delta U_k = 0, \quad (11)$$

kjer so δU_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) virtualne spremembe posplošenih robnih pomikov, na primer $\delta U_1 = \delta u(0)$, \dots , $\delta U_6 = \delta \varphi(L)$. V izreku (11) morajo deformacijske in geometrijske spremenljivke zadostiti kinematičnim enačbam (2)–(4). V nadaljevanju izrek o virtualnem delu (11) zapišemo v odvisnosti od deformacijskih količin (ε , γ , κ).

Z znanimi postopki variacijskega računa sestavimo s funkcionalom (11) in s kinematičnimi enačbami (2)–(4) Hu-Washizujev funkcional. Euler-Lagrangeve enačbe tega funkcionala so ravnotežne, kinematične in konstitucijske enačbe ter statični robni pogoji. V nadaljevanju z integracijo rešimo kinematične enačbe (2)–(4)

$$u(s) = u(0) - \Delta x(s) + \int_0^s \left((1 + \varepsilon) \cos \varphi + \gamma \sin \varphi \right) d\xi, \quad (12)$$

$$w(s) = w(0) - \Delta z(s) - \int_0^s \left((1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi \right) d\xi, \quad (13)$$

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s (\kappa + \kappa_0) d\xi. \quad (14)$$

Podobno rešimo tudi ravnotežne enačbe, torej

$$\mathcal{R}_1(s) = \mathcal{R}_1(0) - \int_0^s p_x d\xi, \quad (15)$$

$$\mathcal{R}_2(s) = \mathcal{R}_2(0) - \int_0^s p_z d\xi, \quad (16)$$

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(0) + \int_0^s \left((1 + \varepsilon) \mathcal{Q} - \gamma \mathcal{N} - m_y \right) d\xi. \quad (17)$$

Tako v Hu-Washizujevem funkcionalu odpadejo kinematične in ravnotežne enačbe. Ko temu funkcionalu dodamo kinematične robne vezi, dobimo t.i. *modificirani posplošeni izrek o virtualnem delu*

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}^* = & \int_0^L (\mathcal{N}_c - \mathcal{N}) \delta \varepsilon \, ds + \int_0^L (\mathcal{Q}_c - \mathcal{Q}) \delta \gamma \, ds + \int_0^L (\mathcal{M}_c - \mathcal{M}) \delta \kappa \, ds + \\ & \left[u(L) - u(0) + \Delta x_L - \int_0^L \left((1 + \varepsilon) \cos \varphi + \gamma \sin \varphi \right) ds \right] \delta \mathcal{R}_1(0) + \\ & \left[w(L) - w(0) + \Delta z_L + \int_0^L \left((1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi \right) ds \right] \delta \mathcal{R}_2(0) - \\ & \left(\varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^L (\kappa + \kappa_0) ds \right) \delta \mathcal{M}(0) + \\ & \left(S_1 + \mathcal{R}_1(0) \right) \delta U_1 - \left(S_2 + \mathcal{R}_2(0) \right) \delta U_2 - \left(S_3 + \mathcal{M}(0) \right) \delta U_3 - \\ & \left(S_4 - \mathcal{R}_1(L) \right) \delta U_4 - \left(S_5 - \mathcal{R}_2(L) \right) \delta U_5 - \left(S_6 - \mathcal{M}(L) \right) \delta U_6 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Modificirani posplošeni izrek o virtualnem delu (18) je sedaj odvisen samo od statičnih robnih vrednosti ($\mathcal{R}_1(0)$, $\mathcal{R}_2(0)$, $\mathcal{M}(0)$), od specifične spremembe dolžine referenčne osi nosilca $\varepsilon(s)$, od strižne deformacije $\gamma(s)$ in od psevdoukrivljenosti referenčne osi nosilca $\kappa(s)$ ter od kinematičnih robnih vrednosti ($u(0)$, $w(0)$, \dots , $\varphi(L)$). Tako postane primeren za implementacijo v metodi končnih elementov, saj so $\varepsilon(s)$, $\gamma(s)$ in $\kappa(s)$ v (18) edine funkcijske neznanke.

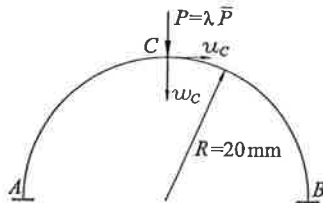
3.2 Standardna ali Galerkinova metoda končnih elementov

Za aproksimacijo specifične spremembe dolžine referenčne osi nosilca $\varepsilon(s)$ izberemo Lagrangeve polinome $P_{n\varepsilon}(s)$ ($n = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) stopnje $N_\varepsilon - 1$. Podobno za aproksimacijo strižne deformacije $\gamma(s)$ izberemo Lagrangeve polinome $P_{n\gamma}(s)$ ($n = 1, 2, \dots, N_\gamma$) stopnje $N_\gamma - 1$. Za aproksimacijo psevdoukrivljenosti $\kappa(s)$ ter začetne ukrivljenosti referenčne osi nosilca $\kappa_0(s)$ pa izberemo Lagrangeve polinome $P_{n\kappa}(s)$ ($n = 1, 2, \dots, N_\kappa$) stopnje $N_\kappa - 1$. Nastavke za ε , γ , κ in κ_0 v nadaljevanju vstavimo v funkcional (18) in po znanih postopkih variacijskega računa določimo Euler-Lagrangeve enačbe. Te imenujemo *diskretne posplošene ravnotežne enačbe končnega elementa*, ki za znano zunanjo obtežbo sestavljajo $N_\varepsilon + N_\gamma + N_\kappa + 9$ enačb za določitev $N_\varepsilon + N_\gamma + N_\kappa + 9$ neznank. Med neznankami je $N_\varepsilon + N_\gamma + N_\kappa + 3$ notranjih prostostnih stopenj elementa (ε_n ($n = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$), γ_n ($n = 1, 2, \dots, N_\gamma$), κ_n ($n = 1, 2, \dots, N_\kappa$), $\mathcal{R}_1(0)$, $\mathcal{R}_2(0)$, $\mathcal{M}(0)$) in šest zunanjih prostostnih stopenj elementa ($u(0)$, $w(0)$; $\varphi(0)$, $u(L)$, $w(L)$, $\varphi(L)$).

V nadaljevanju po znanih postopkih v MKE sestavimo še *diskretne posplošene ravnotežne enačbe konstrukcije*. Te v članku rešimo z znano konsistentno linearizirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine [1].

4 RAČUNSKI PRIMER: KROŽNI LOK

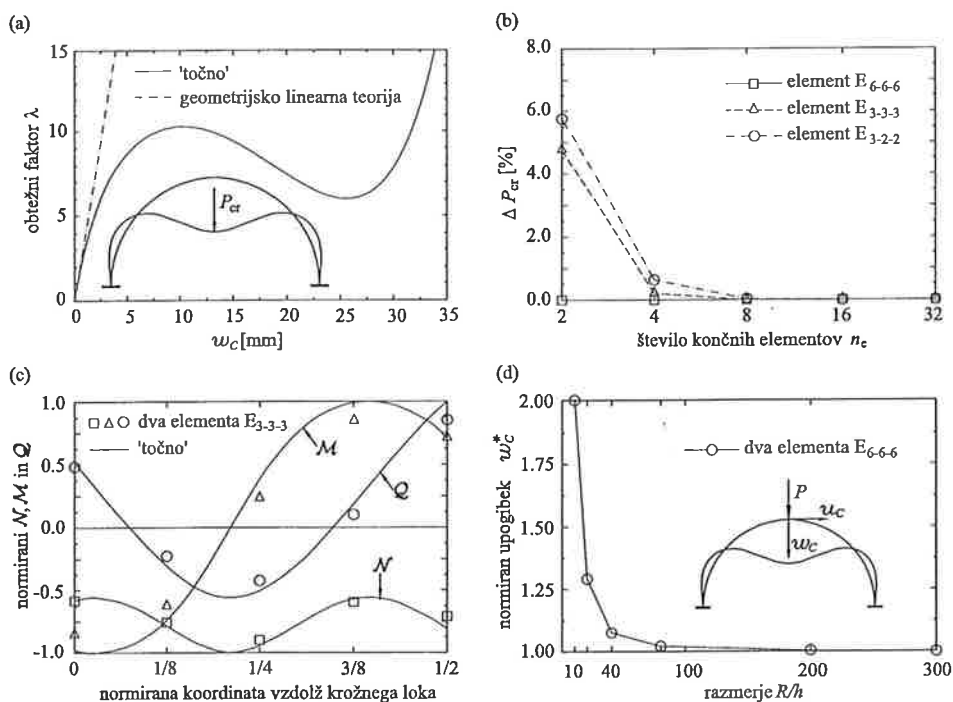
Natančnost deformacijskih končnih elementov, ki jih označimo z $E_{\varepsilon-\gamma-\kappa}$, analiziramo na preprostem kompozitnem krožnem loku. V oznaki elementa predstavljajo spodnji indeksi stopnjo Lagrangevih interpolacijskih polinomov za ε , γ in κ . Lok je sestavljen iz osmih enakih in različno orientiranih lamel ter je obtežen s točkovno silo v sredini razpona. Geometrijske podatke krožnega loka prikazuje slika 1 ($b/h = 5 \text{ mm}/1 \text{ mm}$). Materialni podatki za vseh osem lamel so enaki: $E_1 = 174.6 \text{ GPa}$, $E_2 = 7 \text{ GPa}$, $G_{12} = G_{13} = 3.5 \text{ GPa}$, $G_{23} = 1.4 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.25$.



Slika 2: Krožni lok. Geometrijski podatki – $[(0/90/\pm 45)]_8$.

Projekcijo obtežno-deformacijske krivulje na ravnino $\lambda - w_C$ prikazuje slika 3a. ‘Točni’ so v članku rezultati, ki so izračunani z 32 končnimi elementi E_{6-6-6} . Na sliki 3a opazimo velik vpliv geometrijsko nelinearne teorije kompozitnih nosilcev na velikost vertikalnega pomika w_C točke C pri kritični vrednosti točkovne sile ($P_{cr} = 1.026 \text{ kN}$). Slika 3a prikazuje tudi deformirano lego krožnega loka pri kritični sili P_{cr} . V nadaljevanju analiziramo natančnost deformacijskih končnih elementov za določitev kritične sile krožnega loka P_{cr} v odvisnosti od vrste končnega elementa in od števila končnih elementov. Na sliki 3b lahko vidimo, da izračunamo kritično silo P_{cr} zelo točno že samo z dvema elementoma E_{6-6-6} .

Kot smo že povedali, sta pri analizi nosilcev s standardnimi končnimi elementi značilni numerični napaki: (i) nezveznost oziroma velika napaka izračunanih posplošenih ravnotežnih sil vzdolž osi nosilca in (ii) t.i. strižno blokiranje elementov. Slika 3c dokazuje, da z deformacijskimi končnimi elementi izračunamo posplošene ravnotežne sile vzdolž osi krožnega loka zelo točno že z dvema elementoma E_{3-3-3} , slika 3d pa, da so elementi neobčutiljivi na strižno blokiranje. Ti rezultati ponovno potrjujejo veliko natančnost deformacijskih končnih elementov.

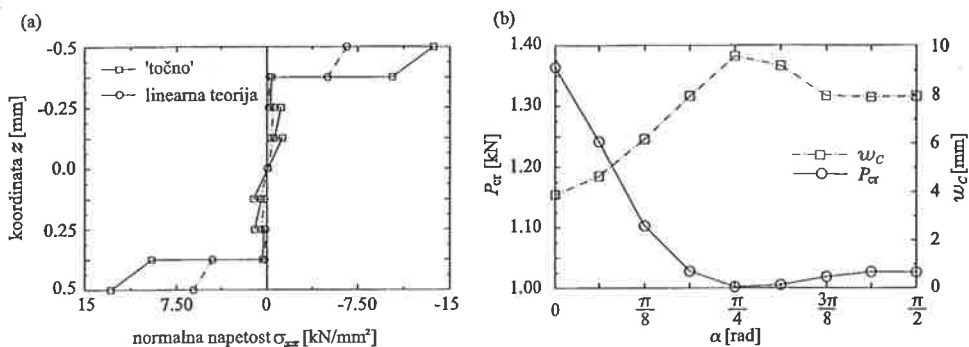


Slika 3: Krožni lok. a) Obtežno-deformacijska krivulja; b) Relativna napaka ΔP_{cr} v odvisnosti od vrste končnih elementov; c) Spreminjanje N , Q in M vzdolž referenčne osi krožnega loka; d) Spreminjanje normaliziranega pomika w_c^* v odvisnosti od razmerja R/h .

Na slika 4a prikažemo spreminjanje normalne napetosti σ_{xx} pri sili P_{cr} po prečnem prerezu C kompozitnega nosilca. Opazimo značilno žagasto razporeditev napetosti σ_{xx} po prerezu. Prav tako na sliki 4a prikažemo razliko med rezultati za σ_{xx} , ki je posledica uporabljenega geometrijskega modela nosilca. Napetost σ_{xx} je v primeru geometrijsko linearne teorije nosilcev kar za dvakrat manjša od 'točne' vrednosti. Na koncu analiziramo nosilnost in togost krožnega loka v odvisnosti od različnih leg osi ortotropije lamel glede na vzdolžno os nosilca. To odvisnost prikažemo na sliki 4b.

5 SKLEP

V članku smo predstavili družino novih končnih elementov za statično analizo ravninskih



Slika 4: Krožni lok. a) Spreminjanje normalne napetosti σ_{xx} pri P_{cr} po prečnem prerezu C kompozitnega nosilca; b) Analiza nosilnosti in togosti nosilca v odvisnosti od različnih leg osi ortotropije lamel glede na vzdolžno os nosilca – $[(0/90/\pm\alpha)]_s$.

ukrivljenih kompozitnih nosilcev. Elementi so zasnovani na interpolaciji deformacijskih količin referenčne osi nosilca. Izhodišče pri izpeljavi elementov je bila Reissnerjeva teorija nosilcev. Prednosti novih deformacijskih končnih elementov sta predvsem: (i) neobčutljivost elementov na membransko in strižno blokiranje, (ii) velika transparentnost osnovnih enačb, (iii) konsistentno upoštevanje konstitucijskih enačb in (iiii) velika natančnost.

LITERATURA

- [1] M. A. CRISFIELD (1981) A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Computers and Structures* **13**, 55–62.
- [2] I. PLANINC, B. ČAS & M. SAJE (2000) Na psevdoukrivljenosti zasnovana analiza ravninskih ukrivljenih nosilcev. V zborniku *Kuhljevi dnevi 2000* (uredil L. ŠKERGET), Slovensko društvo za mehaniko, 119–126.
- [3] P. RAVEENDRANATH, G. SINGH & B. PRADHAM (2000) Application of coupled polynomial displacement fields to laminated beam elements. *Computers and Structures* **78**, 661–670.
- [4] E. REISSNER (1972) On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* **23**, 795–804.
- [5] H. -S. RYU & H. -C. SIN (1996) Curved beam elements based on strain fields. *Communications in Numerical Methods in Engineering* **12**, 767–773.
- [6] M. SAJE, G. TURK, A. KALAGASIDU & B. VRATANAR (1998) A kinematically exact finite element formulation of elastic-plastic curved beams. *Computers and Structures* **67**, 197–214.
- [7] J. R. VINSON & R. L. SIERAKOWSKI (1986) *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff publishers, Dordrecht.

DRSENJE TOGEGA TELESA PO HRAPAVI HORIZONTALNI PODLAGI

Milan Batista¹, Franc Kosel²

SLIDING OF RIGID BODY ON ROUGH HORIZONTAL PLANE

POVZETEK

V prispevku so izpeljane splošne enačbe, ki popisujejo gibanje togega telesa, ki prosto drsi po ravni hrapavi podlagi. Pri izpeljavi enačb je predpostavljeno, da je gibanje telesa ravninsko, da se trenje podreja izotropnemu Coulombovemu zakonu, ter da je tlak med stičnima ploskvama telesa in podlage porazdeljen po linearnem zakonu. Za numerični prikaz je obravnavan primer drsenje togega telesa, ki se stika s podlago na pravokotnem območju.

SUMMARY

In the present contribution the general equations, which describe sliding of a rigid body on a rough horizontal plane, are derived. The derivation is based on assumption that a movement of a body is planar and that the contact friction force obeys the isotropic Coulomb law. The numerical example deals us to a body which has rectangular shaped contact surface with the plane.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet, Pot pomorščakov 4, 6320 Portorož

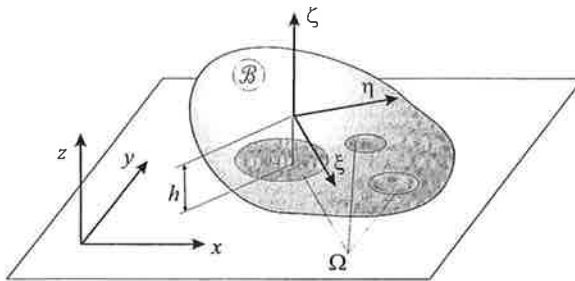
² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

1. UVOD

Osnovni namen tega prispevka je izpeljati splošne enačbe, ki popisujejo gibanje togega telesa, ki prosto drsi po horizontalni hrapavi podlagi. Pri izpeljavi enačb izhajamo iz naslednjih predpostavk:

- obravnavano telo omejuje med drugim ena ali več ravnih ploskev, ki so v konformnem stiku s horizontalno hrapavo podlago [5];
- telo se nahaja v enakomernem gravitacijskem polju, pri čemer je gravitacijski pospešek usmerjen pravokotno na drsno ravnino;
- tlak na stični ploskvi telesa in podlage je porazdeljen po linearnem zakonu;
- velikost torne sile je v vsaki točki stične ploskve podvržena Coulombovem homogenemu in izotropnem trenju, njena smer pa je nasprotna smeri hitrosti v dani točki;
- gibanje (drsenje) telesa je ravninsko.

Razlika med znanimi obravnavami opisanega problema ([1],[2],[3],[4],[7]) in pričujočo obravnavo je, da ni omejena na ravninska telesa, ter da predpostavlja neenakomerno porazdelitev tlaka na stiku telesa s podlago. Obravnava torej sledi predpostavki, ki jo je uporabil MacMillan [6] pri izračunu rezultirajoče torne sile in momenta v primeru translacije in rotacije togega telesa.



Slika 1 – Drsenje telesa po horizontalni podlagi

2. TEMELJNE ENAČBE

Opazujmo togo telo \mathcal{B} , ki drsi po horizontalni hrapavi podlagi (Slika 1). Nepremični koordinatni sistem s koordinatnimi osmi x, y in z ter enotskimi vektorji e_x, e_y, e_z naj bo vezan na drsno ravnino, pri čemer ima osi z smer normale na ravnino. Koordinatni sistem vezan na telo oz. pomični

koordinatni sistem postavimo v njegovo težišče. Oddaljenost težišča od drsne ploskve naj bo h . Koordinatni osi ξ in η naj bosta vsporedni ravnini po kateri drsi telo, os ζ pa naj sovpada z osjo z nepomičnega koordinatnega sistema. Enotske vektorje, ki ustrezajo koordinatnim osem premičnega koordinatnega sistema označimo z e_ξ, e_η, e_ζ . Pri tem povdarimo, da koordinatne osi premičnega koordinatnega sistema ne sovpadajo nujno z glavnimi osmi vztrajnostnega tenzorja obravnavanega telesa. Stično ploskev Ω med telesom in ravnino določajo tiste robne točke telesa, za katere velja $\mathcal{B} \ni \zeta = -h$ oz. $\mathcal{B} \ni z = 0$. Za vse ostale točke pa velja $\mathcal{B} \ni \zeta > -h$ oz. $\mathcal{B} \ni z > 0$.

Če na telo deluje le teža in kontaktne sile na stični površini, so enačbe, ki popisujejo njegovo gibanje, naslednje:

$$m \frac{dv_0}{dt} = -mgk + \int_{\Omega} p dA \quad (1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} + K_0 (\omega \times J_0 \omega) = K_0 \left(\int_{\Omega} (\xi e_\xi + \eta e_\eta - h e_\zeta) \times p dA \right) \quad (2)$$

V navedenih enačbah je m masa telesa, J_0 vztrajnostni tenzor, $K_0 = J_0^{-1}$, v_0 vektor hitrost težišča telesa, ω vektor kotne hitrosti, p vektor kontaktne napetosti in g gravitacijski pospešek. Vztrajnostni tenzor J_0 v splošnem ni diagonalen, v vsakem primeru pa je simetričen in pozitivno definiten. Nadaljna konkretizacija enačb (1) in (2) temelji na predpostavkah, ki so navedene v uvodu.

Za ravninsko gibanje velja

$$v_0 = v_{0\xi} e_\xi + v_{0\eta} e_\eta \quad \text{in} \quad \omega = \omega k$$

Če je trenje med telesom in podlago podvrženo izotropnemu Coloumbovemu trenju, je napetostni vektor p enak

$$p = p e_\zeta - \mu p \frac{v}{|v|} \quad (3)$$

pri čemer je p tlak, μ koeficient trenja in v hitrost točke na stični ploskvi. Ta je po Eulerju enaka

$$v = v_0 + \omega e_\zeta \times (\xi e_\xi + \eta e_\eta - h e_\zeta) = v_0 + \omega e_\zeta \times \rho \quad (4)$$

njena absolutna vrednost pa je enaka

$$|v| = \sqrt{v_{0\xi}^2 + v_{0\eta}^2 + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) + 2\omega (\xi v_{0\eta} - \eta v_{0\xi})} \quad (5)$$

Z upoštevanjem navedenih zvez dobimo iz (1) in (2) naslednje enačbe, ki popisujejo drsenje telesa naslednje:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dv_{0\xi}}{dt} &= -\frac{\mu}{m}(v_{0\xi}Q_0 - \omega Q_\eta) + \omega v_{0\eta} \\
 \frac{dv_{0\eta}}{dt} &= -\frac{\mu}{m}(v_{0\eta}Q_0 + \omega Q_\xi) - \omega v_{0\xi} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -K_{32}P_\xi + K_{31}P_\eta + \\
 &\quad + \mu(hK_{32}Q_0 + K_{33}Q_\eta)v_{0\xi} - \mu(hK_{31}Q_0 + K_{33}Q_\xi)v_{0\eta} - \\
 &\quad - \mu[h(K_{31}Q_\xi + K_{32}Q_\eta) + K_{33}Q_{\xi\eta}]\omega + (K_{31}J_{23} - K_{32}J_{13})\omega^2
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_0 &= mg \\
 -K_{12}P_\xi + K_{11}P_\eta - \mu h(v_{0\eta}K_{11} - v_{0\xi}K_{12})Q_0 + \\
 &\quad + \mu(\omega hK_{11} - v_{0\eta}K_{13})Q_\xi + \mu(\omega hK_{12} + v_{0\xi}K_{13})Q_\eta + \\
 &\quad + \mu\omega K_{13}Q_{\xi\eta} = \omega^2(K_{12}J_{13} - K_{11}J_{23}) \\
 -K_{22}P_\xi + K_{21}P_\eta - \mu h(v_{0\eta}K_{21} - v_{0\xi}K_{22})Q_0 + \\
 &\quad + \mu(\omega hK_{21} - v_{0\eta}K_{23})Q_\xi + \mu(\omega hK_{22} + v_{0\xi}K_{23})Q_\eta + \\
 &\quad + \mu\omega K_{23}Q_{\xi\eta} = \omega^2(K_{22}J_{13} - K_{21}J_{23})
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

V sistemih enačb (8) in (9) nastopajo naslednji integrali, katerih vrednost je odvisna od tlaka p :

$$P_0 = \int_{\Omega} p \, dA \quad P_\xi = \int_{\Omega} p \xi \, dA \quad P_\eta = \int_{\Omega} p \eta \, dA \quad (10)$$

in integrali, katerih vrednost je odvisna tako od tlaka p kot hitrosti v telesa:

$$Q_0 = \int_{\Omega} \frac{p}{|v|} dA \quad Q_\xi = \int_{\Omega} p \frac{\xi}{|v|} dA \quad Q_\eta = \int_{\Omega} p \frac{\eta}{|v|} dA \quad Q_{\xi\eta} = \int_{\Omega} p \frac{\xi^2 + \eta^2}{|v|} dA \quad (11)$$

K tem enačbam moramo dodati še kinematične zveze, ki določajo lege telesa

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dx_0}{dt} &= v_{0\xi} \cos \psi - v_{0\eta} \sin \psi \\
 \frac{dy_0}{dt} &= v_{0\xi} \sin \psi + v_{0\eta} \cos \psi \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \omega
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

V enačbah (12) sta x_0 in y_0 koordinati težišča telesa, ψ pa zasuk osi ξ glede na os x . Za dve komponente x_0 in y_0 lege težišča, zasuka telesa ψ , dveh komponent $v_{0\xi}$ in $v_{0\eta}$ hitrosti težišča, kotne hitrosti ω in 7 integralov (10)-(11), katerih vrednost je odvisna od tlaka p in trenutne hitrosti v , skupno torej 13 neznank, imamo na razpolago 9 enačb (8) do (10). Če hočemo izračunati integrale

(10) in (11), moramo poznati tlak p . Ta pa v splošnem ne more biti porazdeljen enakomerno, če hočemo zadostiti vsem pogojem (9). Poleg tega velja za tlak omejitvev

$$p \geq 0 \quad (13)$$

kar pomeni, da tlak p določa tudi stično ploskev Ω . Ta torej ni določena samo s pogojem $\mathcal{B} \ni \zeta = -h$, temveč tudi s pogojem (13).

3. PRIMER RAVNINSKEGA TELESA

V primeru, ko ena izmed glavnih osi telesa sovпада s smerjo osi z , imamo opraviti z ravninskim telesom. V tem primeru je $J_{13} = J_{23} = J_{31} = J_{32} = 0$ in zato tudi $K_{13} = K_{23} = K_{31} = K_{32} = 0$. Enačbe (8)-(9) se torej nekoliko poenostavijo

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{0\xi}}{dt} &= -\frac{\mu}{m}(v_{0\xi}Q_0 - \omega Q_\eta) + \omega v_{0\eta} \\ \frac{dv_{0\eta}}{dt} &= -\frac{\mu}{m}(v_{0\eta}Q_0 + \omega Q_\xi) - \omega v_{0\xi} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \mu K_{33}Q_\eta v_{0\xi} - \mu K_{33}Q_\xi v_{0\eta} - \mu K_{33}Q_\xi Q_\eta \omega \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= mg \\ -K_{12}P_\xi + K_{11}P_\eta - \mu h(v_{0\eta}K_{11} - v_{0\xi}K_{12})Q_0 + \mu \omega h(K_{11}Q_\xi + K_{12}Q_\eta) &= 0 \\ -K_{22}P_\xi + K_{21}P_\eta - \mu h(v_{0\eta}K_{21} - v_{0\xi}K_{22})Q_0 + \mu \omega h(K_{21}Q_\xi + K_{22}Q_\eta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Če je telo tanka ploščica, t.j., če je $h \ll 1$, lahko v pogojih (9a) zanemarimo člene, ki so odvisni od h . Na ta način dobimo

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= mg \\ -K_{12}P_\xi + K_{11}P_\eta &= 0 \\ -K_{22}P_\xi + K_{21}P_\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Če zadnji dve enačbi rešimo po neznanih vrednostih integralov, dobimo

$$P_\xi = P_\eta = 0. \quad (14)$$

Zaradi izračuna štirih integralov (11) tudi v tem primeru za rešitev problema potrebujemo neko predpostavko o porazdelitvi tlaka. Če privzamemo enakomerno porazdelitev tlaka, t.j.

$$p = p_0 = \text{konst}$$

dobimo iz (10) in prve izmed enačb (9a)

$$P_0 = \frac{mg}{A} \quad (15)$$

pri čemer je A površina drsne ploskve, iz pogoja (14) pa

$$\int_{\Omega} \xi dA = 0 \quad \int_{\Omega} \eta dA = 0 \quad (16)$$

Središče drsne ploskve mora torej sovpadati s projekcijo težišča telesa na drsno ravnino.

4. PRIMER LINEARNE PORAZDELITVE TLAKA

Tri enačbe (9) omogočajo določitev tlaka, ki je popisan s tremi parametri. Najenostavnejši model porazdelitve je linearni model porazdelitve tlaka

$$p = p_0 + a\xi + b\eta \quad (17)$$

kjer so p_0 , a in b neznane konstante. Če vstavimo (17) v (10) dobimo:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= p_0 F_0 + aF_{\xi} + bF_{\eta} \\ P_{\xi} &= p_0 F_{\xi} + aF_{\xi\xi} + bF_{\xi\eta} & P_{\eta} &= p_0 F_{\eta} + aF_{\xi\eta} + bF_{\eta\eta} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

pri čemer so

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= A = \int_{\Omega} dA \\ F_{\xi} &= A\xi_c = \int_{\Omega} \xi dA & F_{\eta} &= A\eta_c = \int_{\Omega} \eta dA \\ F_{\xi\xi} &= \int_{\Omega} \xi^2 dA & F_{\xi\eta} &= \int_{\Omega} \xi\eta dA & F_{\eta\eta} &= \int_{\Omega} \eta^2 dA \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Če pa vstavimo (17) v (11) dobimo

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= p_0 G_0 + aG_{\xi} + bG_{\eta} \\ Q_{\xi} &= p_0 G_{\xi} + aG_{\xi\xi} + bG_{\xi\eta} & Q_{\eta} &= p_0 G_{\eta} + aG_{\xi\eta} + bG_{\eta\eta} \\ Q_{\xi\eta} &= p_0 (G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta}) + a(G_{\xi\xi\xi} + G_{\xi\eta\eta}) + b(G_{\xi\xi\eta} + G_{\eta\eta\eta}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

pri čemer so:

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= \int_{\Omega} \frac{dA}{|v|} \\ G_{\xi} &= \int_{\Omega} \frac{\xi}{|v|} dA & G_{\eta} &= \int_{\Omega} \frac{\eta}{|v|} dA \\ G_{\xi\xi} &= \int_{\Omega} \frac{\xi^2}{|v|} dA & G_{\xi\eta} &= \int_{\Omega} \frac{\xi\eta}{|v|} dA & G_{\eta\eta} &= \int_{\Omega} \frac{\eta^2}{|v|} dA \\ G_{\xi\xi\xi} &= \int_{\Omega} \frac{\xi^3}{|v|} dA & G_{\xi\xi\eta} &= \int_{\Omega} \frac{\xi^2\eta}{|v|} dA & G_{\xi\eta\eta} &= \int_{\Omega} \frac{\xi\eta^2}{|v|} dA & G_{\eta\eta\eta} &= \int_{\Omega} \frac{\eta^3}{|v|} dA \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Pri znanih komponentah hitrosti $v_{0\xi}, v_{0\eta}$, kotni hitrosti ω in stični ploskvi Ω , predstavlja sistem enačb (9) z upoštevanjem (18) in (20) linearni sistem enačb za neznane konstante p_0, a in b . Ker pa je stična ploskev Ω določena s pogojem (13), predstavlja sistem (9) skupaj s pogoji (18) do (21) nelinearen sistem enačb, ki določa iskane konstante in velikost stične ploskve.

Opomba. Dejanska porazdelitev tlaka po predpostavljeni stični ploskvi je zaradi pogoja (13) opisana z nelinearno funkcijo

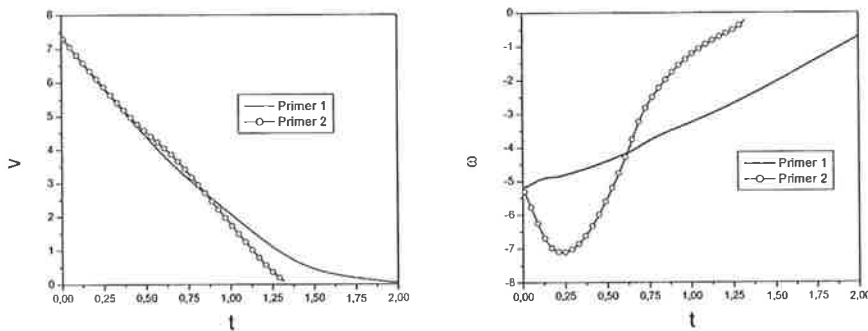
$$p = \frac{1}{2} (p_0 + a\xi + b\eta + |p_0 + a\xi + b\eta|) \quad (\xi, \eta \in \Omega) \quad \square\square\square$$

5. NUMERIČNI PRIMER

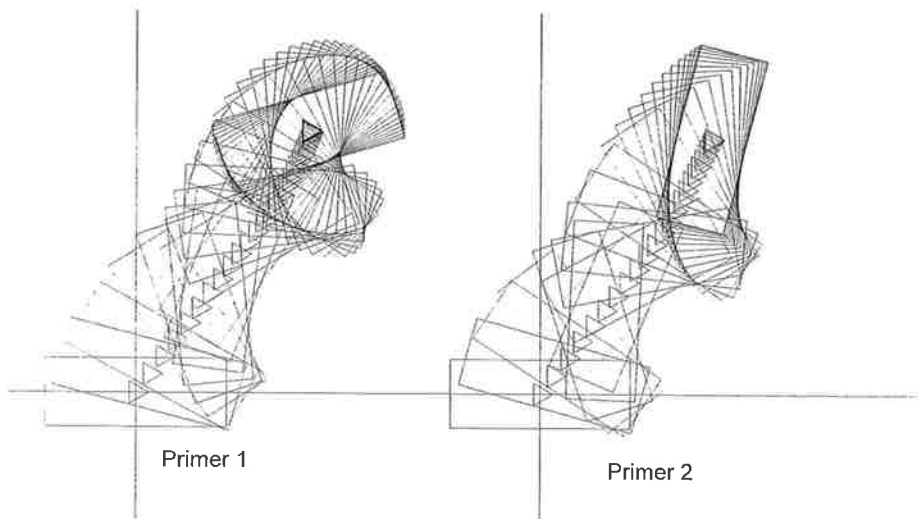
Kot numerični primer vzamemo telo mase $m = 1000$ kg, katerega drsna ploskev je pravokotne oblike dolžine 2.8 m in širine 1.08 m. Težišče naj se nahaja v središču pravokotnika na višini $h = 0.25$ m. Začetna hitrost naj bo $v = 7.36$ m/s v smeri $\psi = 56^\circ$, začetna kotna hitrost pa naj bo $\omega = -5.19$ rad/s. Vztrajnostni tenzor naj bo podan z matriko

$$J_0 = \begin{pmatrix} 100 & a & b \\ a & 100 & 0 \\ b & 0 & 2000 \end{pmatrix} \quad [\text{kg m}^2]$$

Rezultati izračuna za primera, ko je $a = b = 0$ in $a = b = 100$, so prikazani na slikah 2 in 3. Koeficient trenja med telesom in podlago je bil v obeh primerih izračuna $\mu = 0.7$. Za numerično integracijo enačb (8),(9) in (12) je bil uporabljen program RKSUITE, za numerični izračun integralov (19) ter (21) pa program DCHURE [8].



Slika 2 – Hitrost v in kotna hitrost ω kot funkciji časa



Slika 3 – Gibanje telesa do zaustavitve

V prvem primeru se telo ustavi po času 2.08 s v drugem pa po 1.32 s. Dolžina poti, ki jo pri tem opravi težišče telesa je v prvem primeru 5.2 m, v drugem 4.8 m.

REFERENCE

- [1] Genta, G., *Motor Vehicle Dynamics*, World Scientific, 1997
- [2] Goyal, S. *Planar Sliding of Rigid Body With Dry Friction: Limit Surfaces and Dynamics of Motion*, Dissertation, Cornell University, 1989
- [3] Ihsinskii, A. Yu., Sokolov B. N., Chernousko, F. L. *Motion of Plane Bodies With Dry Friction*, Izv. AN SSSR, Mechanics of Solids, Vol. 16, Number 4, pp 17-28, 1981
- [4] Jia Yan-Bin, Erdmann, M. *Pose from Pushing*, Proc. of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation
- [5] Johnson K.L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985
- [6] MacMilan, W.D., *Dynamics of Rigid Bodies*, Dover Publications, 1936
- [7] Prescott J., *Mechanics of Particles and Rigid Bodies*, Longmans, Green and Co., London, 1923
- [8] <http://www.netlib.org/>

TOK TEKOČINE V NIHAJOČI CEVI CORIOLISOVEGA MERILNIKA

Gregor Bobovnik¹, Jože Kutin², Ivan Bajsić³

FLUID FLOW IN THE CORIOLIS METER'S VIBRATING TUBE

POVZETEK

Kot uvod v raziskavo tokovnih razmer v nihajoči cevi so prikazani rezultati numerične simulacije laminarnega toka tekočine v enakomerno rotirajoči cevi in primerjava le-teh z analitičnimi rešitvami. Nadalje smo opazovali hitrostno in tlačno polje v nihajoči cevi ter določili tekočinske sile na steno cevi. Velikost in porazdelitev tekočinskih sil na steno cevi smo primerjali z vrednostmi, dobljenimi z enorazsežnim modelom toka tekočine.

SUMMARY

As an introduction to the investigation of the flow conditions in the coriolis flowmeter's vibrating tube, the paper presents results of numerical simulation of the laminar fluid flow in the rotating tube and their comparison with an analytical solution. Further the velocity and the pressure field in vibrating tube are observed and the fluid forces acting on the tube are determined. Magnitude and the distribution of the fluid forces are compared with the results, based on the one-dimensional model of fluid flow.

¹ Gregor Bobovnik, univ. dipl. inž. str., (e-pošta: gregor.bobovnik@lmmps.uni-lj.si)

² mag. Jože Kutin, univ. dipl. inž. str., (e-pošta: joze.kutin@lmmps.uni-lj.si)

³ izr. prof. dr. Ivan Bajsić, univ. dipl. inž. str., (e-pošta: ivan.bajsic@fs.uni-lj.si)

Vsi člani Laboratorija za meritve v procesnem strojništvu (LMPS) na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani.

1 UVOD

Pri coriolisovem merilniku za določanje gostote in masnega pretoka tekočine izkoriščamo spremembo lastne nihajne frekvence in oblike merilne cevi, po kateri se pretaka tekočina. Pomemben vgradni vpliv, ki v splošnem vpliva na delovanje merilnikov pretoka, predstavljajo vstopne tokovne razmere v merilnik. Glede na dostopne objave za primer coriolisovega merilnika ta vpliv še ni bil natančneje proučevan. V [1] in [2] so navedeni rezultati preizkusov za komercialne tipe merilnikov, in sicer so bili preizkusi izvedeni za različne stopnje vrtnčnosti v toku ter za različne hitrostne profile na vstopu v merilno cev. S preizkusi je bilo ugotovljeno, da različni vstopni pogoji zelo malo vplivajo na delovanje merilnikov, po drugi strani pa je potrebno upoštevati, da je merilna točnost coriolisovih merilnikov pri meritvah pretokov kapljevine znotraj nekaj desetink odstotka merjene vrednosti. Hemp [3] je za prosto vpeto merilno cev ugotovil, da se pri prehodu iz laminarnega v turbulentni tokovni režim, poveča občutljivost merilnika za 0,65 %. V [4] sta avtorja obravnavala tokovne razmere v ravni enakomerno rotirajoči cevi in poskušala rezultate prenesti na tokovne razmere v nihajoči ravni cevi coriolisovega merilnika.

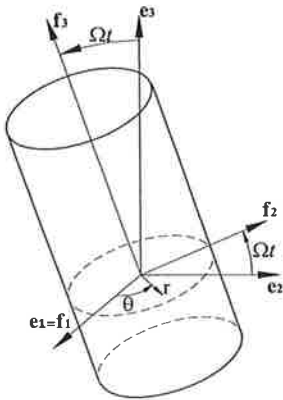
V prispevku želimo podati nekatere rezultate tokovnih razmer v merilni cevi coriolisovega merilnika, ki so bili dobljeni na podlagi numerične simulacije s programom Comet [5], ki temelji na metodi končnih volumnov. Za začetek so prikazani rezultati numerične simulacije toka tekočine v rotirajoči cevi in primerjava rezultatov z analitičnimi rešitvami za laminarni tokovni režim. Nadalje pa je predstavljena numerična simulacija tokovnih in tlačnih razmer v nihajoči merilni cevi. Izračunan potek tekočinskih sil na steno cevi smo primerjali z rezultati dobljenimi z enorazsežnim modelom toka tekočine.

2 TOK TEKOČINE V ROTIRAJOČI CEVI

2.1 Analitična rešitev

Shema rotirajoče cevi je prikazana na sliki 1. Tok tekočine je v smeri osi f_3 . Hitrost tekočine v zapišemo z njenimi komponentami: radialno komponento U , obodno komponento V in aksialno komponento W . Radialna in obodna komponenta sta v nadaljevanju izraženi prek zapisa prečnega hitrostnega potenciala Ψ . Polmer cevi je označen z a , ν je kinematična viskoznost tekočine v cevi in Ω kotna hitrost cevi. Predpostavimo, da so tokovne razmere pri nizkih rotacijskih hitrostih na posameznih prerezih cevi identične, kar pomeni, da je tlačni padec v cevi linearen. Rešitev po teoriji majhnih motenj lahko zapišemo kot [4],[6]

$$w(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n w_n(x, \theta) \quad \text{in} \quad \psi(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \psi_n(x, \theta), \quad (2.1)$$



Slika 1: Shema rotirajoče cevi okoli osi f_1 [4].

kjer je $r = ax$, ostale spremenljivke pa so določene sledeče:

$$R = \frac{2\Omega a^2}{\nu}, \quad \Psi(r, \theta) = \nu \psi(x, \theta), \quad W(r, \theta) = \frac{\nu}{a} w(x, \theta) \quad (2.2)$$

Višji členi ($n \geq 1$) zgornjih rešitev predstavljajo motnje Hagen-Poiseuilleovega toka, za katerega velja

$$w_0(x, \theta) = c(1 - x^2) \text{ in } \psi_0(x, \theta) = 0. \quad (2.3)$$

Faktor c določa v rotirajoči cevi velikost gradienta lineariziranega tlačnega padca, v primeru mirujoče cevi pa je enak Reynoldsovemu številu. Rešitve višjih motenj so sledeče [4], [6]:

$$\psi_1(x, \theta) = \frac{c}{3 \cdot 2^5} x(1 - x^2)^2 \cos \theta, \quad w_1(x, \theta) = \frac{c^2}{3^2 \cdot 2^8} x(1 - x^2)(x^4 - 3x^2 + 3) \sin \theta, \quad (2.4)$$

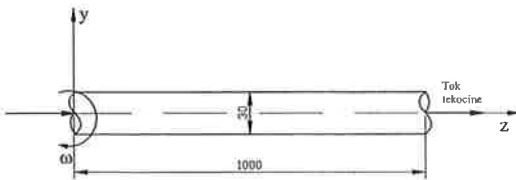
$$\psi_2(x, \theta) = \frac{c^2}{5 \cdot 3^3 \cdot 2^{15}} x^2(1 - x^2)^2(17 - 2x^2 - x^4) \sin 2\theta, \quad (2.5)$$

$$w_2(x, \theta) = \frac{c}{2^7 3^2} (x^2 - 1)^3 + \frac{c^3}{2^{17} 3^4 5} (x^2 - 1)^4 (-10x^4 + 32x^2 - 37) + \frac{c}{2^9 3^2} x^2 (x^2 - 1)(3x^2 - 5) \cos 2\theta \\ + \frac{c^3}{2^{17} 3^4 5^2 7} x^2 (x^2 - 1)(48x^8 - 302x^6 + 958x^4 - 1457x^2 + 923) \cos 2\theta. \quad (2.6)$$

Mansour [7] je ocenil območje, v katerem so zgornje rešitve veljavne:

$$c^2 R^2 < 413,3. \quad (2.7)$$

2.2 Numerična simulacija



Slika 2: Shema modela rotirajoče cevi (dimenzije so v mm)

okoli osi x v kartezičnem koordinatnem sistemu na sliki 2. Modeliran je laminaren tok izotermne nestisljive tekočine. Območje rešitve je razdeljeno na 119000 celic (kontrolnih volumnov). Presek cevi je razdeljen na 420 celic, število razdelkov po dolžini cevi pa je 250. Opisana računsko mreža je bila izbrana na podlagi predhodne primerjave konvergence rezultatov med različnimi mrežami.

S programom Comet smo izvedli numerično simulacijo toka tekočine v rotirajoči cevi in primerjavo z analitičnimi rezultati. Zasnova modela in dimenzije cevi so prikazane na sliki 2. Cev rotira

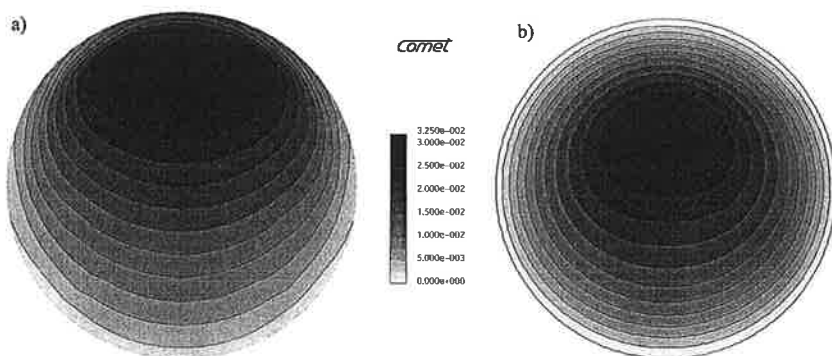
- **Robni pogoji**

Na vstopu v cev je modeliran polnorazvit laminaren hitrostni profil, ki je dobljen s pomočjo predhodne simulacije razvoja hitrostnega profila v ravni mirujoči cevi. Gostota tekočine znaša $998,3 \text{ kg/m}^3$ (voda pri temperaturi 293 K). Na izstopu iz cevi je predpisana tlačna razlika glede na okolico enaka 0 Pa. Poleg volumskih sil, ki so posledica rotacije sistema, ostalih volumskih sil nismo upoštevali (npr. gravitacije).

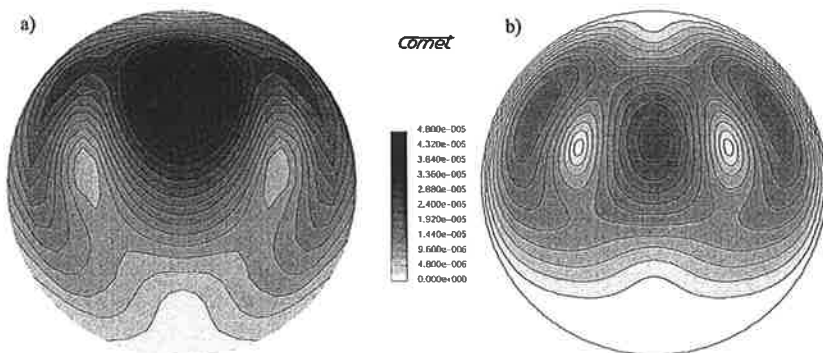
- **Rezultati simulacije in primerjava z analitičnimi rešitvami**

Na sliki 3 so prikazani rezultati simulacije in njihova primerjava z analitičnimi rešitvami za primer, ko je $Re = 450$ in $R = 1$. Rezultati numerične simulacije so prikazani na prerezu 0,5 m od osi rotacije cevi. Podobno kot analitične rešitve tudi numerični rezultati napovedo premik največje aksialne hitrosti v prerezu proti steni cevi, le da je odmik napovedan s simulacijo večji kot je bil ocenjen z analitičnim modelom. Prečno hitrostno polje, ki nastane v cevi kot posledica rotacije, je predstavljeno na sliki 4 (prikazano je za enaki vrednosti Re in R in na enaki oddaljenosti od osi rotacije kot aksialni hitrostni profil na sliki 3). Hitrosti sekundarnega (prečnega) toka so v primeru simulacije približno dvakrat večje od analitično napovedanih. V obeh primerih pa so približno tisočkrat manjše od aksialnih hitrosti.

Zamik aksialnega hitrostnega profila je posledica delovanja coriolisove sile na tok tekočine v enakomerno rotirajoči cevi. Delovanje coriolisove sile povzroči nastanek prečnega toka, le-ta pa povzroči zamik aksialnega hitrostnega profila. Smer coriolisove sile je določena s smerjo vektorskega produkta med relativno hitrostjo tekočine v cevi in kotno hitrostjo cevi.



Slika 3: Prikaz aksialnega hitrostnega profila ($Re = 450$ in $R = 1$) in primerjava med rezultati simulacije (a) in analitično rešitvijo (b). Enote na legendi ob slikah so izražene v m/s.



Slika 4: Prečno hitrostno polje ($Re = 450$ in $R = 1$) in primerjava med rezultati simulacije (a) in analitično rešitvijo (b). Enote na legendi ob slikah so izražene v m/s.

3 TOK TEKOČINE V NIHAJOČI CEVI

3.1 Enorazsežni model toka tekočine v merilni cevi

Za teoretičen popis merilnih značilnic Coriolisovega merilnika z vitko cevjo se pogosto uporablja enorazsežni model, ki temelji na linearni Eulerjevi teoriji nosilcev in enorazsežnem toku nestisljive tekočine (glej npr. [8-10]). Če zanemarimo vpliv dodanih mas, zunanje aksialne sile ter dušenja in vzbujevalne sile, lahko enačbo gibanja merilne cevi zapišemo kot

$$EI_c \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -M_l V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2M_l V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - M_l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p A_n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

kjer je x os mirujoče cevi, t čas, w upogibek cevi, EI_c upogibna togost cevi, M_c masa cevi na enoto dolžine, M_l masa tekočine na enoto dolžine, V povprečna hitrost tekočine v cevi, p tlak tekočine in A_n ploščina notranjega prereza cevi.

Leva stran enačbe popisuje gibanje merilne cevi brez vpliva tekočinskih sil (enačba Eulerjevega nosilca). Za posamezno lastno obliko k lahko rešitev za amplitudo nihanja cevi v primeru idealno togega vpetja na obeh straneh zapišemo kot [11]

$$W_k(x) = C_k \left[\cosh\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) - \cos\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) - \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k} \left(\sinh\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) - \sin\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) \right) \right], \quad (3.2)$$

kjer so lastne vrednosti λ_k koreni enačbe $\cos \lambda \cosh \lambda = 1$, L pa je dolžina cevi. V Coriolisovem merilniku se za merjenje najpogosteje uporablja prva lastna oblika ($k = 1$), kjer je $\lambda_1 = 4,730$, konstanto C_1 pa lahko izrazimo kot $A/1,588$, kjer je A amplituda nihanja na sredini cevi.

Na desni strani enačbe (3.1) si sledijo tekočinske sile na merilno cev: relativna centrifugalna sila, Coriolisova in translacijska vztrajnostna sila ter tlačna sila. Če je nihanje merilne cevi simetrično glede na sredino (prva lastna oblika), imajo simetričen značaj delovanja tudi našete tekočinske sile, z izjemo Coriolisove vztrajnostne sile. Prav vpliv Coriolisove sile, ki pri elastični merilni

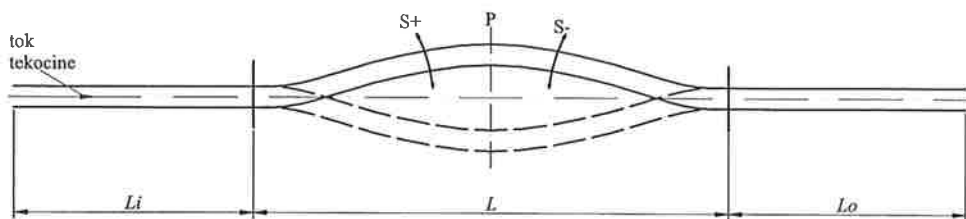
cevi povzroča določeno asimetrijo v lastnem nihanju, se izkorišča za merjenje masnega toka. V prvem približku lahko ta vpliv ovrednotimo kot razliko amplitud rezultirajoče tekočinske sile na levi in desni polovici cevi:

$$\Delta F = F_d - F_l = -2M_t V \omega \left(\int_{L/2}^L \frac{dW_1}{dx} dx - \int_0^{L/2} \frac{dW_1}{dx} dx \right) = 4M_t V \omega A, \quad (3.3)$$

kjer je ω krožna frekvenca nihanja merilne cevi.

3.2 Numerična simulacija razmer v merilni cevi

Simulacija je izvedena s programom Comet. S simulacijo opazujemo spreminjanje aksialnega hitrostnega polja in tlačnega polja v merilni cevi ter porazdelitev tekočinskih sil na steno cevi. Shema modela je prikazana na sliki 5. Tekočina v merilni cevi je izotermna in nestisljiva. V model je vključen standarden k-ε model turbulence.



Slika 5: Shema modela Coriolisovega merilnika pretoka

Pred in za nihajočim merilnim delom cevi dolžine $L=0,24$ m je modeliran vstopni ($L_i=0,24$ m) ter izstopni ($L_o=0,24$ m) ravni del cevi. Notranji premer cevi $D=0,016$ m, razmerje $L/D=15$. Celoten sklop na sliki 5 je po dolžini razdeljen na 240 delov, po prerezu pa je cev razdeljena na 260 celic.

• Robni pogoji

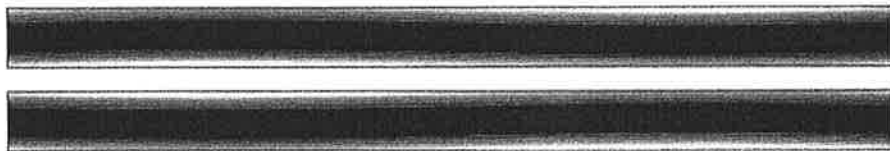
Na vstopu v cev je predpostavljen polno razviti tok tekočine, dobljen na podlagi predhodnje simulacije toka v ravni mirujoči cevi. Merilni del cevi niha sinusno z amplitudo definirano z enačbo (3.2). Razmerje med notranjim premerom cevi in amplitudo nihanja na sredini merilnega dela cevi (A) je 40:1. Gostota tekočine znaša $998,3 \text{ kg/m}^3$ (voda pri temperaturi 293 K). Na izstopu iz cevi je predpisana tlačna razlika glede na okolico enaka 0 Pa. Vpliv gravitacije ni upoštevan.

• Rezultati simulacij

Na slikah 6 je prikazano aksialno hitrostno polje (pri $V=0,1$ m/s in $f_r=160$ Hz) pri gibanju merilne cevi preko srednje lege (amplituda cevi je enaka 0) navzgor in navzdol. V identičnih legah merilne cevi prikazuje slika 7 tlačno polje v cevi pri $V=2$ m/s in $f_r=80$ Hz. Razlog za

izbiro večje hitrosti tekočine je bolj značilen prikaz vpliva coriolisove sile. Nihanje cevi si lahko predstavljamo kot rotacijo dveh segmentov S+ in S- (slika 5), ki ju deli ravnina P na polovici cevi, kotni hitrosti posameznega segmenta pa imata ravno nasprotni smeri. Zato lahko v nihajoči cevi pričakujemo podoben zamik aksialnega hitrostnega profila kot v primeru rotirajoče cevi, le da bo zamik profila nasproten za vsako polovico merilne cevi, s postopnim prehodom oblike profila na sredini cevi. Na obliko tlačnega polja v srednji legi ima velik vpliv coriolisova sila.

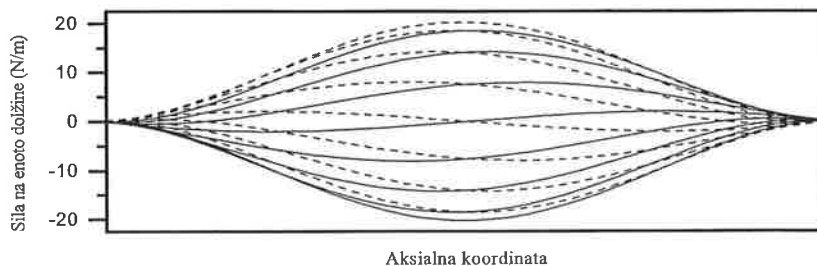
Na sliki 8 je prikazan potek tekočinske sile na steno cevi (na enoto dolžine), in sicer za en nihaj, pri enakih vhodnih parametrih kot na sliki 7. Zaradi delovanja coriolisove sile dobimo nesimetričen potek sile, kar posledično povzroči tudi ustrezno deformacijo elastične merilne cevi. Velikost coriolisovega učinka je ocenjena po enačbi (3.3) in primerjana z rezultati simulacije. Razlike so za vse simulacije, izvedene v razponu $300 < Re < 160000$ in $20 \text{ Hz} < fr < 320 \text{ Hz}$, v vseh primerih manjše kot 1,5 %. Odstopanje je v celotnem intervalu precej naključno, kar je verjetno posledica negotovosti numeričnega modela.



Slika 6: Aksialno hitrostno polje v srednji legi merilne cevi ($V=0,1 \text{ m/s}$, $fr = 160 \text{ Hz}$). Črno-bela linearna lestvica predstavlja razpon od 0 m/s (belo) do 0,2 m/s (črno)



Slika 7: Tlačno polje v srednji legi merilne cevi ($V = 2 \text{ m/s}$, $fr = 80 \text{ Hz}$). Črno-bela linearna lestvica predstavlja razpon od 700 Pa (belo) do 1400 Pa (črno)



Slika 8: Shematski potek rezultante tekočinskih sil na steno cevi za en nihaj cevi ($V = 2 \text{ m/s}$, $fr = 80 \text{ Hz}$).

4 SKLEP

V prispevku so predstavljeni prvi izsledki obravnave vpliva tokovnih razmer na delovanje coriolisovega merilnika pretoka. Izhodišče za obravnavo toka tekočine v nihajoči cevi so bile tokovne razmere v rotirajoči cevi. V obeh primerih je delovanje coriolisove sile tisto, ki povzroči zamik aksialnega hitrostnega profila in nastanek sekundarnega toka v cevi, le da je v primeru nihajoče cevi smer coriolisove sile asimetrična glede na sredino cevi. Posledica tega je asimetričen zamik aksialnega hitrostnega profila v posamezni polovici cevi.

Za različne hitrosti tekočine v merilni cevi in različne frekvence nihanj je bila narejena tudi primerjava med razliko amplitud rezultirajoče tekočinske sile na levi in desni polovici cevi, s katero smo ocenili velikost coriolisovega učinka. Primerjava med rezultati simulacije in rezultati dobljenimi ob predpostavki enorazsežnega toka tekočine je pokazala, da je največji absolutni odstopok 1,5 %. Na podlagi majhnih razlik med rezultati simulacije in matematičnega modela bi težko trdili, da vstopni tokovni režim (za geometrijo $L/D = 15$) vpliva na delovanje coriolisovega merilnika.

5 UPORABLJENA LITERATURA

- [1] R. Cheesewright, C. Clark, D. Bisset, The Identification of External Factors which Influence the Calibration of Coriolis Massflow Meters, **Flow Measurement and Instrumentation**, 11, 2000, str. 1 – 10.
- [2] Coriolis Force Flowmeter Data Evaluation Project, Final Report, (www.mms.gov/tarprojects/303.htm).
- [3] J. Hemp, Calculation of the Sensitivity of a Straight Tube Coriolis Mass Flowmeter with Free Ends, **Flow Measurement and Instrumentation**, 12(5-6), 2002, str. 411 – 420.
- [4] H. Durst, H. Raszillier, Flow in a Rotating Straight Pipe, With View on Coriolis Mass Flow Meter, **Journal of Fluids Engineering**, 112, 1990, str. 149 – 154.
- [5] Comet Version 2.00 – User Manual, Institute of Computational Continuum Mechanics GmbH (ICCM), 2001.
- [6] S. N. Barua, Secondary Flow in a Rotating Pipe, **Proceedings of Royal Society London**, Series A227, 1954, str. 133 – 139.
- [7] K. Mansour, Laminar Flow through a Slowly Rotating Straight Pipe, **Journal of Fluid Mechanics**, 150, 1985, str. 1 – 21.
- [8] H. Raszillier, F. Durst, Coriolis-effect in mass flow metering, **Archive of Applied Mechanics**, 61, 1991, str. 192 – 214.
- [9] J. Kutin, I. Bajsić, Stability-boundary effect in Coriolis meters, **Flow Measurement and Instrumentation**, 12(1), 2001, str. 65 – 73.
- [10] J. Kutin, I. Bajsić, An analytical estimation of the Coriolis meter's characteristics based on modal superposition, **Flow Measurement and Instrumentation**, 12(5-6), 2002, str. 345 – 351.
- [11] R. D. Blevins, **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**, Krieger, Malabar, 1995.

METODE PREPOZNAVNE POPLAVNEGA STANJA MEŠALA PRI AERACIJI V POSODI S TURBINSKIM MEŠALOM

A. Bombač¹ in I. Žun²

FLOODING RECOGNITION METHODS IN A TURBINE STIRRED VESSEL

POVZETEK:

V prispevku so obravnavane metode s katerimi lahko na različne načine zaznamo poplavno stanje pri dispergiranju plina v kapljevino v posodi z Rushtonovim mešalom. To so metode merjenja globalnih veličin, kot npr. minimalna moč mešala in maksimalni zadržek plinaste faze ter metoda zaznave lokalnih karakteristik faznega stika. Eksperiment je potekal pri dispergiranju zraka v vodo ter pri dispergiranju zraka v vodno raztopino karboksi-metil celuloze (CMC) različnih koncentracij. Prikazani sta medsebojna primerjava rezultatov ter primerjava z rezultati kriterijev drugih avtorjev.

SUMMARY:

The paper presents some appropriate methods for flooding detection by the dispersion of gases into liquids in a stirred vessel equipped with a Rushton turbine. These methods are based on measurements of global properties such as mixing power minimum or gas holdup maximum, respectively, and a method based on local interfacial characteristics of two-phase systems. Experiments were performed by dispersing air into water and air into water-CMC solutions at different concentrations. A comparison of the results of the different methods is shown as well as a comparison with the results from criteria found in the literature.

1 UVOD

Pri dispergiranju plina v kapljevino v posodi z mešalom nastajajo na lopaticah mešala plinske votline, ki predstavljajo osnovni mehanizem dispergiranja. V odvisnosti od količine dovedenega plina in vrtilne frekvence mešala ter od transportnih lastnosti kapljevine nastajajo na lopaticah mešala različne strukture plinskih votlin. Z večanjem pretoka zraka dosežemo neko maksimalno vrednost preko katere mešalo ne dispergira več celotne količine dovedenega zraka, plin mešalo obteka. To stanje se imenuje poplavno stanje. Z vidika prenosa toplote in snovi je poplavno stanje neučinkovita operacija, zato je nujno, da poznamo veličine kot sta pretok plina q in vrtilna hitrost n pri katerih pride do poplavnega stanja.

Prispevek obravnava zaznavo poplavnega stanja mešala pri dispergiranju zraka v vodi v posodi z Rushtonovim mešalom ter nastanek poplavnega stanja mešala pri dispergiranju zraka v psevdoplastični kapljevini različnih viskoznostih. Pri dispergiranju v vodo je bil prehod iz dispergirnega v poplavno stanje določen na osnovi spremembe globalnega deleža plina, razmerja moči mešala in zaznave plinaste faze. Iz medsebojne primerjave teh treh metod je ugotovljeno, da

¹ doc.dr. Andrej Bombač, u.d.i., UL, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

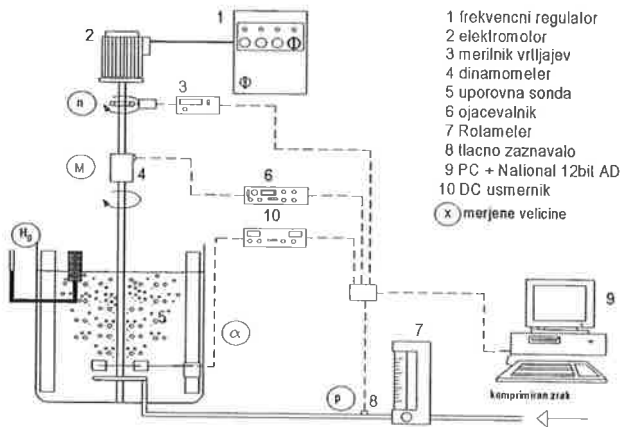
² prof.dr. Iztok Žun, u.d.i., UL, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

pri enostopenjskem mešalu dovolj dobro prepoznamo poplavno stanje z vsemi tremi metodami. Nastanek poplavnega stanja pri dispergiranju v viskozni psevdoplavstični kapljevini je opažen pri višjih pretočnih številih. Strukture plinskih votlin na lopaticah so bolj stabilne, plinske votline so praviloma večje kot v vodi. Z večanjem viskoznosti kapljevine se večja tudi pretočno število pri katerem je mešalo poplavljeno, pri kritičnih vrednostih pretokov zraka pa je lahko popolnoma oblitno z zrakom.

2 EKSPERIMENT

2.1 Eksperimentalna naprava

Eksperiment je bil izveden v pokončni cilindrični posodi notranjega premera $T = 450$ mm z zaobljenimi robovi in ravnim dnom. V posodi narejeni iz pleksi stekla z bili osno simetrično nameščeni motilniki toka. Uporabljeno je bilo Rushtonovo mešala s šestimi lopaticami. Zrak je bil doveden z obročastim razpršilnikom. Shematski prikaz je podan na sliki 1.



Slika 1: Merilna linija

Uporabljena sta bila kationsko mehčana voda in vodno raztopino CMC ter stisnjen zrak iz pnevmatskega voda pri sobni temperaturi. Podrobnejši opis mešalne posode in sestavnih elementov so prikazana (Bombač s sod. 1997, Bombač 1998).

2.2 Merilna linija

Merjenje fizikalnih veličin, prikazano na sliki 1, je bilo vodeno centralno prek ustreznih zaznaval in merilnikov z osebnim računalnikom, ki ima vgrajeno enoto za zbiranje podatkov. Pri tem je osebni računalnik služil predvsem za zbiranje izmerkov in kasnejšo obdelavo podatkov. Merilna linija je podrobneje opisana v delih (Bombač s sod. 1997, Žun in Bombač 1998).

Hitrost mešala je bila merjena z števnikom impulzov, ki deluje na principu odboja lastnega signala. Naprava je bila izdelana na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani z razredom točnosti 0,1. Vrtilni moment gredi je bil merjen z dinamometrom razreda točnosti 0,2 v merilnem razponu od 0 do 10 Nm. Volumski pretok zraka je bil merjen z rotametrom. Uporabljene so bile tri merilne cevi, vse z razredom točnosti 2. Za omogočanje meritev večjih pretokov od $30 \text{ m}^3/\text{h}$ sta bila vzporedno vezana dva rotametra. Globalni delež plinaste faze (α_g) je bil merjen po principu vezne posode (Rushton in Bimbinet 1964), prikazano na sliki 1. Mrežasti ovoj na merilni lokaciji $2/3$ radija posode zagotavlja vodni stolpec brez mehurčkov, ki na zunanji strani kaže višino gladine dvofaznega sistema v posodi. Za obratovne pogoje eksperimentalne naprave so pri danih omejitvenih pogojih in točnosti merilne opreme izračunani tudi relativni pogreški (Turk 1999)

sledečih veličin: maksimalni merilni pogrešek momenta 16,1% (pri najnižjih vrtljajih), merilni pogrešek merjenja vrtilne frekvence 0,5%, relativni pogrešek merjenja temperature $\pm 0,5\%$, relativni pogrešek merjenja tlaka s tlačnim senzorjem $\pm 2\%$, relativni pogrešek Froudovega števila $\pm 1\%$, relativni pogrešek pretočnega števila $\pm 1,1\%$ in relativni pogrešek globalnega deleža plinaste faze $\pm 0,22\%$.

2.3 Merilne metode

2.3.1 Metoda zmanjšanja moči

Moč je bila izračunana iz izmerkov vrtilne hitrosti in zaviralnega momenta mešalne osi (podrobnejši opis v delu Žun in Bombač 1997). Na splošno se z večanjem pretoka plina pri dispergiranju moč mešala zmanjšuje in doseže najnižjo vrednost tik pred nastankom poplavnega stanja. Pri nastanku poplavnega stanja se moč mešala poveča, kar je povezano s spremembo struktur plinskih votlin na lopaticah mešala (Lu in Chen 1986, Nienow s sod. 1985, Žun in Bombač 1997). Poplavno stanje je iz krivulje razmerja moči P/P_0 prepoznavno po izrazitem porastu vrednosti P/P_0 . Pri poplavnem stanju mešalo plin obteka, mešalo zajema skoraj v celoti kapljevino, kar se odraža s porastom moči mešala.

2.3.2 Globalni delež plinaste faze

Globalni delež plinaste faze je bil določen kot razmerje med prirastkom volumna zaradi vnesene plinaste faze in celotnim volumnom dvofaznega sistema, kar je lahko za posodo konstantnega prereza prevedeno v obliko:

$$\alpha_g = \frac{H_g - H_0}{H_g} \quad (1)$$

S povečevanjem vnosa plina v posodo se viša tudi gladina dvofaznega sistema do neke mejne vrednosti, ki je pogojena z nastankom poplavnega stanja. Pri prehodu iz dispergirnega v poplavno stanje je opazno znižanje gladine. Do te spremembe pride zaradi izrazito nehomogene porazdelitve plinaste faze po volumnu kapljevine, kar je pogojeno s spremembo struktur plinskih votlin na lopaticah mešala. Pri poplavnem stanju iztekanje dvofaznega toka iz mešala ni več radialno, vstopajoč plin začne obtekat mešalo ter se ob osi mešala dviguje nedispergiran proti prosti površini.

2.3.2 Metoda karakteristik faznega stika

Prehod iz dispergirnega v poplavno stanje je lahko zaznati z izrazito spremembo lokalnega deleža plinaste faze v izstopajočem toku iz mešala, kot tudi s spremembo strukture plinskih votlin. Eksperimentalna metoda, ki temelji na lokalni zaznavi (z uporabo sonde) plinaste faze v izstopajočem toku mešala, je podrobneje opisana v delu (Bombač s sod. 1997).

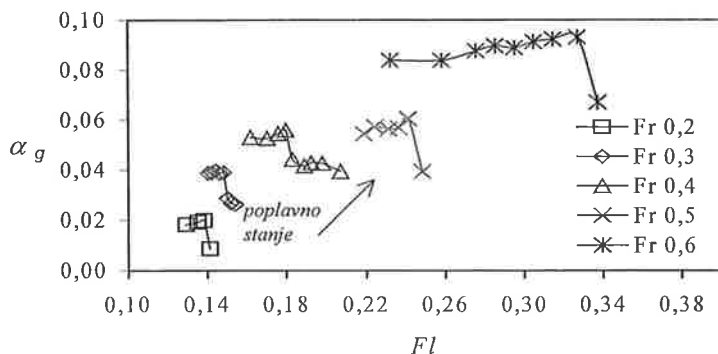
3. ANALIZA REZULTATOV IN PRIMERJAVA

3.1 Nastanek poplavnega stanja pri dispergiranju zraka v vodi

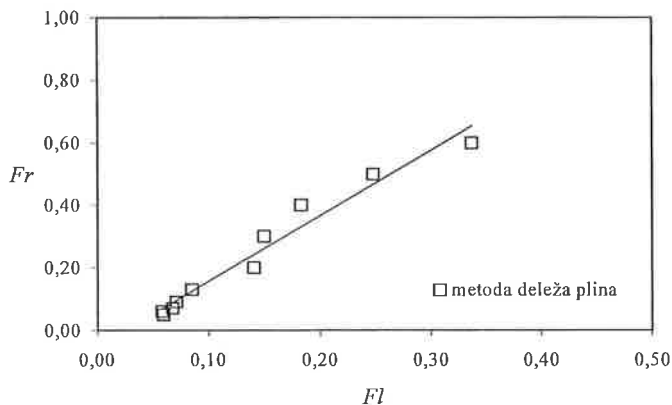
3.1.1 Metoda globalnega deleža plinaste faze

Nastanek poplavnega stanja je predstavljen pri tisti vrednosti pretočnega števila, ko je opazen očitni spust gladine dvofaznega sistema. Na osnovi spremembe nivoja gladine lahko prepoznavno poplavna stanja le za vrednosti Fr od 0,05 do 0,6. Kot primer so na sliki 2 prikazane α_g pri $Fr = 0,2$ do 0,6 v odvisnosti od Fl . Viden je enakomeren porast deleža plina pri povečevanju vnosa zraka, sledi močno zmanjšanje vrednosti v točki poplavnega stanja. Pri nadaljnjem večanju pretoka zraka se zaradi večjih mehurčkov in večje količine plina v stebri plina okoli osi gladina lahko znova rahlo zviša, kar pa z vidika učinkovitosti operacije ni smiselno. Pri večjih vrednostih Fr je vnesena količina zraka že tako velika, da ob nastanku poplavnega stanja v reaktorju težko zaznamo gladino dvofaznega sistema. Pojavlja se namreč močno nihanje gladine s 'pljuskanjem' vode, kar je za odčitavanje višine gladine nezanesljivo.

V literaturi so razmejitvene linije različnih struktur dvofaznih tokov v odvisnosti od hidrodinamskih pogojev (n, q) običajno prikazane v tokovni mapi. V našem primeru je razmejitvena linija



Slika 2: α_g v odvisnosti od Fr in Fl



Slika 3: Nastanek poplavnega stanja določen z metodo globalnega deleža plinaste faze

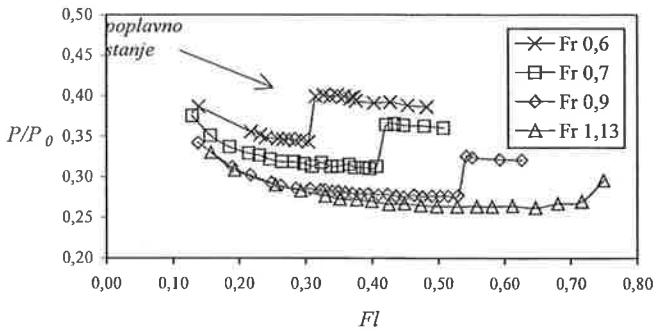
poplavnega stanja prikazana v obliki diagrama izraženega z brezdimenzijskimi števili Fr in Fl (Warmoeskerken in Smith 1985, Nienow s sod. 1985), ki je prikazana na sliki 3. Podana je tudi ustrezna regresijska premica, katere koeficienti so prikazani v tabeli poglavja 3.1.4.

3.1.2 Metoda zmanjšanja moči

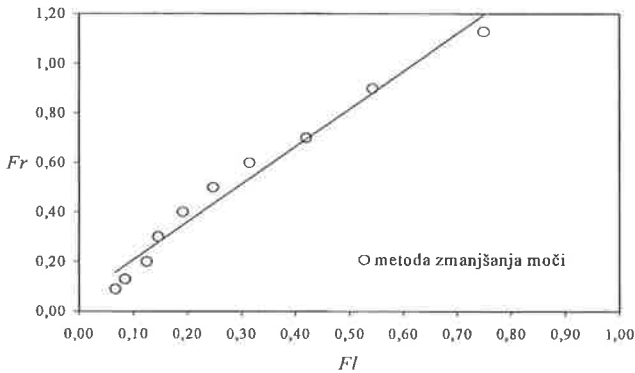
S to metodo je bil zaznan nastanek poplavnega stanja pri vrednostih Fr od 0,13 do 1,13. Na sliki 4 so podane tipične krivulje razmerja moči P/P_0 pri katerem je v poplavnem stanju opazen porast razmerja moči. Pri manjših vrednostih Fr (0,05, 0,06, 0,07 in 0,09) metoda ni dala relevantnih vrednosti. Razlog je lahko v premajhni moči mešala, saj so izmerki vrtilnega momenta mešala enakega velikostnega razreda kot odstopki merilnika vrtilnega momenta. Na sliki 5 so prikazane vse prepoznane točke poplavnega stanja v odvisnosti števil Fr-Fl z metodo zmanjšanja moči, podana je tudi ustrezna regresijska premica, katere koeficienti so prikazani v tabeli poglavja 3.1.4.

3.1.3 Metoda karakteristik faznega stika pri zaznavi plinskih votlin

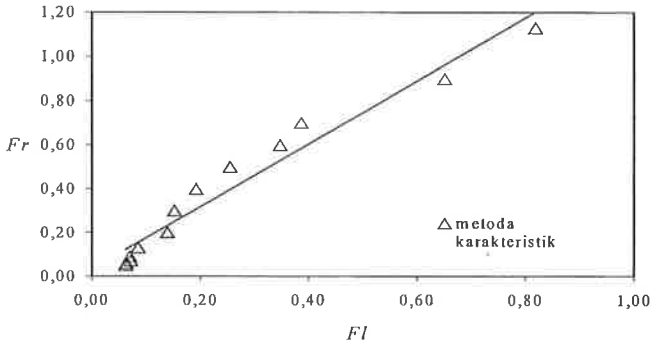
Na osnovi eksperimentalne metode podrobneje opisane v (Bombač s sod.1997) so bili določeni hidrodinamski režimi nastanka poplavnega stanja. Slika 6 podaja vrednosti n in q poplavnega stanja izražene z brezdimenzijskimi števili Fl in Fr ter pripadajočo regresijsko premico.



Slika 4: Razmerje moči P/P_0 za $Fr = 0,6$ do $1,13$ pri enem mešalu v vodi



Slika 5: Poplavno stanje določeno z metodo porasta moči



Slika 6: Poplavno stanje določeno z metodo karakteristik faznega stika

3.1.4 Primerjava rezultatov različnih metod

Z metodo prirastka deleža plina ni bilo možno določiti poplavnega stanja predvsem pri večjih pretokih zraka, z metodo zmanjšanja moči pa predvsem pri nižjih pretočnih številih. Z metodo karakteristik faznega stika je bilo možno prepoznati poplavno stanje v celotnem območju merjenih režimov. Za prepoznana poplavna stanja določena z vsemi tremi metodami so bile izdelane premice izražene z enačbo:

$$Fr_F = k_1 + k_2 \cdot Fl_F \quad (2)$$

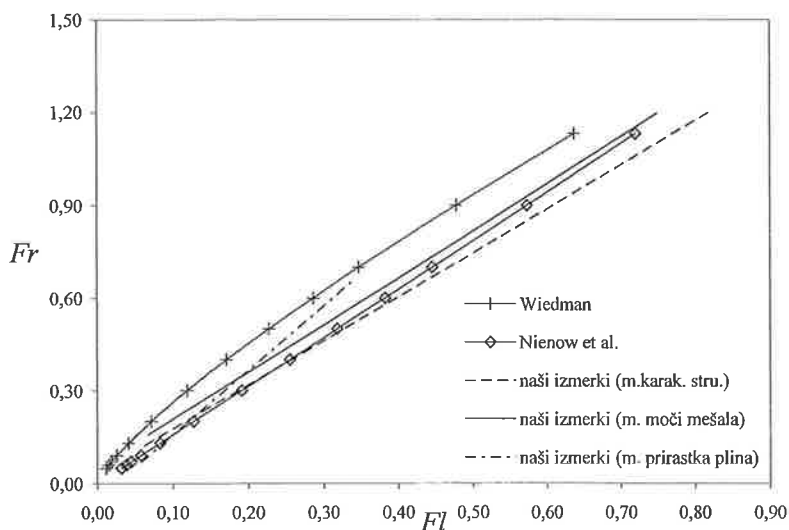
kjer so vrednosti posameznih faktorjev prikazane v sledeči tabeli:

metoda	k_1	k_2	r
prirastek glob. d. pl. faze	-0,54	2,1	0,96
porast moči	0,05	1,5	0,97
karakt. struktur	0,33	1,4	0,96

Primerjava rezultatov kaže, da so vse tri metode primerne za določitev poplavnega stanja mešala. Najmanjše medsebojno razhajanje je opaziti med metodo prirastka globalnega deleža plinaste faze in metodo lokalnih karakteristik. Glede na to, da ima sistem le eno mešalo, se lokalne spremembe na lopaticah mešala odražajo enoznačno tudi na globalni ravni. To se izraža kot zmanjšanje globalnega deleža plina oziroma kot povečanje moči mešala.

3.1.5 Medsebojna primerjava rezultatov z drugimi avtorji

Slika 7 prikazuje primerjavo rezultatov za eno mešalo z rezultati kriterijev drugih avtorjev. Primerjani so le kriteriji, ki se nanašajo na enaka geometrijska razmerja in podobno velikost reaktorja.



Slika 7: Primerjava rezultatov nastanka poplavnega stanja z rezultati drugih avtorjev

Tako je po Wiedmanu (1983), kriterij izhaja iz meritev prirastka deleža plinaste faze, meja poplavnega stanja v reaktorju premera $T = 45$ cm ter pri $D/T = 1/3$ definirana:

$$n_F = 2,694 \cdot q_F^{0,283} \cdot T^{-1,207} \quad (3)$$

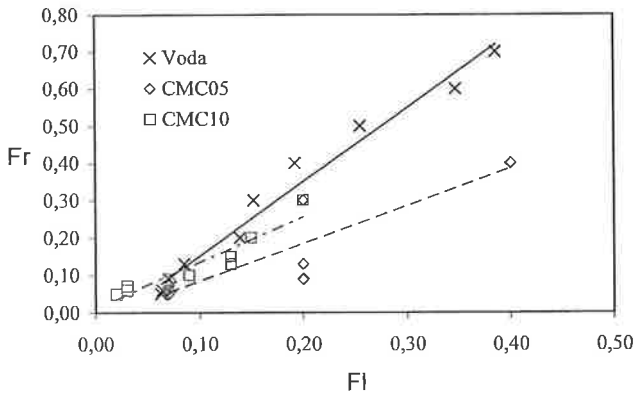
Nienow s sod. (1985) je na osnovi porasta moči postavil korelacijo, ki zajema tudi različno geometrijsko razmerje $1/3 \leq D/T \leq 2/3$ in velikost posode $0,29 \leq T \leq 1,2$ [m]:

$$Fl_F = 30 (D/T)^{3,5} Fr_F. \quad (4)$$

Rezultati naših meritev se najbolje ujemajo z rezultati po kriteriju Nienowa. Omenjena kriterija veljata izključno za Rushtonovo mešalo pri dispergiranju zraka v vodi.

3.2 Nastanek poplavnega stanja pri dispergiranju zraka v raztopini CMC

Dispergiranje zraka v vodni raztopini CMC je potekalo z Rushtonovim mešalom. Ta eksperiment je bil izveden na isti merilni liniji, izsledki pa izhajajo iz meritev objavljenih v (Bombač s sod. 1996). Meritve so potekale po enaki proceduri kot pri dispergiranju zraka v vodo. Strukture plinskih votlin (prikazane v delu Bombač in Žun 1997), so predstavljene v splošno znanem diagramu struktur izraženem z brezdimenzijskimi števili $Fr-Fl$. Plinske votline so v psevdoplastični kapljevini večje in imajo drugačno obliko, opažen je bil tudi pojav, pri katerem ostanejo plinske votline na lopaticah mešala še po zaprtju dovoda zraka.



Slika 8: Nastanek poplavnega stanja pri dispergiranju zraka v vodo in raztopino CMC

Pri psevdoplastični tekočini poteka prehod v iz dispergirnega v poplavno stanje preko strukture L6 (Bombač in Žun 97), kar se odraža z nastankom poplavnega stanja pri precej večjih pretokih dovedenega zraka. Pomembna je ugotovitev, da je porazdelitev plinaste faze po volumni kapljevine pri 0,5% CMC z Rushtonovim mešalom še dokaj zadovoljivo, medtem ko je dispergiranje v 1% raztopini verjetno že meji na ne efektivno operacijo.

4. ZAKLJUČEK

Obravnavana je bila zaznava poplavnega stanja pri dispergiranju zraka v vodi in v raztopini karboksil - metil celuloze v posodi z Rushtonovim mešalom.

Poplavno stanje je bilo zaznano s tremi različnimi metodami, kot so: metoda maksimalnega prirastka plinaste faze, metoda zmanjšanja moči mešala in metoda lokalnih karakteristik faznega stika.

Narejena je bila primerjava rezultatov posameznih metod in ocena primernosti uporabe posamezne metode za določitev poplavnega stanja. Poplavno stanje mešala zaznano z vsemi tremi metodami. Rezultati vseh treh metod se med seboj dobro ujemajo, za industrijsko uporabo lahko uporabimo katerokoli od omenjenih metod. Glede na to, da je na gredi le eno mešalo se lokalna sprememba kaže neposredno na globalni ravni.

Zahvala

To delo je del večjega projekta J2-7517, ki ga financira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije.

Oznake

D = premer mešala, m

g = zemeljski pospešek, m/s^2

n = vrtilna frekvenca mešala, s^{-1}

P = moč pri mešanji kapljevine, W

q = volumski pretok zraka, m^3/s

T = premer posode, m

Fl = pretočno število, $q/(n \cdot D^3)$

Fr = Froudovo število, $D \cdot n^2/g$

α = globalni delež plinaste faze, %

Indeksi:

f = poplavno stanje

g = pri dispergiranju plina v kapljevino

LITERATURA

Bombač, A., Vpliv geometrijskih parametrov na Newtonovo število pri aeraciji v posodi z mešali, Strojniški vestnik (44) št. 3-4, 1998.

Bombač, A., Žun, I., Žumer, M., Turk, J., Strukture plinskih votlin pri dispergiranju zraka v psevdoplastično tekočino s turbinskim mešalom, Kuhljevi dnevi, Gozd-Martuljek, Slovensko društvo za mehaniko, 1996.

Bombač, A., Žun, I., Filipič, B., Žumer, M., Gas-Filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Aerated Stirred Vessel, AIChE J., Nov 1997.

Bombač, A., Žun, I. Gas-filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Vessel with Dual-Impellers. ChemEngSci, (55), 15, 2000.

Lu, W., Chen, H., Flooding and Critical Impeller Speed for Gas Dispersion in Aerated Turbine-Agitated Vessels, Chem. Eng. Jour. 33, 1986.

Nienow, A. W., Warmoskerken, M. M. C. G., Smith, J. M., Konno, M., On Flooding/Loading Transition and the Complete Dispersal Condition in Aerated Vessels Agitated by a Rushton-Turbine, 1985, Proc 5th European Conference on Mixing, Wuerzburg, June 10-12. BHRA Fluid Enginireeng Cranfield, p. 143-154.

Rushton, J. H., Bimbinet, J. J., Hold-up and flooding in air-water mixing, Can J. Chem. Eng., 46, 1964.

Turk, J., Poplavno stanje pri večstopenjskem turbinskem mešalu, Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, FS, Ljubljana, 1999.

Warmoskerken, M. M. C. G., Smith, J. M., Flooding of disc turbines in Gas-Liquid Dispersion, Chem. Eng., 40, 1985.

Wiedmann, J.A., Zum Ueberflutungsverhalten Zwei- und Dreiphasig Betriebener Rhuereaktoren. Chem.Ing.Tech., 55, 9, 1983

Žun, I., Bombač, A., An Application of Local Void Fraction Measurements in Discharge Flow of Single and Dual Rushton Turbine, Proc. 9th European Conference on Mixing/Mixing 97/Multiphase systems, Paris, (1997) 153.

NESTACIONAREN NESTISLJIV POTENCIALEN TOK OKROG PROFILA SPREMENLJIVE UKRIVLJENOSTI

Mihael Mesarič¹ in Franc Kosel²

UNSTEADY INCOMPRESSIBLE POTENTIAL FLOW AROUND AN AIRFOIL WITH VARIABLE CAMBER

POVZETEK

V prispevku predstavljamo analitično rešitev določitve aerodinamične obremenitve na profilu s spremenljivo amplitudo ukrivljenosti parabolične skeletnice v okviru modela nestacionarnega nestisljivega potencialnega toka. Rezultat zapisan v časovni in frekvenčni domeni predstavlja razširitev obstoječe rešitve nestacionarnega toka okrog togega profila. Analitično rešitev smo preverili z numerično metodo na primeru stopničaste in harmonične spremembe ukrivljenosti profila. Podana rešitev omogoča snovanje aktivnega krmiljenja ukrivljenosti profila v realnem času z namenom dušenja dinamičnih aeroelastičnih pojavov, vibracij in hrupa.

ABSTRACT

Presented paper discuss the analytical solution for the calculation of the unsteady load on the airfoil with variable amplitude of the parabolic camber, which is evaluated for the unsteady incompressible potential flow. The solution given in time as well as in frequency domain represents an extension of the existing solution of the unsteady flow around the rigid airfoil. The solution derived was confirmed with the numerical method for the case of a step and harmonic variation of airfoil camber. The presented solution offers a possibility to design an active control of the airfoil camber in real time for the purpose of damping of the aeroelastic phenomena, vibration and noise.

¹ mag. Mihael Mesarič, univ.dipl.inž., ² prof. dr. Franc Kosel, univ.dipl.inž.

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

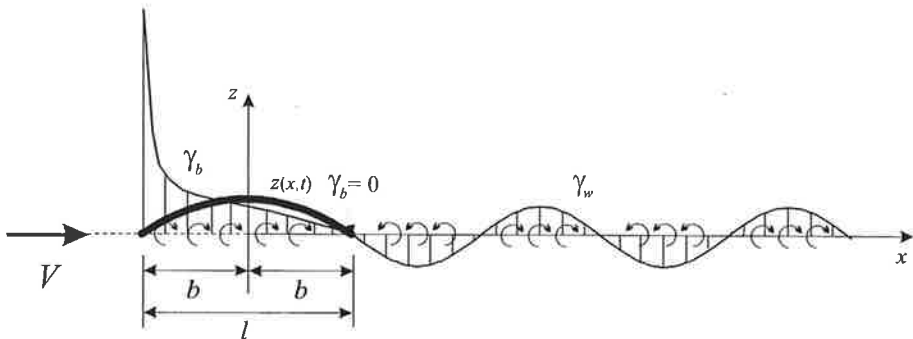
1. UVOD

Z uporabo sodobnih materialov in aktuatorjev lahko izdelamo profil ali aerodinamično površino zrakoplova s spremenljivo geometrijo [1,2]. Počasne spremembe geometrije nudijo možnost optimiranja oblike glede na režim leta zrakoplova medtem ko hitre spremembe nudijo možnost dušenja dinamičnih aeroelastičnih pojavov, vibracij in hrupa. Iz teh razlogov smo po analitični poti rešili problem določitve nestacionarne aerodinamične obremenitve na tankem profilu s spremenljivo amplitudo ukrivljenosti. Rešitev je dobljena ob predpostavki nestisljivega potencialnega toka in nudi možnost analize dinamičnih pojavov v realnem času. Predstavlja razširitev analitične rešitve omejene na tog profil podane v [3-6]. V prispevku se bomo omejili na parabolično ukrivljenost skeletnice. Popis skeletnice s polinomom višjega reda pa nam omogoča premikanje položaja največjega odmika skeletnice od tetive vzdolž globine profila.

2. TEORETIČNE OSNOVE

Predpostavimo, da ima skeletnica obliko parabole, pri čemer je odmik od x osi poljubna časovna funkcija (Slika 1). Če je χ amplituda ukrivljenosti profila, odmik skeletnice od tetive kot funkcijo kraja in časa podaja enačba:

$$z(x,t) = \left[1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \chi(t) \quad (1)$$



Slika 1: Model profila s skeletnico v obliki parabole [7]

Ob predpostavki o majhni ukrivljenosti profila, je hitrost v smeri normale na poljubno točko na skeletnici profila, zaradi hitrosti prostega toka V in spremembe ukrivljenosti skeletnice, določena z naslednjim izrazom [7]:

$$w(x,t) = V \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = V \frac{2x}{b^2} \chi(t) + \left[1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right] \dot{\chi}(t) \quad (2)$$

Ob enakih predpostavkah kot pri klasični teoriji tankih profilov tetivo nadomestimo z vrtnično ploskvijo. Prav tako vrtnično sled za profilom nadomestimo z ravno vrtnično ploskvijo. Robni pogoj, da preko skeletnice ni pretoka nato zapišemo kot [6]

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma_b(\xi)}{x-\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \frac{\gamma_w(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (3)$$

kjer člena na desni predstavljata inducirani hitrosti zaradi porazdeljene jakosti cirkulacije vzdolž tetive profila γ_b in vrtnične sledi za profilom γ_w . Upoštevati moramo pogoj Kutta-Joukowskega ter Kelvinov teorem. Preko integracije porazdelitve jakosti cirkulacije po tetivi profila dobimo skupno cirkulacijo okrog profila Γ , ki je po teoremu Joukowskega proporcionalna vzgonu profila L :

$$\Gamma(t) = \int_{-b}^b \gamma_b(x, t) dx \quad (4)$$

Za čisto harmonično spreminjanje ukrivljenosti profila $\chi(t) = \chi_0 e^{i\omega t}$ predpostavimo, da mora biti tudi porazdelitev jakosti cirkulacije v vrtnični sledi harmonična. Po nekaj korakih izpeljemo izraz, ki nam podaja vzgon na tankem profilu v odvisnosti od frekvence in amplitude spreminja ukrivljenosti skeletnice:

$$L = L_Q \cdot C(k) + L_{NC} \quad (5)$$

V zgornjem izrazu $C(k) = F(k) + iG(k)$ predstavlja Theodorsenovo funkcijo, ki je enolično definirana glede na reducirano frekvenco $k = \omega b/V$ in podaja zmanjšanje amplitude vzgona ter fazni zamik glede na kvazistacionarno vrednost. Z L_Q označimo kvazistacionarni vzgon ter z L_{NC} necirkulatorni vzgon, ki sta za primer parabolične skeletnice podana z naslednjima izrazoma:

$$L_Q = 2\pi\rho Vb \left(\frac{V}{b} \chi - \frac{1}{2} \dot{\chi} \right) \quad L_{NC} = -\frac{3}{4} \pi \rho b^2 \ddot{\chi} \quad (6)$$

Iz enačbe (6) izrazimo odvisnost koeficienta vzgona C_l od reducirane frekvence k in amplitude ukrivljenosti skeletnice χ_0 :

$$C_l = \left[(2 - ik)C(k) + \frac{3}{4} k^2 \right] \frac{\pi \chi_0}{b} e^{iks} \quad (7)$$

Po analognem postopku izpeljemo izraz za izračun koeficienta momenta okrog poljubne točke, odmaknjene za $a \cdot b$ od sredine profila:

$$C_m = \left[\left(\frac{1}{2} + a \right) (2 - ik) C(k) - \left(1 + \frac{1}{2} ik - \frac{3}{4} ak^2 \right) \right] \frac{\pi \chi_0}{2b} e^{iks} \quad (8)$$

Enačbi (7) in (8) podajata nestacionarni vzgon in moment pri harmoničnem spreminjanju ukrivljenosti skeletnice parabolične oblike pri določeni reducirani frekvenci k . Izraza sta dobljena po linearizaciji enačb potencialnega toka in robnih pogojev. Zato lahko nestacionarne aerodinamične obremenitve pri poljubnem spreminjanju ukrivljenosti skeletnice poiščemo preko

superpozicije. Poljubno spreminjanje amplitude ukrivljenosti skeletnice $\chi_0(t)$ zapišemo s Fourierovim integralom:

$$\chi_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (9)$$

Poseben primer, ki ga tudi lahko rešimo na ta način je določitev aerodinamične obremenitve na stopničasto spremembo ukrivljenosti skeletnice, kar zapišemo kot:

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \chi^* = \left(\chi_0 - \frac{1}{2} \frac{b}{V} \dot{\chi}_0 \right) & t > 0 \end{cases} \quad (10)$$

S pomočjo Fourierovega integrala zapišemo cirkulatorni del vzgona po stopničasti spremembi ukrivljenosti skeletnice kot:

$$L_c = 2\pi\rho V^2 \chi^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{C(k)}{ik} e^{iks} dk = 2\pi\rho V^2 \chi^* \phi(s), \quad (11)$$

kjer je $s = Vt/b$ brezdimenzijski čas oz. pot, ki jo opravi profil, normirana z dolžino polovice tetive. Integral v enačbi (11) predstavlja Wagnerjevo funkcijo $\phi(s)$. Skupni vzgon profila pri poljubnem spreminjanju amplitude skeletnice v odvisnosti od časa izračunamo preko konvolucijskega integrala:

$$L = \frac{3}{4} \pi \rho b^2 \ddot{\chi} + 2\pi\rho V^2 \left[\chi^*(0)\phi(s) + \int_0^s \frac{\partial \chi^*(\sigma)}{\partial \sigma} \phi(s-\sigma) d\sigma \right] \quad (12)$$

Wagnerjeve funkcije ni moč zapisati v analitični obliki, zato jo običajno aproksimiramo z eksponentno funkcijo po Jones-u [8]. Izračun konvolucijskega integrala v (12) pa izvedemo z numerično metodo oz. preko zapisa z vektorjem stanja [8,9].

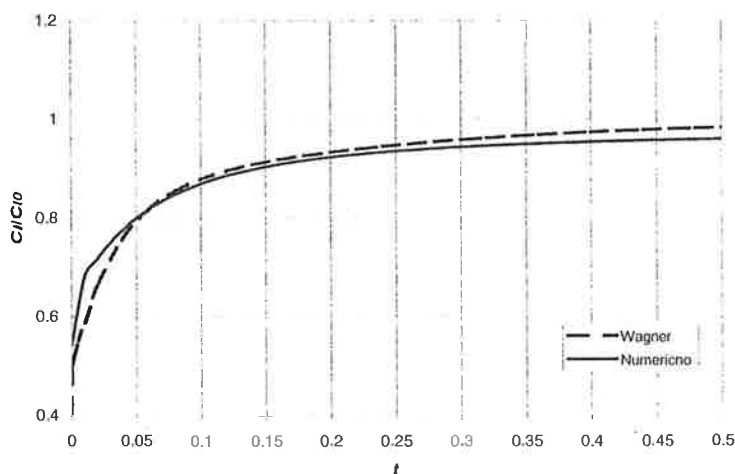
Za primerjavo dobljenih analitičnih rezultatov, smo v okviru numerične koračne metode [10] popisali tudi časovno spreminjanje skeletnice profila [7]. Znotraj posameznega časovnega koraka je potrebno določiti položaj točkovnih vrtincev in kontrolnih točk. V kontrolnih točkah je pri izpolnitvi robnega pogoja potrebno zajeti tudi relativno hitrost skeletnice. Zaradi tega je numerična koračna metoda določitve nestacionarne obremenitve na profil s spremenljivo geometrijo računsko intenzivnejša kot v primeru togega profila.

3. REZULTATI IN DISKUSIJA

Predstavili bomo časovni odziv aerodinamične obremenitve pri stopničasti in harmonični spremembi amplitude ukrivljenosti parabolične skeletnice. V vseh podanih primerih so skupni naslednji parametri: hitrost prostega toka $V = 50$ m/s, dolžina tetive $l = 1$ m, krožna frekvenca $\omega = 10$ rad/s, amplituda ukrivljenosti skeletnice $\chi_0 = 0.1$ m. Sledi, da je reducirana frekvenca $k = 0.1$.

Stopničasta sprememba ukrivljenosti

V začetnem trenutku ima profil ravno skeletnico in je postavljen v prosti tok pod vpadnim kotom 0° . Ob času $t = +0$ s spremenimo obliko profila tako, da ima skeletnica obliko parabole in amplitudo ukrivljenosti χ_0 . Časovna odvisnost razmerja koeficienta vzgona c_l napram statični vrednosti c_{l0} je podana na sliki 2. Razberemo lahko dobro ujemanje normirane vrednosti koeficienta vzgona dobljene z numerično koračno metodo (40 elementov) in preko analitične rešitve. Vzrok manjšega odstopanje je Jones-ova aproksimacija Wagnerjeve funkcije. Koeficient momenta okrog aerodinamičnega centra je ob času $t > 0$ enak statični vrednosti $c_{mac0} = -1/2\pi\chi_0/b$.



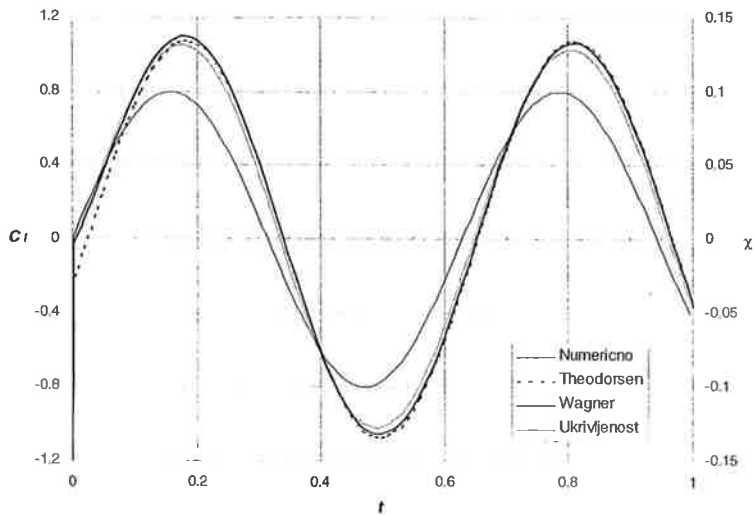
Slika 2: Časovna odvisnost razmerja koeficienta vzgona c_l napram statični vrednosti c_{l0} po stopničasti spremembi ukrivljenosti profila

Harmonična sprememba ukrivljenosti

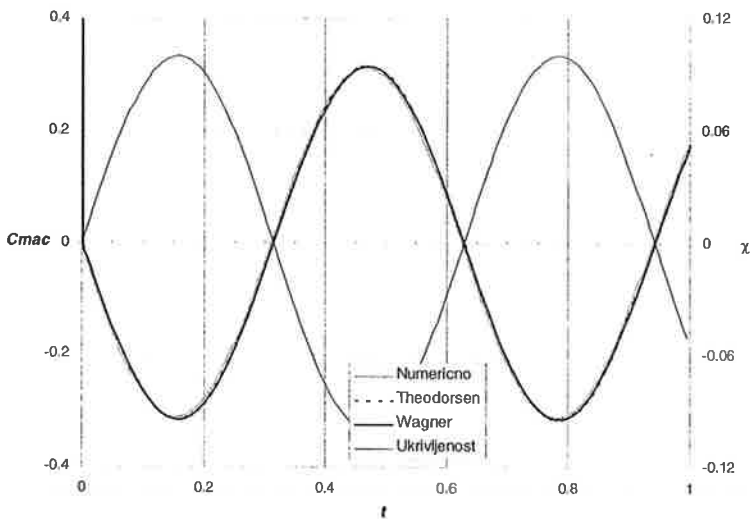
Časovno odvisnost aerodinamične obremenitve na profil s harmonično spremembo ukrivljenosti parabolične skeletnice smo izračunali v frekvenčni domeni z uporabo Theodorsenove funkcije in v časovni domeni preko zapisa s spremenljivkami stanja in Jones-ovo aproksimacijo Wagnerjeve funkcije. Za primerjavo pa nam služi numerična koračna metoda, pri kateri smo skeletnico popisali s 40 elementi s točkovnim vrtincem.

Rezultati dobljeni po vseh treh metodah se ujemajo, kar je podano na slikah 3 in 4. Začetno odstopanje je vezano na prehodni pojav, začetek spreminjanja ukrivljenosti skeletnice, kar lahko opišemo samo v časovni domeni. Analitični zapis aerodinamične obremenitve v časovni domeni

preko Wagnerjeve funkcije je izpeljan iz analitičnega rezultata zapisanega s Theodosenovo funkcijo, zato je ujemanje rezultatov pričakovano.



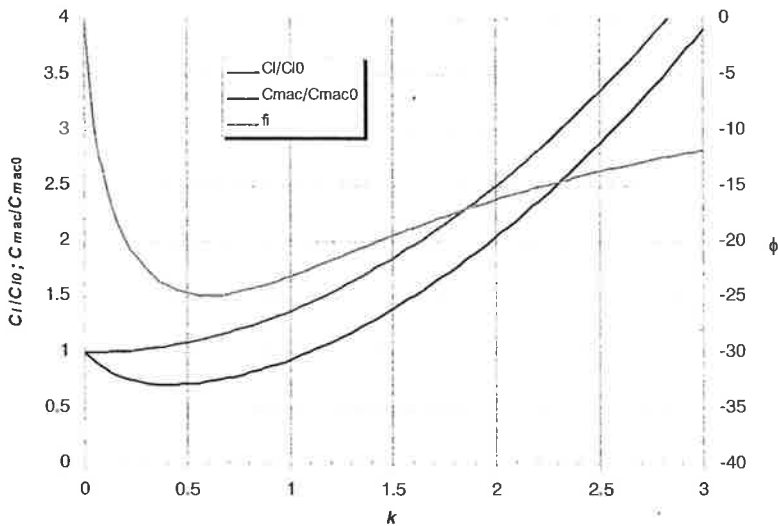
Slika 3: Časovna odvisnost koeficienta vzgona profila c_l pri harmonični spremembi ukrivljenosti profila



Slika 4: Časovna odvisnost koeficienta momenta profila c_{mac} okrog aerodinamičnega centra pri harmonični spremembi ukrivljenosti profila

Koeficient momenta smo določili glede na $\frac{1}{4}$ tetive, t.j. okrog aerodinamičnega centra. V tem primeru je vrednost c_{mac} enaka vsoti kvazistacionarne vrednosti in prispevka necirkulatornega dela aerodinamične obremenitve. Iz tega sledi, da praktično ni faznega zamika med ukrivljenostjo in vrednostjo koeficienta momenta okrog aerodinamičnega centra c_{mac} . Iz enačbe (8) pa lahko razberemo, da leži prijemališče vzgona v aerodinamičnem centru.

Odvisnost relativne amplitude koeficienta vzgona c_l/c_{l0} ter faznega zamika ϕ od reducirane frekvence k pri harmonični spremembi ukrivljenosti profila podaja slika 5. Fazno prehitjevanje vzgona je največje pri vrednosti $k = 0.6$, amplituda vzgona pa je najnižja pri vrednosti $k = 0.4$. Na sliki 5 je prav tako podana odvisnost relativne amplitude koeficienta momenta okrog aerodinamičnega centra c_{mac}/c_{mac0} . Med odvisnostjo c_{mac} in ukrivljenostjo skeletnice ni faznega zamika, amplituda pa narašča s kvadratom reducirane frekvence k .



Slika 5: Odvisnost relativne amplitude koeficienta vzgona c_l/c_{l0} in momenta c_{mac}/c_{mac0} ter faznega zamika ϕ od reducirane frekvence k pri harmonični spremembi ukrivljenosti profila

4. SKLEPI

V prispevku je predstavljena analitična rešitev določitve nestacionarne aerodinamične obremenitve na profil spremenljive ukrivljenosti skeletnice v nestisljivem potencialnem toku, ki je razširitev analitične rešitve podane v [3-6]. Sprememba ukrivljenosti profila povzroči spremembo vzgona in momenta. Aplikativna rešitev z uporabo aktuatorjev ali inteligentnih materialov tako nudi možnost dušenja vibracij, hrupa in aeroelastičnih pojavov, podobno kot aktivno torzijsko

zvitje aerodinamične površine in odklanjanje krmila. Analitična rešitev zapisana v frekvenčni in časovni domeni pa nudi možnost določitve nestacionarne aerodinamične obremenitve v realnem času. V prispevku smo se omejili na parabolično ukrivljenost skeletnice. Popis skeletnice s polinomom višjega reda pa nam omogoča premikanje položaja največjega odmika skeletnice od tetive vzdolž globine profila.

Analitično dobljene rezultate smo primerjali z rezultati, dobljenimi z numerično časovno koračno metodo, pri kateri skeletnico nadomestimo s singularnimi elementi s točkovnim vrtincem. V okviru predpostavke nestacionarnega nestisljivega potencialnega toka smo ugotovili ujemanje analitično in numerično dobljenih rezultatov. Skupen vpliv gibanja profila in spremembe ukrivljenosti skeletnice na aerodinamične obremenitve profila se lahko določi po principu superpozicije.

5. LITERATURA

- [1] Stanewsky, E. (2001) Adaptive wing and flow control technology. *Progress in Aerospace Sciences* 37 pp. 583 –667
- [2] Büter, A. in Breitbach, E. (2000) Adaptive Blade Twist – calculations and experimental results. *Aerosp. Sci. Technol.* 4, pp. 309–319
- [3] Theodorsen, T. (1935) General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. *NACA Report No. 496.*
- [4] Wagner, H. (1925) Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.* 5(1) pp. 17-35
- [5] Bisplinghoff, R.L., Ashley H. in Halfman R.L. (1983) Aeroelasticity. *Dover Publications.*
- [6] Johnson, W. (1980) Helicopter Theory. *Dover Publications.*
- [7] Mesarič, M. in Kosel, F. () Nestacionaren nestisljiv potencialen tok okrog profila – 1. in 2. del. *Sprejeto v objavo v Strojniškem vestniku.*
- [8] Leishman, J.G. (2000) Principles of Helicopter Aerodynamics. *Cambridge University Press.*
- [9] Leishman, J.G. in Nguyen, K.O. (1990) A State-Space Representation of Unsteady Aerodynamic Behaviour, *AIAA Journal* Vol. 28 (5), pp. 836-845.
- [10] Katz, J. in Plotkin, A. (1991) Low-speed Aerodynamics – From Wing Theory to Panel Methods. *Mc-Graw-Hill.*

IZRAČUN ČASOVNEGA RAZVOJA TEMPERATURNEGA POLJA PRI POLKONTINUIRNEM ULIVANJU ALUMINIJA

Jure Mencinger¹

CALCULATION OF TRANSIENT TEMPERATURE FIELD DURING SEMICONTINUOUS CASTING OF ALUMINIUM

POVZETEK

Prispevek predstavlja izračun časovnega razvoja temperaturnega polja v osno simetričnem ingotu, pri polkontinuirnem ulivanju industrijsko čistega aluminija. Sistem kapljevina-trdno je obravnavan enoobmočno s pomočjo modela kontinuumske mešanice. Za reševanje PDE je uporabljena metoda kontrolnih volumnov, pri čemer se računska mreža prilagaja naraščajoči računski domeni – ingotu. V začetni fazi ulivanja se računska mreža razteguje pri konstantnem številu kontrolnih volumnov. Po doseženi vnaprej predpisani dolžini ulivanja se kontrolni volumni dodajajo na spodnjem robu domene, pri čemer se nazadnje dodani kontrolni volumni raztegujejo, tisti nad njimi pa so fiksni.

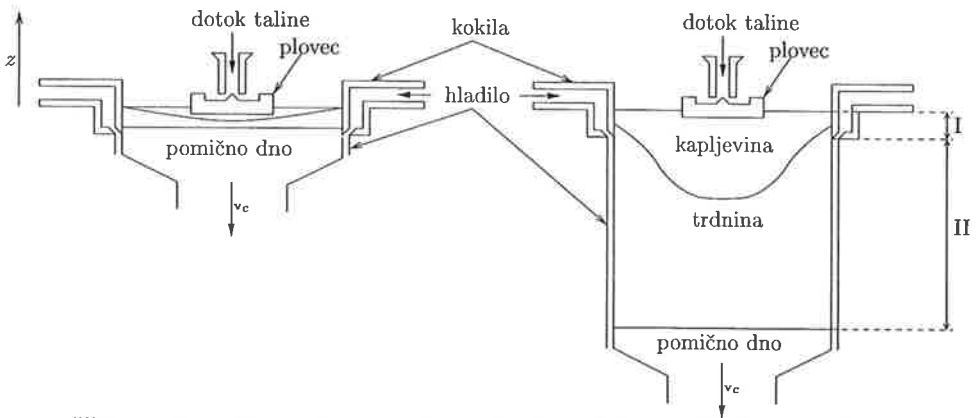
SUMMARY

This paper presents the calculation of transient temperature field in axial-symmetric ingot during semicontinuous casting of aluminium. The solid-liquid phase change system is treated with one domain continuum mixture model. The control volume method is used to solve the PDE, where the calculation grid adapts to the increasing calculation domain – the ingot. The grid with constant number of control volumes is stretched in the initial phase. After prescribed casting length is reached, control volumes are added at the bottom of the domain so that recently added control volumes are stretched and those above are fixed.

¹Politehnika Nova Gorica, Vipavska 13, 5000 Nova Gorica

1 Uvod

Kontinuirno ulivanje je standarden industrijski postopek, pri katerem talino ulivajo v kokilo brez dna, kot je shematično prikazano na sliki 1. Kokilo na začetku postopka zapira pomično dno in preprečuje iztek taline. V vodno hlajeni kokili se talina zadosti ohladi (primarno hlajenje), da iz nje „izteka“ ingot v trdni fazi. Dno se s predpisano hitrostjo ulivanja v_c pomika navzdol in nosi ingot, katerega obliva in dodatno hladi hladilna tekočina (sekundarno hlajenje), ki sicer hladi kokilo. Konstanten nivo taline v kokili zagotavlja keramičen plovec, ki v odvisnosti od nivoja regulira dotok taline.



Slika 1: Shematični prikaz ulivanja v začetni (levo) in kasnejši fazi (desno): I – območje primarnega hlajenja, II – območje sekundarnega hlajenja.

Numerične simulacije opisanega procesa običajno obravnavajo ustaljeno stanje v ingotu (npr. [1, 2, 3]), ki v začetni fazi ne obstaja. Z izračuni za ustaljeno stanje se ne da oceniti vpliva procesnih parametrov na ulivanje v začetni fazi postopka, ki je hkrati najbolj kritična faza, saj tedaj lahko pride do prodora taline. V prispevku predstavljeni izračun omogoča napoved temperaturnega polja tudi v začetni fazi ulivanja.

2 Model

Prispevek je omejen le na izračun temperaturnega polja v osno simetričnem ingotu. V ta namen je uporabljen t.i. enofazni model oziroma model kontinuumske mešanice [4], ki omogoča enoobmočno obravnavo računske domene (ingota), s katero se izognemo potrebi po eksplisitem izračunavanju položaja medfaznega roba. Poglavitna značilnost modela je uporaba funkcije prostorninskega deleža posamezne faze, ki ga označimo z $g_t = g_t(\mathbf{r}, t)$ za kapljevina-sto oziroma z $g_s = g_s(\mathbf{r}, t)$ za trdno fazo. V obravnavanem sistemu trdno–kapljevina, velja $g_t + g_s = 1$. Fazne deleže formalno vpeljemo z metodo povprečevanja po prostornini [5] tako,

da za izbrano prostornino V_0 definiramo povprečne količine². Prostorninski fazni delež je razmerje med velikostjo prostornine, ki jo v V_0 zavzema izbrana faza, in velikostjo V_0 . Količine kontinuumske mešanice so pravzaprav povprečja znotraj V_0 . Tako gostoto kontinuumske mešanice ρ zapišemo kot linearno kombinacijo $\rho = g_l \rho_l + g_s \rho_s$, kjer sta ρ_l in ρ_s gostoti posameznih faz. Podobno je specifična entalpija kontinuumske mešanice h definirana kot linearna kombinacija $h = f_l h_l + f_s h_s$, kjer sta h_l in h_s specifični entalpiji, f_l in f_s pa masna deleža posameznih faz ($f_l = g_l \rho_l / \rho$ in $f_s = g_s \rho_s / \rho$). Povezavo med specifično entalpijo in temperaturo podajata relaciji $h_s(T) = \int_{T_0}^T c_{ps}(T') dT' + h_0$ in $h_l(T) = h_s(T_s) + \int_{T_s}^T c_{pl}(T') dT' + h_M$, kjer sta c_{ps} in c_{pl} specifični toploti trdne in kapljevinaste faze pri konstantnem tlaku, h_M specifična talilna toplota, T_0 in h_0 pa izbrani referenčni vrednosti temperature in specifične entalpije ($h_s(T_0) = h_0$). Čeprav fazni prehod v čisti snovi poteka pri temperaturi tališča T_M , zaradi računskih razlogov privzamemo prehod na intervalu $[T_M - \Delta T, T_M + \Delta T]$ tako, da znotraj intervala velja $f_l(T) = \frac{T - T_M + \Delta T}{2\Delta T}$.

V okviru modela kontinuumske mešanice prenos toplote opisuje transportna enačba:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} h) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \nabla \cdot (\rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) (h_l - h)), \quad (1)$$

kjer je λ toplotna prevodnost mešanice ($\lambda = g_l \lambda_l + g_s \lambda_s$). Zadnji člen na desni v enačbi (1) predstavlja popravek konvektivnega člena zaradi različnih hitrosti posameznih faz. V obravnavanem primeru je ta člen identično enak nič, saj po vsej domeni privzamemo konstantno hitrost $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s = (0, 0, v_c)$.

3 Robni pogoji

Na področju primarnega hlajenja toplota prehaja iz ingota na kokilo, pri čemer je gostota toplotnega toka j v zgornjem delu kokile bistveno večja od tiste na spodnjem. Vzrok za to je krčenje ingota pri strjevanju, kar povzroči nastanek zračne špranje med ingotom in kokilo. Pojav je možno modelirati [2] z zapisom koeficienta toplotne prestopnosti α kot funkcije deleža tekoče faze na robu v obliki: $\alpha = \alpha_v^f \alpha_n^{1-f}$, kjer sta α_v in α_n ($\alpha_v > \alpha_n$) ustrezna koeficienta toplotne prestopnosti na stiku taline in ingota oziroma na področju zračne špranje.

Hladilo, ki izteka iz kokile, na področju sekundarnega hlajenja direktno obliva ingot, na katerega površini pride do mehurčnega vrenja hladila. Ko temperatura površine ingota T_{rob} pade pod temperaturo vrelišča hladila T_s , slednje odvaja toploto samo konvektivno. Gostoto toplotnega toka na stranskem robu ingota, ki ga obliva hladilo, podaja empirična relacija [1]:

$$j [\text{W m}^{-2}] = (-1,67 \times 10^5 + 704\bar{T}) \left(\frac{Q}{\pi d} \right)^{\frac{1}{3}} (T_{rob} - T_{hl}) + 208 \max((T_{rob} - T_s)^3, 0), \quad (2)$$

²Velikost V_0 mora biti zadosti manjša od velikosti obravnavanega sistema, če naj bodo tako definirane povprečne količine krajevno odvisne.

kjer je $Q[\text{m}^3 \text{s}^{-1}]$ volumski pretok hladilne tekočine, $d[\text{m}]$ premer ingota in $\bar{T}[\text{K}]$ povprečna temperatura roba ingota in hladila ($\bar{T} = \frac{1}{2}(T_{\text{rob}} + T_{\text{hl}})$). Temperatura hladilne tekočine T_{hl} navzdol narašča zaradi od ingota prejete toplote. Predpostavimo, da je plast hladilne tekočine, ki obliva kokilo, zadosti tanka, da je temperatura po njenem preseku konstantna. Če hkrati zamenarimo difuzijski prenos toplote v hladilni tekočini v navpični smeri, se temperatura spreminja v skladu z enačbo $T_{\text{hl}}(z) = T_{\text{hl}}(0) - \frac{\pi d}{\rho_{\text{hl}} c_{p, \text{hl}} Q} \int_0^z j(z') dz'$, kjer sta ρ_{hl} in $c_{p, \text{hl}}$ gostota oziroma specifična toplota hladilne tekočine.

Na zgornjem robu ingota predpostavimo temperaturo ulivanja ($T = T_c$). Gostoto toplotnega toka na spodnjem robu ingota zapišemo kot $j = \alpha (T_{\text{rob}} - T_{\text{dno}})$, pri čemer privzamemo, da je koeficient toplotne prestopnosti α enak kar α_v , temperatura pomičnega dna T_{dno} pa temperaturi hladilne tekočine na dnu ingota.

4 Numerično reševanje

Enačba, ki opisuje prenos toplote v ingotu (1) je tipična transportna parcialna diferencialna enačba, ki jo lahko zapišemo za skalarno količino ϕ v splošni obliki:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma^\phi \nabla \phi) + S^\phi, \quad (3)$$

kjer je Γ^ϕ difuzijski koeficient, S^ϕ pa izvorni člen. Enačbo rešujemo z metodo kontrolnih volumnov. Da bi upoštevali premikanje računske mreže, je potrebno enačbo (3) z integracijo po premikajočem se kontrolnem volumnu (KV) prevesti v diskretno obliko:

$$\frac{V_P \rho_P \phi_P - V_P^0 \rho_P^0 \phi_P^0}{\Delta t} + \sum_k [\rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \phi]_k \cdot d\mathbf{S}_k = \sum_k [\Gamma^\phi \nabla \phi]_k \cdot d\mathbf{S}_k + S_P^\phi V_P, \quad (4)$$

kjer indeks k označuje povprečne vrednosti količin na stranicah KV z normalnim vektorjem $d\mathbf{S}_k$. V enačbi (4) predstavljajo ϕ_P , ρ_P in S_P^ϕ povprečne vrednosti količine ϕ , gostote in gostote izvorov v KV, V_P velikost (površino) KV in Δt velikost časovnega koraka. Zgornji indeks 0 označuje količine na starem časovnem koraku, ostale so na tekočem časovnem koraku – uporabljena je popolnoma implicitna shema. Hitrost robov KV \mathbf{v}_g izračunamo iz premika mreže v časovnem koraku [6], tako da je izpolnjena t.i. enačba ohranitve prostora:

$$V_P - V_P^0 = \Delta t \sum_k \mathbf{v}_{gk} \cdot d\mathbf{S}_k. \quad (5)$$

Zaradi nelinearnosti enačbe (1), ki je posledica temperaturno odvisnih snovskih lastnosti in robnih pogojev, je znotraj časovnega koraka potrebno iterativno reševanje sistema enačb pridobljenega z opisano diskretizacijo. To pomeni izmenični preračun temperature, faznega deleža, snovskih lastnosti, temperature hladila in specifične entalpije, dokler ni dosežena

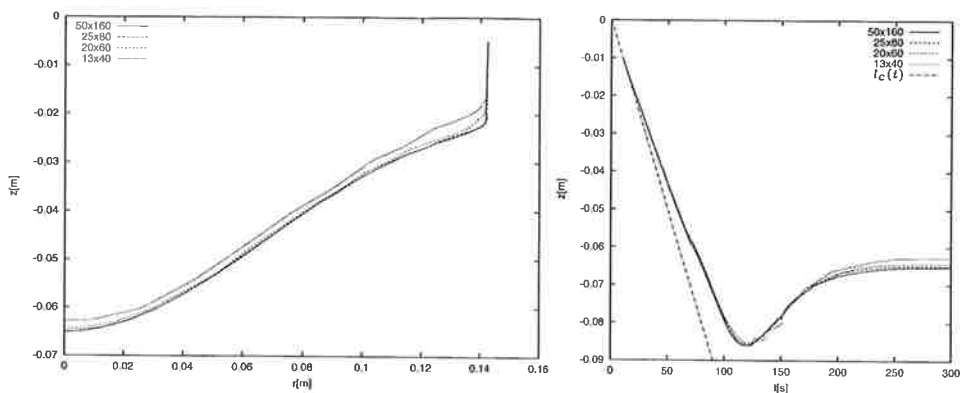
konvergenca znotraj časovnega koraka – normirana vrednost residuuma v vsaki računski točki je tedaj manjša od predpisane dopustne vrednosti ε .

Prilaganje računke mreže naraščajoči domeni poteka tako, da se mreža v začetku izračuna razteguje pri konstantnem številu KV. Raztegovanje mreže traja, dokler je ulita dolžina ingota $l_c(t)$ manjša od predpisane dolžine l_r . Ko $l_c(t)$ preseže l_r , se na dnu domene doda nova vrsta KV z začetno višino $l_c(t) - l_r$, ki se povečuje do vnaprej predpisane višine. Nato se zopet doda nova vrsta KV, katere elementi se raztegujejo v smeri ulivanja, KV nad njimi pa ne. Postopek dodajanja KV in raztegovanja nazadnje dodanih KV se ponavlja do konca izračuna, t.j. do končne vrednosti l_c . Mreža tako logično razpade na dva dela: v zgornjega ($0 \leq z \leq l_r$), ki vsebuje začetno število KV, in spodnjega ($l_r < z \leq l_c(t)$), ki vsebuje dodane KV. Učinkovitost izračuna povečamo z zgoščanjem zgornjega dela mreže v okolici medfaznega roba in na stranskem robu ingota, kjer je gradient specifične entalpije h največji. Gostoto mreže kontroliramo s krajevno odvisno funkcijo Λ tako, da mrežo generiramo z eliptičnim generatorjem [7], to je z reševanjem sistema enačb $\nabla \cdot (\Lambda^{-1} \nabla \xi) = 0$ in $\nabla \cdot (\Lambda^{-1} \nabla \eta) = 0$, kjer sta ξ in η krivuljski koordinati, katerih presečišča koordinatnih krivulj predstavljajo oglišča kontrolnih prostornin. Gostota mreže je sorazmerna velikosti funkcije Λ .

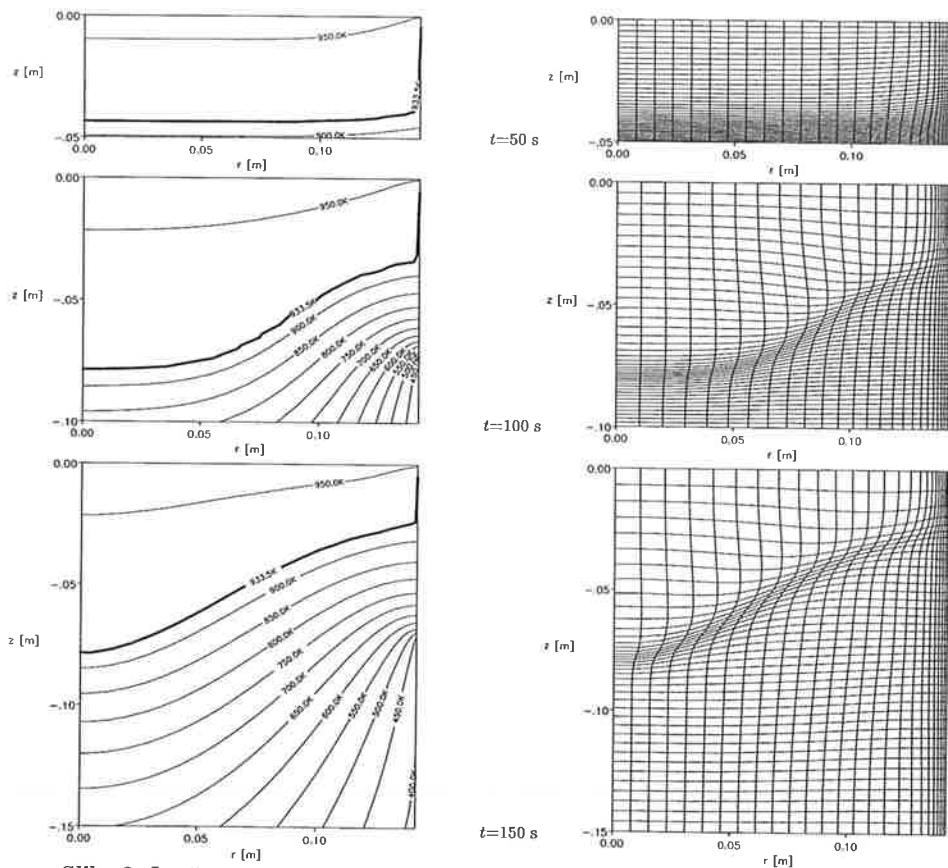
5 Primer izračuna

Izračun obravnava ulivanje ingota iz industrijsko čistega aluminija z imenskim premerom $d = 0,285$ m pri hitrosti ulivanja $v_c = 0,001$ m s⁻¹ in temperaturi ulivanja $T_c = 953,0$ K. Koeficienta toplotne prestopnosti $\alpha_v = 2000$ W m⁻² K⁻¹ in $\alpha_n = 100$ W m⁻² K⁻¹ sta povzeta po referenci [2], privzeta stična višina kokile je 0,07 m. Vstopna temperatura hladila je 293,0 K, pretok Q pa $1,85 \times 10^{-3}$ m³ s⁻¹. Temperaturno odvisne snovske lastnosti so povzete po referencah [8] in [9].

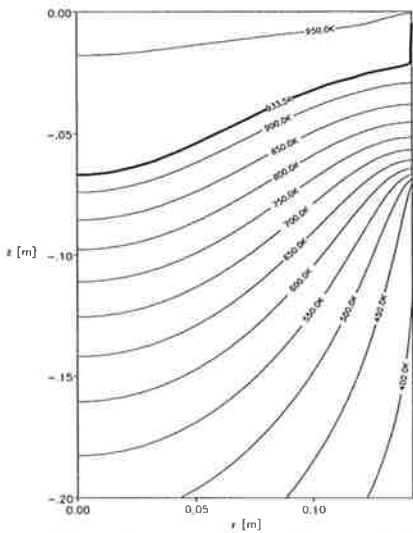
Začetna višina ingota je postavljena na 0,01 m, končna pa na 2 m. Meja raztegovanja mreže l_r je 0,15 m. Velikost časovnega koraka je 0,5 s, relativna natančnost izračuna ε pa 0,0001. Širina talilnega intervala $2\Delta T$ je 1 K. Preizkušene so različno goste mreže s končnim številom 13×40, 20×60, 25×80 in 50×160 KV - začetno število KV je polovico manjše v navpični smeri. Kot je razvidno s slike 2, ki kaže položaj medfaznega roba v ustaljenem stanju in časovno spreminjanje položaja medfaznega roba na sredini ingota, je pri izračunu na mreži s 25×80 KV medfazni rob določen na manj kot 1 mm natančno. Časovni potek kaže, da se pri upoštevanih parametrih medfazni rob najprej spušča in nato dviga do ustaljenega položaja. Sliki 3 in 4 kažeta izračunano temperaturno polje in ustrezno računsko mrežo v različnih fazah izračuna.



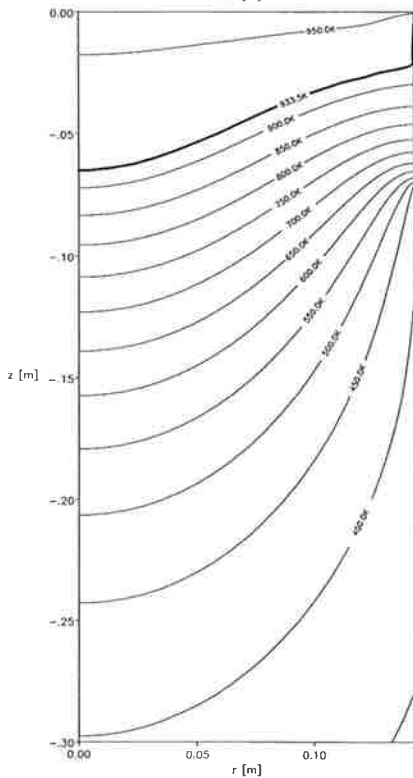
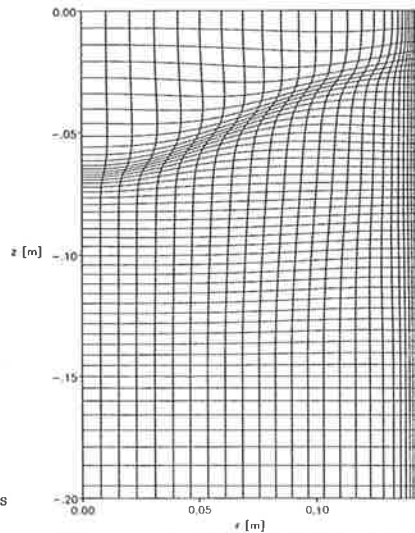
Slika 2: Na različno gostih mrežah izračunani potek medfaznega roba ustaljenem stanju (levo) in položaj medfaznega roba v sredini ingota v odvisnosti od časa (desno).



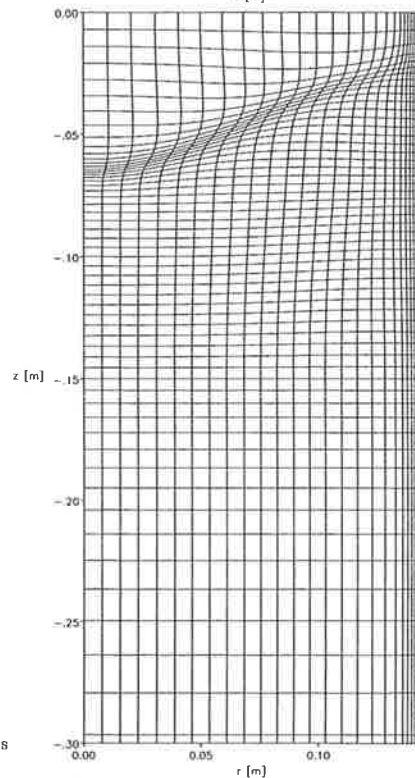
Slika 3: Izračunano temperaturno polje in računska mreža z začetnimi 25×40 KV po 50 s (zgoraj), po 100 s (sredina) in po 150 s (spodaj) od začetka ulivanja.



$t=200$ s



$t=300$ s



Slika 4: Temperaturno polje in računska mreža s $25 \times (40+8)$ KV po 200 s (zgoraj); temperaturno polje in računska mreža s $25 \times (40+16)$ KV po 300 s (spodaj).

6 Zaključek

Prikazani izračun je zanimiv z vidika izvedbe numeričnega rešitvenega postopka, ker je zaradi naraščajoče dolžine ingota potrebno ustrezno prilagajanje računske mreže. Ta se zaradi boljše računske natančnosti dodatno prilagaja z zgoščevanjem v okolici medfaznega roba in ob zunanjem robu plašča valja, ki ga predstavlja ingot.

Izračun omogoča vpogled v realni tehnološki proces in dopušča preizkušanje vpliva spreminjanja procesnih parametrov. Že na sorazmerno redki računski mreži z 25×80 KV je natančnost izračuna zadovoljiva – položaj medfaznega roba je določen na manj kot 1 mm natančno. Večja napaka je verjetno storjena zaradi ne dovolj natančno določenih robnih pogojev, ki bi jih bilo potrebno izmeriti na konkretni livni napravi. Tako bi izračun dobil bolj uporabno vrednost, še posebno z možno dopolnitvijo izračuna hitrostnega in sestavinskega polja.

Literatura

- [1] D. C. Weckmann, P. Niessen, *A numerical solution of the D.C. Continuous Casting Process Including Nucleate Boiling Heat Transfer*, Metall. Trans., **13B**, 1982, str. 593–602.
- [2] L. Katgerman, S. C. Flood, A. H. Langille, *Modelling of DC casting of aluminium alloys*, -v: E. D. M. Bouchard, P. Tremblay (eds.), *Fabrication and recycling of light metal*, Pergamon press, New York, 1990, str. 96-110.
- [3] A. V. Reddy, C. Beckermann, *Modeling of Macrosegregation Due to Thermosolutal Convection-Driven Flow in Direct Chill Continuous Casting of an Al-Cu Round Ingot*, Metall. Trans. B, **28B** (1997), str. 479-489.
- [4] W. D. Bennon, F. P. Incropera, *A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems — I. Model formulation*, Int. J. Heat Mass Transfer, **30** (1987), str. 2161-2170.
- [5] J. Ni, C. Beckermann, *A Volume-Averaged Two-Phase Model for Transport Phenomena during Solidification*, Metall. Trans. B, **18B** (1991), str. 349-361.
- [6] I. Demirdžić, M. Perić, *Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow*, Int. J. Numer. Methods Fluids, **8** (1988), str. 1037-1050.
- [7] D. A. Anderson, *Grid cell volume control with an adaptive grid generator*, Appl. Math. Comput., **35** (1990), str. 209-217.
- [8] R. D. Pehlke, R. D. Jeyarajan, H. Wada, *Summary of Thermal Properties for Casting Alloys and Mold Materials*, University of Michigan Technical Report, Ann Arbor, MI, 1982.
- [9] C. J. Smithells, *Metals Reference Book*, 5th Edition, Butterworths, London, 1976.

Numerična simulacija vrtničnega toka v 2D kanalu

Z. Rek,[†] I. Žun[‡]

Numerical Simulation of Vortex Flow in 2D channel

POVZETEK

V prispevku je prikazana numerična simulacija 2D vrtničnega toka. Takšen tok nastane, ko v kanal postavimo objekt. Na tem principu temelji vrtnični merilnik pretoka. S primerno obliko telesa dosežemo, da je Reynoldsovo število v linearni zvezi s frekvenco generacije vrtnicev. Od oblike telesa je odvisno na kako velikem območju Reynoldsovih števil velja linearna zveza. V našem primeru je bil uporabljen trikotni objekt. Za reševanje časovno odvisnega toka tekočine v 2D kanalu z oviro je bila uporabljena metoda kontrolnih volumnov (programski paket TASCflow). Rezultati kažejo na linearno odvisnost med frekvenco in Reynoldsovim številom za $Re > 30000$.

SUMMARY

The paper deals with 2D vortex flow numerical simulation. Vortex flow is generated when bluff body is inserted into the channel. This principle is used by vortex flow meter. With proper body shape, the linear dependency between Reynolds number and vortex generation frequency can be achieved. The body shape determines the range of Reynolds numbers where linear dependency is valid. In our case the body with triangular shape was used. To solve time dependent fluid flow in a 2D channel the Control volume method (program package TASCflow) was used. Results show the linear dependency between frequency and Reynolds number for $Re > 30000$.

[†]dr. Zlatko Rek (zlatko.rek@fs.uni-lj.si), univ. dipl. inž. str.,

[‡]prof. dr. Iztok Žun (iztok.zun@fs.uni-lj.si), univ. dipl. inž. str.,

Laboratorij za dinamiko fluidov in termodinamiko, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

1 Uvod

Vrtinčni merilnik pretoka temelji na meritvi frekvence generacije vrtincev[1]. Ti vrtinci nastanejo zaradi separacije mejne plasti na objektu[2]. Pojavi se t.i. "Karmanova vrtinčna steza". Odvisnost frekvence generacije vrtincev f od povprečne hitrosti U in dimenzije telesa b je podano z brezdimenzijskim Strouhalovim številom

$$Sr_b = \frac{fb}{U} \quad (1)$$

Če hitrost v zgornji enačbi izrazimo z Reynoldsovim številom (D je premer cevi oz. višina kanala)

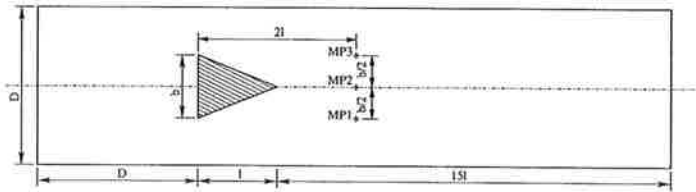
$$Re_D = \frac{UD}{\nu} \quad (2)$$

je Sr_b tudi funkcija Re_D . Iz tega sledi: če lahko s primerno obliko telesa zagotovimo, da je Strouhalovo število konstantno na nekem območju Reynoldsovih števil, potem je masni pretok linearno odvisen od frekvence generacije vrtincev na tem območju.

V literaturi je obširno obdelana eksperimentalna in numerična analiza generacije vrtincev na okroglem (valjastem) objektu[3, 4], za katerega se izkaže, da ne obstaja območje Reynoldsovih števil, kjer bi bilo Strouhalovo število konstantno. Zato skušamo s pomočjo numerične simulacije ugotoviti, kako primerna je trikotna oblika telesa.

1.1 Diskretni model

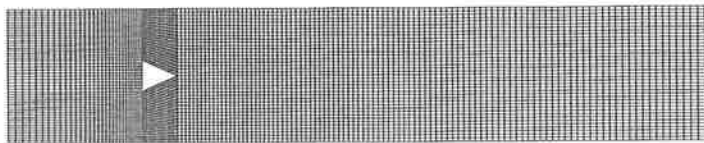
Obravnavano tokovne razmere v 2D kanalu višine $D = 90mm$. V sredini kanala na razdalji D od vstopa se nahaja trikotni objekt širine $b = 21,5mm$ in dolžine $l = 24mm$. Za objektom je dolžina kanala $L = 15l$, slika 1. Merilna mesta (MP1, MP2, MP3), kjer spremljamo časovni potek tlaka, so na dvakratni oddaljenosti dolžine objekta od sprednje ploskve.



Slika 1: Geometrija kanala s trikotnim objektom in položajem merilnih mest.

Tekočina je zrak pri temperaturi $T = 20^{\circ}C$ in tlaku $p = 10^5 Pa$, kjer so snovske lastnosti: gostota $\rho = 1,164kg/m^3$, dinamična viskoznost $\mu = 1,82748 \cdot 10^{-5}kg/ms$ in kinematična viskoznost $\nu = 1,57 \cdot 10^{-5}m^2/s$.

Računska mreža je neuniformna blok-strukturirana, sestavljena iz štirih blokov. Skupno število vozlišč je 19812, slika2.



Slika 2: Računska mreža.

2 Numerična simulacija

Izračun je bil narejen s programskim paketom *CFX-TASCflow*[5]. Uporabljen je bil standardni $k - \epsilon$ turbulentni model. Diskretizacija po času je bila prvega reda. Adveksijska shema za transportne enačbe je bila “Modified Linear Profile Scheme” (MLPS), ki je v večini primerov metoda drugega reda, vendar je manj robustna kot “Upwinding Difference Scheme” (UDS), zato je bila zmešana s 5% UDS. Prav tako je bil uporabljen “Physical Advection Correction” (PAC) člen, ki zelo izboljša natančnost in je nepogrešljiv v primerih, ko je zahtevana ohranitev totalnega tlaka, npr. pri kanalih s spremenljivim presekom.

Vstopna hitrost, dolžinska skala in časovni korak za izbrana Reynoldsova števila so prikazani v tabeli 1. Časovni korak Δt pri določenem Re je bil izbran tako, da je bilo ≈ 40 korakov na periodo nihanja tlaka. Dolžinska skala L_ϵ je bila določena iz predpostavke $\mu_t = 5\mu$ in 10% intenzitete turbulence (Tu)

$$\rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} = 5\mu \implies L_\epsilon = \frac{5\mu}{\rho C_\mu \sqrt{3/2} |U| Tu}. \quad (3)$$

Robni pogoj za k in ϵ na vstopu je bil

$$k = \frac{3}{2} (TuU)^2, \quad \epsilon = \frac{k^{3/2}}{L_\epsilon}.$$

Začetni pogoj za k in ϵ je enak vstopnemu robnemu pogoju.

Re_D	$U[m/s]$	$L_\epsilon[m]$	$\Delta t[s]$
13477	2.351	0.00300	0.00077
20000	3.489	0.00200	0.00052
30000	5.233	0.00136	0.00036
40000	6.964	0.00102	0.00027
49123	8.569	0.00083	0.00022

Tabela 1: Vstopna hitrost, dolžinska skala in časovni korak.

3 Rezultati numerične simulacije

Narejena je bila numerična simulacija za območje Reynoldsovih števil med 13477 in 49123. Rezultat je hitrostno in tlačno polje v diskretnih časovnih korakih. Slike 3,4 in 5 prikazujejo

tokovnice ter hitrostno in tlačno polje za $Re = 13477$. Lepo je vidna izmenična generacija vrtincev in njihovo odlepljanje na ostrem robu objekta ter “Karmanova vrtinčna steza”, t.j. potovanje teh vrtincev vzdolž toka. Slika 6 prikazuje spreminjanje tlaka v opazovalni točki



Slika 3: Tokovno polje okoli trikotnega objekta.



Slika 4: Hitrostno polje ($|\vec{v}|$).

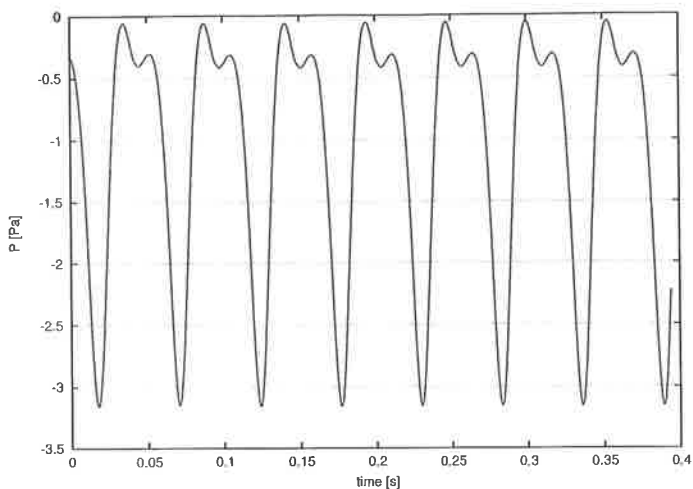


Slika 5: Tlačno polje.

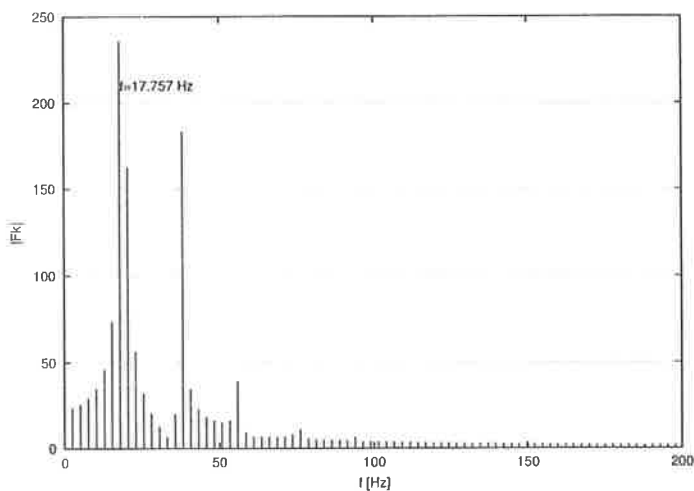
MP1 za $Re = 13477$ v odvisnosti od časa. Lepo je vidno periodično nihanje tlaka. S pomočjo hitre Fourierrove transformacije (FFT) dobimo frekvenčni spekter nihanja tlaka, ki je prikazan na sliki 7. Izstopa vrh pri frekvenci $f_0 = 17.757 Hz$, ki predstavlja frekvenco generacije vrtincev na spodnjem robu trikotnika. Pojavi se še sekundarni vrh pri dvakratniku f_0 , ki je posledica superpozicije zaradi generacije vrtinca na zgornjem robu. Tabela 2 prikazuje frekvenco nihanja tlaka in Strouhalovo število pri izbranih Reynoldsovih številih. Vidi se, da je St_b za $Re > 30000$ konstanten. Slika 8 kaže odvisnost Reynoldsovega števila od frekvence nihanja tlaka. Tudi v tem primeru vidimo, da je zveza med Re in f za $Re > 30000$ linearna. Če bi želeli merilnik pretoka za območje $Re < 30000$, potem telo s trikotno obliko ni primerno in ga je treba optimirati.

4 Zaključek

Prikazana je bila 2D numerična simulacija toka tekočine v vrtinčnem merilniku pretoka. Objekt, na katerem se generirajo vrtinci je bil trikotne oblike. Izračun je bil narejen za območje Reynoldsovih števil od 13477 do 49123. Analiza rezultatov je pokazala, da je telo trikotne oblike



Slika 6: Nihanje tlaka v točki MP1 za trikotnim objektom.

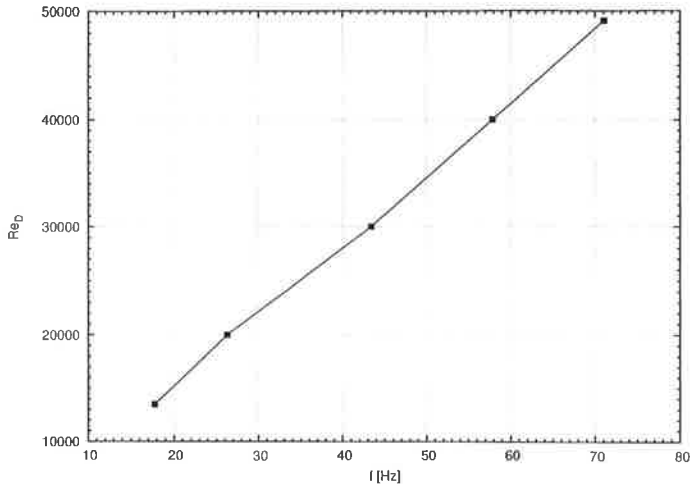


Slika 7: Frekvenčni spekter nihanja tlaka v točki MP1.

Re_D	13477	20000	30000	40000	49123
$f[Hz]$	17.757	26.296	43.407	57.887	71.048
Str_b	0.16	0.16	0.18	0.18	0.18

Tabela 2: Frekvenca nihanja tlaka in Strouhalovo število.

primerno le za merjenje pretokov pri katerih je $Re > 30000$, saj je na tem območju Re , in s



Slika 8: Odvisnost Reynoldsovega števila od frekvence nihanja tlaka.

tem pretok, linearno odvisen od frekvence nihanja tlaka v kanalu. Če bi želeli širše merilno območje, bi bilo potrebno optimirati obliko ali izbrati kak drug objekt.

Zahvala: Avtorja se zahvaljujejeta mag. Vladimirju Alkalaju iz Računalniškega centra na Inštitutu Jožef Stefan za uporabo programskega paketa TASCflow-2.4.

Literatura

- [1] V. Hans, H. Windorfer, S. Perpeet: *Influence of vortex structures on pressure and ultrasound in vortex flow-meters*. IMEKO 2000, International Measurements Confederation XVI IMEKO World Congress, Vienna, Austria, 2000.
- [2] A. Weickgenannt, P.A. Monkewitz: *Control of vortex shedding in an axisymmetric bluff body wake*. *Eur. J. Mech. B – Fluids*, 19 (2000), 789-812.
- [3] M. Gaster: *Vortex shedding from circular cylinders at low Reynolds numbers*. *J. Fluid Mech.*, vol. 46 (1971), part 4, pp. 749-756.
- [4] T.J. Scanlon, M.T. Stickland, A. Oldroyd: *A numerical analysis of vortex shedding within a confined channel flow*. *proc. Instn. Mech. Engrs.*, vol 213 (1999), pp. 97-110.
- [5] TASCflow: **Version 2.4 Documentation: User Documentation**. Advanced Scientific Computing Ltd., Waterloo, Ontario, Canada, 1996.

Vpliv Prandtlovega števila pri numeričnih simulacijah turbulentnega prenosa toplote

Robert Bergant, Iztok Tiselj[†]

The influence of the Prandtl number at turbulent heat transfer numerical simulations

Povzetek

Za opis turbulentnega prenosa toplote iz stene na tekočino je pri nizkih Reynoldsovih in Prandtllovih številih mogoče uporabiti direktno numerično simulacijo (DNS). Vpliv Reynoldsovega števila je na statistiko turbulentnega prenosa toplote (hitrosti, temperature, fluktuacije,...) relativno majhen, medtem ko je vpliv Prandtlovega števila veliko večji.

V naših simulacijah sva pri konstantnem Reynoldsovem številu disipacije $Re_\tau = 170.8$ analizirala tri različna Prandtlva števila, in sicer $Pr = 1$, $Pr = 5.4$ in $Pr = 54$. Pri tem simulacija pri $Pr = 54$ ni direktna numerična simulacija, saj ne opiše najmanjših temperaturnih skal.

Summary

For description of heat transfer from wall to fluid at low Reynolds and Prandtl numbers, a Direct Numerical Simulation (DNS) can be used. The Reynolds number has weak influence on the turbulent heat transfer statistics (velocities, temperatures, RMS-fluctuations), while the increasing Prandtl number has stronger influence.

[†] Robert Bergant
Institut Jozef Stefan, Odsek za reaktorsko tehniko
Jamova 39, 1000 Ljubljana, Slovenija

Iztok Tiselj
Institut Jozef Stefan, Odsek za reaktorsko tehniko
Jamova 39, 1000 Ljubljana, Slovenija

Three different studies were performed at three different Prandtl numbers ($Pr = 1$, $Pr = 5.4$ and $Pr = 54$) at the same friction Reynolds number 171. Simulation with $Pr = 54$ cannot be called DNS due to the unresolved smallest thermal scales.

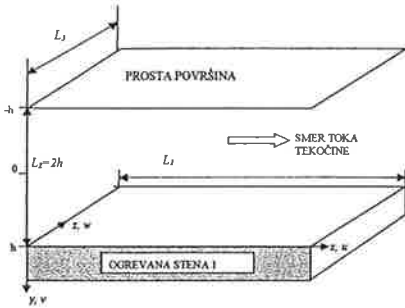
1. Uvod

V zadnjem času se direktna numerična simulacija (DNS) uveljavlja kot pomembno orodje pri razumevanju mehanizma prenosa toplote v turbulentni mejni plasti. Prve rezultate pri nižjih Reynoldsovih številih in Prandtl ovih številih manjših od ena sta objavila Kim in Moin (1987), ki sta raziskovala hitrostno polje ter opazovala turbulentne strukture v bližini stene. Kim in Moin (1989) sta med dvema stenama preučevala tudi temperaturno polje ter opazovala koherentne strukture, ki so se pojavljale v bližini sten. Uporabila pa sta nekoliko nenavaden pristop, saj sta predpostavila enakomerno gretje tekočine po celotni prostornini, steni pa sta predstavljali toplotni ponor. Tudi Kasagi (1992) je raziskoval temperaturno polje, vendar je za geometrijo vzel kanal, ki je bil gret z zgornjo in spodnjo steno. Vse te simulacije so potekale pri nizkih Reynoldsovih in Prandtl ovih številih. Pozneje so raziskovalci (Kawamura, 1999, Na in Hanratty, 2000) mejo Prandtl ovega števila dvignili do deset. Kawamura (1999) je raziskoval vpliv Reynoldsovega in Prandtl ovega števila. V območju tik ob steni je ugotovil majhen vpliv Reynoldsovega števila in veliko večji vpliv Prandtl ovega števila na statistiko turbulentnega prenosa toplote (hitrostni profili, fluktuacije hitrosti, turbulentni toplotni tokovi).

V tem delu je posebna pozornost namenjena vplivu povečevanja Prandtl ovega števila pri konstantnem Reynoldsovem številu disipacije. Simulacije sva izvedla pri Reynoldsovem številu disipacije $Re_{\tau} = 170.8$ in treh različnih Prandtl ovih številih: $Pr = 1$, $Pr = 5.4$ in $Pr = 54$ (glej tabelo 1). Teoretično naj bi bila ločljivost DNS pri Prandtl ovih številih večjih od ena, sorazmerna kvadratnemu korenu Prandtl ovega števila v vseh smereh koordinatnega sistema (Tennekes, Lumley, 1972). Zahtevo sta v svojih DNS simulacijah upoštevala Kawamura (1998) in Tiselj (2001). Ta zahteva pa je nekoliko preostra, kar sta pokazala Na in Hanratty (2000), ki sta pri $Pr = 10$ uporabila večjo ločljivost le v smeri pravokotno na steno. Vpliv ločljivosti je preučeval tudi Bergant (2001), ki je izvedel tri različne DNS simulacije pri Reynoldsovem številu disipacije $Re_{\tau} = 171$ in Prandtl ovem številu $Pr = 5.4$. Ugotovil je, da je že ločljivost, ki je potrebna za opis najmanjših skal hitrostnega polja dovolj za opis statistik prvega reda (profili povprečnih temperatur, fluktuacij, turbulentni toplotnih tokov).

2. Enačbe in numerični postopek

Spodnja stena kanala je greta s konstantnim toplotnim tokom, zgornja površina tekočine pa je prosta (sl. 1). Uporabila sva brezdimenzijske Navier-Stokesove enačbe, normalizerane z višino kanala h , disipativno hitrostjo u_τ in disipacijsko temperaturo $T_\tau = q_w / (u_\tau \rho_f c_{pf})$. Takšen pristop lahko najdemo tudi v člankih Kasagija (1992) ali Kawamure (1998):



Slika 1. Geometrija toka tekočine.

$$\nabla \cdot \bar{u}^+ = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{u}^+ \bar{u}^+) + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \bar{u}^+ - \nabla p + \bar{i}_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{u}^+ \theta^+) + \frac{1}{Re_\tau Pr} \nabla^2 \theta^+ + \frac{u_x^+}{2u_B^+} \quad (3)$$

Člena \bar{i}_x (enotski vektor v smeri vzdolž toka) in $u_x^+ / 2u_B^+$ se v en. (2) in (3) pojavita zaradi numerične sheme, ki zahteva periodične robne pogoje v vzdolžni (x) in prečni smeri (y). Brezdimenzijska temperaturna razlika je definirana kot

$$\theta^+(x, y, z, t) = \left(\frac{\langle T_w \rangle - T(x, y, z, t)}{T_\tau} \right) \quad (4)$$

Prosta površina tekočine se smatra kot adiabatna površina, z robnim pogojem za hitrost pravokotno na steno $v_{free\ surf} = 0$. Takšen robni pogoj pa ni fizikalen, ker ne dovoljuje površinskih valov. Vendar so eksperimenti Hetsronija (1997, 1999) pokazali, da se površinski valovi pri majhnih Reynoldsovih številih skoraj neznamni in ne vplivajo na obnašanje tekočine tik ob steni. Poleg robnega pogoja hitrosti, moramo upoštevati še temperaturni robni pogoj. Na prosti površini velja $d\theta^+ / dy = 0$, medtem ko sta na stiku stene in tekočine možna dva različna temperaturna robna pogoja. Prvi, ki v tem prispevku ni omenjen, je robni pogoj konstantne temperature (glej podrobnosti v Tiselj, 2001), drugi pa robni pogoj konstantnega toplotnega toka Q_{konst} , za katerega velja

$$\langle \theta^+(y=1) \rangle = 0 \quad \text{in} \quad (5)$$

$$\frac{d\theta^+}{dy^+}(y=1) = 0. \quad (6)$$

Kot se lahko vidi iz en. (1-3), je temperatura pasivni skalar, ki ne vpliva na turbulenco. To pomeni, da je vzgon zanemarljiv in da lastnosti tekočine (viskoznost, toplotna prevodnost,...) niso odvisne od temperature. Dobljeni rezultati so točni le za sisteme, kjer ne pride do velikih temperaturnih razlik, medtem ko je pri večjih temperaturnih razlikah potrebna večja previdnost. Takšno aproksimacijo so že uporabili Kasagi (1992), Kawamura (1998) in Tiselj(2001).

Za reševanje enačb uporabljamo spektralno shemo, ki uporablja Fourierove vrste v x in z smeri ter polinome Čebiševa v y smeri. Kontinuitetno, gibalno in energijsko enačbo rešujemo s programom, ki temelji na delu Gavrilakisa (1986).

Vse DNS simulacije so bile izvedene pri $Re_\tau = 171$ in $Pr = 1, 5.4$ ter 54 . Geometrija toka tekočine je bila v vseh primerih enaka ($8\pi, 2\pi$ in 2 enoti v x, z in y smeri ali $2146, 537$ in 171 stenskih enot), rezultate pa sva začela povprečiti potem, ko je bil dosežen polno razvit turbulentni tok. Simulacije lahko razdelimo na tri glavne skupine (tabela 1). Z izjemo DNS simulacije za $Pr = 1$, so vse ostale simulacije nadalje razdeljene glede na ločljivost mreže. Prvi del vsebuje DNS za $Pr = 1$, kjer sva uporabila ločljivost, ki je zadostna za hitrostno in temperaturno polje (Tennekes, Lumley, 1972). Drugi del vsebuje DNS za $Pr = 5.4$ (glej tudi Bergant, 2001). Ločljivost prve študije je zadostna le za hitrostno polje, druga študija vsebuje 2-krat večjo ločljivost v smeri pravokotno na steno (Na, Hanratty, 2000), tretja študija pa 2-krat večjo ločljivost v vseh treh smereh, kar je zadostno tudi za temperaturno polje. Tretji del vsebuje simulaciji za $Pr = 54$. Ločljivost v prvem primeru je zadostna le za hitrostno polje, medtem ko je pri večji ločljivosti leta še vedno približno 3.5-krat premajhna za natančen popis temperaturnega polja (Tennekes in Lumley, 1972). To ni več DNS, ker ne popiše več najmanjših temperaturnih skal, ki se pojavijo pri visokih valovnih številih. Takšno simulacijo sva poimenovala "kvazi" DNS.

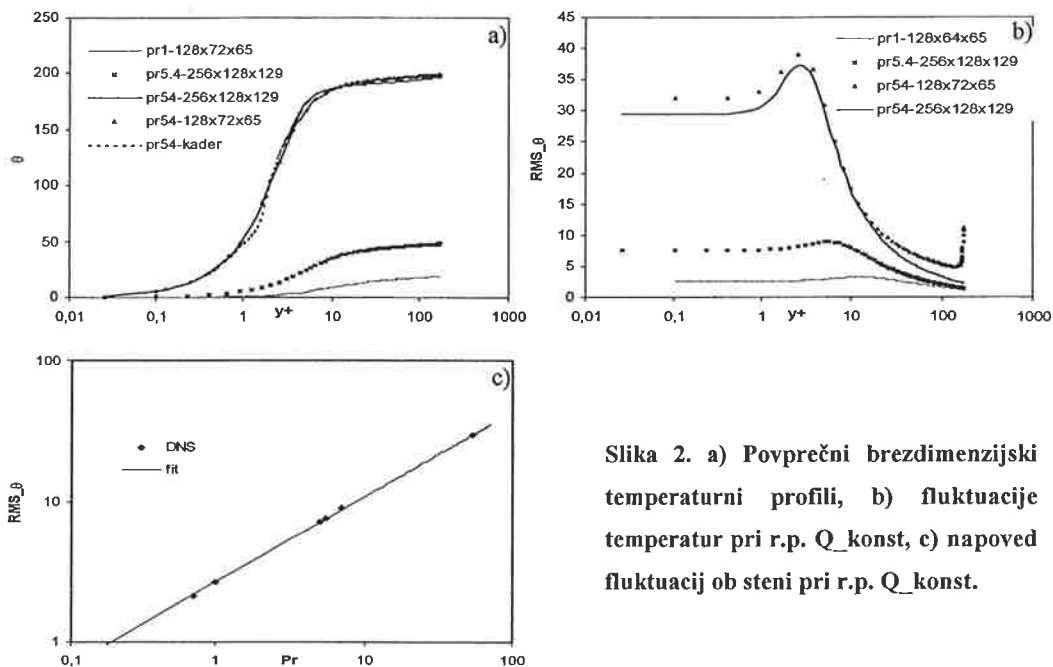
Tabela 1: Izračuni pri različnih Pr in mrežah.

Pr	mreža	Δt^+	Δx^+	Δz^+	Δy^+	čas povprečenja
1	128x72x65	0.0512	16.77	7.46	0.10-4.19	3074
5.4	128x72x65	0.0683	16.77	7.46	0.10-4.19	4099
5.4	128x72x129	0.0427	16.77	7.46	0.05-2.10	2562
5.4	256x128x129	0.0256	8.38	4.19	0.05-2.10	2560
54	128x72x65	0.0683	16.77	7.46	0.10-4.19	4270
54	256x128x129	0.0256	8.38	4.19	0.05-2.10	2560

3. Rezultati

S primerjavo DNS simulacij sva skušala ugotoviti vpliv naraščanja Prandtllovega števila na temperaturne profile, fluktuacije temperatur in spektre fluktuacij ter vpliv različnih ločljivosti pri $Pr = 54$ na temperaturne profile in fluktuacije temperatur.

Na sl. 2a so prikazani povprečni brezdimenzijski temperaturni profili za tri različna Prandtllova števila. Večje kot je Prandtllovo število, večja je brezdimenzijska temperaturna razlika med steno in površino tekočine. DNS rezultati se dobro ujemajo z empirično korelacijo Kadra (1981). Prikazan je tudi vpliv dveh različnih mrež za $Pr = 54$. Primerjava mrež $256 \times 128 \times 129$ in $128 \times 72 \times 65$ kaže majhna odstopanja, ki niso večja od negotovosti statistične obravnave rezultatov.



Slika 2. a) Povprečni brezdimenzijski temperaturni profili, b) fluktuacije temperatur pri r.p. Q_{konst} , c) napoved fluktuacij ob steni pri r.p. Q_{konst} .

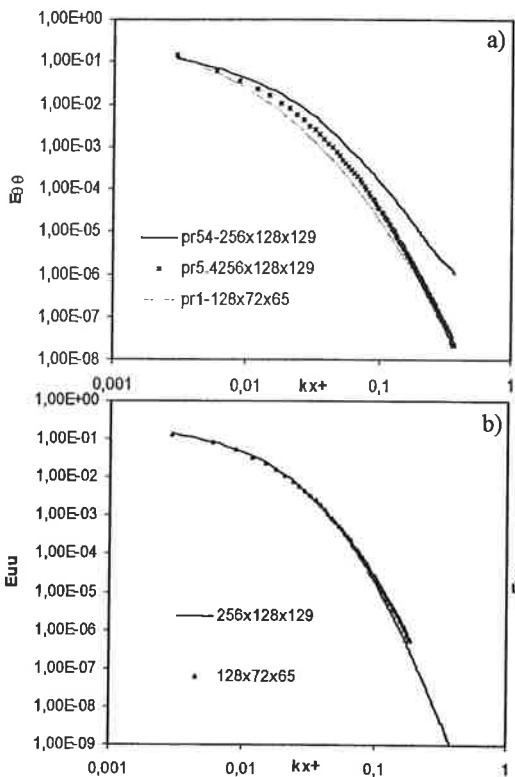
Zanimiva situacija se pojavi na sl. 2b pri simulaciji za $Pr = 54$, najslabše ločljivosti. Na površini tekočine se fluktuacije obrnejo navzgor, medtem ko pri drugih simulacijah padajo proti nič. Nepravilnost se pojavi zaradi premajhne ločljivosti, ki ne zajame vseh temperaturnih skal. Tako v tem primeru ne moremo govoriti o direktni numerični simulaciji.

Pri napovedovanju obnašanja temperaturnih fluktuacij sva si dodatno pomagala še z rezultati pri drugih Prandtllovih številih ($Pr = 0.71$, $Pr = 5$ in $Pr = 7$, Tiselj, Bergant, 2001). Na sl. 2c je prikazana napoved za fluktuacije ob steni pri robnem pogoju Q_{konst} . Eksperimentalni rezultati za robni pogoj Q_{konst} se ujemajo z logaritemsko krivuljo

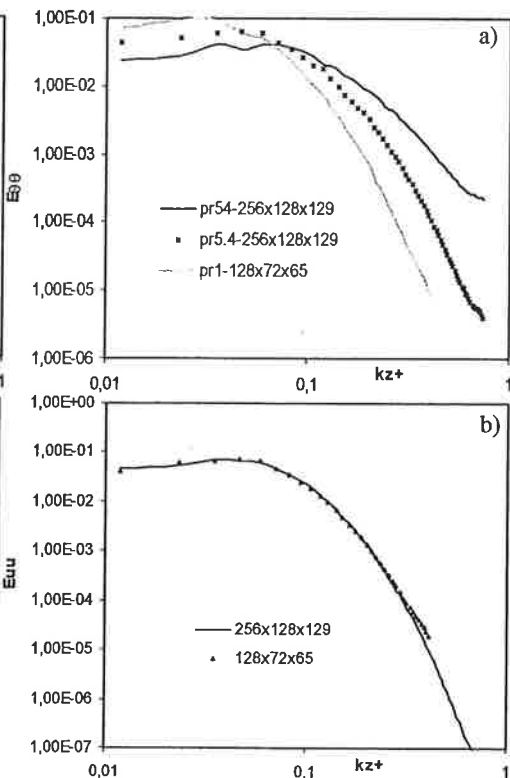
$$\theta_{RMS} = 2.7 Pr^{0.6}. \quad (7)$$

Ocenjeno je bilo, da so fluktuacije temperatur ob steni sorazmerne s $Pr^{0.6}$. Na osnovi en. (7) lahko ocenimo fluktuacije temperatur v območju srednje velikih Prandtlovih števil.

Sl. 3 in 4 prikazujeta spektre fluktuacij temperatur in hitrosti vzdolžno in prečno na smer toka pri razdalji $y^+=3.7$ od stene. Diagrami kažejo, da spektri nižjih Prandtlovih števil padajo hitreje k ničli kot višja Prandtlova števila.



Slika 3. Spektri vzdolž kanala $y^+=3.7$ od stene: a) Q_{konst} , b) hitrost vzdolž toka.



Slika 4. Spektri prečno na kanal $y^+=3.7$ od stene: a) Q_{konst} , b) hitrost vzdolž toka.

Sl. 3 in 4 so pri študiju ločljivosti mreže zelo pomembne. Primerjava spektrov fluktuacij temperatur in hitrosti kažejo pričakovane rezultate: spektri hitrosti padajo hitreje kot spektri temperatur, razen pri $Pr = 1$, kjer je stopnja padanja približno enaka. To se sklada z ugotovitvami Tennekesa in Lumleya (1972), ki sta pokazala, da so najmanjše skale za temperaturno in hitrostno polje pri $Pr = 1$ enake.

Večje Prandtlovo število pomeni večjo moč spektra pri visokih valovnih številih. To je vidno na sl. 3a in 4a, kjer se največje razlike med spektri različnih Prandtlovih števil pojavijo pri visokih valovnih številih. V tem področju so spektri nižjih Prandtlovih števil močnejši kot spektri pri

višjih Prandtlovih številih. Kljub temu pa v najinih primerih (sl. 3 in 4) ni opaziti nobenega "pile-up" pojava. Pojav "pile-up" - moč spektra začne naraščati - se pojavi takrat, ko najmanjše skale niso pravilno modelirane. To pomeni, da moramo povečati ločljivost računske mreže, da zajamemo tudi najmanjše (Kolmogorove) skale, sicer to ni več DNS.

4. Zaključek

Opisala sva direktno numerično simulacijo (DNS) polno razvitega turbulentnega toka pri Reynoldsovem številu disipacije $Re_\tau = 170.8$ in Prandtlovih številih $Pr = 1$ ter $Pr = 5.4$. Simulacijo pri $Pr = 5.4$ sva zaradi nepopolnega popisa poimenovala "kvazi" DNS. Temperaturo sva privzela za pasivni skalar, ki na turbulenco ne vpliva.

Večja Prandtlova števila pomenijo prisotnost manjših vrtincev, ki zahtevajo večjo ločljivost mreže za opis takšnih vrtincev. Teoretično naj bi bila ločljivost DNS pri Prandtlovih številih večjih od ena, sorazmerna kvadratnemu korenu Prandtlovega števila v vseh smereh koordinatnega sistema (Tennekes, Lumley, 1972).

Bergant (2001) je v DNS simulacijah za $Pr = 5.4$ pokazal, da je ta zahteva preostra. To sva upoštevala tudi pri najinih simulacijah. Tako sva za primer največje ločljivosti za $Pr = 5.4$ vzela mrežo, ki je bila približno 3.5 – krat premajhna, da bi zadostila teoretičnim zahtevam za $Pr = 5.4$. Kljub temu pa dobljeni rezultati (temperaturni profili, fluktuacije) kažejo, da so razlike med pravimi DNS in "kvazi" DNS simulacijami zelo majhne. Pomembno je dejstvo, da tudi pri "kvazi" DNS ni opaziti "pile-up" pojava – kopičenje struktur s področja najmanjših temperaturnih skal.

Prikazana je tudi odvisnost med Prandtlovimi števili in fluktuacijami temperatur tik ob steni, ki omogoča napovedovanje fluktuacij temperatur ob steni v območju srednje velikih Prandtlovih številih.

Seznam spremenljivk

h	polovična višina kanala	x, y, z	smer vzdolž, prečno, pravokotno na kanal
\bar{i}_r	enotski vektor v x smeri (1,0,0)	u, v, w	komponente hitrosti v smereh x, y in z
k	valovno število	$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$	disipativna hitrost
L_1, L_3	vzdolžna in prečna dolžina kanala	α	toplotna difuzivnost
p	tlak	θ	brezdimenzijska temperaturna razlika
Pr	Prandtlovo število	λ	toplotna prevodnost
q_w	toplotni tok iz stene na tekočino	γ	kinematična viskoznost
Re_τ	Reynoldsovo število disipacije	ρ	gostota

RMS	root-mean-square (fluktuacije)	$(\)_f$	tekočina
R	avtokorelacijska funkcija	$(\)_w$	stena
t	čas	$(\)_r$	disipacija
T	temperatura	$(\)^*$	normalizirano z u_r, T_r, ν

Literatura

- Gavrilakis S., Tsai, H.M., Voke, P.R., Leslie, D.C., 1986, "Direct and Large Eddy Simulation of Turbulence", *Notes on Numerical Fluid Mechanics* Vol. 15, ed. U. Schumann, R. Friedrich, Vieweg, Braunschweig, D.B.R., pp. 105.
- Kasagi, N., Tomita, Y., Kuroda, A., 1992, "Direct Numerical Simulation of Passive Scalar Field in a Turbulent Channel Flow", *Journal of Heat Transfer -Transactions of ASME*, Vol. 114, 598-606.
- Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe, H., Yamamoto, K., 1998, "DNS of Turbulent Heat Transfer in Channel Flow with low to medium-high Prandtl number fluid", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, 482-491.
- Kawamura, H., Abe, H., Matsuo, Y., 1999, "DNS of Turbulent Heat Transfer in Channel Flow with Respect to Reynolds and Prandtl Number Effects", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 20, pp. 196-207.
- Kim, J., Moin, P., Moser, R. D., 1987, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, Vol. 130, pp. 133-166.
- Kim, J., Moin, P., 1989, "Transport of Passive Scalars in a Turbulent Channel Flow", *Turbulent Shear Flows VI*, Springer-Verlag, Berlin.
- Na, Y., Hanratty, T.J., 2000, »Limiting Behavior of Turbulent Scalar Transport Close to a Wall«, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 1749-1758.
- Tennekes, H., Lumley, J.L., 1972, »A First Course in Turbulence«, MIT Press, Cambridge, MA.
- Tiselj, I., Pogrebnyak, E., C. Li, Mosyak, A., Hetsroni, G., 2001, "Effect of wall boundary condition on scalar transfer in a fully developed turbulent flume", *Physics of Fluids*, 13 (4), pp.1028-1039.
- Bergant, R., Tiselj, I., Hetsroni, G., 2001, Resolution requirements for turbulent flume heat transfer DNS at Prandtl number 5.4, *Proceedings of ASME*, Vol. 2.
- Kader, B.A., 1981, Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers, *Int. J. Heat Mass Transf.* 24, 1541.
- Tiselj, I., Bergant, R., Mavko, B., Bajsic, I., Hetsroni, G., 2001, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall, *J. Heat Transf.*, 123, 849-857.

Modeliranje tokovnih razmer na deformabilnem telesu v zračnem toku

Anka Petrovič, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana

Brane Širok, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana

Marko Hočevar, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana

Matej Novak, Turboinštitut, Ljubljana

Povzetek

V pretočno polje ravne cevi smo namestili elastično telo. Opazovali smo deformacijo telesa in medsebojne efekte deformacije telesa in zračnega toka pri različnih hitrostih zračnega toka in velikostih telesa. Za analizo dogajanja smo izpeljali metodo, ki iz vizualnih podatkov, dobljenih ob poskusu, poda konture za časovno spreminjajoče se oblike telesa v zračnem toku.

Zračni tok okoli telesa smo simulirali s panelsko metodo, ki nakaže spreminjajočo se aksialno silo, ki deluje na telo. To smo primerjali z eksperimentalno dobljenim nestabilnim obnašanjem tlačne diference.

Analize problema so pokazale pomembnost nadaljnjih raziskav medsebojnega učinkovanja deformabilnih teles in tekočin, kot tudi ustreznost uporabljene metode za analizo tega in podobnih problemov. S tem se je odprla pot za razširitev metode, ki ne bi zgolj obravnavala probleme s časovno deformabilnimi robnimi pogoji, temveč bi tudi predvidela posledice v podobnih razmerah.

Abstract

An elastic body was monitored in a tight wind tunnel. Different air velocities and body pressures were studied, resulting in reciprocal effects of the airflow and deformation of the shape of the body. Analysis of the problem was made with the method using visualized data of the problem to compute the effects of the time changing boundary from a series of static shapes of the body.

A panel method was used for simulating the flow. It predicted the oscillating force acting on the body, which was compared with the unstable behaviour of the pressure difference followed from the experiment.

Present results demonstrate the appropriate use of the method and form basis for further investigation of a soft material behavior under different conditions, which would eventually lead to the prediction of the effects under similar conditions.

1 Uvod

Problemi v aeroelastičnosti so zapletenejši od problemov v aerodinamiki, saj določitev robnih pogojev, potrebnih za obravnavo, nikakor ni enostavna zaradi njihove časovne

spremenljivosti. V članku predstavljamo metodo in ustreznost izbire metode, s katero smo ta problem rešili.

Aeroelastični fenomeni so posledica aerodinamične sile, ki povzroči deformacijo strukture obtekajočih objektov in vodi v spremembo aerodinamične sile. Interakcije nato privedejo do ravnovesja, lahko pa vodijo tudi v uničenje strukture objekta [7]. Doseženo ravnovesje lahko pomeni boljšo učinkovitost objektov, uničenje strukture pa neželjen rezultat interakcije. Fenomeni so prisotni tako v naravi (upogibanje dreves) kot tudi v gradbeništvu (nihanje mostov), strojništvu, izdelavi turbinskih strojev in designu vozil. Aeroelastičnost, ki obravnava medsebojne efekte aerodinamičnih sil in sil elastičnosti, je tako v zadnjem času predmet mnogih raziskav [1] - [4]. Te so se predvsem osredotočale na zmanjšanje učinkovitosti aerostatičnosti, da bi preprečili oscilacije struktur blizu resonance, kar lahko privede do uničenja struktur. Primer je zlom letalskega trupa ali kril zaradi zvijanja in osciliranja lahkih in fleksibilnih konstrukcij [2]. Novejše raziskave se osredotočajo na uporabo fenomenov aeroelastičnosti, da bi z njimi zagotovili boljše sposobnosti vozil. Pravilna oblika strukture ob ustreznih pogojih bi lahko povečala stabilnost strukture [5] in povečala njeno učinkovitost z upoštevanjem učinkovitosti viskoznosti na stenah strukture [1], [3].

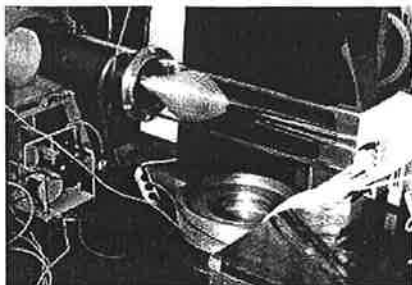
Ključnega pomena je tako izračun toka na časovno spreminjajočih se mrežah. Problem lahko rešimo z rešitvijo Lagrangeove enačbe sistema ali s sistemom enačb, ki opisujejo tok tekočine, elastostatično ravnovesje in deformacijo tokovne mreže.

V prispevku predstavljamo poskus, pri katerem smo opazovali deformacijo elastičnega telesa v ravni cevi, skozi katero je tekel zračni tok. Predstavljamo tudi metodo, po kateri smo problem obravnavali. Ta temelji na vizualnem vrednotenju kontur elastičnega telesa in obdelavi teh podatkov s panelno metodo v dveh dimenzijah.

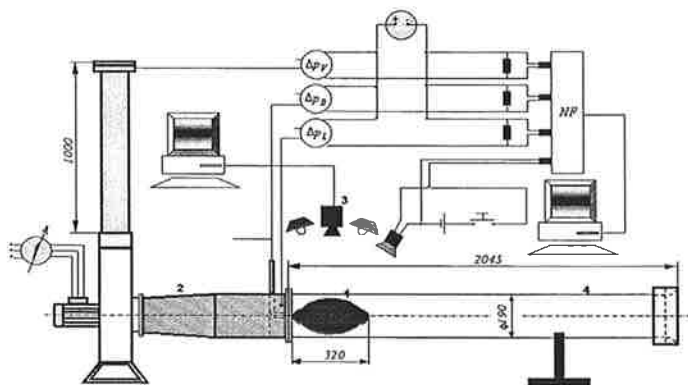
2 Poskus

Poskus je bil izveden na Turboinštitutu v Ljubljani v sodelovanju s Fakulteto za strojništvo Univerze v Ljubljani. Izveden je bil kot študija aerodinamskih karakteristik deformabilnega zapornega organa v zračnem toku v tesni cilindrični cevi, pri kateri smo opazovali medsebojne efekte generiranega zračnega toka in deformabilnega elastičnega telesa (slika (2.1)).

Na sliki (2.2) je prikazana shema poskusa. Centrifugalni ventilator (št. 2) generira zračni tok, ki vstopa skozi vstopno šobo v ravno cev dolžine $20 D$, kjer je D notranji premer cevovoda. Na izstopnem delu ravne cevi, ki je izdelana iz pleksi stekla, je v cev nameščen balon osnosimetrične - eliptične oblike. Oblika balona je parameter, ki se v



Slika 2.1: Fotografija deformabilnega elastičnega telesa v cevi med poskusom.



Slika 2.2: Shematska risba poskusa: 1 balon, 2 ventilator, 3 kamera, 4 cilindrična cev.

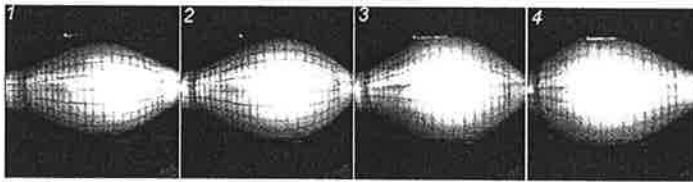
toku poskusa spreminja v odvisnosti od notranjega statičnega tlaka v balonu in zunanjega obtekanja zračnega toka ob balonu. Zračni tok iz vstopne cilindrične cevi vstopa skozi vstopno ustje v ventilator in izstopa skozi vertikalno cev in merilno zaslonko, ki je prigradena na izstopu v atmosfero.

Hitrost zračnega toka, odnosno volumski pretok zraka, smo med poskusom zvezno spreminjali v mejah Reynoldsovega števila $Re = 0$ do 27000, določenega s premerom cevovoda D in srednjo hitrostjo strujanja zraka v cevovodu v . Zvezna sprememba pretoka je bila izvedena s frekvenčno regulacijo vrtilne frekvence rotorja ventilatorja. Sprememba vrtilne frekvence je linearno naraščala v opazovanem območju Reynoldso-

vega števila. V časovnem intervalu eksperimenta smo opazovali obliko balona, ki se je s pretočnim režimom spreminjala. S frekvenco 100Hz so bile zajete in digitalizirane slike balona na katerem so bile označene vzdolžne in prečne črte prikazane na sliki (2.3), ki so omogočale oceno časovne spremembe oblike površine balona.

Simultano s posnetki na kameri so bile vzorčene tudi: tlačna razlika na zaslonki, statični tlak v balonu in diferenca statičnega tlaka na steni cevi med ravninama pred in za balonom. Frekvenca vzorčenja je znašala 1kHz . S pomočjo tlačne razlike na zaslonki smo izračunali trenutni volumski pretok zraka in pripadajočo srednjo hitrost strujanja v cevi. Hitrost $v(t)$ in začetni statični tlak v balonu sta bila neodvisna parametra, katerih vrednost je bila določena za vsak eksperiment posebej. Gradient vrtilne frekvence rotorja ventilatorja je bil konstanten za vse poskuse. Pri začetni hitrosti strujanja $v = 0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ je bilo za različne začetne tlake v balonu razmerje maksimalnih premerov balona s premerom cevi v območju od 0.915 do 1, ko se balon dotika stene cevi, kot je prikazano na sliki (2.3).

Poskus je pokazal deformacijo elastičnega telesa - balona preko različnih prehodnih oblik v oscilirajoče nestabilno stanje.



Slika 2.3: Različne oblike, v katere se je deformiralo telo med poskusom, pri različnih hitrostih obtekajočega zračnega toka. Št. 1: $0.033\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{d_B}{d_T} = 0.915$, št. 2: $0.0266\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{d_B}{d_T} = 0.927$, št. 3: $2.2217\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{d_B}{d_T} = 0.966$, št. 4: $2.223\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{d_B}{d_T} = 1$

3 Modeliranje zračnega toka

Najpogosteje aerodinamski problem privede do modeliranja zračnega toka in izračuna porazdelitve tlaka na telesu, ki ga opazujemo. Obstaja veliko različnih modelov in računalniških programov, ki dobro opišejo dogajanje in so v širši uporabi. Problem aeroelastičnosti sodi med zahtevnejše, saj je potrebno povezati enačbe, ki opišejo razmere v toku in enačbe, ki opišejo efekte elastičnosti. Vendar lahko tudi te probleme prevedemo na reševanje vrste statičnih problemov.

Pri naši metodi smo vsak posnetek deformabilnega telesa s kamero obravnavali kot

posamezen statični problem in z analizo vizualnih podatkov ocenili deformacije oblike telesa. To smo nato uporabili pri modeliranju zračnega toka.

Tok smo modelirali s panelsko metodo, za katero smo napisali računalniški program, ki je sprejemal enačbe strukture in upošteval tudi spreminjanje oblike telesa. Slabost panelske metode, pri kateri razdelimo obliko telesa na panele, ki učinkujejo kot izvori toka, nato pa preko pogojev izračunamo njihove moči [6] je ta, da simulira potencialni tok. Ta je rešitev Laplaceove enačbe

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (3.1)$$

ki opiše nevskozen, nestisljiv in nerotacijski tok tekočine. S tem izgubimo podatke o spremembi tlaka v pretočnem polju. V našem primeru smo obravnavali telo v tesni cevi. Efekt cevi smo dodali tako, da smo položili panele ne le na telo temveč tudi na cev, tako da se rezultirajoče moči panelov razporedijo po telesu in cevi. Ustreznost naše izbire potrjuje test simuliranega odmika cevi od telesa, pri katerem preidejo dobljeni rezultati za dovolj veliko oddaljenost cevi od telesa v rezultate, dobljene za telo v neomejenem prostoru.

3.1 Analiza vizualnih podatkov

Namen prispevka je ugotoviti razmere, do katerih pripelje medsebojno učinkovanje zračnega toka in deformabilnega telesa. Geometrijo problema za modeliranje deformabilnega telesa smo dobili z analizo slik.

Za natančno določitev robnih pogojev, zunanjih robov telesa in notranjih robov cevi, smo uporabili na telo predhodno narisano koordinatno mrežo. Predpostavili smo, da je naše telo osno simetrično, zato so enačbe za vodoravne črte mreže sorazmerne projekcijskemu faktorju α (en. 3.2).

$$y \propto f(x) \sin(\alpha). \quad (3.2)$$

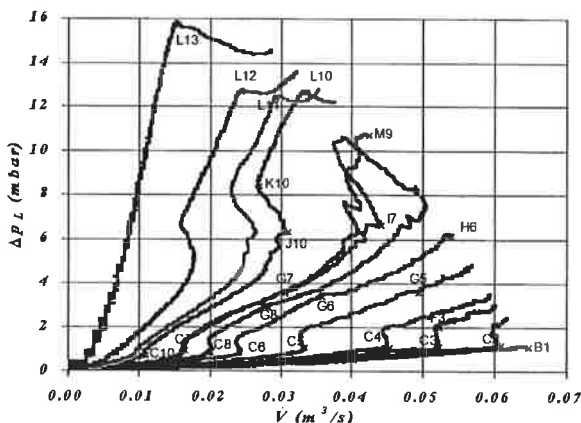
Prilagajanje parametrov k eksperimentalnim vrednostim konture telesa je pokazalo, da obliko telesa opiše nekoliko spremenjena sinusna funkcija

$$f(x) = a + b x \sin\left(\frac{cx\pi}{256}\right) + d \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2.5ex\pi}{235}\right). \quad (3.3)$$

Parametre a, b, c, d in e smo izračunali za vsak posnetek posebej in tako dobili eno enačbo in vrsto različnih parametrov, ki opisujejo zaporedne spremembe oblike telesa. Tak opis robnih pogojev je preprost za uporabo v različnih numeričnih modelih, ki računajo obtekaajoči potencialni tok.

3.2 Rezultati

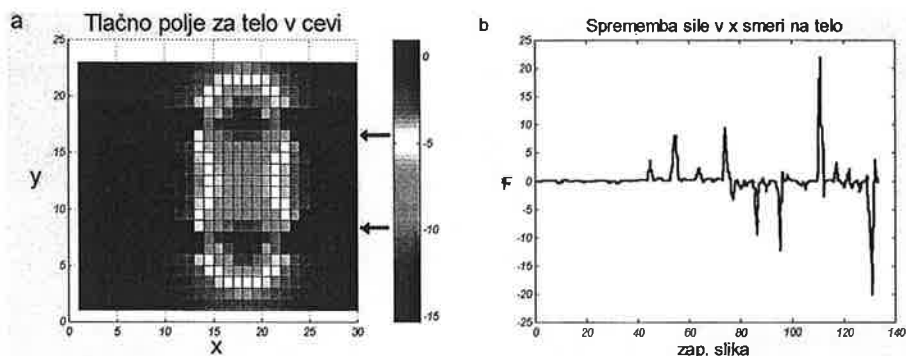
Neposredno iz eksperimenta sledi funkcijska odvisnost spremembe statičnega tlaka na balonu, ki je predstavljena na diagramu (3.1). Tlačna diferenca je podana v odvisnosti od volumskega pretoka zraka in velikosti balona odnosno začetnega statičnega tlaka v balonu. Iz diagrama so razvidne značilne uporovne karakteristike, katerih skupna lastnost je, da tlačna diferenca narašča monotono v področju malih hitrosti, nato pa preko nezveznih prehodov prehaja v kvalitativno drugačna tokovna razmerja. Navedeni prehodi, podrobneje opisani v delu [9], so povezani s signifikantnimi spremembami oblike balona in imajo za posledico praviloma povečane tlačne diference in v zaključnem delu prehod v nestabilno tokovno strukturo, ki vzdržuje oscilirajoče stanje spreminjajoče oblike elastičnega telesa in tokovnega polja v katerem se telo nahaja.



Slika 3.1: Padeč tlaka v zračnem toku zaradi balona kot funkcija volumskega toka. Diagram kaže kvadratično odvisnost med prikazanimi količinami, ko se telo obnaša kot trdno telo, ob drugačnih pogojih pa stabilnosti več ni. Številka 1 označuje odvisnost za najmanj, številka 13 pa najbolj napihnjen balon.

Iz rezultatov panelske metode, ki so predstavljeni na slikah (3.2 a in b) je razvidno, da je tlačno polje vzdolž deformabilnega telesa porazdeljeno osnosimetrično. Glede na generirani zračni tok, pa je tlačna porazdelitev odvisna od smeri toka. Prisotna je razlika v porazdelitvi na čelni- vstopni in izstopni strani balona. To odstopanje je posledica asimetrije konture balona, ki je bila vključena kot robni pogoj v numerično shemo in je bila dobljena z računalniško podprto vizualizacijo pri eksperimentu. V področju zožitve, ki jo oblikuje stena balona in zunanja stena cevovoda, se statični

tlak signifikantno zniža, kar je v skladu s pričakovanji. Iz diagrama rezultirajoče aksialne sile, ki je predstavljen na sliki (3.2 b) pa sledi zanimiva ugotovitev, ki potrjuje prehod opazovanega aerodinamskega sistema iz stabilnega režima v nestabilen aperioidičen fluktuirajoč režim z naraščajočo amplitudo oscilacij sile, ki je vzročno povezana s fluktuacijami oblike balona v zračnem toku. Iz diagrama je razvidno, da oscilacije sile naraščajo z indeksom zaporedne slike, ki je proporcionalen vrtilni frekvenci rotorja ventilatorja odnosno generiranemu pretoku v periodi eksperimenta. Tako lahko zaključimo, da se nestabilno obnašanje tlačne diference, ki je dobljena eksperimentalno in je predstavljena na diagramu (3.1), ujema s prisotnostjo aperioidične nestabilne aksialne sile na balonu.



Slika 3.2: a: Osnosimetrično tlačno polje za telo v cevi je eden od rezultatov panelske metode. b: Oscilirajoča sila zračnega toka na telo, ki spreminja obliko in lego, kot jo predvidi panelska metoda za telo v tesni cevi.

Dobljeni rezultati so predmet nadaljnjih raziskav. Ob tem želimo izboljšati uporabljeno metodo za modeliranje toka, saj so v dosedanjih rezultatih možne numerične napake, z uporabo panelske metode v dveh dimenzijah pa obravnavamo tudi le približek realnega sistema.

4 Zaključek

Opazovali smo medsebojno učinkovanje zračnega toka in telesa v zračnem toku v tesno prilegajoči se cevi. Iz eksperimentalnih vrednosti kontur telesa so bili izpeljani robni pogoji za modeliranje tokovnih razmer. Poskus je pokazal deformacijo elastičnega telesa preko različnih prehodnih oblik v oscilirajoče nestabilno stanje in podal tlačno

diferenco v odvisnosti od statičnega tlaka v balonu. Ta narašča monotono v področju malih hitrosti, nato pa preko nezveznih prehodov, ki so v zvezi s spremembami oblike balona, prehaja v kvalitativno drugačna tokovna razmerja.

Rezultati panelske metode so pokazali osnosimetrično, od smeri toka odvisno tlačno porazdelitev in aksialno silo, ki sta posledici asimetričnih robnih pogojev, dobljenih iz konture balona, ki so bili vključeni v numerično shemo.

Analize so pokazale ustreznost metode, uporabljene za modeliranje, in nakazale pot njene razširitve na druge metode za analizo problema, pri čemer bi odpravili dosedanje numerične napake in se približali k realnosti sistema. Izboljšave bodo privedle do nadaljnjih raziskav aeroelastičnih sistemov v zračnem toku in predvidenja posledic aeroelastičnih efektov v podobnih razmerah.

Literatura

- [1] K.D. Jones, M.F. Platzer: *Airfoil Geometry and Compressibility Effects on Wing and Blade Flutter*, AIAA Paper No. 98-0517
- [2] K.D. Jones, M.F. Platzer: *Time-Domain Analysis of Low-Speed Airfoil Flutter*, AIAA Journal Vol. 34. No. 5, 1996
- [3] A. Beckert: *Coupling Fluid (CFD) and Structural (FE) Models Using Finite Interpolation Elements*, *Aerosp. Sci. Technol.* 4 (2000) 13-22
- [4] B. Širok, M. Novak: *Analisis of Flow Kinematics Behind Pulsating Adaptive Airfoil Using Computer-Aided Visualization*, ISQVPFD' 2000
- [5] W. Krüger: *Flexible Aircraft*, Nationales Luftfahrtforschungsprogramm
- [6] C.A.J. Fletcher: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 1988
- [7] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, R.L. Halfman: *Aeroelasticity*, Dover, 1955
- [8] L.M. Milne - Thompson: *Theoretical Aerodynamics*, MacMillan and Co., 1952
- [9] A. Petrovič, A. Kodre, M. Hočevar, B. Širok, D.R. Philpott, A. Lewis: *Deformation of a rubber balloon in an air stream in a tight wind tunnel*, ISQVPFD' 2002

Analiza frekvenčnega odziva anemometra z vročo žičko s frekvenčno odvisnim ojačevalnikom

Viktor Šajn, Franc Kosel *

Frequency response analysis of the hot-wire anemometer with frequency dependent amplifier

Povzetek

V prispevku je analiziran frekvenčni odziv anemometra z vročo žičke konstantne temperature. V sestavu je ojačevalnik, ki ima prenosno funkcijo s tretjo stopnjo polov in prvo stopnjo ničel. En pol prenosne funkcije ima časovno konstanto večjo od 0.02s, ojačanje se v frekvenčnem območju delovanja anemometra spreminja v odvisnosti od frekvence. Določili smo prenosno funkcijo celotnega sestava anemometra z vročo žičko, pri čemer smo upoštevali majhne fluktuacije in linearen odziv sistema. Za sinusno obliko napetostega vzbujanja anemometra smo izračunali frekvenčni odziv ter rezultate primerjali z izmerjenimi v nizkoturbulentnem vetrovniku.

Abstract

The paper treats the dynamics of the constant temperature hot-wire anemometer. The amplifier has a transfer function with a third order of poles and first order of zeroes. One of the poles has a time constant greater than 0.02s. The presented amplifier has a frequency dependent gain in the frequency range of the anemometer. The transfer function was analysed for small fluctuation and a linearised system. The frequency response for the sine-wave voltage fluctuations was calculated and compared with the result measured in low-level turbulence wind channel.

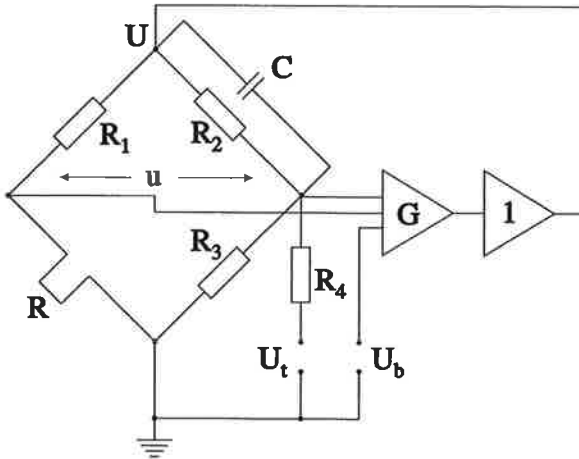
*Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, Aškerčeva 6, SI-1000 Ljubljana (viktor.sajn@fs.uni-lj.si, franc.kosel@fs.uni-lj.si)

1 Uvod

Princip merjenja hitrosti z anemometrom z vročo žičko konstantne temperature temelji na odvodu toplote s segrete žičke v okolico, ki je funkcija hitrosti obtekajočega fluida. Majhen premer segrete žičke in velika temperaturna razlika omogočajo hiter odziv žičke, ki pa v odprtih sistemih brez povratne zanke ne omogoča frekvenčnega pasu višjega od 1kHz [1]. Anemometri s konstantno temperaturo imajo povratno zanko, ki vzdržuje enake temperaturne razmere na segreti žički ne glede na hitrost fluida oziroma količino odvedene toplote. Z uvedbo povratne zanke, ki vzdržuje konstantno temperaturo žičke, se frekvenčni pas poveča. Osnovni problem anemometra je ojačevalcec ter njegov vpliv na prenosno funkcijo celotnega sestava. V literaturi najdemo več modelov dinamike odziva ojačevalcev [2, 3] od katerih se je zadnji najbolj uveljavil. V splošnem naj bi model anemometra zajel vse pole in ničle, ki se pojavljajo pri normiranem odzivu ojačevalnika večjem od 1. Navišja stopnja polov in ničel je sicer poljubna, vendar pa mora biti zaradi rezultatov meritev stopnja polov najmanj druge stopnje. V tem primeru imamo osnovni Freymuthov model [3]. V prispevku pa bomo obravnavali model, ki popisuje ojačevalcec v realiziranem anemometru z višjim redom prenosne funkcije. Na osnovi modela določimo ustrezne pogoje za stabilno delovanje izdelanega anemometra.

2 Osnovne enačbe

Na sliki (1) je predstavljena funkcionalna shema modela anemometra.



Slika 1: Model anemometra z žičko konstantne temperature

Vročo žičko predstavlja upor R , R_1 in R_2 sta konstantna upora, R_3 pa je upor s pozitivnim temperaturnim gradientom in je namenjen kompenzaciji temperaturnega vpliva okolice

na delovanje instrumenta. Kondenzator C služi impedančni kompenzaciji. Upor R_4 in testna napetost U_t sta prisotna pri testiranju frekvenčnega pasu na osnovi napetostnih fluktuacij Wheatstoneovega mostička. Z napetostjo U_b spreminjamo napetost ničlišča vhoda napetostnega operacijskega ojačevalnika z ojačanjem G . Tokovni ojačevalec, z napetostnim ojačanjem 1, ima višji dinamični odziv od ostalih elementov in zato ni bil upoštevan pri analizi sestava [4], [2]. Napetost u predstavlja napetostno razliko med vejami Wheatstoneovega mostička, U pa je napajalna napetost mostička.

Upornost žičke anemometra je odvisna od temperature in se določi po naslednji enačbi

$$R - R_0 = \alpha (T - T_0) , \quad (1)$$

kjer α predstavlja temperaturni količnik prirastka upora žičke, T temperaturo segrete žičke ter R_0 upor žičke pri okoliški temperaturi T_0 . Energijsko bilanco odvedene toplote v odvisnosti od hitrosti v obtekajočega fluida popisuje enačba:

$$\frac{U^2 R}{(R + R_1)^2} - h(v) (T - T_0) = c \frac{dT}{dt} , \quad (2)$$

kjer $h(v)$ predstavlja funkcijo prenosa toplote, c pa toplotno kapaciteto segrete žičke. Z uporabo (1) dobimo:

$$\frac{U^2 R}{(R + R_1)^2} - h(v) \frac{(R - R_0)}{\alpha} = \frac{c}{\alpha} \frac{dR}{dt} . \quad (3)$$

Razliko napetosti u med vejami mostička popisuje naslednja enačba:

$$u = \frac{1}{1+n} \frac{nR_1 - R}{R_1 + R} U + M_b \frac{dU}{dt} + \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_t . \quad (4)$$

Količnik desne veje Wheaststoneovega mostička n lahko zapišemo z enačbo:

$$R_3 = nR_2 , \quad (5)$$

ter časovno konstanto M_b

$$M_b = \frac{n}{1+n} \frac{R_1}{R_1 + R} R_2 C . \quad (6)$$

Za prenosno funkcijo ojačevalca se običajno uporablja model ojačevalca z diferencialno enačbo druge stopnje [5, 3]. V našem primeru pa smo, zaradi zahtevnosti prenosne funkcije ojačevalca, uporabili prenosno funkcijo, ki ima tri pole in eno ničlo:

$$U_b + G \left(u + M^* \frac{du}{dt} \right) = U + M' \frac{dU}{dt} + M'' \frac{d^2 U}{dt^2} + M''' \frac{d^3 U}{dt^3} . \quad (7)$$

Enačbe (3, 4 in 7) predstavljajo sistem, ki popisuje obnašanje anemometra. Sistem je nelinearen, zato smo ga linearizirali okoli stacionarne točke delovanja S . Za majhne amplitude fluktuacij hitrosti lahko odziv razdelimo na stacionaren in linearen fluktuirajoči del:

$$\begin{aligned} u &= u_s + \Delta u, \quad U = U_s + \Delta U, \\ v &= v_s + \Delta v, \quad R = R_s + \Delta R, \\ U_t &= \Delta U_t. \end{aligned} \quad (8)$$

V zgornji enačbi je zahtevana stacionarna velikost testne napetosti $U_{t,s} = 0$. Ob upoštevanju stacionarnih velikosti preidejo enačbe (3, 4 in 7) v naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} \frac{U_s^2}{R_1} \frac{m}{(1+m)^2} - \frac{h(v_s)}{\alpha} (\vartheta - 1) R_0 &= 0, \\ u_s &= \frac{n-m}{(1+m)(1+n)} U_s, \\ G u_s + U_b &= U_s. \end{aligned} \quad (9)$$

Količnik leve veje Wheastoneovega mostička m ter količnik pregretja žičke anemometra ϑ zapišemo z

$$R_s = m R_1, \quad R_s = \vartheta R_0. \quad (10)$$

Ob upoštevanju linearnih fluktuacij spremenljivk dobi sistem enačb (3, 4 in 7) naslednjo obliko

$$\begin{aligned} (1 - \beta) \Delta R + \frac{c}{h(v_s)} \frac{d\Delta R}{dt} &= 2(\vartheta - 1) \frac{R_0}{U_s} - \frac{(\vartheta - 1) R_0}{h(v_s)} \frac{dh(v)}{dv} \Delta v, \\ \Delta u &= \frac{U_s - U_b}{G U_s} \Delta U + M_b \frac{d\Delta U}{dt} - \frac{1}{(1+m)^2} \frac{U_s}{R_1} \Delta R + \frac{R_3}{R_3 + R_4} \Delta U_t, \\ G(\Delta u + M^* \frac{d\Delta u}{dt}) &= \Delta U + M' \frac{d\Delta U}{dt} + M'' \frac{d^2 \Delta U}{dt^2} + M''' \frac{d^3 \Delta U}{dt^3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Količnik β se izračuna po naslednji enačbi:

$$\beta = \frac{1-m}{1+m} \left(1 - \frac{1}{\vartheta} \right). \quad (12)$$

Z upoštevanjem (9) v (11) ter eliminacijo ostalih sprejemljivk dobimo funkcijo odvisnosti spremembe izhodne napetosti ΔU od spremembe hitrosti Δv in testne napetosti U_t

$$\begin{aligned} \frac{G}{M_0} \frac{m}{(1+m)^2} \frac{U_s}{h(v)} \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) \frac{dh(v)}{dv} (1 + M^* D) \Delta v + \\ + \frac{G}{M_0} \frac{R_3}{R_3 + R_4} \left[(1 - \beta) + \frac{c}{h(v)} D \right] (1 + M^* D) \Delta U_t = \\ = (1 + M_1 D + M_2 D^2 + M_3 D^3 + M_4 D^4) \Delta U. \end{aligned} \quad (13)$$

Operator D^n predstavlja n -ti odvod funkcije po času. Časovne konstante M_1, M_2, M_3 in M_4 se lahko zapišejo z naslednjimi enačbami:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{U_b}{U_s} (1 - \beta) + \frac{2mG}{(1+m)^2} \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right), \\ M_1 &= \frac{1}{M_0} \left\{ (1 - \beta) M' + \frac{c}{h(v)} \frac{U_b}{U_s} - (1 - \beta) G M_b - \right. \\ &\quad \left. - M^* (1 - \beta) \right\} - M^*, \\ M_2 &= \frac{1}{M_0} \left\{ (1 - \beta) M'' + \frac{c}{h(v)} M' - \frac{c}{h(v)} G M_b - \right. \\ &\quad \left. - M^* \left[\frac{c}{h(v)} \left(1 - \frac{U_b}{U_s}\right) + (1 - \beta) G M_b \right] \right\}, \\ M_3 &= \frac{1}{M_0} \left\{ (1 - \beta) M''' + \frac{c}{h(v)} M'' - M^* \frac{c}{h(v)} G M_b \right\}, \\ M_4 &= \frac{1}{M_0} \frac{c}{h(v)} M'''. \end{aligned} \quad (14)$$

Enačba (13) popisuje odziv anemometra z vročo žičko na fluktuacije hitrosti Δv ter na fluktuacije testne napetosti ΔU_t . V primeru meritev, ko je $\Delta U_t = 0$, dobi enačba (13) naslednjo obliko

$$\Delta U = \frac{\frac{G}{M_0} \frac{m}{(1+m)^2} \frac{U_s}{h(v)} \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) \frac{dh(v)}{dv} (1 + M^* D)}{1 + M_1 D + M_2 D^2 + M_3 D^3 + M_4 D^4} \Delta v. \quad (15)$$

Najboljši odziv anemometra z vročo žičko dobimo, ko so časovne konstante M_1, M_2, M_3 nične, M_4 pa čimmanjši. V primeru, da so časovne konstante M_1, M_2, M_3 negativne, je sistem nestabilen. Minimalne vrednosti konstant dosežemo z ustrezno nastavitvijo

negativnih členov v enačbah (14). Časovna konstanta ničle M^* pa naj bi, zaradi enakosti odziva, bila zadosti majhna, da ne bi vplivala na frekvenčni pas anemometra.

Metode za direktno določanje frekvenčnega pasu odziva anemometra so zelo zahtevne in nezanesljive, zato so se razvile metode za indirektno določanje zasnovane na električni fluktuaciji-motnju mostička anemometra. Iz odziva na napetostno motnjo lahko določimo frekvenčni pas anemometra kot tudi frekvenco termalne resonance vroče žičke. Prenosna funkcija napetostno motenega sistema ima naslednjo obliko:

$$\Delta U = \frac{\frac{G}{M_0} \frac{R_3}{R_3+R_4} (1-\beta) \left[1 + \frac{c}{h(v)} \frac{1}{(1-\beta)} D \right] (1+M^*D)}{1+M_1D+M_2D^2+M_3D^3+M_4D^4} \Delta U_t \quad (16)$$

Časovna konstanta τ_z , ki predstavlja odziv vroče žičke v konfiguraciji Wheatstonevega mostička je

$$\tau_z = \frac{c}{h(v)(1-\beta)} \quad (17)$$

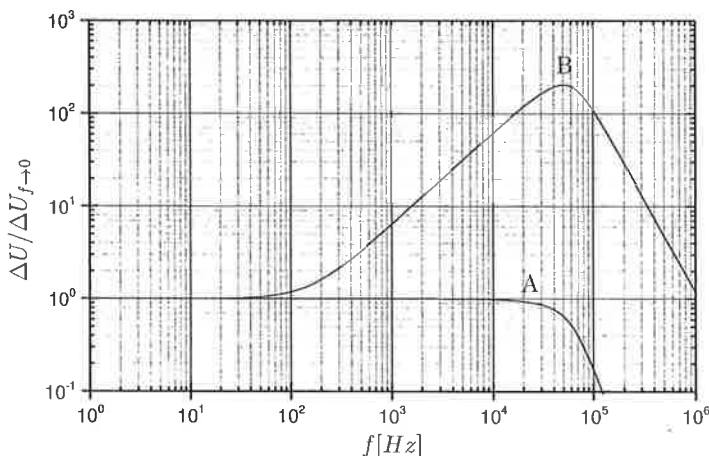
V primeru Wheatstonevega mostička tipa "1:1" oziroma $m = 1$, dobimo resonančno frekvenco same žičke

$$f_z = \frac{1}{2\pi \cdot \frac{c}{h(v)}} \quad (18)$$

3 Primerjava med izračunanimi in izmerjenimi podatki

V laboratoriju za nelinearno mehaniko na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani smo zasnovali in izdelali anemometer z vročo žičko konstantne temperature. Merilna žička dolžine 3.5mm je izdelana iz volframa debeline 8 μ m. Ojačevalec ima znotraj frekvenčnega pasu en pol, ki ne vpliva na njegovo linearnost v frekvenčnem pasu delovanja. Test je opravljen v nizkoturbulentnem vetrovniku v Laboratoriju za nelinearno mehaniko v pogojih nizke stopnje turbulentne intenzivnosti, s čemer smo zadostili pogoju za uporabo enačbe (16). Uporabili smo sinusno obliko motilne testne napetosti nastavljive frekvence. Rezultate smo normirali glede na odziv anemometra na napetostne fluktuacije pri frekvenci manjši od 10Hz. Meritve so izpeljane pri hitrosti zraka 15.5m/s in faktorju pregretja žičke 1.8.

Na sliki (2) je prikazan izračunan odziv anemometra na sinusno fluktuacijo po enačbi (16) graf A ter odziv anemometra na fluktuacije hitrosti po enačbi (15) graf B. Za največji frekvenčni pas anemometra se vzame tista frekvenca, pri kateri je odziv anemometra večji ali enak $\sqrt{2}/2$ ali $-3dB$ normirane vrednosti. Ta se dloči iz grafa B tako, da se



Slika 2: Izračunan odziv anemometra na sinusne fluktuacije napetosti *A* ter odziv na fluktuacije hitrosti *B*

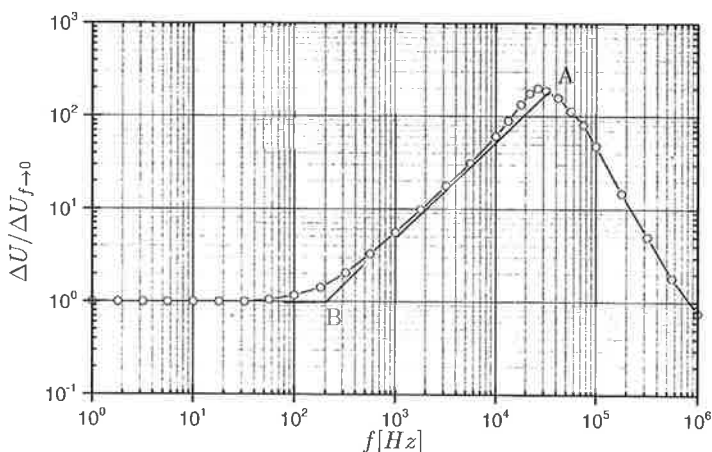
poišče presečišče grafa *B* in premice vzporedne z linearnim delom vzpenjajočega se dela grafa *B* zmanjšane za $3dB$. Iz presečišča premice vzpenjajočega linearnega dela grafa *B* in horizontalne premice vrednosti 1 dobimo f_z - resonančno frekvenco vroče žičke v konfiguraciji Wheatstonevega mostička.

Na sliki 3 je predstavljen izmerjen odziv anemometra na sinusno električno fluktuacijo testne napetosti U_t . Iz grafa vidimo, da se anemometer odziva s konstantno amplitudo do frekvenčnega območja okrog $100Hz$. Nato sledi rast odziva z intenzivnostjo $20dB/dec$ do največje vrednosti pri frekvenci $25.6kHz$. Temu sledi zmanjševanje odziva z $40dB/dec$ zaradi dveh dodatnih polov ter z $20dB/dec$ v področju nad $500kHz$ zaradi vpliva ničle.

Iz grafa meritve na sliki 3 (točka *A*) odčitamo velikost frekvenčnega pasu anemometra $35kHz$. Resonančno frekvenco anemometra, ki znaša $201Hz$, dobimo v presečišču dveh premic (točka *B*). Iz razmerja frekvenc dobimo faktor razširitve frekvenčnega pasu anemometra zaradi uvedbe povratne zanke, ki v predstavljenem primeru znaša 147.

4 Sklep

Predstavljen je model anemometra z vročo žičko konstantne temperature s frekvenčno odvisnim ojačevalcem v delovnem frekvenčnem območju. Izračunani sta prenosni funkciji odziva anemometra na fluktuacijo hitrosti obtekajočega zraka ter na sinusno električno fluktuacijo. Rezultate izračunov smo primerjali z izmerjenimi. Ugotovljena sta frekvenčni pas delovanja anemometra ter frekvenca termalne resonance vroče žičke, ki znaša $201Hz$.



Slika 3: Izmerjen odziv anemometra na sinusne fluktuacije napetosti

Izmerjen frekvenčni pas anemometra znaša 35kHz . Na osnovi primerjave izmerjenega in izračunanega odziva na električno fluktuacijo je razvidno, da je odziv sestava v delovnem območju pravilen ter da prvi pol ojačevalca z veliko časovno konstanto ne vpliva na odziv.

Literatura

- [1] R. J. Goldstein. *Fluid Mechanics Measurement*. Taylor & Francis, 1996.
- [2] J. H. Watmuff. An investigation of the constant-temperature hot-wire anemometer. *Experimental thermal and fluid Science*, 11(2):117–134, 1995.
- [3] P. Freymuth. Frequency response and electronic testing for constant-temperature hot-wire anemometers. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 10:705–709, 1977.
- [4] Morrison G L Perry, A E. A study of constant-temperature hot-wire anemometer. *Journal of Fluid Mechanics*, 47:577–599, 1971.
- [5] P. Freymuth. Feedback control theory for constant-temperature hot-wire anemometers. *Review of Scientific Instruments*, 38(5):677–681, 1967.

MERJENJE HITROSTI DELCEV V STROJU ZA PESKANJE

Aleš Hribernik¹, Gorazd Bombek², Ivan Markočič³

MEASUREMENT OF THE SHOTBLASTING MACHINE PARTICLE VELOCITY

POVZETEK:

Učinkovitost peskalnih naprav merimo s količino materiala, ki ga s postopkom odstranimo s kontrolne površine na enoto porabljene energije. Učinek peskanja je neposredno odvisen od hitrosti zrnc peska ob udarcu v kontrolno površino, saj odnašanje materiala zagotovi le dovolj visoka kinetična energija zrnc. Zaradi tega je poznavanje hitrosti zrnc peska ob trku s peskano površino izrednega pomena za pravilno izbiro parametrov peskanja in za doseg kar največje učinkovitosti peskanja.

Ker je osnovni namen peskanja odnašanje materiala, se je potrebno sprijazniti s tem, da bo odnašalo tudi material iz katerega je zgrajen senzor in posledičnim uničenjem senzorja. Izdelati je mogoče močno oklepljen, robusten in težek senzor, ki je neroden za uporabo, ali pa razmeroma cenen senzor, ki je manjši, lažji, s krajšo življenjsko dobo in enostavno zamenljiv. Naslednjo težavo predstavlja lastna frekvenca sistema. Zaradi končnega števila lopatic "turbine" izteka pesek v valovih. Frekvenca ponavljanja valov je enaka vrtilni frekvenci motorja pomnoženi s številom lopatic, kar pomeni, da pričakujemo frekvenco vzbujanja med 200 in 800 Hz. Poskus merjenja hitrosti delcev s pomočjo merjenja sile, s katero deluje pesek na določeno površino zaradi sovpadanja lastne frekvence sistema in frekvence udarcev delcev ni bil uspešen. Zato smo razvili robustni merilnik, ki deluje na principu rotirajočih plošč, kot alternativo pa merilnik, ki zaznava

¹ docent, ales.hribernik@uni-mb.si ² mag., gorazd.bombek@uni-mb.si oba Fakulteta za strojništvo Maribor

³ projektant Gostol TST Tolmin www.gostol-tst.si

časovni zamik udarcev delcev, ki potujejo v istem valu v tarči, ki sta medsebojno zamaknjeni za znano razdaljo.

SUMMARY:

The efficiency of the shotblasting machine is measured by the quantity of material done away from a surface by a certain amount of energy. The efficiency of shotblasting depends on the velocity of the particles when they hit the surface, because only the particle with enough kinetic energy can do away the material. Therefore the importance of knowledge of the particle velocity is essential for selecting operation parameters and to achieve the highest possible shotblasting efficiency.

The main purpose of shotblasting is to do away the material and the sensor is undergone to the same conditions, leading to inevitable destruction of the sensor. It is possible to build an armored, robust and heavy sensor, but unpractical for use, or relatively inexpensive sensor which is smaller, lighter, with a shorter lifespan and easily replaceable. The next problem is the base frequency of the sensor. Due to the operation of the turbine the particles are delivered in waves. The frequency of the waves is equal to the frequency of the engine multiplied by the number of blades of the turbine so the frequencies between 200 in 800 Hz are expected. The attempt to measure the velocity by measuring the force on the control surface failed because the frequencies of the sensor and the particle impact frequency differed to little and caused resonance. Therefore a robust sensor using the rotating discs principle was developed and as an alternative a sensor detecting the time interval between the impact of the particles traveling along the same wave on two targets with a known radial distance.

1. UVOD

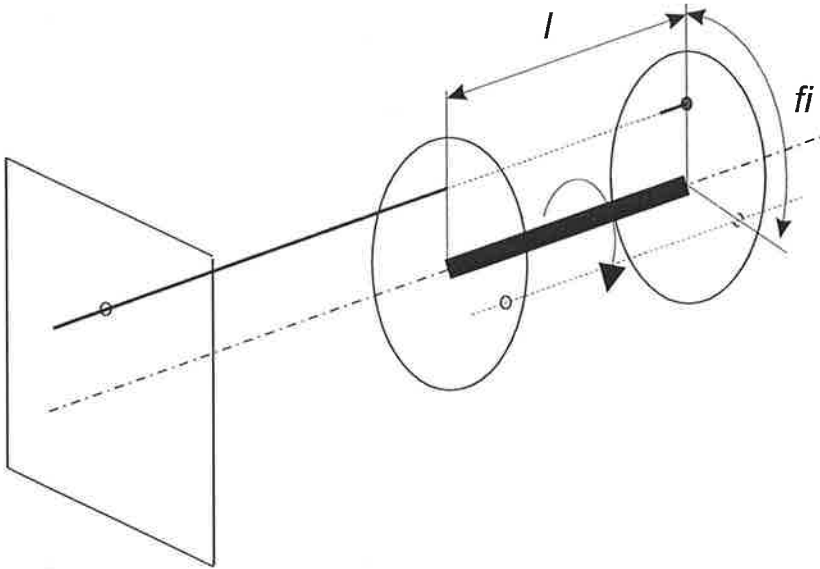
Pri merjenju hitrosti peska v peskalnem stroju smo se podali na razmeroma neraziskano področje, ker tudi proizvajalec ni imel opravljenih nobenih meritev. V pomoč nam je bila samo 3D numerična simulacija dogajanja v turbini, ki pa ni upoštevala različnih oblik in dimenzij delcev, kakor tudi velikega števila delcev. Prav tako so izračuni temeljili na empiričnih koeficientih (koeficient trenja), ki so odvisni tudi od materiala, velikosti in oblike delcev ter kvalitete izdelave lopatic. V bistvu so numerični rezultatu predstavljali idealiziran primer, naša naloga pa je bila izmeriti dejansko stanje in dejanske hitrosti in tako pripraviti povratno informacijo, ki bo služila za prilagoditev empiričnih koeficientov v numeričnem modelu. V literaturi nismo zasledili podobnih primerov, obstajajo pa določene podobnosti z načinom merjenja hitrosti izstrelkov v balistiki [1]. Oba merilnika sta bila zasnovana in izdelana v Laboratoriju za toplotne stroje in tehniške meritve na Fakulteti za strojništvo v Mariboru.

2. MEHANSKI MERILNIK HITOSTI Z VRTEČIMA SE DISKOMA

Mehanski merilnik je prikazan na sliki 1. Sestavljata ga dva diska na skupni gredi, ki jo poganja elektromotor. Pred diskoma je postavljena stena ob katero udarja pesek iz peskalnega stroja. Na steni je izvrtina premera 10 mm skozi katero pesek neovirano nadaljuje pot do prednjega diska, ki se vrti z izbrano vrtilno hitrostjo. Tudi na prednjem disku je izvrtina premera 10 mm, ki se konično (pod kotom 45°) širi od prednje proti zadnji strani. V trenutku, ko se izvrtini prekrijeta, lahko pesek nadaljuje pot proti zadnjemu disku in udari ob papirnato tarčo nalepljeno na prednjo stran diska. Kot β odčitamo s tarče in je kot med projekcijo izvrtine na prvem disku in zadetki na tarči (slika 1). Hitrost zrnca peska pa nato izračunamo z izrazom:

$$w = \frac{l}{t} = \frac{\omega}{f_i} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot l \quad , \text{ pri čemer je}$$

l – razdalja med diskoma,
 ω – kotna hitrost diskov.



Slika 1: Mehanski merilnik hitrosti zrnč peska

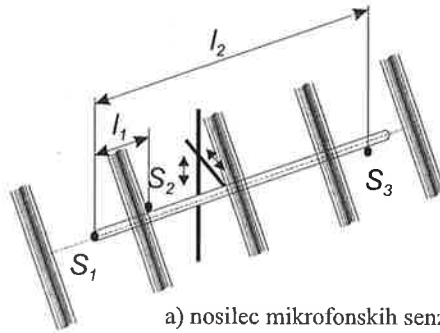
3. ELEKTRONSKI MERILNIK HITROSTI DELCEV Z MIKROFONSKIMI SENZORJI

Elektronski merilnik (Slika 2 a) sestavlja nosilec na katerega so razvrščeni trije mikrofonski senzorji. Nosilec je prek prečne konzole pritrjen na koordinatni podajalni sistem, ki omogoča vertikalno in horizontalno pozicioniranje senzorjev ter izbiro nagiba nosilca mikrofonskih senzorjev. Mikrofonski senzor (Slika 2b) sestavlja teflonska puša v katero je privita jeklena membrana. Tik pod membrano je nameščen kondenzatorski mikrofon, ki se tesno prilega teflonski puši. Med membrano in teflonsko pušo je vstavljena ploščica iz mehke silikonske gume. Teflonska puša je zatisnjena v jekleno pušo, ki predstavlja ohišje sensorja in prek katere je senzor pritrjen na nosilec. Senzor S1 je zatisnjen direktno v jekleno cev nosilca, senzorja S2 in S3 pa sta bočno pritrjena na nosilec. Udarec na površino jeklene membrane povzroči vibracijo membrane in se prenese na mikrofon, kar povzroči naglo spremembo signala.

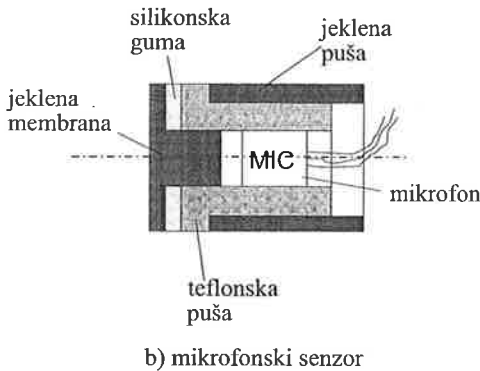
Pri uporabi elektronskega merilnika izkoriščamo pulzno delovanje peskalne turbine. Za razliko od klasične centrifugalne radialne črpalke, ki jo fluid polni po celotnem notranjem obodu, poteka polnjenje kanalov med lopaticami peskalne turbine le na določenem delu notranjega oboda. Zato izmetavajo lopatice pesek le v izbranem delu zunanjega oboda, direktno v peskalno napravo. Pri tem je tok peska v neki opazovani točki izrazito ciklični, prihaja v obliki zgoščenih paketov zrnč peska s frekvenco, ki je enaka produktu števila vrtljajev rotorja turbine in števila lopatic turbine. Tak je tudi signal, ki ga zaznajo mikrofonski senzorji (Slika 2c). Zaradi vzdolžnega zamika med senzorji, so signali časovno zamaknjeni. Pri tem je čas zakasnitve sorazmeren razmerju hitrosti

zinc in razdalji med senzorji. Torej je mogoče hitrost zmc peska preprosto izračunati s pomočjo izraza:

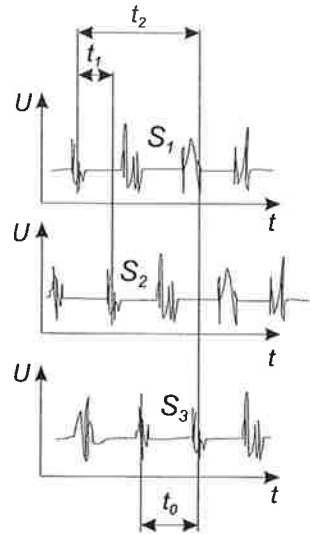
$$w = \frac{l_1}{t_1}$$



a) nosilec mikrofonskih senzorjev



b) mikrofonski senzor



c) elektricni signali

Slika 2: Elektronski merilnik hitrosti

Jeklena membrana ima dvojno nalogo. Ena je, da zaščiti mikrofon pred neposrednim vplivom peska, druga pa je, da ob udarcu peska odda zvok, ki ga zazna mikrofon. Tanjša plošča ima manjšo maso kar ima za posledico bolj izrazit signal, nudi pa slabšo zaščito, kar nas je prisililo v kompromis. Odločili smo se za ploščo debeline 3,5 mm. Ta se je izkazala za dovolj trdno, zato pa je bil signal na mikrofonu nekoliko nizek. Namestitev senzora je prikazana na sliki 3. Uporaba mikrofonskih senzorjev ima to prednost, da so deli, ki so izpostavljeni delovanju peska razmeroma poceni, slabost pa je, da za merjenje potrebujemo tudi podporo sistema za zajemanje in analizo podatkov, saj je signale z mikrofonov potrebno zajeti z ustrežno frekvenco na dovolj dolgem časovnem intervalu. To zahteva ustrezno opremo tako za zajemanje podatkov, kot tudi za njihovo obdelavo.

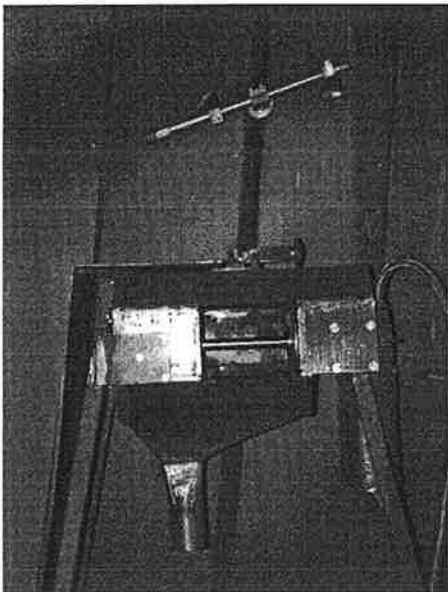
3.1. Sistem za zajemanje in analizo podatkov

Uporabili smo prenosni osebni računalnik (Celeron 1000 MHz, 256 MB RAM), ki ima nameščeno večfunkcijsko kartico DaqCARD 6062 (format PCMCIA). Fizično smo električne povezave izvedli tako, da smo uporabili sistem za pripravo signalov SCXI, sistem za pripravo signalov in programska oprema so izdelek podjetja National Instruments. Analogne vhodne signale smo pripeljali v modul SCXI-1140. Signale smo vezali diferencialno. Za napajanje smo uporabili modul SCXI-1124. Povezavo smo izvedli tako, da smo izenačili potenciale vseh negativnih potencialov, analogne zemlje in potenciala šasije. Takšna vezava je bila smiselna, ker ima tudi mikrofoni 3 vodnike (napajanje +, signal + in masa, ki je hkrati tudi – potencial za napajanje in signal). Poleg tega smo na maso vezali tudi kovinsko ogrodje in tako dobili Faradejevo kletko in s tem zmanjšali motnje.

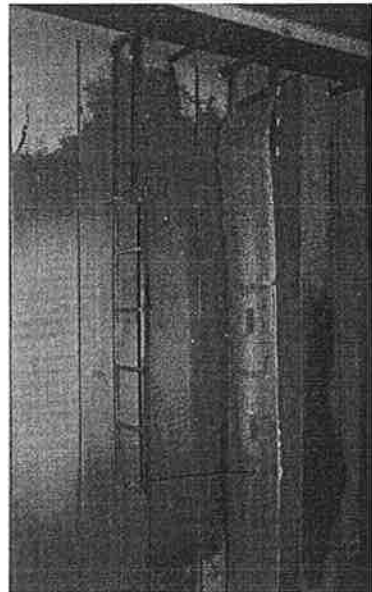
Za zajemanje podatkov in njihovo obdelavo uporabljamo program LabVIEW. Ta program omogoča nadzor nad delovanjem večfunkcijske kartice (zajemanje podatkov, generiranje izhodnih signalov in to vse v analogni ali digitalni obliki), kakor tudi shranjevanje in obdelavo podatkov. Program že vsebuje podprograme za frekvenčno analizo, digitalne filtre, Fourierovo analizo....

4. MERITVE IN REZULTATI MERITEV

Meritve smo izvajali v sredini curka peska na oddaljenosti 650 mm od vrha lopatic rotorja turbine. Os merilnika smo postavili vzporedno s smerjo zrc peska. Zato smo za vsako posamezno turbino pred začetkom meritev posneli, t.i. sliko curka. V ta namen smo v testno omaro na oddaljenosti 1100 mm od turbine postavili zaslon, na katerem je bil pritrjen karton. 520 mm pred zaslon smo postavili odklonsko mrežico sestavljeno iz prečk privarjenih na dveh vzporednih nosilcih (slika 4). Razdalja med posameznimi prečkami je bila 200 mm.



Slika 3: Elektronski in mehanski merilnik hitrosti zrc peska



Slika 4: Snemanje slike curka

Med peskanjem zaslona, ki je povzročilo močno abrazijo mehkega kartona, so ostala mesta v senci prečk nepoškodovana. Na podlagi vertikalnega zamika med prečko in njej pripadajočo senco ter razdaljo med prečko in zaslonom smo nato ugotavljali kot poti zrnec proti vodoravni smeri. Analizirali smo delovanje 4-ih različnih turbin. Za vsako smo izvedli večje število meritev z mehanskim in elektronskim merilnikom hitrosti v eni sami točki curka. Pri tem smo meritve ponavljali v isti točki vsaj trikrat, točko meritve pa smo izbrali tako, da so bili pogoji (smer curka, oddaljenost merilnika od turbine, ...) za vse turbine približno enaki. V tem članku pa bomo predstavili samo prototipno izvedbo turbine z osmimi naprej ukrivljenimi lopaticami (GU) in vrtilno hitrostjo 3000 min^{-1} .

4.1. Rezultati meritev hitrosti z mehanskim merilnikom

Merilnik smo postavili nad ravnino osi turbine, v višino pri kateri je bila smer zrnec $+6,25^{\circ}$ napram horizontali. Sredina zaslonke je sovpadala s sredino curka. Izvedli smo tri zaporedne meritve. Vsaka meritev je bila sestavljena iz dveh faz. V prvi fazi smo obstreljevali tarčo med mirovanjem diskov. Tako smo določili projekcijo izvrtine prednjega diska na tarči prilepljeni na zadnji disk. Nato smo z elektromotorjem diska zavrteli in pri ustaljenih vrtljajih obstreljevali tarčo v kratkem intervalu. Rezultate meritve, t.j. pozicija zadetkov na tarči, smo določili z odčitavanjem, pri čemer je bila delitev skale na tarči 1° . Rezultat so zbrani v preglednici 1.

Preglednica 1: Rezultati meritve hitrosti zrnec peska z mehanskim merilnikom za turbino GU

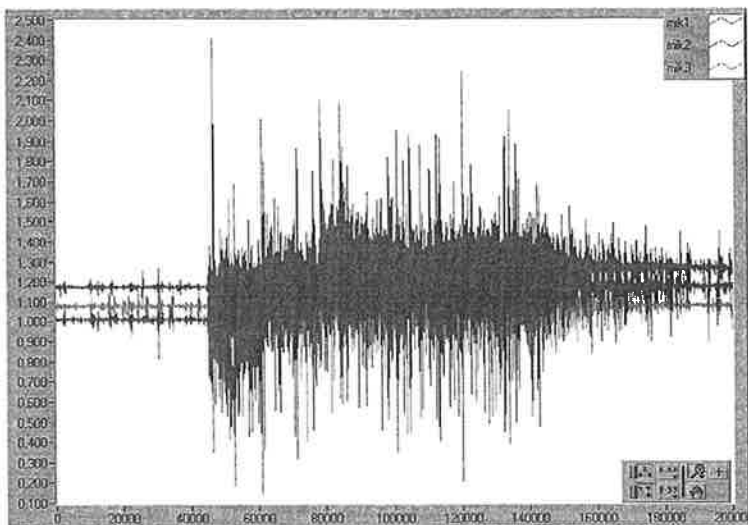
Meritev	Vrt. hitrost min^{-1}	Razlika kotov fi°	Srednja hitrost m/s	Standardna merilna negotovost m/s
1	7650	155	73,4	$\pm 3,1$
2	7780	153	75,7	$\pm 3,2$
3	7720	155	74,1	$\pm 3,1$
povprečna vrednost			74,4	$\pm 3,1$

Kot je razvidno iz preglednice 1, je ujemanje izmerjenih srednjih hitrosti zrnec zelo dobro; odstopki ne presežejo $1,3 \text{ m/s}$. Vendar pa je merilna negotovost precej večja. Vzrok za to je precej širok pas zadetkov tarče v intervalu $\pm 10^{\circ}$. Tak raztros je delno posledica širine odprtine na prednjem disku ($\phi=10 \text{ mm}$), ki tudi pri mirovanju diskov povzroči raztros v intervalu $\pm 5^{\circ}$. Dodaten prispevek k raztrosu pa prinese neenakost hitrosti posameznih zrnec peska. Delno je ta neenakost prisotna že v samem toku zrnec pred merilnikom, dodatno pa k njej doprinesejo medsebojni trki zrnec, ki jih povzročajo od merilnika odbita zrnca na vstopu skozi zaslonko in pri prehodu skozi odprtino prednjega diska.

Izmerjena hitrost zrnec za turbino GU je torej $74,3 \pm 3,1 \text{ m/s}$, pri čemer je interval $\pm 3,1 \text{ m/s}$ standardna merilna negotovost.

4.2. Rezultati meritev hitrosti z elektronskim merilnikom

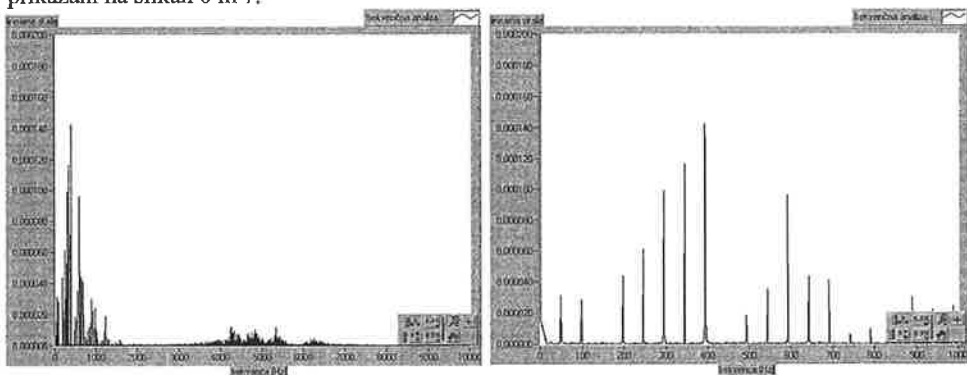
Ker imajo mikrofoni frekvenčni odziv prilagojen zvoku, ki ga lahko zaznava človeško uho (do 17 kHz) smo se odločili za približno 2 krat višjo frekvenco zajemanja- 40000 Hz . Signal zajet s to frekvenco lahko kasneje analiziramo in prepoznamo frekvence do 20000 Hz (po Nyquistovem teoremu)[2]. Odločili smo se, da bomo zajeli 200000 merilnih točk (na kanal), kar ustreza času 5 sekund. Meritev smo izvedli tako, da smo ob zagonu turbine elektronski merilnik zastrli z zastorom postavljenim 300 mm pred prvi mikrofonski senzor. Ko so se razmere v turbini ustalile smo zaslon umaknili in zajeli signale.



Slika 5: Elektronski merilnik turbina GU - zajeti signal

Slika 5 prikazuje zajete neobdelane signale. Zaradi velike gostote zapisa je slika nepregledna, vidi pa se interval, ko je pesek udarjal po mikrofonih (merilne točke od 45000-160000).

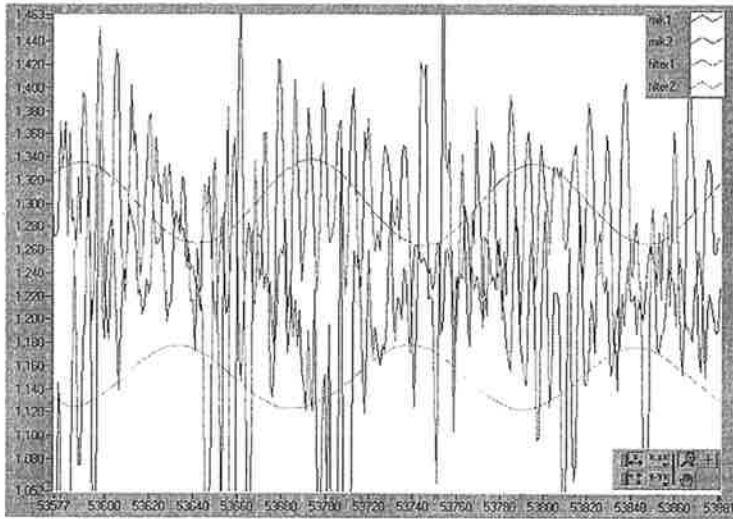
Pri obdelavi signalov je pomembno, da poznamo frekvence, ki v teh signalih nastopajo. To je pomembno za filtriranje (da uspemo iz signala izločiti frekvence, ki so posledica motenj in nato obdelujemo signal, ki ga očistimo neželenih frekvenc). V primeru, da želene frekvence niso dovolj izrazite, pa lahko že na začetku ugotovimo, da neki signal vsebuje preveč motenj, da bi ga bilo mogoče uporabiti. Pri vseh turbinah, smo za frekvenčno analizo uporabili signal s prvega mikrofona, ki je nekoliko bolj izrazit, pa tudi manj onesnažen s signali, ki jih povzročijo odbiti delci in pa prenos vibracij iz drugih mikrofонов ali ogrodja. Rezultati frekvenčne analize so prikazani na slikah 6 in 7.



Slika 6: Frekvenčno območje 0-10000Hz -- GU Slika 7: Frekvenčno območje 0-1000Hz – GU

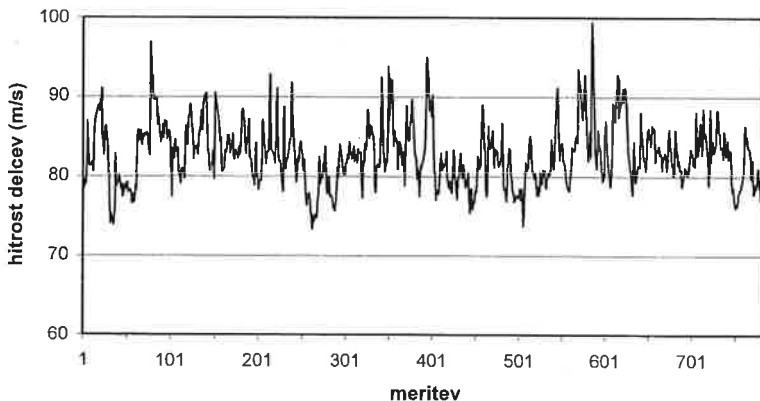
Na sliki 6 je razvidno, da signal vsebuje dve frekvenčni območji večje intenzivnosti. Frekvenčno območje 3500-7000Hz je posledica lastnih nihanj, ki se pojavljajo v sistemu (membrana podložena z gumo, nihanja v jeklenem ogrodju, mikrofoni...). Bolj zanimivo je območje 0-1000 Hz, ki je podrobneje predstavljeno na sliki 7, kjer ima najvišjo amplitudo ravno frekvenca, ki ustreza vrtilni frekvenci turbine pomnoženi s številom lopatic-400Hz.

Kot je že frekvenčna analiza pokazala, je v signalu prisotna množica frekvenc. Za obdelavo so zanimive predvsem frekvence, ki so blizu vzbujevalnim. Zato jih bomo s pomočjo filtrov poskusili izločiti iz signala in jih obdelati. Pri tem moramo paziti, da s filtriranjem ne povzročimo prevelikega faznega zamika in da na enak način obdelamo signal na obeh mikrofoni. Ker je vzbujevalna frekvenca 400 Hz, smo uporabili ozkopasovni filter, ki prepušča frekvence od 350 do 450 Hz. Rezultat filtriranja signalov prikazuje slika 8.



Slika 8: Primerjava originalnega in filtriranega signala z mikrofonom 1 in 2 – GU

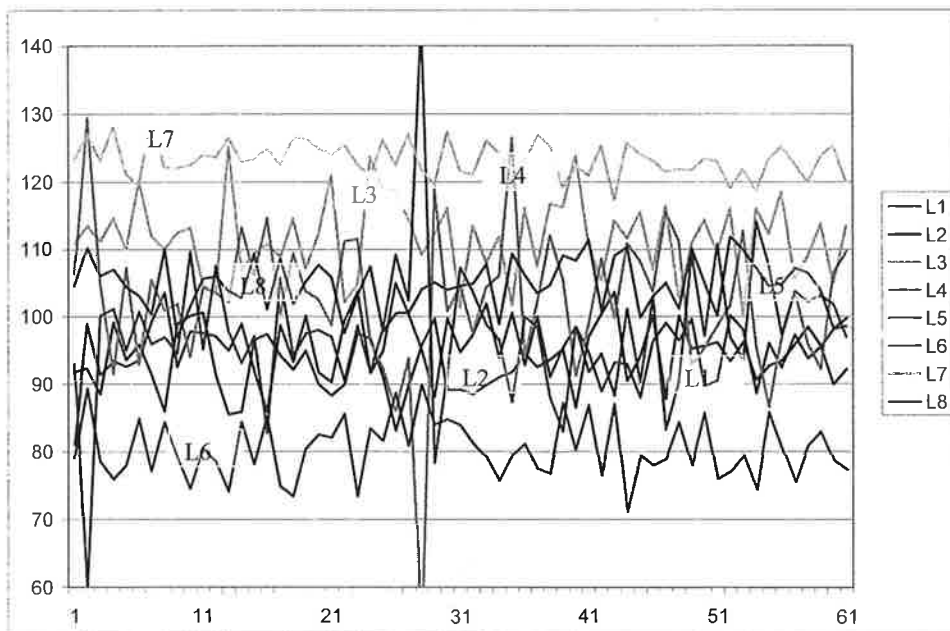
Na sliki 8 je razvidno, da doseže filtrirani signal minimum, ko pride do udarca peska ob membrano. Pri izračunu hitrosti smo upoštevali signale z mikrofonom 1 in 2. Razdalja med mikrofonomi je bila 0,0971 metra vertikalni zamik pa 0,025 metra. Za izračun hitrosti, prikazanih na sliki 9, je bilo potrebno določiti časovni zamik med udarcema peska v prvi in drugi senzor.



Slika 9: Diagram izračunanih hitrosti – GU

Na sliki 9 je prikazan potek hitrosti za 800 valov peska. Za določitev trenutka udarca je računalniški program iskal lokalne minime filtriranega signala. Ker je znano, da je časovni zamik med dvema zaporednima vrednostnima enak 0,025 ms (frekvenca zajemanja 40000Hz),

lahko iz razlike med ideksoma zaporednih lokalnih minimumov dobimo časovni interval med udarcema v 1 in 2 mikrofona in ga uporabimo za izračun hitrosti. Razvidno je, da hitrosti precej nihajo, kar ni presenetljivo glede na to, da je granulacija delcev različna, pa tudi postopek določanja udarcev ima svoje napake, ki so v veliki meri odvisne tudi od količine peska, ki zadene senzor. Srednja vrednost izračunane hitrosti je bila 82,6 m/s. Standardna deviacija je 3,87 m/s, zato je standardna merilna negotovost izmerjene hitrosti 0,14 m/s. V primerjavi z izmerjeno hitrostjo z mehanskim merilnikom je hitrost višja za 11% (8,2 m/s). Pojasnilo za to razliko lahko najdemo v dejstvu, da mehanski merilnik izmeri srednjo hitrost zrn, da pa v primeru mikrofonskega merilnika izmerimo hitrost najhitrejših delcev, ki prvi udarijo ob membrano in povzročijo njeno nihanje in s tem naglo spremembo signala. Že omenjena turbina ima 8 lopatic. Zanimalo nas je, ali so nihanja pogojena z morebitnimi netočnosti pri izdelavi in montaži lopatic. Zato smo matriko, ki je vsebovala zakasnitve med udarci v prvi mikrofona razdelili na 8 stolpcev in jih prikazali na sliki 10.



Slika 10: Časovni zamiki med udarci peska s posameznih lopatic

Kot je razvidno s slike 10 odstopata lopatici 6 in 7. To je razumljivo, ker v primeru, da ena lopatica izvrže pesek prej kot druge (na drugem mestu) pride do podaljšanja intervala do naslednjega udarca. Zanimivo je tudi, da nekoliko odstopata tudi lopatici 2 in 3. Ti dve sta nameščeni simetrično glede na lopatici 6 in 7. Po pogovoru s proizvajalcem smo ugotovili, da so namestili dve nekoliko obrabljeni lopatici, ki pa so ju namestili simetrično. S slike 10 lahko sklepamo, da je lopatica 2 bolj obrabljena kot lopatica 6. Pri ostalih lopaticah ni bilo opaziti večjih odstopanj, zato lahko sklepamo da so enake.

Če izračunamo povprečno razlike indeksov med posameznimi udarci dobimo vrednost 101,11. Če jo pretvorimo v čas dobimo časovni interval 0,002528 ms, kar pomeni frekvenco 395,6 Hz. Iz tega je mogoče natančno določiti vrtilno hitrost turbine in s tem tudi bolj natančno definirati trikotnike hitrosti.

5. ZAKLJUČKI

V članku sta prikazana dva merilnika, ki omogočata merjenje hitrosti delcev v stroju za peskanje. Merilnik z rotirajočimi diski je robusten in omogoča merjenje hitrosti delcev v majhnem številu točk. Njegova največja prednost je, da potrebuje malo dodatne opreme (usmernik, merilnik frekvence), slabost pa, da zaradi svojih dimenzij in teže ni primeren za merjenje hitrostnega profila.

Mehanski merilnik je uporaben za meritve hitrosti v eni točki in trenutno ne vidimo možnosti za nadaljnji razvoj. Elektronski merilnik je primernejši za merjenje hitrosti v večjem številu točk. Njegova prednost so predvsem manjše dimenzije in teža senzorskega dela, kar omogoča premikanje po merilni ravnini pa tudi po kotu. Elektronski senzor pa je mogoče še precej izboljšati, predvsem v smislu povečanja občutljivosti in v hitrosti in zanesljivosti obdelave podatkov. Dodatna prednost elektronskega senzorja pa je, da lahko analiziramo delovanje turbine in v določeni meri sklepamo tudi o obrabi lopatic. Iz vsega naštetega lahko zaključimo, da je elektronski senzor bolj perspektiven, verjetno pa se bo še nekaj časa uporabljal vzporedno z mehanskim merilnikom zaradi primerjave rezultatov.

Dobljeni rezultati so zadovoljivi in so omogočili prilagoditev empiričnih koeficientov, predvsem povečanje koeficienta trenja in tako boljše ujemanje numeričnih simulacij z eksperimentom. Obstaja še veliko možnosti za izboljšave, predvsem pri elektronskem merilniku. Najbolj enostavna sprememba je sprememba konstrukcije mikrofonkega senzorja, in sicer stanjšanje jeklene membrane, zamenjava silikonske gume z nekoliko mehkejšo in pa zapolnitev prostora med jekleno membrano in mikrofonom s silikonskim oljem. Vse omenjene spremembe so načrtovane z namenom, da povečamo občutljivost elektronskega merilnika in se v idealnem primeru izognemo uporabi filtrov, kar bi močno olajšalo štetje udarcev in izračun hitrosti, s tem pa tudi povečalo natančnost rezultatov.

6. LITERATURA

- [1] J. Marinković, Unutrašnja balistika, Izdavačko poduzeće Narodne republike Srbije, Beograd 1950
- [2] Merjenje zvoka in oktavna analiza, National Instruments, NI DAN 1999, Ljubljana

Ekperimentalna določitev toka zmesi pepela in vode

Damijan Kanduti¹, Jure Marn²

Experimental determination of ash suspension flow

Povzetek

V prispevku je podana zasnova eksperimentov in laboratorijskih analiz za določevanje reoloških lastnosti tekočin (zmesi pepela in vode). Prikazana je zasnova cevne viskozimetra in postopek izvajanja eksperimenta z obdelavo izmerjenih veličin. Podane so laboratorijske analize pepela, ki bodo služile izdelavi reološkega modela tekočin. Obdelani so rezultati treh zmesi pepela in vode s trikratno ponovljivostjo, ki bazirajo na enem vzorcu pepela.

Summary

This paper defines experiments and laboratory analyses scheme for determination of fluid (ash and water suspensions) rheological properties. Capillary viscometer basis and experiment procedure with evaluation of measured quantities are described. Laboratory analyses of ashes will be used for composition of fluid rheological model. Results for three ash suspensions, repeated three times for each ash sample were evaluated.

Uvod

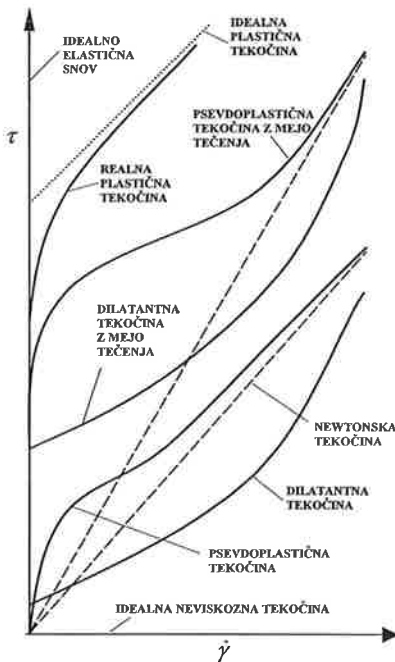
Hidravlični transport materialov je v rudarstvu in gradbeništvu razmeroma pogost način transporta. Je učinkovit in gospodaren. Njegove številne prednosti pridejo do izraza predvsem pri transportu večjih količin snovi na daljših razdaljah. Z dolgoletno prakso so se v Premogovniku Velenje razvile tehnologije hidravličnega transporta zmesi pepela in vode večje gostote, predvsem zaradi izboljšanja geomehanskih pogojev v jamskih prostorih. Gre za črpanje zmesi elektrofilterskega pepela, lahko z dodatki, in vode na dolge razdalje. Področje črpanja takšnih tekočin zaradi svojih specifičnih karakteristik ni zanesljivo brez popolnega obvladovanja celotnega procesa. Eden od ključnih elementov je poznavanje reoloških lastnosti tekočine, ki se pri hidravličnem transportu uporablja.

¹ Poslovni sistem Premogovnika Velenje, HITZ Velenje, I.P., d.o.o., Partizanska cesta 78, Velenje

² Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, Maribor

Reološke lastnosti tekočin

Reološke lastnosti tekočin predstavimo običajno kot tokovne lastnosti tekočin s strižnimi diagrami $\dot{\gamma}-\tau$.



Slika 1: Potek tipičnih tokovnih lastnosti časovno neodvisnih nenewtonskih tekočin (newtonska tekočina je vrisana za primerjavo)

Kapilarni (cevni) viskozimeter

Razvoj cevne viskozimetra je zasnovan na merjenju reoloških lastnosti pri laminarnem pretoku. Da dobimo laminarni pretok so izbrane dimenzije cevi za cevni viskozimeter in hitrost pretoka v točno določenem območju. Tudi razmerji med dolžino in notranjim premerom cevi ter med notranjim premerom in premerom trdnih delcev, je zaradi motenj, ki jih povzročajo konci cevi, izbrano po že znanih kriterijih.

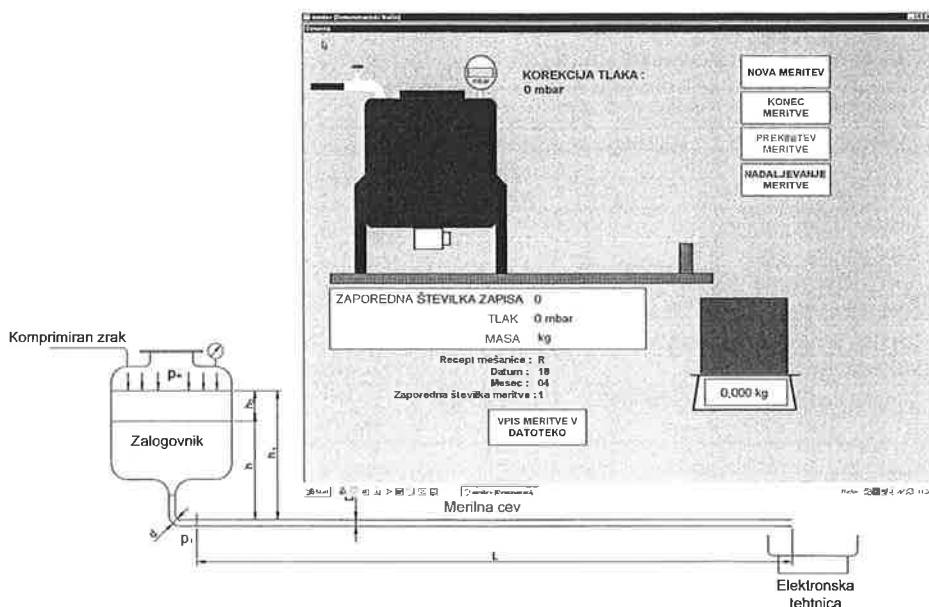
Eksperiment in laboratorijske analize

Eksperiment smo zasnovali v dveh sklopih. Namen I. sklopa eksperimenta je bila verifikacija merilne opreme, protokolov eksperimenta in pridobitev osnovnih merilnih rezultatov ter rezultatov analiz. Po I. sklopu meritev, ki se je izvajal v marcu in aprilu leta 2001, smo izvedli določene posodobitve. Aplikacijo in merilno opremo smo posodobili v smislu natančnejšega in zanesljivejšega zajemanja podatkov. Zaradi zmanjšanja vpliva nihanja tlaka stisnjenega zraka na proces meritve smo v sklop opreme viskozimetra vključili tlačno posodo. Iztok iz cevi viskozimetra v posodo smo izvedli radialno in s tem izničili vpliv udarca curka tekočine na tehtnico. Na iztoku iz cevi smo vgradili zapiralo, ki preprečuje iztok zmesi iz zalogovnika med prekinitvijo meritve.

Točke v diagramu določimo eksperimentalno in pozneje razvijamo oz. izpeljemo reološki model. Tokovne lastnosti tekočin nam nakazujejo tudi razdelitev tekočin na newtonske in nenewtonske tekočine, slika 1.

Vrednosti strižnih napetosti τ in deformacijske hitrosti $\dot{\gamma}$, ki definirata tokovne lastnosti oz. viskozno funkcijo η_{nav} smo v našem primeru določali eksperimentalno z laminarnim tokom v kapilarnem (cevnem) viskozimetru. Merili smo tlačni padec in masni pretok zmesi skozi cev kapilarnega viskozimetra in na osnovi teh meritev dobili povezavo med deformacijsko hitrostjo $\dot{\gamma}$ in strižno napetostjo τ .

Kapilarni cevni viskozimeter, slika 2, je plod lastne zasnove in vključitve ustrezne merilne opreme ter aplikativne opreme za učinkovito izvajanje meritev z zajemanjem podatkov.



Slika 2: Kapilarni cevni viskozimeter

V merilno linijo viskozimetra smo vključili zmogljivejšo in natančnejšo tehtnico. Tehtnica je z merilnim območjem zajela celoten volumen zalogovnika viskozimetra in meritve smo lahko izvajali brez prekinitev in v večjem tlačnem območju. Tehtnica ima območje merjenja 60.000g z razdelitvijo na 120.000 delcev, kar pomeni, da tehtnica meri z natančnostjo 0,5g. Eksperiment je zajemal tri zmesi, ki se razlikujejo po masnem deležu pepela:

- »Zmes pepela in vode A« 50 % vode + 50 % pepela,
- »Zmes pepela in vode B« 40 % vode + 60 % pepela in
- »Zmes pepela in vode C« 37 % vode + 63 % pepela.

Po prvih opravljenih meritvah smo na osnovi izkušenj naredili merilni protokol. Opravili smo eksperiment z vodo. Eksperiment smo izvajali s cevko premera $D=2$ mm. Dobljene rezultate smo primerjali z rezultati znanimi za vodo. Primerjava rezultatov za vodo je pokazala, da smo z meritvami dosegli želene rezultate in potrdili postopek kot primeren za nadaljnje izvajanje eksperimenta.

Osredotočili smo se na 20 vzorcev pepela, ki smo jih zajemali v šestmesečnem obdobju (oktober 2001 do marec 2002) v Termoelektrarni Šoštanj. V merilnem protokolu smo opredelili naslednje:

- način zajemanja, označevanja in spremljanja vzorcev pepela,
- pripravo vzorca za meritev,
- postopek meritev na cevnem viskozimetru,
- analize, ki se izdelajo pred pripravo zmesi pepela in vode,
- analize, ki se izdelajo po homogenizaciji zmesi pepela in vode.

Pred pripravo pepela in po homogenizaciji zmesi pepela in vode so se izdelale predpisane laboratorijske analize, tabela 2.

Pepel :		št.vzorca lab. evid. št.	221001 VP-2
Prostorninska masa v nasutem stanju	(kg/m ³)	JUS B.C8.023	870
Vodna potreba (%)	- začetna	ZRMK	17,8
	- po 30 min.		20,4
	- razlika		3,6
Vlaga (%)		JUS B.C8.020	0,09
Žaro izguba (%)		JUS B.C8.020	0,59
Specifična masa	(g/cm ³)	JUS B.C8.023	2,201
Specifična površina po Blainu	(cm ² /g)	JUS B.C8.026	3020
Sejalna analiza na laserskem analizatorju - FRITSCH	- % delcev nad 0,4 mm		0,8
	- % delcev pod 0,052 mm		70,5
Sejalna analiza – ostanek na situ	0,425 mm	JUS B.C8.023	0,4
	0,25		1,2
	0,125		9,1
	0,09		7,5
	0,063		11
	0,045		11,7
	pod 0,045		59,1
Pepel - kons. R15=17cm	- tlačna trdnost (MPa)		4,62
	- upogibna trdnost (MPa)		0,76
	- prost. masa vezan. mat. (kg/m ³)		1496

Tabela 2: Predpisane laboratorijske analize pepela.

Za posamezno zmes pepela in vode smo izvedli tri meritve po enakem postopku. Tako smo za 20 vzorcev pepela in tri tipe zmesi izvedli s trikratno ponovitvijo skupno 180 meritev. Meritev je potekala tako, da smo pri nadtlačku p_m merjenim z manometrom merili s pomočjo elektronske tehtnice iztečeno maso Δm zmesi pepela in vode iz cevi viskozimetra. Merilna oprema in aplikativna programska oprema nam je omogočala zajemanje podatkov v časovnih intervalih Δt in izračun masnega pretoka:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad [1]$$

Za strižno napetost, navidezno deformacijsko hitrost na steni kapilarne cevi, tlačni padec in povprečno hitrost veljajo naslednje enačbe, vir [7]:

$$\tau_R = p_m \frac{D}{4L} + \rho_m g h_1 \frac{D}{4L} - 8\chi \frac{\dot{m}^2}{\rho_m \pi^2 d^4} \frac{D}{4L} \quad [2]$$

$$\dot{\gamma}_{nav} = \left(\frac{8\bar{v}}{D} \right) = \frac{32\dot{m}}{\rho_m \pi D^3} \quad [3]$$

$$\Delta p = p_m + \rho_m g h_1 - 8\chi \left(\frac{\dot{m}^2}{\rho_m \pi^2 d^4} \right) \quad [4]$$

$$\bar{v} = \frac{4\dot{m}}{\rho_m \pi D^2} \quad [5]$$

Ostale uporabljene veličine izhajajo iz viskozimetra:

$d=0,021\text{m}$, $\chi=4,745$ (Mam et.al.[L1]) in h_2, D, L (tabela 2).

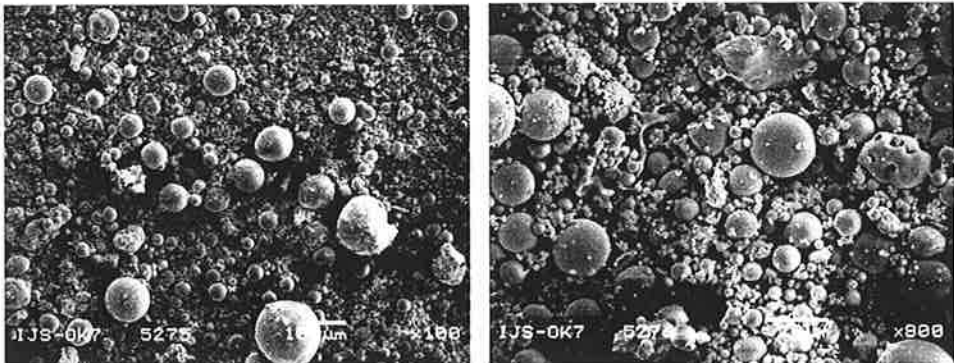
PEPEL 221001	KARAKTERISTIKE ZMESI A, B in C										
							KARAKTERISTIKE VISKOZIMETRA				
	PH	PH 15 min	PH 30 min	T _z 30min T(oC)	gostota zmesi ρ _z (kg/m ³)	razlez R(cm)	premer cevi D(mm)	dolžina cevi L(mm)	prosta višina hz(mm)	prosta višina hz(mm)	prosta višina hz(mm)
VP-2 A	7	11	11	23	1344	48	6	2000	117	120	122
VP-2 B	7	11	12	23	1446	42	6	2000	131	143	146
VP-2 C	7	11	12	23,5	1502	36	6	2000	132	135	138

Tabela 2: Karakteristike zmesi in viskozimetra

Za vse vzorce pepela so se na Institutu Jožef Stefan, Laboratorij za mikrostrukturno analizo, izvedle analize velikosti in oblike delcev pepela na vrstičnem elektronskem mikroskopu (SEM), analize kemijske sestave z metodo EDXS in določitev mineraloške sestave pepela z metodo rentgenske praškovne difrakcije, vir [11].

SEM posnetki vseh vzorcev pepela kažejo obliko in porazdelitev velikosti delcev, slika 3. Delci pepela so večinoma v obliki kroglic različnih velikosti, kar nakazuje procese taljena pri zgorevanju pepela. Delci so na izgled zelo homogeni, kar nakazuje tudi homogenost glede kemijske sestave. Največji delci so pretežno nepravilne oblike, so precej porozni, najverjetneje različni po kemijski sestavi in se med procesom zgorevanja premoga niso popolnoma stali.

Rentgenski praškovni spektri vzorcev pepela kažejo fazno sestavo pepela. Z mineraloškega stališča smo z rentgensko analizo v vzorcih določili naslednje faze: kalcijev oksid (CaO), silicijev dioksid SiO₂ (tridimit), SiO₂ (α kremen), železov oksid Fe₃O₄, železov oksid Fe₂O₃ (hematit), grafit ter kompleksno skupino alkalnih alumosilikatov (anortit, kalijev magnezijev silikat, aluminijev silikat in magnezijev silikat).



Slika3: Vzorec pepela VP7 pri povečavi 100x in 800x.

Identifikacija omenjenih spojin (mineralov) v pepelu je kvalitativne narave, saj je z rentgensko difrakcijo večfaznih vzorcev skoraj nemogoče narediti točno kvantitativno analizo. Sestavo posameznih faz smo določili z energijsko-disperzijsko spektroskopijo rentgenskih žarkov na

SEM-u, EDXS analizo smo izvajali kot analizo z določenega področja (približno 700x600 μm) in na ta način določili povprečno kemijsko sestavo statistično zadovoljive količine materiala, ki predstavlja po sestavi reprezentativen del vzorca.

PEPEL lab. evid. št. / št.vzorca	221001	VP-2		
Zmes pepela in vode		A	B	C
Prostorninska masa zmesi pepela in vode (kg/m^3)	JUS B.C8.020	1344	1446	1502
Sestava - % suhe komponente	JUS B.C8.020	49,7	59,8	64,4
% vode		50,3	40,2	35,6
Razlez brez stresanja po 60 min. (cm)	JUS B.C8.042	48	42	35,6
Hitrost sesedanja - vol.%	15 min.	7	3	2
izločene vode po	30	13	5	3
	45	20	7	4
	60	27	9	5,5
	75	32	11	7
	90	33	13	9
500ml menzura - vol.%	105	34	15	10
izločene vode na časovno enoto	120	34	17	11
	2h15'	/	18	12
	2h30'	/	19	12,5
	3h	34	19	13
	24h	34	19	13
Stopnja vezanosti po 24 urah	JUS B.C8.023	0	0	0
Tlačna trdnost po 28 dneh (MP_a)	JUS U.M1.020	0,71	1,38	1,42
Prost. masa vezane zmesi po 28 dneh (kg/m^3)	JUS U.M1.020	1130	1197	1235

Tabela 3: Predpisane laboratorijske analize zmesi pepela in vode.

Rezultati

V nadaljevanju so prikazani rezultati meritev treh zmesi pepela in vode (vp2a, vp2b in vp2c) s trikratno ponovljivostjo za vzorec pepela VP2, tabela 4. Reološke lastnosti tekočine kot tokovne lastnosti zmesi pepela in vode so prikazane za vse tri tipe (vp2a, vp2b in vp2c) s strižnimi diagrami $\dot{\gamma}-\tau$, slika 4.

Vsi trije tipi zmesi pepela in vode (vp2a, vp2b in vp2c) prikazani s tokovnimi lastnostmi zmesi pepela in vode oz. s strižnimi diagrami $\dot{\gamma}-\tau$, nakazujejo dobro ujemanje rezultatov zajemanja podatkov meritve in njenih obdelav glede na trikratno ponovljivost meritve. Prav tako je iz strižnih diagramov $\dot{\gamma}-\tau$ razviden tip newtonske tekočine za vse tri tipe zmesi.

Nadaljnja obdelava eksperimenta za vseh 20 tipov pepela oz. 180 meritev bo pokazala v kakšnem pasu ležijo krivulje $\dot{\gamma}-\tau$ za vsak posamezen tip zmesi pepela in vode. Glede na obširne laboratorijske analize posameznih vzorcev pepela bo mogoče iskati tudi vplivne faktorje v povezavi z krivuljo $\dot{\gamma}-\tau$ za posamezen tip zmesi pepela in vode.

j	$1_r \tau_R [Pa]$	$8(\bar{v}/D)[l/s]$	$2_r \tau_R [Pa]$	$8(\bar{v}/D)[l/s]$	$3_r \tau_R [Pa]$	$8(\bar{v}/D)[l/s]$
vp2a 1	3,2857	227,034	3,1573	229,4154	3,2124	258,7671
2	25,1259	2397,6163	25,5111	2515,3042	24,5334	2468,4784
3	47,1179	3247,3081	47,3343	3635,4101	46,7318	3599,5203
4	69,4017	4427,1624	69,9977	4574,4764	69,3266	4559,3695
5	91,6786	5347,6819	92,2641	5422,9012	91,5154	5282,358
6	114,2011	6148,034	114,5425	6183,5797	113,8555	6181,5157
7	136,8467	6891,5129	136,78	6887,385	136,8172	6912,1523
8	158,7464	7532,0238	159,3363	7553,4659	158,4502	7554,0393
9	181,4677	8093,4169	181,4725	8114,859	180,9939	8123,6881
vp2b 1	39,8838	2715,8587	39,7088	2881,3702	41,0317	2878,0131
2	76,8953	4799,7259	76,4562	4741,7915	77,1265	4732,3703
3	113,8719	6198,327	113,6752	6196,2888	114,4634	6206,5873
4	151,258	7087,6847	151,4795	7044,202	151,4409	7065,9434
5	188,4038	7854,0678	188,2269	7796,0908	188,8705	7892,1152
6	225,783	8859,0624	225,288	8534,7643	226,181	8634,0392
7	263,236	9409,8296	263,1045	9352,1314	263,6823	9392,2693
vp2c 1	41,9174	1707,9506	41,4789	1785,8869	40,475	1777,8071
2	77,5672	3102,9863	80,2979	3276,1884	77,0648	3119,2076
3	114,5114	4408,389	114,3568	4591,2254	114,3092	4666,4595
4	151,2259	5586,6681	151,8556	5824,9094	151,959	5714,0995
5	188,9856	6705,8485	189,2408	6928,7381	188,9407	7014,2695
6	225,8114	7688,5685	226,2571	7911,8301	226,1852	8013,4058
7	263,239	8635,6858	263,2854	8866,6424	262,9667	8972,6895
8	300,5955	9281,4872	301,1866	9218,393	301,3598	9490,1675

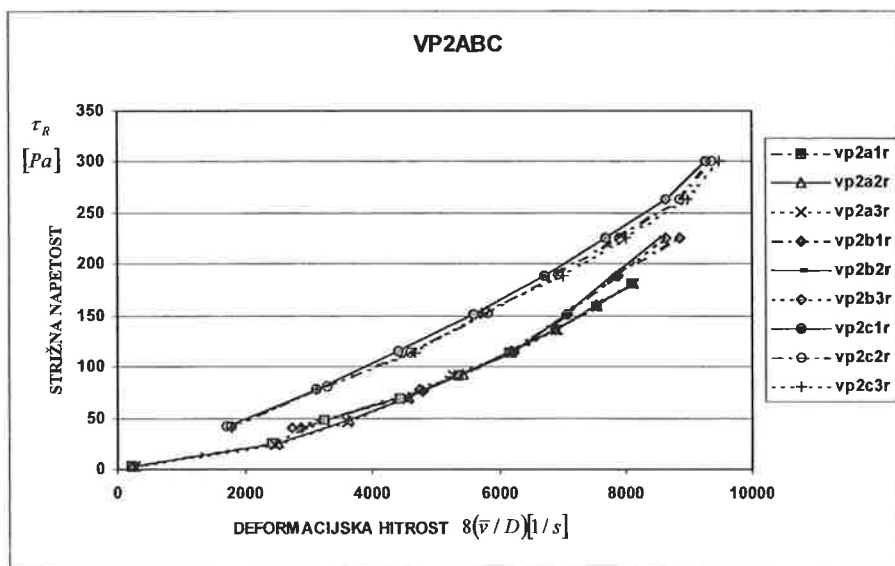
Tabela 4: Izračunane reološke lastnosti zmesi pepela in vode tipov A,B in C vzorca pepela 2.

Zaključek

V letih uvajanja in uporabe hidravličnega transporta v Premogovnika Velenje, je ta postal eden izmed potrebnih tehnoloških procesov. Po začetnih inženirskih obravnavah sistema so problemi in vedno zahtevnejše obvladovanje procesov zahtevale podrobnejše raziskave teh zmesi pepela in vode, ki se uporabljajo za hidravlični transport. Začetek te poti je raziskovanje zmesi pepela in vode in iskanje reološkega modela zanje. Po obdelavi vseh meritev bomo dobili povezavo med strižnimi diagrami in različnimi pepeli. Potrebno bo nadaljevati iskanje povezave tudi med lastnostmi pepela in njihovim vplivom na reološke lastnosti zmesi pepela in vode. Po določitvi reoloških lastnosti zmesi pepela in vode na osnovi eksperimenta in laboratorijskih analiz pepela bo mogoče nadaljevati delo na numerični določitvi toka zmesi. Na osnovi tega raziskovalnega dela in predvidenih nadaljnjih obdelav in numerike, bomo lahko dovolj dobro predvidevali obnašanje zmesi pepela in vode v transportnem sistemu in zanesljiveje vodili obstoječe procese hidravličnega transporta v povezavi s temi zmesmi.

Zahvala

Avtorja se za pomoč zahvalujeta mag. Marjanu Deliču in mag. Primožu Terniku iz Fakultete za strojništvo Univerze v Mariboru.



Slika 4: Strižni diagram zmesi pepela in vode tipa A, B in C, vzorca pepela 2.

Literatura

- [1] ŠKERGET L.: Mehanika tekočin, Univerza v Mariboru (tehniška fakulteta), Univerza v Ljubljani (Fakulteta za strojništvo), Maribor, 1994.
- [2] MARN J., RAMŠAK M., BOŽIČ B., : Meritev integralnega koeficienta izgub skozi zalogovnik: Poročilo o preizkusu, Maribor, 1999.
- [3] TERNIK P., MARN, J., KANDUTI D., DERVARIČ E.: Potenčni zakon kot model zmesi elektrofilterskega pepela in vode, Strojniški Vestnik, 248-262, Slovenija, 2001.
- [4] TERNIK P., MARN, J.: Modeliranje toka newtonskih disperznih sistemov, I.del: Eksperimenti, Kuhljevi dnevi2001 (Zbornik del), 137-144, Portorož 2001.
- [4] TERNIK P., MARN, J., KANDUTI D., DERVARIČ E.: reološke lastnosti zmesi elektrofilterskega pepela in vode: primerjava eksperimentalnih rezultatov in numeričnih rezultatov, CFX uporabniška konferenca (Zbornik del), 43-49, Maribor 2001.
- [5] TURIAN R.M., M.A., T.W., HSU F.L.G. SUNG M.D.J.: Flow of Concentrated Non-Newtonian Slurries: 1. Friction Losses in Laminar, Turbulent and Transition Flow Through Straight Pipe, Int. J. Multiphase Flow 24, No.2 (1998), 225-242.
- [6] THOMAS D.G.: Transport characteristics of suspensions: Part VII, A note on the viscosity of newtonian suspensions of uniform spherical particles, J. Colloid Sci., Vol. 20, 257, 1965.
- [7] TERNIK P.,: Modeliranje toka newtonskih disperznih sistemov, Univerza v Mariboru (tehniška fakulteta), Magistrsko delo, Maribor 2002.
- [8] BUNN T., A.J., CCHAMBERS and C.M.GOH: Rheology of Some Flyash Slurries, Powder Handling & Processing, September 1991.
- [9] WASP E.J., KENNY J. P., GANDHI R. L.: Solid - Liquid Flow Slurry Pipeline Transportation, Gulf Publi. Co., Houston, London, Paris, Tokyo1979.
- [10] HOLMAN J.P.: Experimental Methods for Engineers, McGraw Hill, Inc., USA, 1998.
- [11] Institutu Jožef Stefan, Laboratorij za mikrostrukturno analizo: Poročilo o analizi pepela, Junij 2002

NUMERIČNA ANALIZA ALUMINIJASTEGA BOČNEGA OJAČITVENEGA DROGA V VRATIH OSEBNEGA VOZILA

Simon Eržen¹, Zoran Ren², Ivan Anžel³

NUMERICAL ANALYSIS OF AN ALUMINIUM SIDE-DOOR IMPACT BEAM FOR A PASSANGER CAR

POVZETEK:

V prispevku je prikazana pomembnost uporabne vrednosti aluminija, katerega uporaba ima danes vse večje neposredne vplive na zmanjšanje teže avtomobila, kakor tudi posledično na emisije toplogrednih plinov v ozračje. Njegova uporabna vrednost je prikazana za rešitev zmanjšanja celotne teže osebnega vozila z lokalno rešitvijo, tj. s konstrukcijsko rešitvijo bočnega ojačitvenega droga v stranskih vratih osebnega vozila. Z upoštevanjem zahteve po zagotovitvi enake togosti in čim manjše teže, kot jo ima obstoječi standardni jekleni drog, je bil zaradi tega ustrezno povečan prerez droga iz aluminijeve zlitine. Kljub temu je bil zaradi nižje specifične teže aluminijeve zlitine in manjšega modula elastičnosti, dosežen 15 odstotni prihranek na teži. Numerični model ojačitvenega droga temelji na metodi končnih elementov, pri čemer je za ugotavljanje sposobnosti absorpcije deformacijske energije uporabljena elasto-plastična analiza in upoštevan vpliv velikih deformacij. Rezultati numeričnih simulacij kažejo, da je nova konstrukcija ojačitvenega droga iz aluminijeve zlitine primernejša za uporabo, saj absorbira skoraj 40 odstotkov več deformacijske energije kot standardni jeklen drog in s tem bistveno prispeva k povečani varnosti potnikov v osebnem vozilu.

SUMMARY:

In this paper the applicability importance of aluminium is described. Its usage directly influences the car weight reduction and, consequently, gas emissions. Its applicable value is presented for the solution of reducing the total weight of a passenger car using local design solution which comprises a redesign of a side-door impact beam. In order to satisfy the need for a satisfactory structure stiffness and minimal weight, the wall-thickness of the aluminum beam was increased compared to the steel one. Although aluminium has a lower strength-to-weight ratio as compared to steel, a 15 % of weight reduction was achieved. The numerical model of the beam is based on the finite element method. To determine the capability of deformational energy absorption, the elasto-plasto analysis and the effect of large deformations were taken into account. Computational analysis results show that the newly designed aluminium side-door impact beam has appropriate load-carrying capacities and it absorbs almost 40 % more deformational energy as its steel equivalent. This considerably contributes to the safety of passengers in the car.

¹ mag. Simon Eržen, univ. dipl. gosp. inž., Fakulteta za strojništvo, Maribor (e-pošta: simon.erzen@fs.uni-lj.si)

² izr. prof. dr. Zoran Ren, univ. dipl. inž. str., Fakulteta za strojništvo, Maribor (e-pošta: ren@uni-mb.si)

³ izr. prof. dr. Ivan Anžel, univ. dipl. inž. mater., Fakulteta za strojništvo, Maribor (e-pošta: ivan.anzel@uni-mb.si)

1 UVOD

Današnji predpisi zahtevajo, da avtomobili izpolnjujejo vedno strožje zahteve glede zmanjšanja porabe goriva in povečane varnosti. Te zahteve neposredno vplivajo na končno obliko avtomobila, tehnologijo izdelave in posledično tudi na ekonomiko goriva, pri čemer proizvajalci avtomobilov plačujejo višje davke, saj morajo zadovoljiti svoje potrošnike s privlačnimi in udobnimi avtomobili. Podatki kažejo, da samo 12 do 20 % [1] celotne energije goriva poganja vozilo. Pri tem je zmanjšanje teže vozila le eden izmed načinov za povečanje ekonomike porabe goriva. To proizvajalci avtomobilov s pridom izkoriščajo tako, da: (1) preoblikujejo notranjost z zmanjšanjem odvečnega praznega prostora, (2) uvajajo tehnološke spremembe, ki eliminirajo opremo ali zmanjšajo robustnost opreme in (3) zamenjujejo obstoječe materiale z lažjimi, ne da bi pri tem žrtvovali strukturno trdnost in varnost.

Glede na to, da ima optimalna oblika in togost v avtomobilskih aplikacijah velik pomen, je bilo na področju zmanjšanja teže izvedenih veliko raziskav. Da bi lahko avtomobilski proizvajalci zamenjali jeklene konstrukcijske dele z deli iz lažjih materialov (kot so aluminij in polimerni kompoziti), morajo predhodno oceniti in ovrednotiti optimalno obliko teh delov. Pri tem pa morajo upoštevati, da ne zmanjšajo njihove stopnje varnosti in togosti.

V nadaljevanju je obravnavan primer uporabe aluminija v avtomobilskih aplikacijah, tj. na bočnem ojačitvenem drogu v vratih osebnega vozila, sl. 1. Drog je v realnem primeru bočnega trka podvržen velikim obremenitvam in plastični deformaciji. Zato je potrebno njegovo konstrukcijo iz lažjih materialov prilagoditi tako, da je v primerjavi z obstoječim jeklenim sposoben absorbirati več deformacijske energije in imeti zadostno togost ter nosilnost in hkrati imeti minimalno težo. Pojemki in sile, ki jih utrpi avtomobil v primeru trka se morajo porazdeliti po konstrukciji tako, da bo voznik čim manj prizadet in varen v konstrukcijski "kletki". Zato je potrebno pri konstruiranju bočnega ojačitvenega droga upoštevati smernice predpisov 70/156/EEC [2] in 96/27/EC [3] evropskega standarda o avtomobilski varnosti ECE-R 95.

Glede na veliko rabo numeričnih metod v konstruiranju avtomobilskih aplikacij je bila za analizo bočnega ojačitvenega droga uporabljena metoda končnih elementov. Togost, napetosti in deformacijska energija so bili analizirani z upoštevanjem nelinearnosti obnašanja materiala in velikih deformacij, saj odziv droga ni direktno sorazmeren delujoči obremenitvi.

2 OSNOVNE KONSTRUKCIJSKE ZAHTEVE BOČNEGA VARNOSTNEGA DROGA

Funkcija bočnega ojačitvenega droga, kot elementa pasivne varnosti v avtomobilskih aplikacijah, je varovati voznika pred stranskim naletom drugega vozila. Pri tem mora biti sposoben absorbirati čimveč deformacijske energije, pri čemer pa se ne sme prelomiti.

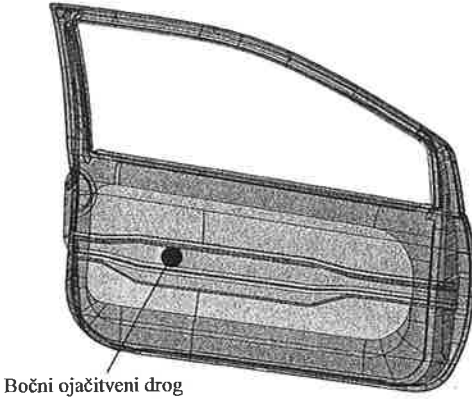
Bočni ojačitveni drog se namešča v stranska sprednja in zadnja vrata vozila oz. natančneje med okvir vrat. Točna pozicija je odvisna od konstrukcijskih omejitev vrat in od pozicije sedeža, saj lahko pravilno nameščen drog bistveno prispeva k varnosti voznika.

Trenutno se v praksi uporabljajo še vedno največ jekleni drogov, pri čemer se v avtomobilski industriji s pridom uvajajo lažji materiali kot npr. aluminij. Ta ima v primerjavi z jeklom velike sposobnosti plastičnega preoblikovanja. Tudi njegova gostota je kar 3-krat manjša od jekla. Zaradi 3-krat manjšega modula elastičnosti, morajo imeti nosilna področja droga večje dimenzije (po možnosti votel prerez) ter čim večji odpornostni moment, s čemer zmanjšajo elastični upogib. Prednost aluminija za takšne aplikacije je tudi v lažji izdelavi kompliciranih oblik drogov pri relativno nizki ceni.

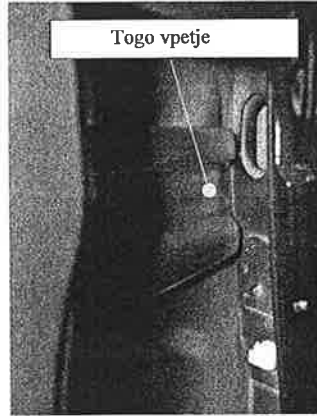
Konstrukcijski elementi bočnega ojačitvenega droga so:

- Mesto vpetja (sl. 2): primerno vpetje vpliva na to kako se bo konstrukcija droga deformirala, da bo absorpcija energije na tem mestu največja (vijačenje, lepljenje, kovičenje, varjenje in različne kombinacije).

- Stransko krilce (sl. 3): je ukrivljeno in predstavlja dodatno ojačitev ter morebitno zmanjšanje pomikov konstrukcije droga, s tem pa tudi povečanje absorpcije deformacijske energije.
- Področje ojačitve (sl. 5a): predstavlja dodatno ojačitev droga na mestu obremenitve po standardu ECE-R 95. Velikost je odvisna od razpoložljivih konstrukcijskih omejitev.

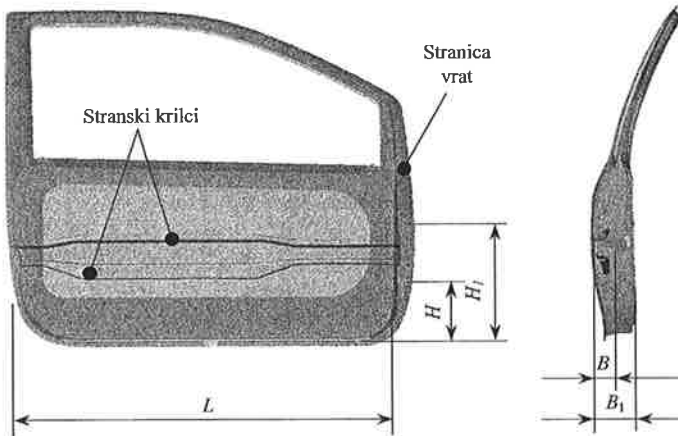


Slika 1: Sistem vrata - drog Renault twingo.



Slika 2: Vpetje droga v vratih.

Z namenom, da bi prikazali možnost uporabe aluminija, je bil za obravnavo izbran primer bočnega ojačitvenega droga vrat Renault twinga, sl. 1. S takšno izbiro vrat so bile določene tudi konstrukcijske omejitve, ki nas vežejo pri konstruiranju (sl. 3). Da bi konstrukcija droga ustrezala izbranim vratom, moramo upoštevati prostor, ki ga imamo na voljo, in sicer: 60 mm (B) v globino vrat, 1250 mm (L) v dolžino in 170 mm (H_1-H) po višini (zaradi zvočnika, zgornjega roba vrat in izolacije). Globina B se nanaša na razdaljo od zunanje plošče do vodila za dvig/spust šipe. Upoštevati moramo tudi namestitev droga po višini, da bo le-ta v pravilni višini od praga vrat, tj. $H = 160$ mm.



Slika 3: Konstrukcijske omejitve na modelu vrat Renault twinga.

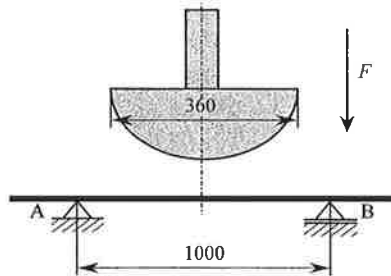
3 PREDPIS ECE-R 95

Pri konstruiranju droga je potrebno upoštevati smernice predpisov 70/156/EC in 96/27/EC evropskega standarda o avtomobilski varnosti za stranske trke ECE-R 95. Le-te pravijo, da je test izveden tako, da pod kotom 90° glede na testno vozilo naleti deformabilni voz. Njegova hitrost mora biti enakomerno zagotovljena 0,5 m pred trkom in znaša 50 km/h (13,8 m/s). V nasprotnem primeru, glede na smernice, test ni uspešen.

Predpisi zahtevajo tudi veliko drugih parametrov, ki morajo biti zadoščeni za uspešno izvedbo testa, vendar le-ti za konstruiranje bočnega ojačitvenega droga nimajo bistvenega pomena (nastavitev senzorjev, položaj testne lutke ...).

Za konstruiranje pa je vsekakor potrebno upoštevati podatek, da so deformabilni elementi na vozu, ki udarijo v vrata, nameščeni 350 mm od tal. To je višina pri kateri pride do najhujših poškodb, tj. poškodba kolkov. Da bi pri tem stopnjo zaščite testne lutke (potnikov) povečali, moramo bočni ojačitveni drog postaviti na pravilno višino glede na prag vrat.

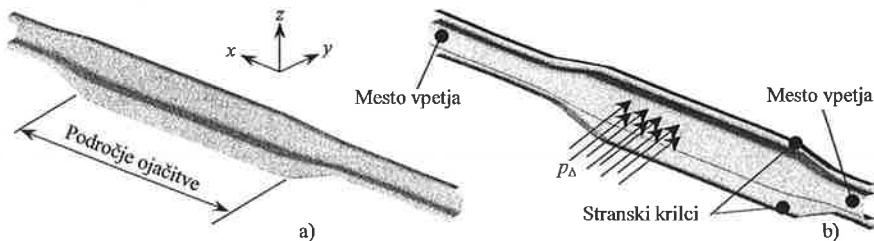
Testiranje po predpisu ECE-R 95 je zelo drago, zato se v nadaljevanju poslužujemo enostavnejšega laboratorijskega postopka [4], kjer je konstrukcija bočnega varnostnega droga obremenjena s kladivom mase 13 kg (sl. 4). Ob znani višini, je znana hitrost udarca kladiva ob drog. Drog se pri tem ne sme prelomiti. Sila pri takšnem preizkusu deluje na drog simetrično.



Slika 4: Shematski prikaz obremenitve bočnega varnostnega droga.

4 PRIMERNA OBLIKA BOČNEGA OJAČITVENEGA DROGA

Obstoječa konstrukcija bočnega ojačitvenega droga v vratih Renault twinga je izdelana iz konstrukcijskega jekla ISO 31CrNiMo8. Da bi s konstrukcijo droga dosegli čim večji delež absorpcije energije je bila obstoječa konstrukcija jeklenega droga adaptirana. Dolžina le-tega droga znaša 1200 mm. Od tega je ojačitveno področje, kjer pričakujemo največje povese in napetosti, dolgo 540 mm in je bilo izbrano glede na mesto obremenitve (sl. 5a). Stranski profil droga, v obliki črke S, je širok 135 mm oz. 80 mm odvisno od prereza (sl. 6). Debelina tankostenske tridimenzionalne konstrukcije je 1,3 mm, kar znese 2,36 kg.

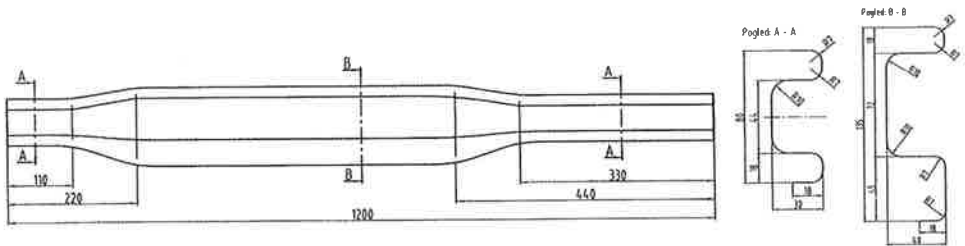


Slika 5: Robni pogoji na bočnem ojačitvenem drogu.

Stranski krilci (sl. 5b) sta ukrivljeni in predstavljata še dodano ojačitev, s čimer zmanjšamo pomike in povečamo absorpcijo deformacijske energije. Pri elasto-plastičnem deformiranju materiala prevzmeta le-ti nase večinski delež absorbirane energije. Pričakovano je, da se bosta pri obremenitvi ukrivili navznoter.

Prehodi med različnima prerezoma so izvedeni blago, tako da v teh področjih nismo pričakovali povečanih koncentracij napetosti, kar bi lahko vodilo do uničenja droga.

Pri oblikovanju je bila upoštevana tudi nesimetrija, saj je na eni strani drog bolj ojačan kot na drugi, predvsem zaradi mesta obremenitve droga po standardu ECE-R 95. Tudi luknje na koncih droga niso bile upoštewane, saj je le-ta privarjen na konstrukcijo vrat. Vijačenje droga pa v primeru vrat Renault twinga ni mogoče izvesti, saj drog s svojo zadnjo stranjo nalega na vrata.



Slika 6: Dimenzije bočnega ojačitvenega droga.

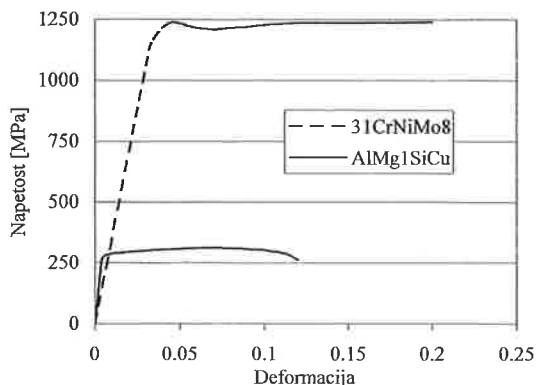
Za tako funkcionalno ovrednoten bočni ojačitveni drog, smo nato primerjali togost, napetost, težo in absorpcijo deformacijske energije s pomočjo numeričnih analiz. Za numerično analizo deformacijskega stanja bočnega ojačitvenega droga [5] je bila uporabljena metoda končnih elementov, ki je opisana v nadaljevanju.

5 PRIMERJALNA ANALIZA BOČNEGA OJAČITVENEGA DROGA PO METODI KONČNIH ELEMENTOV

Z namenom izvedbe analize je bilo potrebno določiti še materialne parametre kot so mehanske in fizikalne lastnosti jekla in aluminija. Oba materiala, tako jeklo kot aluminij, smo obravnavali kot izotropna materiala, za katera je dovolj, da uporabimo za definicijo le modul elastičnosti E in Poissonovo število ν . Karakteristični krivulji napetost-deformacija, ki sta nelinearni z rahlim deformacijskim utrjevanjem (sl. 7), smo uporabili za definiranje elasto-plastičnega obnašanja materiala (kriterij tečenja, modul plastičnosti in meja plastičnosti), katerih podatki so zbrani v tabeli 1.

V splošnem smo pri konstruiranju bočnega ojačitvenega droga spreminjali debelino konstrukcije z namenom, da bi teža konstrukcije droga glede na jeklen drog zmanjšali na minimum. Pri tem se ni spreminjala le teža, ampak tudi količina absorbirane energije, togost in napetost.

Numerični model bočnega ojačitvenega droga je bil modeliran z linearnimi štirikotnimi lupinskimi elementi. Trikotni lupinski elementi so bili uporabljeni le kot povezave, če zaradi oblike modela droga ni bilo mogoče uporabiti štirikotnih. Da bi se z rezultati najbolj približali realnemu obremenitvenemu stanju droga, smo velikost elementov 7 mm uporabili na mestu vpetja, na področjih zožitve droga zaradi ojačitve in na področju obremenitve, kjer pričakujemo največje napetosti in povesi. Ostali predeli droga so imeli velikost 10 mm.



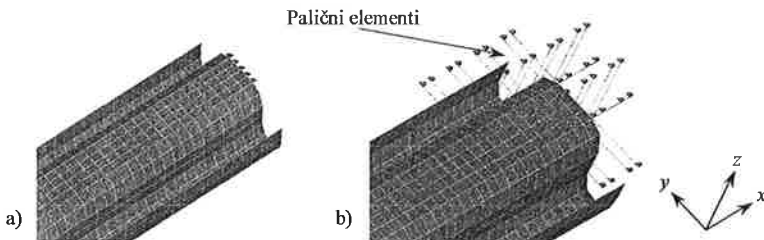
Slika 7: Diagram napetost-deformacija za jeklo in aluminij.

Pri določevanju robnih pogojev smo upoštevali smernice 70/156/ECC in realno konstrukcijo vrat. Tako je bila pri numerični simulaciji uporabljena velikost sile $F = 40$ kN. Pri analizi ni bil upoštevan kontaktni problem [6], zato smo se poslužili drugih metod, in sicer silo kot tlak enakomerno porazdelili na površino, ki je enaka kontaktni površini med udarnim telesom in drogom (sl. 5b). Porazdelitev obremenitve je bila trikotno stopničasta.

Tabela 1: Mehanske in fizikalne lastnosti uporabljenih materialov pri analizi.

Material	Gostota [g/cm ³]	Modul elastičnosti [GPa]	Poissonovo število /	Meja plastičnosti [MPa]	Modul plastičnosti [MPa]	Natezna trdnost [MPa]	Strižni modul [GPa]	Min. teh. debelina [mm]
Jeklo 31CrNiMo8	7,833	206	0,29	1160	667	1240	79	0,6
Aluminij AlMg1SiCu	2,7	68	0,33	276	430	310	25,9	1,1

Za simulacijo smo obravnavali dva načina vpetja droga. Največkrat je kot alternativna rešitev uporabljeno varjenje, kar smo upoštevali kot togo vpetje droga na obeh koncih. Upoštevali pa smo tudi vpliv deformiranja droga skupaj z vrati, kar smo ponazorili z namestitvijo paličnih enodimenzionalnih elementov na robove vpete površine (sl. 8). Omenjeni elementi prenašajo le osne obremenitve in se obnašajo kot vzmetni.



Slika 8: Vpetje droga: (a) togo vpetje in (b) palični (vzmetni) elementi za simulacijo podajanja vrat.

Za modeliranje je bil uporabljen programski paket I-Deas [7], za numerično analizo po metodi končnih elementov pa MSC.visualNastran for Windows [8]. Izvedene so bile nelinearne statične analize. Upoštevani sta bili geometrijska in materialna nelinearnost. Pri materialni nelinearnosti

smo za čimbolj precizen opis elasto-plastičnega obnašanja materiala uporabili bilinearno aproksimacijo z utrditvijo. Le-ta naj ne bi podajala samo potek izmerjene krivulje, ampak tudi posamezne karakteristične vrednosti, kot na primer začetek utrjevanja. Za obravnavo geometrijske nelinearnosti smo zaradi tankostenosti konstrukcije droga upoštevali vpliv velikih deformacij in velikih rotacij, saj se je oblika strukture bistveno spremenila glede na izhodiščno lego.

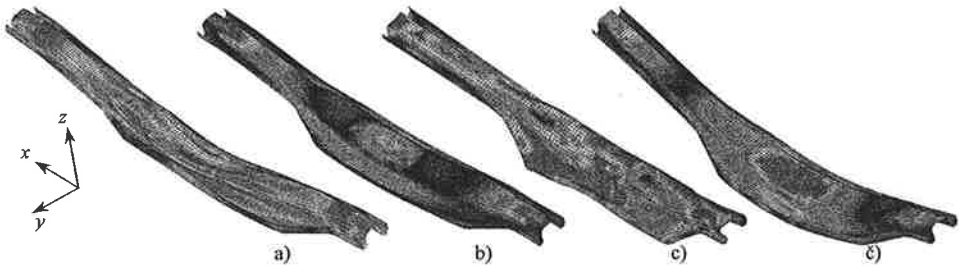
Numerična simulacijska analiza je zahtevala inkrementalno-iterativni pristop. Za zagotovljeno konvergenco rešitev je bilo potrebno določiti primerno število iteracij in inkrementov. S poskušanjem je bilo ugotovljeno, da je potrebno obremenitev razdeliti na 5 do 30 inkrementov po 25 do 120 iteracij. Ravnotežje zunanjih in rezidualnih sil smo dosegli s konvergenčnim kriterijem obremenitve, ki je znašal 0,001. Uporabljena je bila tudi metoda SEMI [8], pri kateri se togostna matrika posodobi takoj po prvi iteraciji inkrementa sile. Ta posodobitev se izvaja neodvisno od trenutnega konvergenčnega stanja rešitve. Rešitev je konvergirala z določitvijo večjega števila inkrementov ter iteracij.

Časi analize so bili dokaj različni in so segali od 15 min do 2 h za jeklen drog pri debelini 1,3 mm. Ugotovili smo, da smo za manjše debeline droga potrebovali več računskega časa, da je rešitev konvergirala. Tedaj je bila meja plastičnosti zaradi slabše stabilnosti konstrukcije presežena prej, pri čemer so analize potekale dalj časa v nelinearnem področju, kar zahteva skupno večje računske čase.

Analize smo izvajali za že predstavljeno konstrukcijo droga z jeklom in aluminijem. Vsaka od rešitev je bila simulirana kot togo vpet nosilec in kot nosilec, ki se podaja skupaj z vrati. Z numeričnimi preračuni smo za aluminijasto izvedbo hoteli ugotoviti, kakšna mora biti debelina tankostene konstrukcije droga v primerjavi z jekleno, da bo teža manjša, absorbirana energija pa večja, pri čemer se drog ni smel prelomiti.

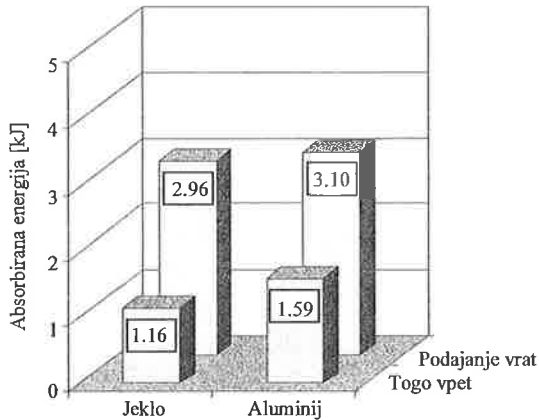
6 PRIMERJAVA REZULTATOV SIMULACIJ

Za referenčno rešitev je bil izbran jeklen drog debeline 1,3 mm za katerega so pomiki in porazdelitev napetosti prikazani na sl. 9a. Da smo lahko zamenjali material droga in tako dobili večjo sposobnost absorpcije energije in manjšo težo, smo morali zagotoviti ustrezno togost aluminijastega dela. To smo naredili tako, da smo izbrali ustrezno debelino stene konstrukcije in drog ponovno obremenili. Začetno debelino smo ocenili na 3 mm, pripadajoča masa droga je potem znašala 1,87 kg. To pomeni 20,7 % (tabela 2) prihranek na teži v primerjavi z jeklenim drogom. Ker je bila v tem primeru natezna trdnost aluminija presežena, smo bili prisiljeni povečati debelino droga na 4 mm. Pri tem se je masa v primerjavi z jeklenim drogom povečala za skoraj 6 % (tabela 2), kar je v nasprotju z zastavljenimi cilji. S ciljem poiskati optimalno rešitev, smo morali žrtvovati nekoliko večjo togost in tako zmanjšati debelino stene konstrukcije na 3,2 mm (sl. 9b). S tem smo v primerjavi z jeklenim drogom ponovno zagotavljali 15,2 % prihranek na teži. Pri tem pa tudi največja napetost v drogu (tj. 309 MPa - tabela 2) ni presegala dopustne (natezne trdnosti). Absorpcija deformacijske energije pa se je povečala iz 1164 J na 1595 J (tabela 2), torej smo dosegli 37 % povečanje v primerjavi z jeklenim drogom.



Slika 9: Primerjava največjega povesa in porazdelitve napetosti pod obremenitvijo. Togo vpjet drog: (a) jeklen in (b) aluminijast; upoštevano podajanje vrat: (c) jeklen in (č) aluminijast.

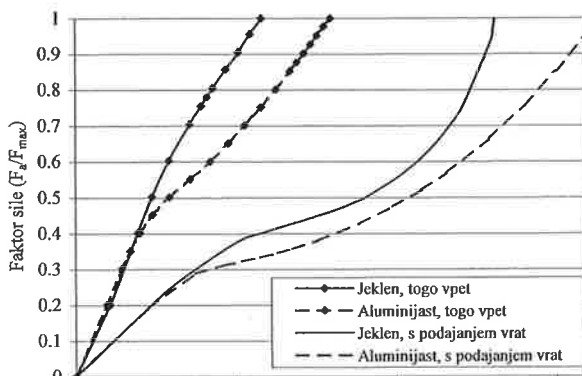
Podobno kot pri togo vpetem drogu, so rezultati za aluminijasto izvedbo boljši tudi, ko upoštevamo deformacijo droga skupaj s podajanjem vrat. Povese se je tukaj povečal skoraj za 1-krat, vendar, če gledamo lokalno (neupoštevanje vrat), bi bile izračunane vrednosti povesev dosti manjše od tistih pri zvarjeni konstrukciji. Razlog, da se je deformacijska energija povečala le za 4,5 % (sl. 10) izhaja iz tega, da so del energije prevzela nase tudi vrata in ne toliko drog.



Slika 10: Primerjava absorbirane energije.

Iz diagrama na sl. 11 je razvidno, da sta pri obeh načinih vpetja v začetni fazi obremenjevanja krivulji skoraj enaki, vendar postane krivulja sila-pomik za aluminijast drog v primerjavi z jeklenim kasneje položna. To pomeni, da v tem predelu krivulje ni sunkovitega prenosa udarca na strukturo, ampak se drog postopoma deformira, kar omogoča dobra preoblikovalnost aluminija.

Ker so rezultati natančnejši v primeru ko upoštevamo odziv sistema več delov, je zaradi tega smotno v prihodnosti simulirati odziv droga za takšen sistem elementov, kot npr. skupaj s steklom. Seveda to vodi do daljših računskih časov, kar pomeni iskanje kompromisa.



Slika 11: Diagram sila-aksialni pomik d_z .

Ugotovljeno je bilo, da lahko s spreminjanjem debeline aluminijaste konstrukcije bočnega ojačitvenega droga povečamo sposobnost absorpcije deformacijske energije. To je zelo ugodno, saj tako posledično zmanjšamo tudi težo konstrukcije, ki je eden od zastavljenih ciljev. To je tehnično sprejemljivo do neke minimalne togosti, pri kateri še ne pride do zloma droga. Zaradi tega je bilo potrebno pri takšnem podajanju upoštevati tudi napetosti in pomike, ki jih konstrukcija utрпи.

Tabela 2: Primerjava rezultatov simulacijskih analiz.

	Material	Debelina t [mm]	Masa m [kg]	Δm [%]	Poves d [mm]	Napetost σ [MPa]	Defor. ener. U [J]	ΔU [%]
Togo vpelje	Jeklo 31CrNiMo8	1,3	2,36	-	84,3	1223	1164	-
	Aluminij AlMg1SiCu	3,0	1,87	-20,7*	85,1	320	1685	+44,7
		4,0	2,50	+5,9	60,0	301	1339	+15,0
		3,2	2,00	-15,2	79,7	309	1595	+37,0
Upoštevano podajanje vrat	Jeklo 31CrNiMo8	1,3			181,0	1220	2967	-
	Aluminij AlMg1SiCu	3,0			-	-	-	-
		4,0			-	-	-	-
		3,2			158,9	288	3100	+4,5

* +/- pomeni relativno povečanje ali zmanjšanje lastnosti v primerjavi z enako lastnostjo jeklenega droga; površina vseh elementov je $A = 231660 \text{ mm}^2$.

7 ZAKLJUČEK

Iz primerjave rezultatov je razvidno, da lahko z uporabo aluminija izboljšamo karakteristike odziva strukture bočnega ojačitvenega droga pod obremenitvijo in tako povečamo delež pasivne varnosti voznikov. Pri tem moramo paziti, da upoštevamo predpis ECE-R 95 in ostale konstrukcijske omejitve, ki jih imamo na razpolago.

Povzamemo lahko, da je v primeru, ko iščemo hkrati čim večjo trdnost in togost konstrukcije, najmanjšo težo in največjo količino absorbirane energije, vsekakor smiselno uporabiti aluminijasto konstrukcijo. Pri tem so tudi proizvodni stroški že dosti nižji v primerjavi z jeklom, ter proizvodni procesi utečeni.

Predvidimo lahko, da bo uporaba aluminija v strojništvu v bodoče še bolj porasla. Zaenkrat so stroški uporabe aluminija v primerjavi z jeklom še veliki, vendar bo njegova cena začela padati z uvajanjem novih, boljših proizvodnih tehnologij, ki bodo zagotavljale tanjše konstrukcije z

zadostno sposobnostjo absorbiranja energije. To posledično pomeni tudi manjšo porabo materiala ob ohranjanju enake togosti.

8 LITERATURA

- [1] National Academy Press. Effectiveness and Impact of Corporate Average Fuel Economy (Cafe) Standards. [Online] dostopno: <http://books.nap.edu/html/cafe/ch3.pdf> [28. januar, 2002].
- [2] European Parliament and the Council, EU directive 70/156/EEC, *Official Journal of the European Communities*, maj, 1996.
- [3] European Parliament and the Council, EU directive 96/27/EC, *Official Journal of the European Communities*, 1970.
- [4] Cheon S. S., Lee D. G., Jeong, K. S., Composite Side-door Impact Beams for Passenger Cars, *Composite structures*, 38. let., št. 1-4, 1997, str. 229 - 239.
- [5] König P., Die Seitenaufprallsensierung in der Simulation, Doktor dissertation, *Berlin University*, 2000.
- [6] Becker A. A., Contact Mechanics and Stresses - Review of Finite Element Theory (Lecture 4), *University of Nottingham, Department of Mechanical Engineering*, april, 1997.
- [7] EDS PLM Solutions, I-DEAS Master Series™, verzija 7, *Structural Dynamics Research Corporation*, ZDA.
- [8] MSC.Software, MSC.visualNastran for Windows, verzija 2001, *MSC.Software Corporation*, ZDA.

Zvezna diskretizacija z uporabo podobmočij v metodi robnih elementov

Matjaž Ramšak¹

Continuous discretisation in the boundary element method with subdomain technique

POVZETEK

V prispevku predstavljamo formulacijo integralske metode robnih elementov (MRE) z zvezno diskretizacijo funkcije polja in njenega odvoda v normalni smeri. V vogalih zunanjega roba je uporabljen princip dvojnih točk, medtem ko v notranjih vogalih podobmočij, kjer predpišemo kompatibilne in ravnotežne robne pogoje, uporabimo gradientno formulacijo. Dobljena diskretna sistemska matrika ima več enačb kot neznank. Rešimo jo s hitrim iterativnim postopkom v smislu metode najmanjših kvadratov. Robustnost in stabilnost formulacije smo preverili na testnem primeru gnanega toka v kotanji za vrednost Reynoldsevega števila 10000.

SUMMARY

The formulation of the integral boundary element method including subdomain technique with the continuous approximation of the function and the function derivative in the direction normal to the boundary element is introduced. In the outer boundary subdomain corners the double points are used, while in internal subdomain corners, where compatibility and equilibrium boundary conditions are prescribed, the gradient formulation is applied. Obtained system matrix has more equations than unknowns. It is solved with fast iterative linear least squares. The robustness and stability of developed formulation is shown on the case of driven cavity flow with the Re number value of 10000.

1 Uvod

Pričujoča diskretizacija je nastala iz formulacije mešanih elementov, ki smo jih na Kuhljevih dnevih že večkrat predstavili. Razlika med formulacijama je le v aproksimaciji odvoda v smeri normale na element, ki je pri mešanih elementih nezvezna. Zaradi poudarka prispevka na diskretizaciji ne bomo opisovali diferencialne enačbe posplošene difuzivno-konvektivne prenosne enačbe in integralske oblike omenjene enačbe. Omenjene teme je moč najti v Škerget in ostali 1999 [4], Ramšak in Škerget 1999 [2] ter v predhodnih zbornikih srečanja, kjer je moč najti tudi ostale podrobnosti o hitrostno-vrtinčni formulaciji Navier-Stokesovih enačb. Testni primer gnanega toka v kotanji v zadnjem poglavju je prikazan v podporo predstavljeni teoriji in popolnejša predstavitev zahteva več prostora.

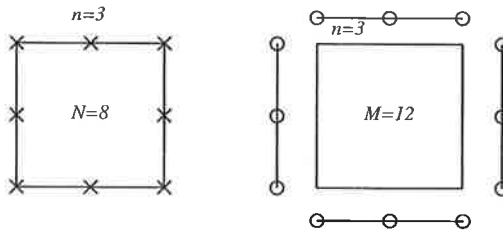
¹mag. M. Ramšak, univ.dipl.inž., Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru, Slovenija

2 Diskretizacija z zveznimi elementi

Razvoj pričujoče formulacije z zvezno diskretizacijo funkcije u in njenega odvoda $\partial u/\partial n$ v normalni smeri (nadalje fluks) razčlenimo v tri korake: nezvezni [4], mešani [2] in na koncu zvezni elementi. Medtem ko na samem robu celotnega območja ni posebnih težav, te nastanejo pri aplikaciji kompatibilnih robnih pogojev med podobmočji. Ločeno obravnavamo zunanji rob območja in notranje robove, kjer predpišemo kompatibilne in ravnotežne robne pogoje.

2.1 Aproksimacija funkcije

Interpolacija funkcije polja u je identična kot pri mešanih elementih, Ramšak in Škerget 1999 [2]. Funkcijo aproksimiramo po elementu z zveznim polinomom, slika 1. V vogalu podobmočja



Slika 1: Zvezna kvadratna aproksimacija funkcije po elementu $n = 3$ in podobmočju $N = 8$ (levo) ter zvezna aproksimacija fluksa po robnem elementu $n = 3$ z dvojnimi točkami (desno). \times predstavljajo u vozlišča in o predstavljajo $\partial u/\partial n$ vozlišča.

se stikata dva elementa, ki si delita isto vozliščno točko za aproksimacijo funkcije. Torej funkcijo aproksimiramo zvezno z enojnimi točkami. Stopnja aproksimacije je poljubna, v našem primeru funkcijo polja u aproksimiramo z zveznim kvadratnim polinomom Φ^n

$$\Phi^n = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -\xi + \xi^2 \\ 1 - \xi^2 \\ \xi + \xi^2 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

kjer je $\xi \in [-1, 1]$ lokalna koordinata in n stopnja polinoma v našem primeru ($n = 3$).

Potrebujemo še aproksimacijo funkcije po območju podobmočja ϕ^N , kjer je N število interpolacijskih vozlišč podobmočja. Uporabimo bikvadratno interpolacijo z istimi vozliščnimi točkami kot pri robnih elementih $N = 8$, enačba (1)

$$\phi^N = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} -1 + \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2 \\ 2 - 2\eta - 2\xi^2 + 2\xi^2\eta \\ -1 - \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 - \xi^2\eta + \xi\eta^2 \\ 2 + 2\xi - 2\eta^2 - 2\xi\eta^2 \\ -1 + \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2 \\ 2 + 2\eta - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta \\ -1 - \xi\eta + \xi^2 + \eta^2 + \xi^2\eta - \xi\eta^2 \\ 2 - 2\xi - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

kjer sta $\xi, \eta \in [-1, 1]$ lokalni koordinati.

Z interpolacijskimi polinomi lahko sedaj zapišemo integrale osnovne rešitve u^* po robnem elementu Γ_e

$$h^n = \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma, \quad g^n = \int_{\Gamma_e} \Phi^n u^* d\Gamma, \quad (3)$$

in po podobmočju Ω_s

$$d_j^N = \int_{\Omega_s} \phi^N \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega, \quad d^N = \int_{\Omega_s} \phi^N u^* d\Omega. \quad (4)$$

Zapisani integrali so odvisni od geometrije, časovnega koraka in difuzivnosti, ki ju vsebuje osnovna rešitev.

V nadaljevanju bomo zapisali diskretno obliko integrala po celotnem robu podobmočja Γ , ki je vsota posameznih prispevkov robnih integralov Γ_e , v našem primeru 4 robnih elementov, ki oklepajo podobmočje. V vozlišču, ki se nahaja v vogalu podobmočja, smemo prispevka $\{h\}$ obeh integralov Γ_e , ki si delita vogalno vozlišče sešteti. Dobimo integrale $\{h'\}$. Tako dobimo aproksimacijo robnih integralov v $N = 8$ interpolacijskih vozliščih. Zgoraj povedano še zapišimo v matematični obliki

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} u d\Gamma = \sum_{e=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_e} \Phi^n \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma_e \right\}^T \{u\}^n = \sum_{e=1}^4 \{h^n\}^T \{u\}^n = \sum_{i=1}^{N=8} \{h'\}^T \{u\}^N, \quad (5)$$

kjer zadnja vsota predstavlja zanko $N = 8$ po vozliščnih točkah aproksimacije funkcije. Sovpadanje točk interpolacije po robu $\{h'\}$ in območju podobmočja $\{d_j\}$ in $\{d\}$ omogoča v procesu integracije seštevanje omenjenih integralov pri vsaki vozliščni točki posebej.

2.2 Aproksimacija fluksa

Aproksimacija fluksa je bistven prispevek tega dela. Ločeno sta obravnavana rob celotnega območja v pričujočem poglavju in robni elementi v notranjosti, kjer so predpisani kompatibilni robni pogoji v enem naslednjih poglavjih.

Tudi pri fluksih uporabimo kvadratno interpolacijo identično kot po robnem elementu en. (1). Ker je smer normale v vozliščni točki vogala podobmočja nedefinirana, uporabimo princip dvojnih točk. Točki v vogalu podobmočja imata sicer enake koordinate, geometrijsko sovpadata, vendar imata različne vrednosti odvoda v normalni smeri. Tako integral fluksov po robu podobmočja zapišemo kot vsoto vseh robnih elementov (v našem primeru 4). Pri vsakem robnem elementu imamo vsoto v n vozliščnih točkah, skupaj torej $M = 4 * n = 12$. Zapišimo diskretno obliko integrala po celotnem robu podobmočja Γ

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma = \sum_{e=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_e} \Phi^n u^* d\Gamma_e \right\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^n = \sum_{e=1}^4 \{g^n\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^n = \sum_{i=1}^{M=12} \{g\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^M, \quad (6)$$

kjer zadnja vsota predstavlja zanko po vozliščnih točkah aproksimacije fluksa.

2.3 Diskretna oblika integralske enačbe

Integralsko enačbo zapisano za poljubno podobmočje zapišimo še v diskretni obliki upoštevajoč predstavljeno diskretizacijo funkcije (enačba 5) in fluksa (enačba 6),

$$0 = -c(\xi)u(\xi) - \bar{a} \sum_{i=1}^N \{h'\}^T \{u\}^N + \bar{a} \sum_{i=1}^M \{g\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^M$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \{g_j\}^T \{uv_j\}^N + \sum_{i=1}^N \{d_j\}^T \{uv_j\}^N \\
& + \sum_{i=1}^N \{g_j\}^T \{s_j\}^N - \sum_{i=1}^N \{d_j\}^T \{s_j\}^N + \sum_{i=1}^N \{d\}^T \{S\}^N + \sum_{i=1}^N \{d\}^T \{S_u u\}^N, \quad (7)
\end{aligned}$$

kjer indeks i zajema $N = 8$ vozliščnih točk interpolacije funkcije in $M = 12$ vozliščnih točk interpolacije fluksa po osnovni celici podobmočja, slika 1.

Izraze, kjer se pojavlja funkcija u kot neznan ali znana vrednost, smemo združiti in dobimo naslednji izraz

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{i=1}^N \{-(c(\xi) + \bar{a}h') + (-g_j + d_j)v_j + d S_u\}^T \{u\}^N + \bar{a} \sum_{i=1}^M \{g\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^M \\
& + \sum_{i=1}^N \{g_j - d_j\}^T \{s_j\}^N + \sum_{i=1}^N \{d\}^T \{S\}^N.
\end{aligned}$$

Z uvedbo nove spremenljivke e

$$e = -(c(\xi) + \bar{a}h') + (-g_j + d_j)v_j + d S_u$$

in skalarja znane vrednosti na desni strani f

$$f = \sum_{i=1}^N \{g_j - d_j\}^T \{s_j\}^N + \sum_{i=1}^N \{d\}^T \{S\}^N$$

integralsko enačbo (7) zapišemo še krajše

$$\sum_{i=1}^N \{e\}^T \{u\}^N - \sum_{i=1}^M \{g\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^M = f. \quad (8)$$

Zadnja enačba (8) predstavlja diskretno obliko integralske enačbe za poljubno izvorno točko ξ . Enačbo (8) zapišemo za vsa robna vozlišča vključno z dvojnimi točkami $\xi = 1, M$ in dobimo matrični sistem enačb

$$[E]\{u\} - [G]\left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} = \{f\}. \quad (9)$$

2.4 Uporaba robnih pogojev

Matrični zapis diskretiziranih integralskih enačb (9) z upoštevanjem robnih pogojev in sicer znano funkcijo \bar{u} na robu Γ_1 in znanim fluksom $\partial u / \partial n$ na Γ_2 , pretvorimo v

$$\begin{bmatrix} [-G]^{\Gamma_1} \\ [E]^{\Gamma_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\partial u / \partial n\}^{\Gamma_1} \\ \{u\}^{\Gamma_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[E]\{\bar{u}\}^{\Gamma_1} \\ [G]\left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right\}^{\Gamma_2} \end{Bmatrix} + \{f\},$$

oziroma v zaključen sistem algebraskih enačb

$$[A]\{x\} = \{B\}, \quad (10)$$

ki ga rešimo za neznane vrednosti x .

2.4.1 Problem vogalov območja

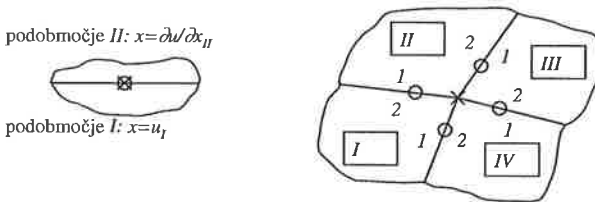
V vogalu območja v primeru Diricetovih robnih pogojev, to je znane vrednosti funkcije \bar{u} na Γ_1 , sta neznaniki odvoda v smeri normale obeh dotikajočih elementov, v vsaki dvojni točki po ena neznanica vrednost. Obstaja še druga alternativna možnost, saj smemo normalni odvod v opazovani dvojni točki izračunati s pomočjo odvoda v smeri tangente dotikajoče dvojne točke. Slednje smo prikazali s pomočjo numeričnega eksperimenta na primeru naravne konvekcije v zaprti kvadratni kotanji. V tabeli 1 smo prikazali vrednosti izračunanega odvoda hitrosti v smeri normale v eni izmed dvojnih vogalnih točk. Odvod hitrosti v smeri tangente nasprotno dotikajoče točke znaša 0, saj so predpisane hitrosti na steni kotanje 0. Iz tabele 1 je razvidna konvergenca z zgoščevanjem mreže izračunanega odvoda v smeri normale proti vrednosti 0, torej vrednosti tangentnega odvoda nasprotno dotikajoče dvojne točke. Iz gornjega primera sklepamo o pravilnosti predpisovanja robnih pogojev odvoda v smeri normale v vogalu območja iz vrednosti tangentnega odvoda nasprotno dvojne točke v primeru znanih vrednosti funkcije \bar{u} na Γ_1 . V nasprotnem primeru neznanih odvodov dvojne točke vogala v smeri normale, postane obravnavana numerična shema nestabilna za višje vrednosti Ra števila, saj divergira.

mreža	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64
$\partial v_x / \partial n$	7.780	4.106	1.518	.3970	.0864	.0403

Tabela 1: Vrednost odvoda hitrosti v normalni smeri dvojne točke vogala $\partial v_x / \partial n$ pri primeru naravne konvekcije $Ra = 10^3$ v odvisnosti od gostote mreže.

2.5 Uporaba kompatibilnih in ravnotežnih robnih pogojev

Ločeno obravnavamo središčne in vogalne točke robnih elementov, slika 2.



Slika 2: Središčne(levo) in vogalne(desno) točke robnih elementov in uporaba kompatibilnih in ravnotežnih robnih pogojev. Indeksi podobmočij I, II, III in IV , indeksi vozliščnih točk I_1, I_2, \dots, IV_2 . Zaradi nazornosti smo dvojne vozliščne točke fluksa \circ narisali izven vogala elementa, čeprav se geometrijsko nahajajo v vogalu elementa.

2.5.1 Središčne točke elementov

Za dotikajoči točki dveh podobmočij I in II , slika 2 levo, zapišemo diskretizirani robni integralni enačbi (9) za podobmočje I v obliki

$$e_I u_I - g_I \frac{\partial u}{\partial n_I} = f_I$$

in podobmočje II

$$e_{II}u_{II} - g_{II}\frac{\partial u}{\partial n_{II}} = f_{II},$$

kjer se integrali z indeksom I nanašajo na podobmočje I in obratno integrali z indeksom II na podobmočje II . Iz kompatibilnih robnih pogojev $u_I = u_{II}$ izberemo npr. neznanko u_I v vozlišču I . Iz ravnotežnih robnih pogojev

$$\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\right)_I = -\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{II},$$

kjer je λ prevodnost, nam tako ostane izbor neznanke $\frac{\partial u}{\partial n_{II}}$ v vozlišču II . Gornji enačbi zapišemo z novima neznankama v vozliščnih točkah I in II kot

$$e_I u_I + g_I \frac{\lambda_{II}}{\lambda_I} \frac{\partial u}{\partial n_{II}} = f_I$$

$$e_{II} u_I - g_{II} \frac{\partial u}{\partial n_{II}} = f_{II},$$

kar daje zaključen sistem dveh enačb z dvema neznankama.

2.5.2 Vogalne točke robnih elementov

Zaradi topografskih značilnosti vogalnih točk, slika 2, uporaba kompatibilnih robnih pogojev ni tako neposredna kot pri središčnih točkah. Za vsako podobmočje smemo v vogalni točki zaradi uporabe dvojnih točk zapisati dve diskretizirani integralski enačbi. Za podobmočje I tako zapišemo enačbi (9) za vozlišči z indeksoma $(I, 1)$ in $(I, 2)$, slika 2 desno,

$$e_I u_I - g_{I,1} \frac{\partial u}{\partial n_{I,1}} = f_I$$

$$e_I u_I - g_{I,2} \frac{\partial u}{\partial n_{I,2}} = f_I. \quad (11)$$

Analogno zapišemo po dve enačbi še za podobmočja II, III in IV , skupno torej 8 enačb. Kompatibilni pogoji enakosti funkcije ne povzročajo težav, saj funkcijo aproksimiramo z zvezno aproksimacijo brez dvojnih točk

$$u_I = u_{II} = u_{III} = u_{IV}.$$

Ravnotežne robne pogoje oziroma enakost odvoda funkcije v smeri normale pa moramo zapisati po dvojnih točkah, kar daje 4 enačbe, ki jih v splošnem primeru med sabo ne moremo enačiti

$$\lambda_I \frac{\partial u}{\partial n_{I,2}} = -\lambda_{II} \frac{\partial u}{\partial n_{II,1}},$$

$$\lambda_{II} \frac{\partial u}{\partial n_{II,2}} = -\lambda_{III} \frac{\partial u}{\partial n_{III,1}},$$

$$\lambda_{III} \frac{\partial u}{\partial n_{III,2}} = -\lambda_{IV} \frac{\partial u}{\partial n_{IV,1}},$$

$$\lambda_{IV} \frac{\partial u}{\partial n_{IV,2}} = -\lambda_I \frac{\partial u}{\partial n_{I,1}}, \quad (12)$$

kjer se indeksi nanašajo na sliko 2. Slednji pristop nam daje v vogalu podobmočja v notranjosti eno neznano funkcijo in 4 neznane flukse, skupno 5 neznank in 8 razpoložljivih enačb. Odvod funkcije v smeri normale poljubnega vozlišča i je definiran z vektorjem normale v tem vozlišču $\vec{n} = (n_x, n_y)$ in gradientom $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y}\right)_i.$$

Z enačenjem odvodov v normalni smeri smemo zahtevati tudi zveznost gradienta funkcije, kar dodatno povezuje kompatibilne robne pogoje (12).

Število neznank zmanjšamo z naslednjim postopkom. Definicijo odvoda v normalni smeri vstavimo v diskretno obliko integrala odvodov v normalni smeri in osnovne rešitve v enačbi (8), ki ga tako preoblikujemo samo v vogalnih točkah podobmočja $M_v = 8$, medtem ko sredinske točke $M_s = 4$ ostanejo nespremenjene

$$\sum_{i=1}^M \{g\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^M = \sum_{i=1}^{M_s} \{g\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^{M_s} + \sum_{i=1}^{M_v} \{g\}^T \left\{ n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right\}^{M_v}.$$

Zaradi zahtevane zveznosti gradienta funkcije polja in linearne neodvisnosti koordinatnih osi smemo kompatibilne robne pogoje (12) v sovpadajočih vogalnih točkah i, j zapisati po koordinatnih oseh

$$(\lambda n_x \frac{\partial u}{\partial x})_i = -(\lambda n_x \frac{\partial u}{\partial x})_j,$$

$$(\lambda n_y \frac{\partial u}{\partial y})_i = -(\lambda n_y \frac{\partial u}{\partial y})_j,$$

V vogalni vozliščni točki podobmočja v notranjosti območja smo tako število neznank zmanjšali iz 5 na 3. Neznanke so: funkcija u_v , odvod $(\partial u / \partial x)_v$ in $(\partial u / \partial y)_v$. Na razpolago pa imamo 8 enačb (11), ki jih zapišemo z novimi spremenljivkami kot

$$e_i u_v - \frac{\lambda_j}{\lambda_i} g_i (n_{x,i} \frac{\partial u}{\partial x} + n_{y,i} \frac{\partial u}{\partial y}) = f_i \quad (13)$$

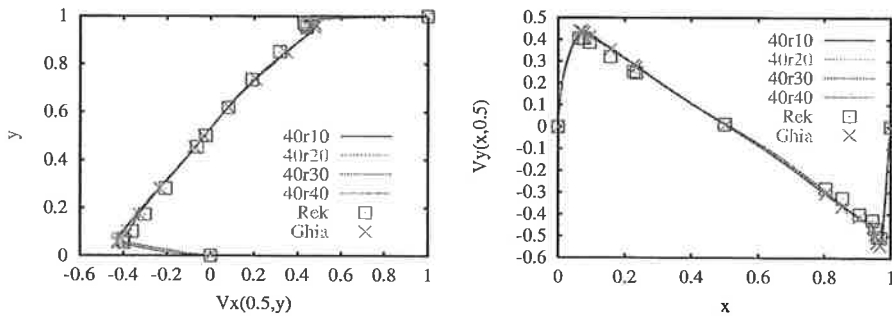
za vse dotikajoče vogalne točke $i = 1, 2, \dots, 8$. Indeks j označuje številko nasprotnega oziroma ujemajočega vozlišča. V primeru zveznosti difuzivnosti je vrednost λ_j / λ_i enaka 1 in smemo ta člen izpustiti. Nastali sistem enačb ima več enačb kot neznank, ki ga rešimo v smislu najmanjših kvadratov, Ramšak in Škerget 2000 [??].

Diskretizirana integralna enačba podobmočja v notranjosti območja en. (8) za središčne M_s in vogalne točke M_v se končno glasi

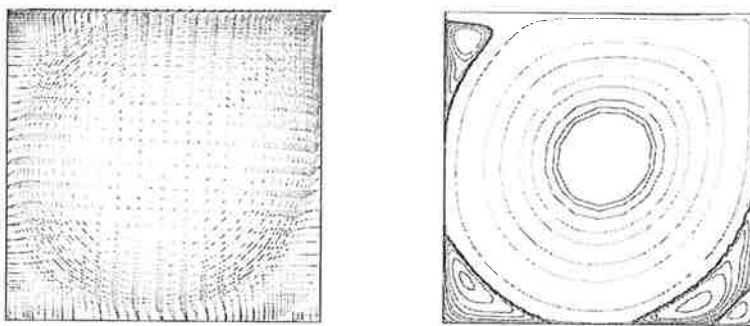
$$\sum_{i=1}^N \{e\}^T \{u\}^N - \sum_{i=1}^{M_s} \{g\}^T \left\{ \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^{M_s} - \sum_{i=1}^{M_v} \{g\}^T \left\{ \frac{\lambda_j}{\lambda_i} n_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right\}^{M_v} = f. \quad (14)$$

3 Gnani tok v zaprti kotalnji za $Re = 10000$

Kot primer delovanja predstavljene numerične formulacije uporabimo mrežo z 40×40 podobmočji in simetričnimi zgoštvami 10, 20, 30 in 40. Osnovna rešitev je Helmholtzeva, časovni korak 0.1 in podrelaksacija vrtničnosti 0.5. Primerjava navpičnega in vodoravnega profila hitrosti na sliki 3 je narejena z referenčnimi rezultati avtorja Ghie 1982 [1] kot tudi MRE rezultati avtorja Reka 1993 [3], ki je uporabil podobno mrežo z zgoštvijo 10. Rezultati pričujočega dela so praktično neodvisni od faktorja zgoštvitve in se bolje ujemajo z referenčno rešitvijo kot rezultati avtorja Reka.



Slika 3: Gnani tok v kotanji $Re = 10000$. Primerjava rezultatov MRE in Ghia ter Rek za mreže 40×40 horizontalna hitrost pri $x = 0.5$ (levo) in vertikalna hitrost pri $y = 0.5$ (desno).



Slika 4: Gnani tok v kotanji $Re = 10000$. Vektorji hitrosti (levo) in tokovnice (desno).

4 Zaključek

Pričujoča diskretizacija z zveznimi elementi predstavlja nadgradnjo mešanih elementov. V primerjavi z mešanimi elementi je natančnejša in stabilnejša, saj smo z mešanimi elementi uspeli izračunati primer toka v gnani kotanji le do vrednosti Reynoldsovega števila 5000, z zveznimi elementi pa do 10000. Dodaten dokaz stabilnosti je tudi Helmholtzova osnovna rešitev, ki je neodvisna od hitrosti, pa kljub temu konvergira za konvektivno dominante primere.

Literatura

[1] Ghia, U., Ghia, K.N. in Shin, C.T.. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *J. Com. Phys.*, 1982, 48, 387-411.

[2] Ramšak, M. in Škerget, L.: Mixed Boundary Elements for laminar flows. *Int. Jour. Numer. Meth. Fluids*, 31, 1999, 861-877

[3] Rek Z.: Robno-območna integralska metoda dinamike turbulentnega toka tekočin. *Doktorska disertacija*. Univerza v Mariboru, 1993

[4] Škerget, L., Hriberšek & Kuhn: Computational Fluid Dynamics by Boundary-Domain Integral Method. *Int. Jour. Numer. Meth. Fluids*, 46, 1291-1311, 1999

UČINKOVITE METODE ZA REŠEVANJE NELINEARNE ENAČBE

Jože Petrišič¹ in Franc Kosel²

EFFICIENT METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

POVZETEK

V inženirskih analizah pogosto naletimo na matematični model, ki zahteva rešitev nelinearne enačbe. V prispevku smo podali več razredov iterativnih formul za približno računanje enostavnega korena nelinearne enačbe. Definirali smo red metode in njeno učinkovitost ter na osnovi kriterija učinkovitosti primerjali metode med seboj. Na osnovi numeričnih eksperimentov in znanih matematičnih analiz metod smo navedli razloge zakaj, presenetljivo, v računski praksi prevladujejo iterativne metode nizkih redov in enostavnih oblik.

ABSTRACT

In engineering analysis mathematical models that require the solution of nonlinear equations are quite common. The contribution presents several classes of iterative formulas for approximate computation of a simple root of a nonlinear equation. The order of the method and its efficiency were defined, and on the basis of the efficiency criterion the methods were then compared. On the grounds of numerical experiments and known mathematical analyses of the methods some reasons are given why, quite unexpectedly, in computational practice iterative methods of lower order and simple shapes are the prevailing ones.

1. UVOD

Na problem reševanja nelinearne enačbe naletimo pri študiju problemov iz vseh področij tehnike. Pri enostavnejših nalogah iz dinamike in stabilnosti moramo rešiti algebrasko enač-

¹izr. prof. dr. Jože Petrišič, univ. dipl. inž, ²prof. dr. Franc Kosel, univ. dipl. inž, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

bo, pri zahtevnejših pa splošnejšo nelinearno enačbo. Pri reševanju diferencialnih enačb moramo pogosto rešiti še enačbo. Nelinearne enačbe so redko analitično rešljive, zato je numerično računanje korenov nelinearne enačbe $f(x) = 0$ ena od temeljnih nalog numeričnih metod. Običajno enačbi $f(x) = 0$ priredimo funkcijo $y = f(x)$ in iščemo numerični približek ničle realne funkcije f realnega argumenta, računamo torej tako število $\alpha \in R$, da je $f(\alpha) = 0$. Omejili se bomo na računanje enostavnih ničel. Metode za računanje numeričnega približka ničle funkcije so navadno iterativne. Skušamo generirati takšno zaporedje vrednosti $x^{(i)}$, da zanj velja

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)} = \alpha \quad (1)$$

Če obstaja za zaporedje (1) takšna pozitivna konstanta C , da velja

$$\frac{|x^{(i+1)} - \alpha|}{|x^{(i)} - \alpha|^p} \leq C \quad (2)$$

za vsak $i \geq i_0$ in je i_0 primerno veliko celo število, pravimo, da je metoda reda p , $p \geq 1$. Če je $p = 1$, govorimo o linearni konvergenci. Če pa je $p > 1$, je konvergenca zaporedja superlinearna. Zanimale nas bodo predvsem supelinearne metode.

Zaporedje v formuli (1) računamo s pomočjo iteracijske formule (IF), ki ima obliko

$$x_{i+1} = \Phi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}; x_{i-k-1}, \dots, x_{i-n}), \quad (3)$$

kjer računamo novo informacijo pri $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$, pri $x_{i-k-1}, \dots, x_{i-n}$ pa uporabimo informacijo, izračunano na predhodnih korakih. Zato imenujemo IF (3) večtočkovno IF s spominom. Newtonova metoda spada v razred enotočkovnih IF brez spomina, sekantna metoda pa v razred enotočkovnih IF s spominom in ima obliko $x_{i+1} = \Phi(x_i; x_{i-1})$. IF s spominom lahko uporabimo šele, ko imamo izračunanih vsaj prvih $n - k$ približkov.

IF tipa (3) se ločijo med seboj po zahtevnosti d . Z d bomo označevali število vseh funkcijskih vrednosti in vseh odvodov, ki jih moramo na vsakem koraku iteracije izračunati na novo.

Če delimo red IF p z zahtevnostjo d , dobimo učinkovitost IF E

$$E = \frac{p}{d} \quad (4)$$

Učinkovitost IF je primerna mera za porabo računalniškega časa. Če IF visokega reda zahteva veliko izračunov funkcijskih vrednosti ali njenih odvodov, je lahko časovno potratnejša od IF nizkega reda z majhno zahtevnostjo. Pri Newtonovi IF je red $p = 2$, zahtevnost $d = 2$ in zato učinkovitost $E = 1$. Sekantna metoda pa ima red $p = 1.62$, zahtevnost $d = 1$ in učinkovitost $E = 1.62$. IF, ki imajo učinkovitost večjo od 1, imenujemo učinkovitejše.

Enotočkovne IF poljubnega reda lahko izpeljemo zelo preprosto. Naj ima IF $\phi_1(x)$ red p_1 in IF $\phi_2(x)$ red p_2 , potem je IF, ki jo dobimo s komponiranjem $\phi_2(\phi_1(x))$, reda $p_1 p_2$. Ker se zahtevnosti tudi množijo, se učinkovitosti tudi.

2. GENERIRANJE ITERACIJSKIH FORMUL

Predpostavimo, da smo izračunali $n + 1$ približkov ničle, $x_k^{(m_k)}$, $k = i, i - 1, \dots, i - n$. Za vsak približek $x_k^{(m_k)}$ smo izračunali funkcijsko vrednost in m_k zaporednih odvodov, kar nakažemo z zgornjim indeksom. Novi približek x_{i+1} lahko izračunamo tako, da položimo skozi točke $(x_k, f(x_k))$, $k = i, i - 1, \dots, i - n$ interpolacijski polinom, ki ima za vsak x_k vsaj m_k odvodov, enakih odvodom funkcije f . Nato izračunamo ničlo interpolacijskega polinoma, ki je boljši približek x_{i+1} ničle funkcije f .

Interpolacijski polinom bomo konstruirali v obliki Newtonovega interpolacijskega polinoma (NIP) tako, da upoštevamo vse izračunane približke ničle, $n = i$. Računska shema za računanje koeficientov NIP je znana^[3]. V prispevku se bomo držali tam vpeljanih oznak. Ker imamo v našem primeru pri x_k poleg funkcijskih vrednosti znanih še m_k odvodov $f^{(l)}(x_k) = f_k^{(l)}$, $l = 1, \dots, m_k$, je treba računsko shemo za računanje koeficientov NIP dopolniti tako, da argument x_k v tabeli nastopa $m_k + 1$ krat^[6]. Ko računamo elemente računske sheme, in bi morali deliti z nič, deljenja ne izvedemo, ampak postavimo na ustrezno mesto s primernim faktorjem pomnožen odvod. Del modificirane računske sheme je dan v tabeli (1). Številco

x_0	$f_0 = f_{0,0}$	$f'_0 = f_{0,1}$	$\frac{1}{2}f''_0 = f_{0,2}$
x_0	$f_0 = f_{1,0}$	$f'_0 = f_{1,1}$
x_0	$f_0 = f_{2,0}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_k	$f_k = f_{\kappa,0}$	$f'_k = f_{\kappa,1}$	$\frac{1}{2}f''_k = f_{\kappa,2}$...	$\frac{1}{m_k!}f_k^{(m_k)} = f_{\kappa,m_k}$...
x_k	$f_k = f_{\kappa+1,0}$	$f'_k = f_{\kappa+1,1}$	$\frac{1}{2}f''_k = f_{\kappa+1,2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_k	$f_k = f_{\kappa+m_k,0}$	$f_{\kappa+m_k,1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
...	...	$f_{\mu-1,1}$				
x_i	$y_i = f_{\mu,0}$					

Table 1: Računanje koeficientov NIP s predpisanimi odvodi v interpolacijskih točkah

vrstic je $\mu = m_0 + \dots + m_i + i + 1$ in $\kappa = m_0 + \dots + m_{k-1} + k + 1$. Če izračunamo linearni NIP ($n = 0$, $m_0 = 1$), lahko izpeljemo Newtonovo metodo. Z linearnim NIP ($n = 1$, $m_0 = m_1 = 0$) dobimo sekantno metodo. Od manj znanih metod lahko izpeljemo Mullerjevo metodo^{[4],[5]}, ($n = 2$, $m_0 = m_1 = m_2 = 0$), kjer pa že naletimo na težave. Kvadratni polinom ima namreč dva korena, ki sta lahko kompleksna. Mullerjeva metoda ima red $p = 1.84$. Na vsakem koraku moramo izračunati na novo eno funkcijsko vrednost, zato ima učinkovitost $E = 1.84$.

Ker hitro naletimo na NIP visoke stopnje, je predlagana metoda računanja boljšega približka x_{i+1} ničle funkcije f širše neuporabna. Ničle NIP moramo računati iterativno in povrh so lahko kompleksne. Polinom ima lahko veliko realnih ničel. Katero bomo izbrali za naslednji približek ničle?

Uporabimo idejo inverzne interpolacije. Teoretično lahko iz zveze $y = f(x)$ izrazimo x in dobimo enakovredno zvezo $x = F(y)$, kjer smo z F označili inverzno funkcijo k funkciji f . Očitno je $\alpha = F(0)$. Zato lahko dobimo naslednji približek ničle x_{i+1} kot vrednost NIP za inverzno funkcijo $F(y)$ pri $y = 0$. Tabela funkcije F lahko dobimo tako, da upoštevamo, da je y_k argument in x_k vrednost inverzne funkcije F . Na srečo se l -ti odvod inverzne funkcije F analitično izraža s prvimi l odvodi funkcije f . Izpeljali smo formule za prve tri odvode inverzne funkcije, ki so

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad F''(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}, \quad F'''(y) = \frac{3f''(x)^2 - f'(x)f'''(x)}{f'(x)^5} \quad (5)$$

Izrazi za višje odvode inverzne funkcije so nekoliko bolj komplicirani.

Če imamo danih m_k , $k = 0, \dots, i$ odvodov funkcije f , lahko dobimo računsko shemo za računanje koeficientov NIP tabelirane inverzne funkcije (y_k, x_k) , $k = 0, \dots, i$ tako, da v računski shemi, tabela (1), zamenjamo prvi in drugi stolpec, odvode $f^{(l)}$ pa zamenjamo z odvodi inverzne funkcije $F^{(l)}$, ki jih izračunamo po formulah (5).

3. ENOTOČKOVNE ITERACIJSKE FORMULE BREZ SPOMINA

Enotočkovno IF brez spomina dobimo tako, da izračunamo koeficiente NIP po tabeli (2).

y_i	$x_i = f_{0,0}$	$F'_i = f_{0,1}$	$\frac{1}{2}F''_i = f_{0,2}$	$\frac{1}{6}F'''_i = f_{0,3}$...
y_i	$x_i = f_{1,0}$	$F'_i = f_{1,1}$	$\frac{1}{2}F''_i = f_{1,2}$...	
y_i	$x_i = f_{2,0}$	$F'_i = f_{2,1}$...		
y_i	$x_i = f_{3,0}$...			
...	...				

Table 2: Računanje koeficientov NIP za enotočkovno IF brez spomina

Dobimo NIP

$$P(y) = x_i + (y - y_i)F'(y_i) + \frac{1}{2}(y - y_i)^2F''(y_i) + \frac{1}{6}(y - y_i)^3F'''(y_i) + \dots \quad (6)$$

Če upoštevamo, da je $x_{i+1} = P(0)$, $y_i = f(x_i)$ in formule (5), dobimo v primeru linearne interpolacije Newtonovo IF. Če izberemo kvadratno interpolacijo, dobimo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{f(x_i)^2 f''(x_i)}{2f'(x_i)^3} \quad (7)$$

Iteracijska formula (7) je reda $p = 3$. Če upoštevamo, da je blizu ničle $\frac{f(x_i)f''(x_i)}{2f'(x_i)^2}$ majhna vrednost, dobimo iz zgornje formule znano Halleyevo IF

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - \frac{f''(x_i)f(x_i)}{2f'^2(x_i)}} \quad (8)$$

in končno lahko zapišemo IF četrtega reda

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{f(x_i)^2 f''(x_i)}{2f'(x_i)^3} - \frac{3f(x_i)^3 f''(x_i)^2 - f(x_i)^3 f'(x_i) f'''(x_i)}{6f'(x_i)^5} \quad (9)$$

Če upoštevamo zahtevnost zgornjih IF, vidimo, da je njihova učinkovitost 1.

Kot vidimo, lahko vedno izpeljemo IF poljubnega reda, vendar je njena učinkovitost kvečjemu 1, torej $E \leq 1$. IF reda p vedno vsebuje vsaj $p - 1$ odvodov. Ker je učinkovitost enotočkovnih IF kvečjemu 1, jih nima smisla komponirati med seboj, ker dobimo lahko še manj učinkovite IF.

4. ENOTOČKOVNE ITERACIJSKE FORMULE S SPOMINOM

V predhodnem razdelku smo ugotovili, da med enotočkovnimi IF ne moremo najti zelo učinkovitih IF. Pričakujemo lahko, da bodo IF s spominom bolj učinkovite, saj lahko poleg informacij pri približku x_i uporabijo že znane informacije pri $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-n}$. Kako izpeljemo IF s spominom, smo opisali v drugem razdelku. Izbiramo lahko število točk n , ki jih upoštevamo v IF, $n \geq 1$. Za vsak približek $x_{i-k}, k = 0, \dots, n$ si lahko izberemo število odvodov m_k , ki jih upoštevamo v IF.

Izberimo najbolj preprost primer $n = 1, m_0 = 0, m_1 = 0$. Inverzna interpolacija nam da linearni NIP

$$P(y) = x_i + (y - y_i) \frac{x_{i-1} - x_i}{y_{i-1} - y_i} \quad (10)$$

Ker je $x_{i+1} = P(0)$, nam da linearna inverzna interpolacija sekantno metodo, ki ima red konvergence 1.62 in $E = \frac{p}{m_0} = 1.62$. Trotočkovno IF dobimo pri $n = 1, m_0 = 0, m_1 = 0, m_2 = 0$. Koeficiente interpolacijskega polinoma inverzne funkcije dobimo takole

y_i	$x_i = f_{0,0}$	$f_{0,1}$	$f_{0,2}$
y_{i-1}	$x_{i-1} = f_{1,0}$	$f_{1,1}$	
y_{i-2}	$x_{i-2} = f_{2,0}$		

in IF je

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) f_{0,1} + f(x_i) f(x_{i-1}) f_{0,2} \quad (11)$$

ki ima red 1.84, zahtevnost 1 in zato učinkovitost 1.84.

Nima smisla, da bi spreminjali zahtevnost IF med njeno uporabo. Zato predpostavimo, da moramo na vsakem koraku iteracije izračunati funkcijsko vrednost in m_i odvodov, $d = m_i + 1$. IF naj bo s spominom preko n približkov $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-n}$. Njen red je pozitiven koren enačbe^[1]

$$t^{n+1} - d \sum_{j=0}^n t^j = 0 \quad (12)$$

Po Descartovem pravilu ima enačba (12) en sam pozitiven realni koren p , za katerega velja ocena $d < p < d + 1$. Če izberemo dotočkovno IF s spominom, $n = 1$, in pri vsakem približku izračunamo funkcijsko vrednost in odvod, $d = 2$, je njen red pozitiven koren enačbe $t^2 - 2t - 2 = 0$, torej $p = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$ in učinkovitost $E \approx 1.37$. Formule (5) omogočajo računanje z IF s spominom zahtevnosti do $d = 4$. Izberimo trotočkovno IF, $n = 2$ in $d = 4$. Če izračunamo pozitiven koren enačbe $t^3 - 4(t^2 + t + 1) = 0$, dobimo red $p \approx 4.97$ in učinkovitost $E = 1.24$. Z enotočkovno IF s spominom dobimo učinkovitejšo metodo. Z večanjem spomina se učinkovitost IF zmanjšuje. Če upoštevamo še kompleksnost IF z veliko spomina in ocenimo, da rabimo za njen izračun toliko računskih operacij kot za eno funkcijsko vrednost, pade učinkovitost IF pod 1.

5. VEČTOČKOVNE ITERACIJSKE FORMULE

Večtočkovne iteracijske formule uporabljajo novo informacijo v več točkah. Ni znanih teoretičnih omejitev za učinkovitost večtočkovnih iteracijskih formul, vendar so le redke med njimi učinkovitejše.

Interpolacijsko nalogo posplošimo. Inverzno funkcijo $x = F(y)$ nadomestimo s funkcijo $x = U(t)$, ki naj bo oblike $U(t) = F(y) + (t - y) \sum_{i=1}^N \alpha_i F'(y + \beta_i(t - y))$. Očitno je $U(y) = F(y)$. Zahtevamo še, da imata funkciji $U(y)$ in $F(y)$ prvih N odvodov enakih. Zaporedoma izenačimo $\frac{d^l U(t)}{dt^l} \Big|_{t=y}$ in $F^{(l)}(y)$, $l = 1, 2, \dots, n$. Dobimo sistem N linearnih enačb

$$l \sum_{i=0}^N \alpha_i \beta_i^{l-1} = 1, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

kjer si lahko N med seboj različnih vrednosti β_i izberemo poljubno. Naj bo $N = 2$, $\beta_1 = 0$ in $U(t) = F(y) + (t - y)(a_1 F'(y) + a_2 F'(y + \beta_2(t - y)))$. Koefficiente izračunamo iz sistema enačb $a_1 + a_2 = 1$ in $2\beta_2 a_2 = 1$. Če je $\beta_2 = \frac{1}{2}$, je $a_1 = 0$ in $a_2 = 1$. Ker je $U(0) = x_{i+1}$, dobimo IF

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i - \frac{f(x_i)}{2f'(x_i)})} \quad (14)$$

kjer smo upoštevali definicijo inverzne funkcije in približek $\alpha - x_i \approx x_{i+1} - x_i = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$. Zanimivo IF dobimo v primeru $\beta_2 = 1$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{2} \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + \frac{f(x_i)}{f'(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)})} \right) \quad (15)$$

Formuli (14) in (15) sta tretjega reda z zahtevnostjo $d = 3$, zato je njuna učinkovitost $E = 1$.

Tudi s komponiranjem IF lahko dobimo večtočkovne IF višjega reda. Če iz približka x_i najprej izračunamo pomožni približek z_i po Newtonovi metodi in nato izračunamo boljši približek x_{i+1} tako, da poiščemo presečišče sekante skozi točki $(x_i, f(x_i))$ in $(z_i, f(z_i))$ z osjo x , dobimo IF

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \frac{f(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)})}{(f(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}) - f(x_i))} \quad (16)$$

Formula je tretjega reda. Če pa položimo sekanto skozi točki $(x_i, \frac{1}{2}f(x_i))$ in $(z_i, f(z_i))$, lahko izračunamo njeno presečišče x_{i+1} z osjo x iz razmerja $\frac{f(z_i)}{x_{i+1}-z_i} = \frac{\frac{1}{2}f(x_i)}{x_{i+1}-\frac{1}{2}(z_i+x_i)}$ in dobimo iteracijsko formulo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \frac{f(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)})}{(2f(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}) - f(x_i))} \quad (17)$$

Ostrowski je dokazal, da je IF (17) četrtega reda. Ker je njena zahtevnost $d = 3$, je učinkovitejša z učinkovitostjo $E = \frac{4}{3}$.

Učinkovitejšo dvotočkovno IF z enim spominom lahko zelo enostavno dobimo s komponiranjem dveh sekantnih formul. Ker je red ene sekantne IF 1.62, je kompozitum dveh formul IF reda $(1.62)^2 = 2.62$ z zahtevnostjo 2 in učinkovitostjo $E = 1.31$.

Učinkovitejšo IF dobimo tudi tako, da na poseben način ocenimo odvod v Newtonovi IF. Začnemo z lahko tudi z zelo grobo oceno odvoda $f'_0 = \Gamma_0$ in izračunamo koeficient $\beta_i = \frac{-1}{\Gamma_{i-1}}$, nato ocenimo odvod po formuli $\Gamma_i = \frac{f(x_i + \beta_i f(x_i)) - f(x_i)}{\beta_i f(x_i)}$ in končno izračunamo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\Gamma_i} \quad (18)$$

Metoda ima red $p = 2.41$ in učinkovitost $E = 1.21$, ki je večja od učinkovitosti Newtonove IF.

V knjižnicah računalniških programov rešujejo nelinearno enačbo z Newtonovo metodo, sekantno metodo ali bisekcijsko metodo. V Numerical Recipes^[4] in IMS Library so uporabili Brentov^[6] algoritem, ki temelji na bisekcijski metodi, kjer je koren vedno zaprt v nek interval. Konvergenca metode pa pospešijo tako, da uporabijo kvadratno ali linearno inverzno interpolacijo ($n=1, n=2, d=0$). Če dobijo z inverzno interpolacijo širši interval kot po enem koraku bisekcijske metode, upoštevajo bisekcijsko metodo.

V zbirki numeričnih algoritmov^[6] je zanimiva Pegasusova metoda in njene modifikacije. Izhajajo iz metode regula falsi, kjer je ničla zaprta v začetni interval $[x_0, x_1]$ in v vseh nadaljnjih korakih je zaprta v interval $[x_{i-1}, x_i]$. Postavijo $f_0^* = f(x_0)$ in $f_1^* = f(x_1)$ in začnejo izvajati iteracije $i = 1, 2, \dots$. Izračunajo sekanto skozi točki (x_{i-1}, f_{i-1}^*) in (x_i, f_i^*) . Njeno presečišče z osjo x je x_{i+1} in izračunajo $f(x_{i+1})$. Če je $f_i^* f(x_{i+1}) > 0$, je ničla v intervalu $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Če bi bila funkcijska vrednost $f(x_{i-1})$ manjša, bi bilo presečišče sekante z osjo x bližje približku x_{i-1} . Zato pri računanju sekante na naslednjem koraku vzamejo zmanjšano funkcijsko vrednost

$$x_i = x_{i-1}, \quad f_{i+1}^* = f(x_{i+1}), \quad f_i^* = f_{i-1}^* \left| \frac{f_i^*}{f_i^* + f_{i+1}^*} \right|$$

Če pa je $f_i^* f(x_{i+1}) < 0$, izvedejo korak sekantne metode pri $f_{i+1}^* = f(x_{i+1})$. Red konvergence opisane metode je 1.7. Ker je njena zahtevnost 1, je njena učinkovitost 1.7.

6. PRIMERJAVA ITERACIJSKIH FORMUL

Pri računanju ničle funkcije nas zanima koliko funkcijskih vrednosti in odvodov rabimo, da izračunamo ničlo po izbrani metodi na predpisano število cifer. To število označimo z D in imenujemo celotna zahtevnost. Odvisno je od funkcije in začetnih približkov, vendar nam vseeno veliko pove o dejanski učinkovitosti IF. Metode smo testirali na nelinearni enačbi $x^2 + \sin(x) = 1$ in izbrali začetni približek $x_0 = 0.5$ in po potrebi $x_1 = 0.7$. Koren smo računali v dvojni natančnosti na 14 zanesljivih cifer. V naslednji tabeli so podane značilnosti nekaterih numeričnih metod in njihova celotna zahtevnost v primeru obravnavane enačbe.

metoda	red p	zahtevnost d	učinkovitost E	celotna zah. D	opomba
bisekcijska	1	1	1	47	
regula falsi	1	1	1	11	
sekantna	1.6	1	1.6	6	
Newtonova	2	2	1	10	
Pegasusova	1.7	1	1.7	6	
Brentova	≥ 1	1	≥ 1	8	
Formula (7)	3	3	1	9	
Halleyeva	3	3	1	12	
Formula (9)	4	4	1	12	
Formula (11)	1.84	1	1.84	5	$n = 1, 2, 2, 2$
Formula (14)	3	3	1	9	
Formula (15)	3	3	1	9	
Formula (17)	4	3	$\frac{4}{3}$	6	
Formula (18)	2.4	2	1.2	6	

7. ZAKLJUČEK

V prispevku smo pokazali, da lahko tvorimo veliko različnih IF visokih redov. Ugotovili pa smo, da visoki red metode ne pove nič o njeni učinkovitosti. Učinkovitejše IF lahko najdemo samo med IF s spominom in med večtočkovnimi IF, med njimi priporočamo zaprte metode, to je takšne, kjer je ničla v nekem intervalu, ki se med iteracijami oži.

8. LITERATURA

1. Traub, J. F., Iterative Methods for the solution of equations, Prentice-Hall, 1964
2. Quarteroni, A. et al., Numerical Mathematics, Springer-Verlag, 2000
3. Petrišič, J., Interpolacija, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1999
4. Press, W. H., Numerical recipes in fortran, Cambridge, University Press, 1992
5. Engeln-Millgers, G., Numerik-Algorithmen, 8. Auflage, 1996
6. Gautschi, W., Numerical Analysis, Birkhuser, 1997
7. Kuster R., Hitrejše numerične metode reševanja nelinearnih enačb, Diplomsko delo, 2001

GEOMETRIJSKA OPTIMIZACIJA PRI PROCESU ZVRNITVE KONZOLE

Franc Kosel¹ in Radovan Dražumerič²

OPTIMIZATION OF GEOMETRY FOR LATERAL BUCKLING PROCESS OF A CANTILEVER BEAM

POVZETEK

Proces zvrnitve tanke elastične konzole je obravnavan po teoriji velikih premikov in je opisan s sistemom nelinearnih diferencialnih enačb. Na osnovi matematičnega modela procesa zvrnitve je izvedena geometrijska optimizacija konzole z uporabo variacijskega računa. Prikazana je primerjava med obnašanjem konzole z optimalno geometrijo in konzole konstantnega prečnega prereza v nadkritičnem področju. Iz primerjave je razvidno, da ima konzola z optimalno geometrijo poleg višje kritične sile zvrnitve tudi večjo nosilnost v nadkritičnem področju.

ABSTRACT

The lateral buckling process of a slender elastic cantilever beam is considered by large displacement theory and described with a system of non – linear differential equations. Based on mathematical model of the lateral buckling process optimal geometry of a cantilever beam is obtained with use of a calculus of variation. In the postbuckling area comparison between the results for an optimal geometry beam and the results for a beam with constant cross – sectional area is shown. Comparison shows that an optimal geometry beam, beside higher buckling load, also has a higher postbuckling carrying capacity.

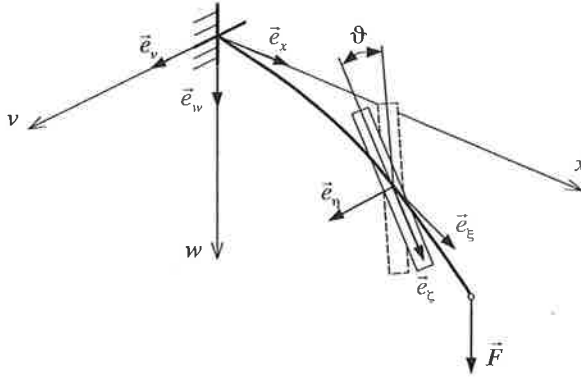
1. UVOD

Pri problemu bočne stabilnosti (zvrnitve) se upogibno obremenjena konzola v mejnem stanju, pod vplivom poljubno majhne motnje, deformira prostorsko: pojavita se poševni upogib in torzija. Ker ta prehod povzroči velike premike in obremenitve konzole, je potrebno pri postopku dimenzioniranja zagotoviti, da obremenitev ne doseže kritične vrednosti. Zato je v primerih vitkih elementov, kjer smo omejeni z mejo stabilnosti, nosilnost gradiva slabo izkoriščena. Eden od načinov zvišanja meje stabilnosti in s tem izkoriščenosti nosilnosti gradiva elementa je geometrijska optimizacija. V prispevku je predstavljen analitični pristop k optimizaciji poteka debeline tanke elastične konzole pravokotnega prečnega prereza. Optimizacija je izvedena na podlagi matematičnega modela, ki popiše proces zvrnitve po teoriji velikih premikov.

¹prof. dr. Franc Kosel, univ. dipl. inž., ²Radovan Dražumerič, univ. dipl. inž.
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

2. MATEMATIČNO – FIZIKALNI MODEL PROCESA ZVRNITVE KONZOLE

Model je izdelan po teoriji velikih premikov ob predpostavki, da napetosti, ki se pojavijo v obremenjeni konzoli, ležijo v elastičnem področju.



Slika 1: Elastična črta konzole v deformiranem stanju

Na sliki 1 je ponazorjena zvrnjena konzola. Prostorsko deformacijsko stanje konzole je določeno s tremi funkcijami: prečni povos nevtralne osi $v(x)$, vertikalni povos nevtralne osi $w(x)$ in zasuk prečnega prereza $\vartheta(x)$. Spremenljivke (x, v, w) , ki so uporabljene za opis lege elastične črte, so brezdimenzijske, izražene so na enoto dolžine elastične črte l . Položaj prečnega prereza v prostoru je popisan z enotskimi vektorji pomičnega koordinatnega sistema: vektor tangente elastične črte $\vec{e}_\xi(x) = (e_{\xi 1}, e_{\xi 2}, e_{\xi 3})$, vektor simetrale prereza v smeri debeline $\vec{e}_\eta(x) = (e_{\eta 1}, e_{\eta 2}, e_{\eta 3})$ in vektor simetrale prereza v smeri višine $\vec{e}_\zeta(x) = (e_{\zeta 1}, e_{\zeta 2}, e_{\zeta 3})$. Zveza med pomičnim in nepomičnim koordinatnim sistemom, ki jo dobimo s superpozicijo poševnega upogiba in torzije, je podana v [3].

Pri popisu napetostno – deformacijskega stanja so upoštevani samo učinki notranjih momentov v konzoli. Matematično – fizikalni model procesa zvrnitve temelji na ravnotežju med zunanji in notranji momenti, ki so posledica spremembe deformacijskega stanja konzole:

$$\frac{d\vartheta}{ds}(x) = \frac{M_\xi(x)}{GI_t(x)}, \quad \frac{1}{\rho_\eta}(x) = 0, \quad \frac{1}{\rho_\zeta}(x) = \frac{M_\zeta(x)}{EI_\zeta(x)} \quad (1)$$

Odvod zasuka prereza po parametru ločne dolžine je proporcionalen torzijskemu momentu, fleksijska ukrivljenost elastične črte v določeni ravnini pa je proporcionalna ustreznemu upogibnemu momentu. Ker je konzola tanka, velja $I_\eta \gg I_\zeta$, zato upogib v ravnini, ki jo določa vektor \vec{e}_η , zanemarimo. V enačbah (1) predstavlja G strižni modul, E modul elastičnosti, I_t torzijski vztrajnostni moment in I_ζ manjšega od obeh aksialnih vztrajnostnih momentov prereza.

V sistem enačb (1) vstavimo izraze za notranje momente, pripadajoče deformacijske veličine, lastnosti gradiva in karakteristike pravokotnega prečnega prereza [3], ga preuredimo in zapišemo sistem nelinearnih diferencialnih enačb v končni brezdimenzijski obliki:

$$\begin{aligned}\vartheta' &= \frac{F}{t^3} \frac{4.013\sqrt{2(1+\nu)}}{2} [(v_p - \nu)e_{\xi 1} - (x^* - x)e_{\xi 2}] \sqrt{1 + v'^2 + w'^2} \\ v'' &= \frac{F}{t^3} \frac{4.013 \cdot 2}{\sqrt{2(1+\nu)}} [(v_p - \nu)e_{\zeta 1} - (x^* - x)e_{\zeta 2}] \sqrt{1 + v'^2 + w'^2}^3 e_{\zeta 3} \\ w'' &= -\frac{F}{t^3} \frac{4.013 \cdot 2}{\sqrt{2(1+\nu)}} [(v_p - \nu)e_{\zeta 1} - (x^* - x)e_{\zeta 2}] \sqrt{1 + v'^2 + w'^2}^3 e_{\zeta 2}\end{aligned}\quad (2)$$

Dobili smo matematično – fizikalni model, ki popisuje proces zvrnitve tanke elastične konzole pravokotnega prečnega prereza spremenljive debeline po teoriji velikih premikov. V zapisu (2) predstavlja t relativno debelino konzole – razmerje med dejansko debelino in debelino referenčne konzole konstantnega prereza t_0 , F je relativna sila – razmerje med dejansko silo in kritično silo zvrnitve referenčne konzole F_0 [1]: $F_0 = \frac{4.013}{l^2} \sqrt{EGI_{\zeta 0} I_{t 0}}$, ν pa Poissonov količnik gradiva.

Vrednost spremenljivke na prostem koncu konzole x^* je določena preko izraza za dolžino elastične

črte v normirani obliki: $\int_0^{x^*} \sqrt{1 + v'^2 + w'^2} dx = 1$, oznaka v_p pa pomeni prečni povos na prostem

koncu. Za sistem enačb (2) veljajo robni pogoji: $\vartheta(0) = 0, v(0) = 0, w(0) = 0, v'(0) = 0, w'(0) = 0$.

3. GEOMETRIJSKA OPTIMIZACIJA KONZOLE

Za konzolo pravokotnega prečnega prereza spremenljive debeline želimo določiti potek debeline po dolžini konzole, pri katerem je kritična sila zvrnitve največja ob geometrijskem pogoju, da je volumen optimirane konzole enak volumnu referenčne konzole konstantne debeline.

V poljubno majhni okolici mejnega stanja, ki se pojavi, ko obremenitev doseže kritično vrednost F_k , so tudi premiki konzole ustrezno majhni. Zato lahko pri popisu dogajanja v mejnem stanju nadomestimo funkcije premikov z diferenciali – matematični model zvrnitve (2) v mejnem stanju lineariziramo. Lineariziran model zapišemo z novo spremenljivko $u = 1 - x$, ($x^* \approx 1$):

$$\begin{aligned}\vartheta' &= -\frac{F_k}{t^3} \frac{4.013\sqrt{2(1+\nu)}}{2} (v_p - \nu + uv') \\ v'' &= \frac{F_k}{t^3} \frac{4.013 \cdot 2}{\sqrt{2(1+\nu)}} u\vartheta \\ w'' &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

Sistem diferencialnih enačb (3) lahko z odvajanjem prve enačbe in ureditvijo izrazov prevedemo na navadno diferencialno enačbo drugega reda za funkcijo $\vartheta(u)$:

$$t^6 \vartheta'' + 3t^5 t' \vartheta' + F_k^2 \cdot 4.013^2 \cdot u^2 \vartheta = 0 \quad (4)$$

Za zgornjo diferencialno enačbo veljajo robni pogoji: $M_{\xi}(0) = GI_{\xi}(0) \vartheta'(0) = 0, \vartheta(1) = 0$. Prvi robni pogoj je izpolnjen v dveh primerih: $I_1(0) = 0 \Rightarrow t(0) = 0$ ali $\vartheta'(0) = 0$. Izkaže se, da v primeru optimalnega poteka funkcije debeline veljajo robni pogoji: $t(0) = 0$ ($\vartheta'(0) \neq 0$), $\vartheta(1) = 0$. Ker je rešitev tako definirane homogenega robnega problema enoparametrična družina krivulj, funkcijo $\vartheta(u)$ normiramo z dodatnim pogojem: $\vartheta(0) = 1$ (ta pogoj ne vpliva na lastno vrednost problema F_k in na iskani potek funkcije debeline). Poleg robnih pogojev je za funkcijo $t(u)$ predpisan še geometrijski pogoj, ki sledi iz zahteve po konstantnem volumnu in ga v normirani obliki zapišemo:

$$\int_0^1 t(u) du = 1 \quad (5)$$

Na enačbo (4) lahko gledamo na dva načina: linearna diferencialna enačba drugega reda za funkcijo $\vartheta(u)$ ali diferencialna enačba prvega reda za funkcijo $t(u)$. Rešimo diferencialno enačbo za funkcijo $t(u)$ [3] in dobimo izraz:

$$t(u) = \left(F_k^2 \cdot 4.013^2 \cdot 2 \frac{-\int_0^u y^2 \vartheta \vartheta' dy}{\vartheta'^2} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (6)$$

Rešitev vstavimo v pogoj (5) in izrazimo relativno kritično silo

$$F_k = \frac{1}{4.013 \cdot \sqrt{2} \cdot J(\vartheta)} \quad (7)$$

kjer je $J(\vartheta)$ funkcional

$$J(\vartheta) = \int_0^1 \left(\frac{-\int_0^u y^2 \vartheta \vartheta' dy}{\vartheta'^2} \right)^{\frac{1}{6}} du \quad (8)$$

Izraz (7) vstavimo v enačbo (6) in dobimo končni zapis rešitve optimizacijskega problema:

$$t(u) = \frac{\left(\frac{-\int_0^u y^2 \vartheta \vartheta' dy}{\vartheta'^2} \right)^{\frac{1}{6}}}{J(\vartheta)} \quad (9)$$

Relativna kritična sila F_k bo največja v primeru, ko bo vrednost funkcionala $J(\vartheta)$ najmanjša. Zato definiramo variacijski problem: med vsemi, na intervalu $[0,1]$ zveznimi in zvezno odvedljivimi

funkcijami $\vartheta(u)$, ki rešijo dani robni problem, je treba določiti tisto, pri kateri ima funkcional $J(\vartheta)$ minimum.

Variacijski problem je rešen z nastavkom za funkcijo $\vartheta(u)$ v obliki polinoma, ki izpolnjuje predpisane robne pogoje:

$$\vartheta = 1 - u + \sum_{i=1}^n a_i (u^i - u^{i+1}) \quad (10)$$

Z uporabo nastavka (10) pretvorimo funkcional v funkcijo n spremenljivk: $J(\vartheta) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Potrebni pogoj za minimum funkcije n realnih spremenljivk predstavlja sistem n nelinearnih enačb:

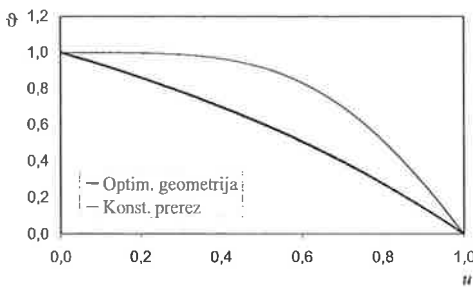
$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

Nelinearen sistem enačb rešimo numerično, z večanjem števila parametrov n funkcional (8) konvergira k minimalni vrednosti. Število parametrov povečujemo, dokler ne dosežemo ustrezne natančnosti rešitve. Minimalno vrednost funkcionala vstavimo v izraz (7) in dobimo maksimalno vrednost relativne kritične sile: $F_{k, \max} = 1.45$, kar pomeni, da je ob danih pogojih kritična sila zvrnitve konzole z optimalnim potekom debeline za 45 % višja od kritične sile zvrnitve konzole konstantne debeline.

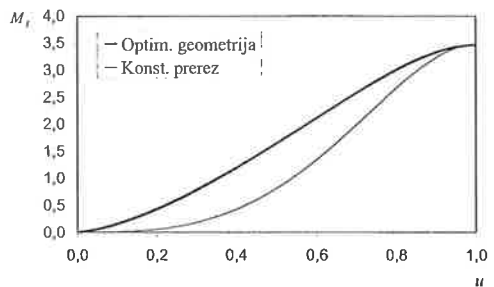
Na sliki 2 je prikazana rešitev variacijskega problema – potek zasuka prereza $\vartheta(u)$ v mejnem stanju, na sliki 3 pa potek brezdimenzijskega torzijskega momenta, ki je definiran z izrazom

$$M_t(u) = \frac{M_\xi(u) l}{\sqrt{EG I_{\zeta 0} I_{t 0}}} = -\frac{2}{\sqrt{2(1+\nu)}} t^3(u) \vartheta'(u) \quad (12)$$

S primerjavo obnašanja konzole z optimalno debelino in konzole s konstantno debelino pri torziji v mejnem stanju (slika 2, 3) lahko ugotovimo, da so kljub višji kritični sili, ob enakih krajiščnih vrednostih zasukov tudi krajiščne vrednosti torzijskih momentov enake.



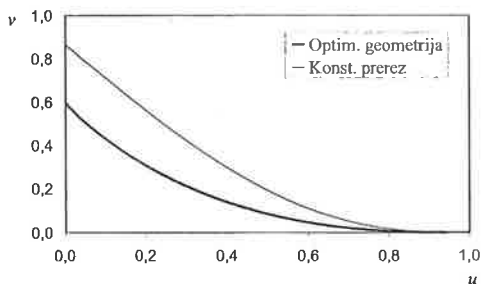
Slika 2: Potek zasuka prereza v mejnem stanju



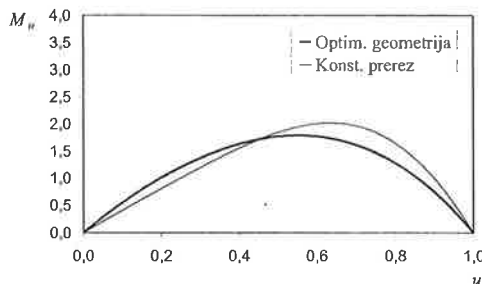
Slika 3: Potek brezdimenzijskega torzijskega momenta v mejnem stanju

Z uporabo rešitve variacijskega problema $\vartheta(u)$ lahko z dvakratno integracijo druge enačbe v sistemu (3) določimo potek prečnega povesa v mejnem stanju, ki je prikazan na sliki 4, na sliki 5 pa je prikazan potek brezdimenzijskega upogibnega momenta, ki je definiran z izrazom

$$M_u(u) = \frac{M_\zeta(u)l}{\sqrt{EGI_{\zeta_0}I_{\zeta_0}}} = F_k \cdot 4.013 \cdot u\vartheta(u) \quad (13)$$



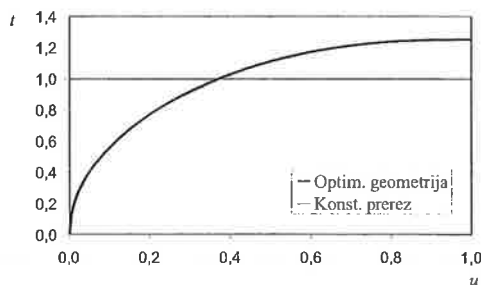
Slika 4: Potek prečnega povesa v mejnem stanju



Slika 5: Potek brezdimenzijskega upogibnega momenta v mejnem stanju

Primerjava obnašanja konzole z optimalno debelino in konzole s konstantno debelino pri prečnem povesu v mejnem stanju (slika 4, 5) pa pokaže, da sta maksimalni vrednosti povesa in upogibnega momenta nižji pri konzoli z optimalnim potekom debeline.

Končni rezultat geometrijske optimizacije – funkcijo relativne debeline $t(u)$ (slika 6, 7) dobimo, če rešitev variacijskega problema $\vartheta(u)$ vstavimo v izraz (9). Optimalna funkcija relativne debeline konzole je monotonno naraščajoča funkcija, ki od ničte vrednosti na prostem koncu narašča do maksimalne vrednosti na mestu vpetja in zadosti geometrijskemu pogoju (5).



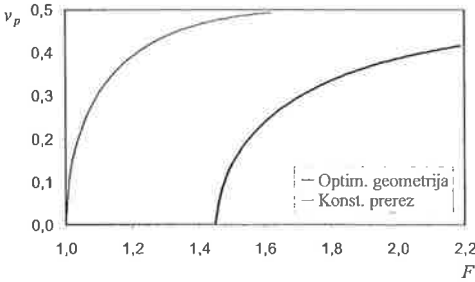
Slika 6: Potek funkcije relativne debeline



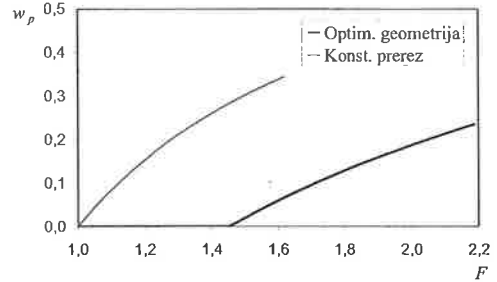
Slika 7: Oblika konzole po debelini

4. PRIKAZ REZULTATOV ZA NADKRITIČNO PODROČJE

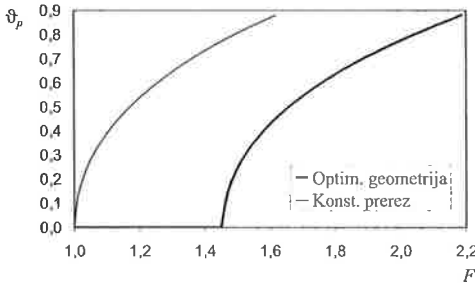
Pri postopku geometrijske optimizacije je bilo obravnavano dogajanje v mejnem stanju. Za prikaz obnašanja konzole v nadkritičnem področju pa je potrebno rešiti sistem nelinearnih diferencialnih enačb (2), ki predstavlja matematično – fizikalni model procesa zvrnitve konzole po teoriji velikih premikov. Sistem enačb (2) je bil rešen numerično z uporabo metode Runge – Kutta [3], [6].



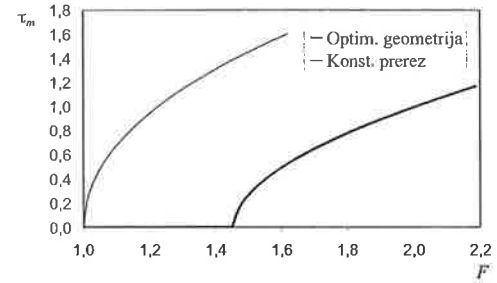
Slika 8: Prečni povos prostega konca



Slika 9: Vertikalni povos prostega konca



Slika 10: Zasuk prostega konca



Slika 11: Maksimalna torzijska napetost na mestu vpetja

V bližini mejnega stanja s povečevanjem obremenitve pride do hitrega naraščanja prečnega povosa (slika 8) in zasuka prereza (slika 10). Pri višjih vrednostih relativne sile vrednosti prečnega povosa in zasuka prostega konca konvergirata h končnima vrednostima, povečuje pa se vertikalni povos (slika 9). Na sliki 11 je prikazan potek maksimalne brezdimenzijske torzijske napetosti, ki se pojavi na mestu vpetja in je definirana z izrazom:

$$\tau_m = \frac{\tau_m^* \cdot \left(\frac{l}{l_0}\right)}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{t_v^2} \frac{4,013}{2} v_p \quad (14)$$

Maksimalna torzijska napetost pri konzoli z optimalnim potekom debeline kljub višji kritični sili zvrnitve, z večanjem obremenitve v nadkritičnem področju narašča počasneje.

Tabela 1: Številčni primer

Geometrijski parametri referenčne konzole in lastnosti gradiva	l [mm]	h [mm]	t_0 [mm]	E [MPa]	ν
	1000	100	4	$2.1 \cdot 10^5$	0.3
	Mejno stanje	Nadkritično področje - $F = 1.5$			
	F_k^* [N]	ϑ_p [rad]	v_p^* [mm]	w_p^* [mm]	τ_m^* [MPa]
Konzola konstantnega prečnega prereza	557.5	0.805	482.3	301.4	755.4
Konzola z optimalno geometrijo	806.1	0.243	140.5	19.4	140.7

Na podlagi številčnega primera (tabela 1) lahko ugotovimo, da posledica optimizacije geometrije ni samo povečanje kritične sile, ampak tudi bistveno nižje vrednosti analiziranih veličin v nadkritičnem področju.

5. ZAKLJUČEK

V prispevku je predstavljen analitični pristop k problemu geometrijske optimizacije procesa zvrnitve konzole. Tako rešitev variacijskega problema optimizacije, kot tudi rešitev sistema nelinearnih diferencialnih enačb za nadkritično področje, sta ob izpolnjevanju predpisanih pogojev splošno veljavni, ne glede na izbiro vrednosti geometrijskih parametrov ter lastnosti gradiva. Rezultati geometrijske optimizacije glede na referenčno konzolo konstantnega prečnega prereza so:

- 45 % povečanje kritične sile zvrnitve pri konstantnem volumnu konzole.
- Enakomernejša porazdelitev deformacij in notranjih momentov po dolžini konzole, kar pomeni boljšo izkoriščenost nosilnosti gradiva.
- Kljub večji kritični obremenitvi kaže konzola ob ustrezni izbiri geometrijskih parametrov nosilnost blizu mejnega stanja tudi v nadkritičnem področju.

6. LITERATURA

- [1] Timoshenko S.: *Theory of elastic stability*; Mc Graw – Hill, 1992
- [2] Vidav I.: *Variacijski račun*; Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1991
- [3] Dražumerič R.: *Geometrijska optimizacija procesa zvrnitve konzole, diplomsko delo*; Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2001
- [4] Milisavljević B. M.: *Dvoparameterski problem bočne stabilnosti konzole z geometrijsko in obremenitveno neidealnostjo, doktorska disertacija*; Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 1989
- [5] Križanič F.: *Navadne diferencialne enačbe*; Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1991
- [6] Hoffman J. D.: *Numerical methods for engineers and scientists*; Mc Graw – Hill, 1992

KONSTRUIRANJE DISTANČNIKA CESTNE VARNOSTNE OGRAJE

Matej Vesenjāk¹, Zoran Ren²

DESIGN OF DISTANCE SPACER OF ROAD RESTRAINT SYSTEM

POVZETEK:

V prispevku je obravnavano konstruiranje elementa cestne varnostne ograje, ki se uporablja na javnih cestah za preprečitev zleta vozila s cestišča ali preboja na nasprotni vozni pas. Evropski standard EN 1317 podaja natančna merila, ki jim mora ograja ustrezati, in pogoje njenega obnašanja pod testno obremenitvijo. Dosedanja praktična opažanja pri uporabi kažejo, da je obstoječi standardni distančnik pretog, kar ima za posledico prevelike pojemke pri naletu vozila.

Namen raziskave je oblikovanje novega distančnika, ki bo sposoben povečane absorpcije deformacijske energije in s tem kontrolirane deformacije pri naletu vozil. V ta namen so s pomočjo metode končnih elementov analizirane različne oblike distančnikov. V začetni fazi razvoja je analizirana togost različnih oblik distančnikov z nelinearno kvazistatično elasto-plastično analizo tri-dimenzionalnega modela varnostne ograje. Ugotovljeno je, da ima obstoječi distančnik zelo veliko togost in da so distančniki novih oblik sposobni večje, kontrolirane elasto-plastične deformacije in s tem pripomorejo k večji varnosti v prometu.

SUMMARY:

The paper describes the design evaluation of a part of the road restraint system, which is used on public streets to prevent a vehicle to veer off the road or its breakthrough to the opposite side of the road. The European standard EN 1317 provides for the exact criteria, which the restraint system has to follow, and the conditions the system has to fulfill under testing load. Practical observations of installed systems indicate, that the current distance spacer is too stiff, which results in a too large decelerations during vehicle impact.

The purpose of this research is to design a new distance spacer, with increased strain energy absorption and more controlled deformation during vehicle impact. For this purpose the new designs of distance spacers have been analysed with the finite element method. In this early phase of development only the stiffness of various designs has been analysed with use of nonlinear quasistatic elasto-plastic analysis of three-dimensional model of the road restraint system. The analyses have shown that the currently used distance spacer is indeed much too stiff and that new designs have higher, controlable elasto-plastic deformation which increases road safety.

¹ Matej Vesenjāk, univ. dipl. inž. str. (e-mail: m.vesenjāk@uni-mb.si)

² izr. prof. dr. Zoran Ren, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo (e-mail: ren@uni-mb.si)

1 Uvod

V želji, da bi skrbeli za prometno varnost in jo celo izboljšali, so pri načrtovanju varnejših javnih cest na določenih mestih nujno potrebne cestne varnostne ograje. Uporaba teh konstrukcij preprečuje vozilom in pešcem vstop v nevarna območja. Zaradi tega je ustrezna konstrukcija izrednega pomena.

V pripravi je slovenski pravilnik o varnostnih ograjah, pogojih in načinih, ki bo zajemal tehnično specifikacijo za javne ceste z obvezno uporabo varnostnih ograj. Le-te morajo ustrezati Evropskemu standardu EN 1317, ki podaja natančna merila, ki jim mora ograja ustrezati, in pogoje njenega testnega obnašanja pod obremenitvijo.

Zaradi dosedanjih ugotovitev, da ima obstoječa konstrukcija cestne varnostne ograje preveliko togost, je potrebno poiskati ustrezno rešitev, ki bo zmanjšala togost ograje in s tem pojemke pri naletu vozila ob ograjo ter tako povečala varnost potnikov v vozilu. Namen raziskave je oblikovanje novega distančnika, ki bo sposoben absorbirati več deformacijske energije in kontrolirane deformacije pri naletu vozil. Obravnavanih je več različnih oblik distančnikov.

Distančniki različnih oblik so bili analizirani s pomočjo metode končnih elementov. Togost različnih oblik distančnikov je bila analizirana z nelinearno kvazistatično elasto-plastično analizo tri-dimenzionalnega modela dela varnostne ograje.

2 Osnovne konstrukcijske zahteve varnostne ograje

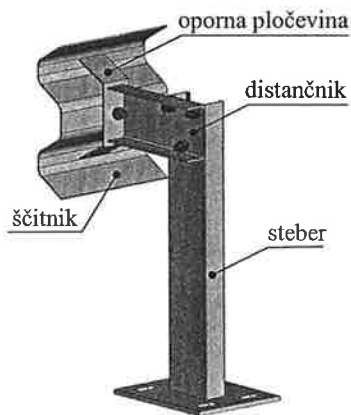
Namen varnostnih ograj je preprečiti zlet vozila s ceste ali preboj vozila na nasprotni vozni pas in s tem preprečiti oziroma zmanjšati poškodbe potnikov v vozilu, oseb in objektov ob vozišču, oziroma zadržati vozila, ki nenadzorovano spreminjajo smer vožnje, in jih ohraniti na ustreznem voznem pasu.

Varnostno ograjo postavljamo na mestih, kjer je nevarnost poškodb zaradi udarca vozil v varnostno ograjo manjša od nevarnosti prehoda vozil v nevarno območje, ki je ločeno z varnostno ograjo. Na javnih cestah se lahko postavljajo varnostne ograje, ki so atestirane po EN 1317.

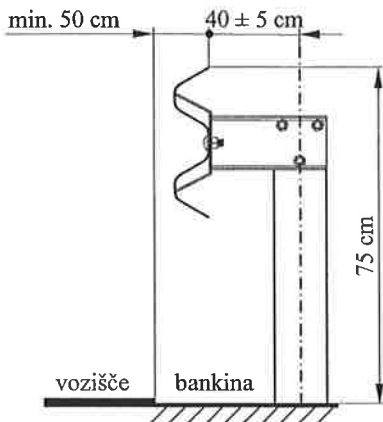
Na cestah se praviloma uporablja jeklena varnostna ograja, v posameznih primerih pa je potrebno ali dopustno uporabiti tudi betonsko (kadar želimo zagotoviti največjo stopnjo zadrževanja vozil) in leseno varnostno ograjo (na nizko prometnih cestah iz naravovarstvenih in estetskih razlogov).

Konstrukcijski elementi jeklene cestne varnostne ograje so (sl. 1):

- ščitnik: v slučaju udarca vozila s svojo deformacijsko konstrukcijo zmanjša posledice udarca in se v nobenem primeru ne sme pretrgati;
- oporna pločevina: povezuje ščitnik in distančnik, ščitniku pa daje še dodatno oporo;
- distančnik: ublaži učinek udarca vozila ob ograjo in služi za povezavo med ščitnikom in stebrom ali drugo oporo;
- steber: je nosilec distančnika in/ali ščitnika, ki zagotavlja lego ščitnika na določeni oddaljenosti in določeni višini od vozišča oziroma nad njim (sl. 2).



Slika 1: Sestavni elementi cestne varnostne ograje



Slika 2: Mere postavitve cestne varnostne ograje

Cestne varnostne ograje so lahko eno- ali dvostranske, z distančnikom ali brez njega. Ograje z distančnikom se prvenstveno uporabljajo na avtocestah in drugih hitrih cestah, ograje brez distančnikov pa na ožjih cestah, kjer zaradi ozkih bankin ni možno uporabljati distančnikov. Varnostne ograje ni potrebno postavljati na delih vozišč, kjer je dovoljena hitrost vozil manjša od 50 km/h, razen v posebnih primerih.

Zgornji rob jeklene varnostne ograje mora biti postavljen 75 cm nad robom vozišča ali odstavnega pasu. Oddaljenost ščitnika varnostne ograje mora biti najmanj 50 cm od roba vozišča oziroma roba odstavnega pasu. Razdalja med prečno najbolj oddaljenim koncem ščitnika in sredino stebra mora biti 40 ± 5 cm. Opisane mere so prikazane na sliki 2.

3 Razvrstitev varnostnih ograj po EN 1317

Možnosti naleta vozila na cestno varnostno ograjo so zelo raznolike glede na hitrost (v), kot približevanja (α), tip in obnašanje vozila ter cestne pogoje (sl. 3).



Slika 3: Parametri teoretičnega trka

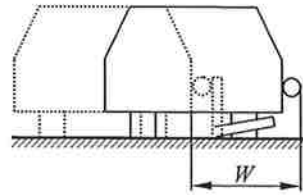
Glede na standard EN 1317 so varnostne ograje razvrščene v več stopenj učinkovitosti zadrževanja vozil. Standard predpisuje kriterije, ki jim mora cestna varnostna ograja ustrezati pri določenih pogojih naleta vozil.

Pri tem je potrebno upoštevati, da mora ograja zadržati trke različnih tipov vozil, od osebnih avtomobilov do tovornjakov. Pri naletu vozil z manjšo maso (manjšo kinetično energijo), mora biti ograja dovolj deformabilna (mehka), da pojemki pri trku niso preveliki. Pri naletu vozila z večjo maso (večjo kinetično energijo) pa mora imeti ograja

dovolj visoko nosilnost, da vozilo zadrži na cestišču. Tako je pri konstruiranju cestne varnostne ograje ves čas potrebno iskati kompromis med togostjo (deformabilnostjo) in nosilnostjo ograje.

Cestne varnostne ograje morajo po EN 1317-2 ustrezati naslednjim kriterijem:

- Nivo zadrževanja vozil: predstavlja, skladno z evropskimi normami EN 1317-2, stopnjo zadrževanja za različne vrste vozil pred zletom s ceste ali pred prebojem na nasprotno smerno vozišče in je za posamezno javno cesto odvisen od njene kategorije, povprečnega letnega dnevnega prometa (PLDP), specifičnega obcestnega prostora ali nevarnega odseka ceste. Standard določa štiri nivoje zadrževanja vozil: nizek nivo zadrževanja (T1, T2 in T3), normalen nivo zadrževanja (N1 in N2), visok nivo zadrževanja (H1, H2 in H3) in zelo visok nivo zadrževanja (H4a in H4b). Standard predpisuje za vsak posamezen nivo pogoje naleta vozila (masa, hitrost in kot naleta), ki jih mora cestna varnostna ograja pri trku vzdržati.
- Jakost udarca: jakost udarca vozila ob cestno varnostno ograjo v smislu ugotavljanja posledic za potnike v vozilu dobimo z merjenjem indeksa velikosti pospeškov (ASI - acceleration severity index), z določanjem teoretične hitrosti glave pri udarcu (THIV - theoretical head impact velocity) in z merjenjem pojema glave po udarcu (PHD - impact head deceleration). Glede na standard so mejne vrednosti teh parametrov naslednje: $ASI \leq 1,0$ (1,4), $THIV \leq 33$ km/h in $PHD \leq 20$ g.
- Deformacija cestne varnostne ograje: pomik (delovna širina) ograje (W) predstavlja razdaljo med licem ščitnika varnostne ograje (ki je v svoji prvotni legi v prečnem prerezu ceste pred naletom vozila na ograjo) in skrajno, od vozišča odmaknjeno, točko na ograji po njeni deformaciji ali odmiku od prvotne lege zaradi trka vozila v ograjo (sl. 4). Kriterij za vrednotenje deformacije cestne varnostne ograje je razdeljen na 8 razredov (W1 ... W8). Deformacija cestne varnostne ograje se meri v metrih.



Slika 4: Delovna širina (W) cestne varnostne ograje pri trku

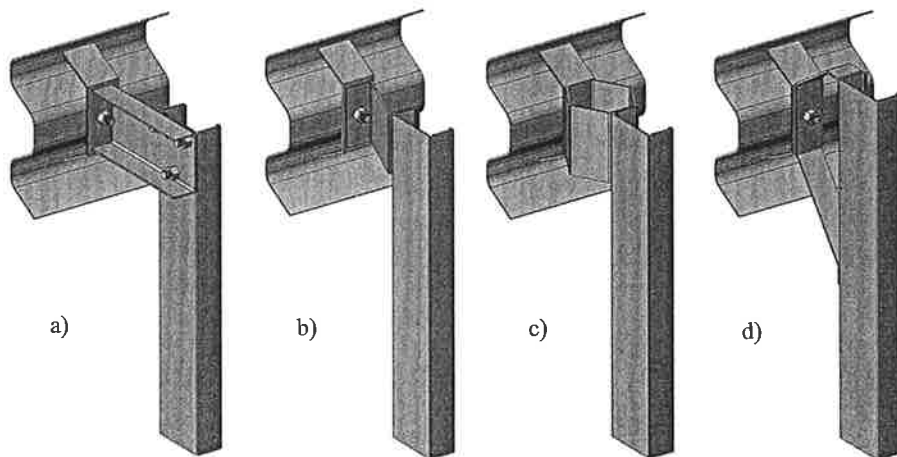
4 Izbira primerne oblike distančnika

Obstoječa konstrukcija cestne varnostne ograje (sl. 5a) je izdelana iz konstrukcijskega jekla S 235 (St 37-2 po DIN). Ščitnik je izdelan iz 3 mm debelega toplovaljanega traka, ki je preoblikovan s hladnim valjanjem v obliko, ki trdnostne lastnosti še povečuje. Dolžina odbojnika je običajno 4200 mm, pri čemer je dolžina spoja (prekritja) 200 mm. Oporna pločevina je izdelana iz 6 mm pločevine in je privarjena na distančnik. Obstoječi distančnik je iz U profila dimenzij 120 x 50 dolžine 260 mm. Razdalja med oporno pločevino in stebrom znaša 140 mm. Stebri so iz hladno oblikovanega zaprtega U profila dimenzij 55 x 120 x 4 mm. Praviloma so dolžine 1,9 m. Postavljeni so na medsebojni oddaljenosti 1,33 m, 2 m in 4 m, kar je odvisno od potrebnega nivoja zadrževanja vozil. Steber je vgrajen tako, da je zaprti profil v smeri vožnje. V kolikor stebra ni mogoče zabiti, ga je potrebno s podložno ploščo pritrčiti na sidrno ploščo. Odbojniki, stebri in distančniki so spojeni s pocinkanimi vijaki M16 x 35 trdnostnega razreda 5.8.

Pri konstruiranju nove oblike distančnika je bilo potrebno upoštevati različne zahteve. Distančnik mora biti oblikovan tako, da ograja geometrijsko ustreza pravilniku ter da s svojo obliko pri trku čim bolj ublaži udarec, torej absorbira čim več deformacijske energije. Zaradi tega ne sme biti preveč tog, hkrati pa mora dajati zadosten odpor silam, ki delujejo nanj. Pri trku mora ostati povezan z vsaj enim delom ograje. Varnostna ograja ne sme odbiti vozila nazaj na vozišče, torej distančnik ne sme delovati kot vzmet. Dodatno pa

mora biti lahko izvedljiv in enostaven za montažo ter omogočati permanentno in enostavno vzdrževanje.

Obravnavane so bile štiri različne oblike distančnikov, ki so prikazane na sliki 5.



Slika 5: Različne oblike distančnikov:

a – U profil (prvotni distančnik); b – Z profil; c – šestkotni profil; d – D profil

Naslednji korak je bil parametrična primerjava preostalih profilov ter določitev tistega, ki bo geometrijsko in funkcionalno najbolj ustrežal. Za numerično analizo deformacijskega stanja varnostne ograje je bila uporabljena metoda končnih elementov.

5 Primerjalna analiza distančnikov po metodi končnih elementov

Vsi sestavi deli varnostne ograje so izdelani iz konstrukcijskega jekla S 235. Z namenom, da bi ugotovili materialne lastnosti pločevin različnih debelin, smo izvedli natezne preizkuse. Epruvete za preizkus različnih debelin so bile izdelane v skladu s standardom DIN 50 115. Iz eksperimentalno dobljenih rezultatov so bile definirane elasto-plastične lastnosti materiala oziroma ustrezan $\sigma - \epsilon$ diagram. Po določitvi modula elastičnosti, meje plastičnosti in modula plastičnosti smo, ob predpostavki izotropnosti, predpisali ustrezen $\sigma - \epsilon$ diagram za bilinearni elastoplastični model materiala. Eksperimentalno izmerjene fizikalne lastnosti, ki smo jih upoštevali pri nadaljnjih preračunih, so podane v tabeli 1.

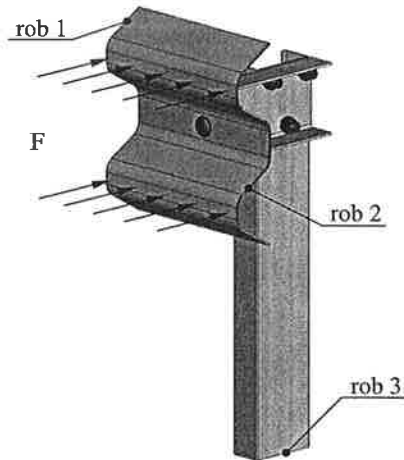
Tabela 1: Fizikalne lastnosti materialov uporabljenih pri analizi

Debelina pločevine	Modul elastičnosti	Poissonovo število	Meja plastičnosti	Modul plastičnosti	Natezna trdnost
[mm]	[N/mm ²]	/	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[N/mm ²]
3	190000	0,29	285	696	400
4	200000	0,29	330	969	450
6	210000	0,29	380	1200	480

Model cestne varnostne naprave je bil izdelan iz naslednjih elementov:

- Ščitnik: modeliran z linearnimi ploščinskimi štirikotnimi elementi debeline 3 mm. Omejili smo se na dolžino 300 mm, saj je bilo ugotovljeno, da če dolžino povečujemo, ne vplivamo bistveno na rezultat analize.
- Oporna pločevina: modelirana z linearnimi ploščinskimi štirikotnimi elementi debeline 6 mm.
- Distančnik: modeliran z linearnimi ploščinskimi štirikotnimi elementi debeline 4 mm (razen profil D = 5 mm).
- Steber: modeliran z linearnimi ploščinskimi štirikotnimi elementi debeline 4 mm.
- Vijaki: v začetni fazi raziskav so vijaki modelirani s togimi (angl. rigid) končnimi elementi, ki predstavljajo vijačne zveze.

Pri določanju robnih pogojev smo si pomagali s standardom EN 1317, kjer smo za obremenitev v začetni fazi raziskave izbrali silo trka $F = 30$ kN. Ta sila je bila enakomerno porazdeljena na kontaktno površino na vozlišča ščitnika, tako da je ves čas delovala v isti smeri (sl. 6). Celotno konstrukcijo smo togo vpeli na spodnjem delu stebra po robu 3 (sl. 6). Ščitniku smo po robu 1 in 2 omejili pomik v vzdolžni smeri ter zasuk okoli ostalih dveh osi (sl. 6).

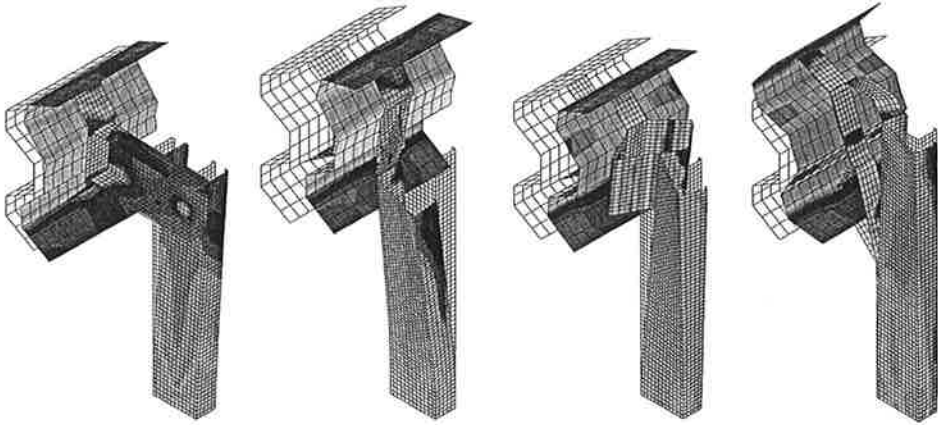


Slika 6: Robni pogoji

Za izdelavo mreže končnih elementov in analize je bil uporabljen inženirski programski paket MSC.visualNastran for Windows. Izvedene so bile nelinearne statične analize. Upoštevana je bila nelinearnost materiala (elasto-plastičen material). Takšno numerično reševanje zahteva inkrementalno-iterativni pristop. Za zagotovljeno konvergenco rešitve je bilo potrebno določiti primerno število iteracij in inkrementov. S poskušanjem je bilo ugotovljeno, da potrebno obremenitev razdeliti na 10 - 50 inkrementov po 25 iteracij ob toleranci obremenitve in dela, ki je znašala 10^{-5} . Uporabljena je bila metoda, pri kateri se togostna matrika posodobi po prvi iteraciji znotraj posameznega inkrementa. V zelo zgodnji fazi analiz, ko še natančni materialni podatki niso bili znani, je rešitev divergirala ob preveliki obremenitvi in prenizki meji plastičnosti. Konvergenco smo dosegli z zgostitvijo mreže in določitvijo večjega števila inkrementov ter iteracij.

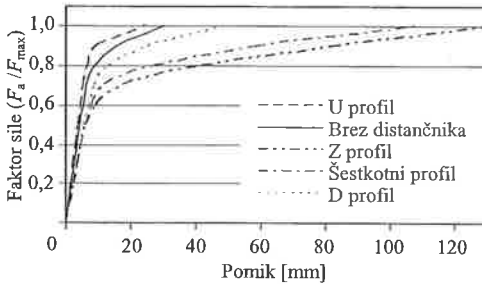
6 Primerjava rezultatov

Z računalniško analizo smo dobili rezultate, ki so v obliki pomikov ograje prikazani na sliki 7.

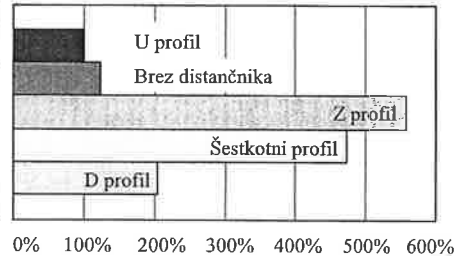


Slika 7: Pomik cestne varnostne ograje pod obremenitvijo

Pri vrednotenju rezultatov so bili najpomembnejši pomiki v smeri delovanja sil, ki ponazarjajo deformacijo ograje pri naletu vozila. Za vrednotenje jakosti udarca je pomembna tudi velikost deformacijske energije, ki jo sprejme konstrukcija varnostne ograje (sl. 8). Primerjava rezultatov dokazuje, da obstoječi distančnik v nobenem primeru ni zadovoljiv. Ostali distančniki vsekakor bolje izpolnjujejo svoje zahteve. Diagram na sliki 9 prikazuje normirane vrednosti deformacijske energije, pri čemer znaša izhodiščna vrednost obstoječega distančnika 100%.



Slika 8: Diagram sila - pomik



Slika 9: Primerjava deformacijske energije z različnimi distančniki

Velik pomik in visoko deformacijsko energijo ima distančnik iz Z profila, vendar je ta deformacija precej nepredvidljiva zaradi nesimetrične oblike distančnika. Najbolj kontrolirano se deformira distančnik v obliki šestkotnika. Distančnik v obliki črke D je glede na to, da je edini izmed distančnikov debeline 5 mm, dosegel najslabše rezultate. Dobra stran tega distančnika je le, da potisne ščitnik navzgor in s tem prepreči, da bi ga vozilo prevozilo. Primerjava rezultatov računalniškega simuliranja je podana v tabeli 2.

Tabela 2: Primerjava rezultatov

Distančnik	Pomik v prečni smeri	Maksimalna napetost	Primerjava deformacijske energije
	[mm]	[N/mm ²]	[%]
U profil	24,1	402	100,0
Brez distančnika	30,3	403	124,5
Z profil	129,9	480	556,6
Šestkotni profil	108,1	510	472,2
D profil	48,6	480	204,2

7 Zaključek

Rezultati računalniških simulacij kažejo, da lahko z drugačnimi oblikami distančnikov zmanjšamo togost varnostne ograje, omogočimo večjo sposobnost deformiranja, in tako posredno znižamo pojemke pri naletu vozila ter povečamo varnost potnikov v vozilu.

Iz rezultatov je razvidno, da je bil dosedanji distančnik očitno konstruiran zgolj po geometrijskih pravilih ne glede na funkcionalnost, saj je pretog. Najboljše rezultate sta dosegla distančnika Z in šestkotnega profila. Čeprav ima distančnik iz Z profila manjšo togost in višjo deformacijsko energijo, se distančnik iz šestkotnega profila deformira veliko bolj predvidljivo in zaradi svoje simetričnosti ni občutljiv na kot trka vozila ob ograjo.

V nadaljnjih raziskavah tega projekta predvidevamo najustreznejši distančnik skupaj z vsemi elementi cestne varnostne ograje simulirati dinamično, s programskimi paketi, ki so bolj prilagojeni za dinamične analize. Velik vpliv na obnašanje ograje ima tudi podlaga, v katero je pritrjen steber, zato jo je v naslednjih računalniških simulacijah smiselno upoštevati.

8 Literatura

- [1] Engstrand, K. E. (2000). *Improvements to the Weak - Post w - Beam Guardrail*. Worcester: Worcester Polytechnic Institute.
- [2] European Committee for Standardization. (1998). *European Standard EN 1317-1, EN 1317-2, Road Restraint Systems*.
- [3] Ministrstvo za promet. Tehnična specifikacija za javne ceste. Urad za standardizacijo in meroslovje. Direkcija republike Slovenije za ceste. (2001). *TSC 02.xxx, Varnostne ograje, pogoji in načini postavitve*.
- [4] Železarna Jesenice. (1974). *Cestna varnostna ograja*. Kranj.

DOLOČITEV ORTOTROPIJE V ELEKTROPLOČEVINI KOT POSLEDICA PLASTIČNE DEFORMACIJE

Bratuš Vitoslav¹, Franc Kosel², Jože Petrišič³

DEFINITION OF THE ORTHOTROPY OF ELECTRICAL STEEL SHEET AS THE RESULT OF PLASTIC DEFORMATION

POVZETEK

Prispevek obravnava določitev ortotropnih mehanskih lastnosti elektropločevine in analizo, kje v tehnološkem procesu izdelave ter nadaljnji pripravi le-te na proces štancanja se vnese posamezen del celotne končne ortotropije, ki je tolikšna, da se dimenzije izdelka iz takega materiala pogosto ne nahajajo v predpisanem tolerančnem območju. Da bi bili rezultati analize korektni, so bili preizkušanci izrezani v treh različnih smereh. Za kriterij točnosti meritev je bil izbran pogoj o simetriji tenzorja reoloških lastnosti gradiva. Rezultati zelo dobro potrjujejo opredelitev ortotropnih lastnosti pločevine.

SUMMARY

The paper discusses the definition of the orthotropy of mechanical properties of electrical steel sheet together with analysis, where into the both processes, production of electrical steel sheet and preliminary process of progressive stamping, the individual range of final orthotropy is entered. The product made from this orthotropic material has many times dimensions out of the specified tolerances. Samples for tensile test are cut out from electrical steel sheet in three directions. The term of tensor symmetry of material rheological model is used to establish the precision of measurements. The orthotropic characteristics of electrical steel sheet are well confirmed by the final results.

¹ mag. Vitoslav Bratuš, univ. dipl. inž. str., Rotomatika d.o.o., Sp. Kanomlja 23, 5281 Sp. Idrija

² red. prof. dr. Franc Kosel, univ. dipl. inž. str., Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

³ izred. prof. dr. Jože Petrišič, univ. dipl. inž. str., Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

1 UVOD

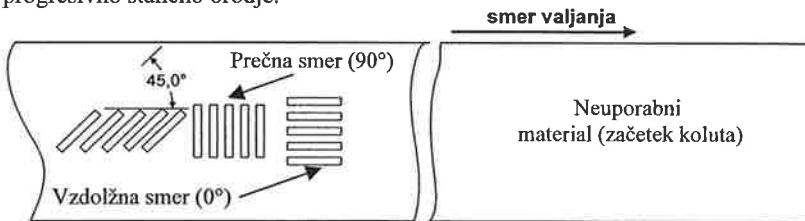
V današnjem svetu si je nemogoče predstavljati delovanje vseh vrst električnih naprav brez ustreznega osnovnega materiala, to je elektroplöčevine. Predstavlja najpomembnejši surovi material za izdelavo lamele, ki je po svoji funkcionalnosti optimalni vhodni element za nadaljnjo proizvodnjo komponent mirujočega sestava elektromotorja, kot so statorski paket, paket jedra različnih oblik transformatorjev ter komponent rotacijskega sestava – rotorskega paketa. Njihova poglobitna naloga je prenos magnetnega pretoka v različnih energetsko zmogljivih električnih strojih in napravah, katerih delovanje temelji na izmeničnem toku.

Začetno fazo proizvodnje osnovnih komponent elektromotorjev predstavlja progresivno izsekovanje oz. štancanje lamel iz elektroplöčevine. Prispevek obravnava pojav negativnega efekta, ki povzroča nemalo problemov v proizvodnji rotorskih in statorskih lamel: naknadni deformaciji štancanih notranjih in zunanjih kontur kot reakciji na notranje napetosti ter ortotropijo mehanskih lastnosti elektroplöčevine. Če se omejimo le na slednjo, potem nedvomno velja, da je z vidika zahtevane dimenzijske in geometrične kvalitete izdelka pojav ortotropnosti elektroplöčevine nezaželjen. A neizpodbitno dejstvo ostaja. Elektroplöčevino je potrebno proizvesti v železarni ter nadalje tudi ustrezno pripraviti na postopek štancanja. Po trenutno obstoječih tehnologijah se pojavu ortotropnosti ni mogoče izogniti.

2 EKSPERIMENT

Pojavlja se nam sledeče vprašanje: ali je mogoče locirati mesto in s tem točno določen proces v postopku izdelave elektroplöčevine ter nadaljnji pripravi le-te na postopek štancanja, kjer se v material »vnese« največjo stopnjo ortotropije? Odgovor na to dilemo podaja izvedeni eksperiment, ki je bil pretežno vezan na Rotomatika d.o.o., Strateška Poslovna Enota Lamele (v nadaljevanju SPE Lamele), kjer se elektroplöčevina predeluje v lamele. Eksperiment je deloma potekal tudi v hladni valjarni železarne Acroni d.o.o.

Posledica ortotropije elektroplöčevine se negativno izraža na vseh tipih materiala, zato je bilo smiselno, da se izbere le določen tip, ki naj bi ustrezal normativom oz. standardom eksperimenta. Tega se formalno spremlja od osnovnega koluta v hladni valjarni (dresirno ogrodje) pa do vstopa traku v progresivno štancno orodje.



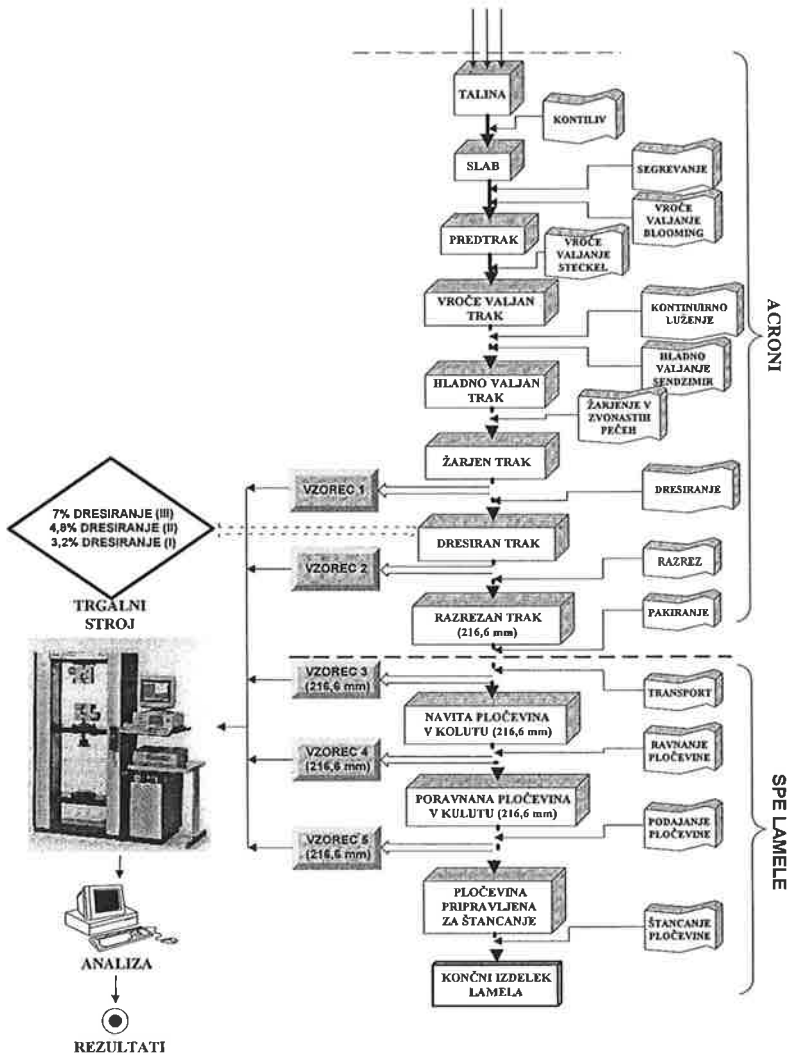
Slika 1: Orientacija vzorcev glede na smer valjanja traku

V širokem spektru elektroplöčevin, ki se uporabljajo za SPE Lamele, je bila za potrebe eksperimenta izbrana neorientirana, polgotova in nelegirana elektroplöčevina kvalitete M800-65D, končnih dimenzij 216,6 x 0,65 mm.

Vzorčenje je bilo vsebinsko ločeno v dve »vzorčni verigi«: Acroni ter Voest Alpine. Praktično se razlikujeta le v začetni fazi, kjer je pri Acroniju predstavljen vpliv različne stopnje dresiranja na končne mehanske lastnosti elektroplöčevine pred razrezom na končno dimenzijo in transportom v SPE Lamele. Vse to je vezano na železarno. Popolnoma ista vzorčna veriga pa je bila narejena za oba dobavitelja elektroplöčevine v SPE Lamele – pod istimi pogoji!

Med najbolj pomembne dejavnike eksperimenta sodi reprezentativno število vzorcev oz. epruvet namenjenih za trgalni preizkus. S tega naslova je bilo potrebno le-te vzeti v treh smereh (slika 1):

vzdolžni (0°) in prečni (90°) smeri glede na smer valjanja ter smeri, ki je postavljena pod kotom 45° na prečno oz. vzdolžno smer. Iz vsake smeri se je vzelo po 5 vzorcev, kar pomeni, da je bilo vsako odjemno mesto predstavljeno s 15 vzorci.



Slika 2: Shematski prikaz vzorčne verige Acroni – SPE Lamele

Pred vsakim mestom vzorčenja se je predhodno odstranilo nekaj prvih ovojov s koluta – obravnavani kot odpadke. Omenjena procedura garantira eliminacijo vseh morebitnih dodatnih parametrov, ki bi lahko v kakršnikoli meri vplivali na rezultate trgalnih preizkusov.

2.1 Vzorčna veriga Acroni – SPE Lamele

Na sliki 2 je shematsko prikazana tehnologija izdelave obravnavanega tipa elektroplöčevine v Acroniju ter nato še nadaljnja priprava le-te v SPE Lamele. Razvidne so posamezne faze predelave

materiala, ki so navedene v sredini sheme, na desni strani pa so v dodatno informacijo podane še operacije med posameznimi fazami. Na levi strani sheme so prikazana odjemna mesta vzorčenja in označbe vzorcev. Edini parameter, ki se je namenoma spreminjal, je bila stopnja deformacije pri dresiranju (3.2%, 4.8% in 7% - predstavljajo podaljšanje dolžine pred in po končnem valjanju izraženo v % na račun zmanjšanja debeline materiala). Nadaljnjo realizacijo eksperimenta predstavlja priprava vzorcev oz. trgalnih epruvet, analiza in obdelava rezultatov.

Rezultati eksperimenta naj bi odgovorili tudi na vprašanje, ali se mehanske lastnosti elektropločevine spreminjajo tudi po širini (1000 mm) osnovnega koluta, torej, ali je material na levi strani, na sredini in na desni strani osnovnega koluta medsebojno primerljiv? V ta namen se je na SPE Lamele ločeno spremljalo in vzorčilo sredinski (oznaka 4) in stranski (oznaka 6) kolut širine 216,6 mm, ki je bil predhodno ustrezno označen in razrezan iz osnovnega koluta.

2.2 Izdelava in končna priprava trgalnih epruvet

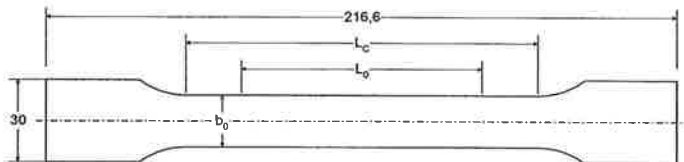
Spremljanje spreminjanja mehanskih lastnosti materiala je bilo izpeljano na osnovi rezultatov trgalnega preizkusa. Za razne kovinske materiale, tudi za elektropločevino, mednarodni standard ISO 6892 – Natezni preizkus za kovinske materiale pri sobni temperaturi – zahteva točno določeno obliko trgalne epruvete. Standard za ploščate izdelke debeline med 0.1 in 3 mm predpisuje dve obliki, ki sta razvidni iz tabele 1. Trgalne epruvete so v našem eksperimentu ustrezale tipu 2.

Tabela 1: Dimenzije epruvet tankih ploščatih izdelkov do 3 mm debeline^[1]

Tip	Širina vratu b_0 [mm]	Dolžina ekstenziometra L_0 [mm]	Dolžina paralelnega vratu L_C [mm]	Min. razdalja med čeljustmi [mm]	Radij izteka [mm]	Toleranca oblike [mm]
1	12.5±1	50	75	87.5	min. 20	0.043
2	20±1	80	120	140	min. 20	0.052

Končna oblika epruvete (slika 3) je v skladu s standardom. Edini prosti meri sta širina vpenjalnega dela epruvete (standard določa meje 20 do 40 mm) in celotna dolžina, ki je prav tako odvisna od načina vpetja v čeljusti trgalne priprave. Dejstvo je, da je zaželjen daljši vpenjalni konec, a po drugi strani je bilo potrebno upoštevati omejitev širine razreza koluta na dimenzijo 216.6 mm. Ta odgovarja maksimalni mogoči dolžini epruvete v prečni smeri. Dolžino vseh epruvet je bilo potrebno omejiti na omenjeno dimenzijo. Pogoj začetne medsebojne oddaljenosti čeljusti pa je prav tako izpolnjen.

Standard za izdelke konstantnega prereza, kar elektropločevina prav gotovo je, dopušča testiranje epruvet brez dodatnega brušenja; namen te dodatne operacije je izničiti vpliv različnih postopkov izdelave le-teh. Kljub temu dejstvu pa je bil zaradi zmanjšanja možnosti vpliva naključnih motilnih faktorjev na rezultate meritev izpeljan postopek razizglavanja – ročno čelno in bočno brušenje reznih robov epruvete. Le geometrijska in oblikovna enakost merjencev pogojuje verodostojnost rezultatov in podaja dejanski odsev stanja materiala po posameznih vzorčnih mestih.



Slika 3: Oblika trgalne epruvete elektropločevine

Na vsakem testiranju je bilo narejenih 5 meritev debeline in 3 meritve širine vratu. Kot podatek za izračun originalnega preseka se je upoštevalo povprečje omenjenih meritev.

2.3 Trganje epruvet

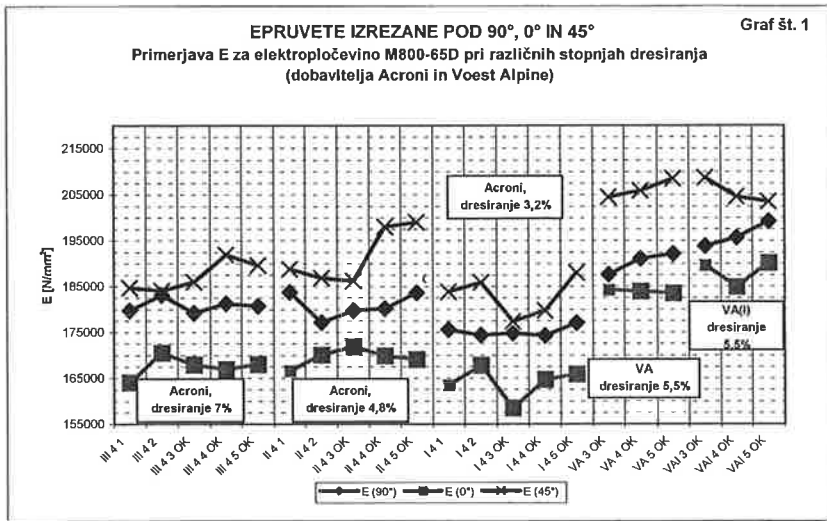
Glavni del eksperimenta – trganje epruvet je potekalo v Laboratoriju za nelinearno mehaniko na Fakulteti za strojništvo, Univerza v Ljubljani. Mehanske lastnosti posameznih epruvet se je eksperimentalno ugotavljalo na trgalnem stroju proizvajalca Zwick, tip Z050/TH3A z nazivno maksimalno silo 50 kN. Funkcionalnost in usposobljenost uporabljenega trgalnega stroja je bila potrjena s predhodno kalibracijo s strani ustrezne inštitucije. Trgalni preizkus je bil izveden po standardu EN10002 oz. novjšem ISO 6892. Določene postavke v protokolu metitve so s standardom le okvirno določene s spodnjo oz. zgornjo dovoljeno mejo, zato so spodaj navedeni nekateri pomembnejši natančni podatki trgalnega postopka:

- Stopnja utrjevanja materiala: $30 \text{ N/mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- Hitrost obremenjevanja v plastičnem področju: 0.008 s^{-1}
- RB kriterij: $90\% F_{\text{max}}$
- Metoda določitve E modula: sekantna, referenci: raztezka pri napetosti 100 in 250 N/mm^2 .

3 REZULTATI TRGALNEGA PREIZKUSA

Celotni rezultati trgalnega preizkusa serije petih epruvet – po 5 testirancev v eni smeri izreza glede na smer valjanja – so bili podani v poročilu o meritvah. V analizi se je upoštevalo le najpomembnejše mehanske lastnosti za proces štancanja: elastični modul (E), meja plastičnosti ($R_{p0.2}$), natezna trdnost (R_m) in razmerje med mejo plastičnosti ter natezno trdnostjo (PSR).

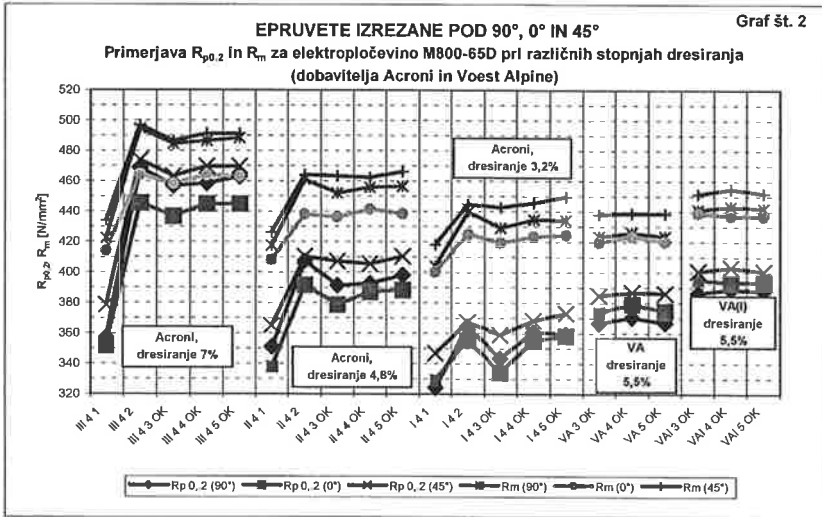
Spreminjanje zgoraj navedenih mehanskih karakteristik elektroplöčevine z ozirom na mesto vzorčenja ter stopnjo dresiranja (Acroni) je v referenčnih smereh razvidno iz grafov št. 1 – 3.



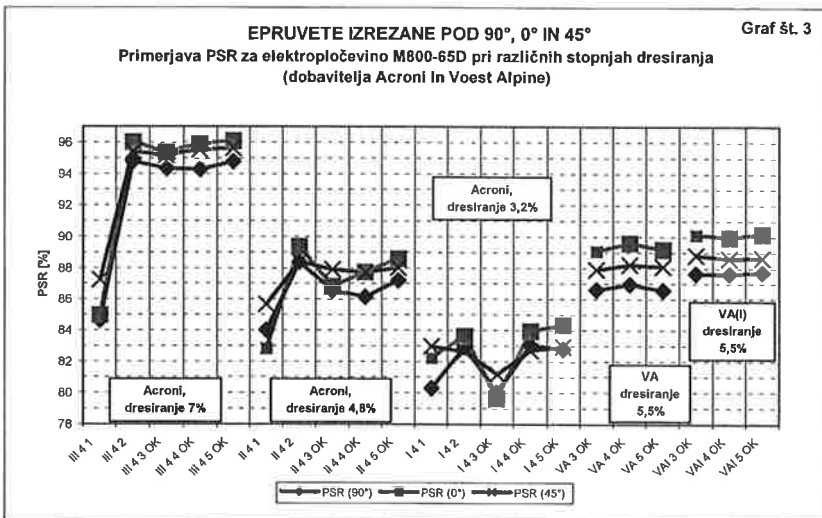
Za primerjavo so navedene še vrednosti proizvajalca Voest Alpine, ki pa so vezane le na vzorčenje dveh kolutov (razrez v Italiji VA(I) in Avstriji VA) v SPE Lamele – vzorec št. 3, 4 in 5.

Iz vseh prikazanih grafov sledi ugotovitev, da so najvišje vrednosti za omenjene mehanske lastnosti elektroplöčevine v smeri izreza epruvet pod kotom 45 glede na smer valjanja. Sledita si smeri 90° in 0°. Iz grafa št. 2 je lepo razvidno, da ima največji vpliv na samo spremembo meje plastičnosti ter natezne trdnosti operacija dresiranja, ki vrednosti izrazito poveča. Na ta način se poveča tudi PSR (graf št. 3), kar izboljša pogoje za štancanje take elektroplöčevine. Problematično pa se izkaže spreminjanje PSR pri Acroni plöčevini, saj se vrstni red smeri izreza epruvet po

posameznih proizvodnih fazah medsebojno zelo intenzivno spreminja. Pri elektropločevini dobavitelja Voest Alpine tega pojava ni zaslediti – vrednosti se praktično ne spreminjajo.



Potek spreminjanja raztezka pri porušitvi pokaže največje vrednosti pri epruvetah izrezanih v smeri valjanja (0°), sledi smer 90°, najmanjše vrednosti pa so v smeri 45°.



4 DOLOČITEV POISSONOVEGA ŠTEVILA

Poissonovo število ν , ki ga je po ASTM standardu potrebno meriti v elastičnem področju, je določeno z enačbo

$$\nu = \frac{d\epsilon_t / dF}{d\epsilon_l / dF}, \quad (1)$$

kjer je $d\varepsilon_l$ diferencial longitudinalne deformacije – deformacija v smeri osne obremenitve dF in $d\varepsilon_t$ diferencial transverzalne deformacije – prečna deformacija na smer osne obremenitve.

4.1 Izvedba meritve

Meritve potrebnih parametrov za določitev Poissonovega števila so bile izvedene na trgalnem stroju. Računalniški program, ki nadzoruje delovanje stroja, omogoča meritev raztezka Δl oz. deformacije v smeri obremenitve. Izkoriščena je bila možnost, da se stroj ustavi pri točno določeni obremenitvi oz. natezni napetosti v epruveti, ki jo je mogoče predhodno poljubno nastaviti.

Enačbo (1) je mogoče nadalje razdelati v obliko

$$\nu = \frac{d\varepsilon_t}{d\varepsilon_l} = \frac{\Delta b / b_0}{\Delta l / l_0} = \frac{l_0}{b_0} \frac{\Delta b}{\Delta l} \quad (2)$$

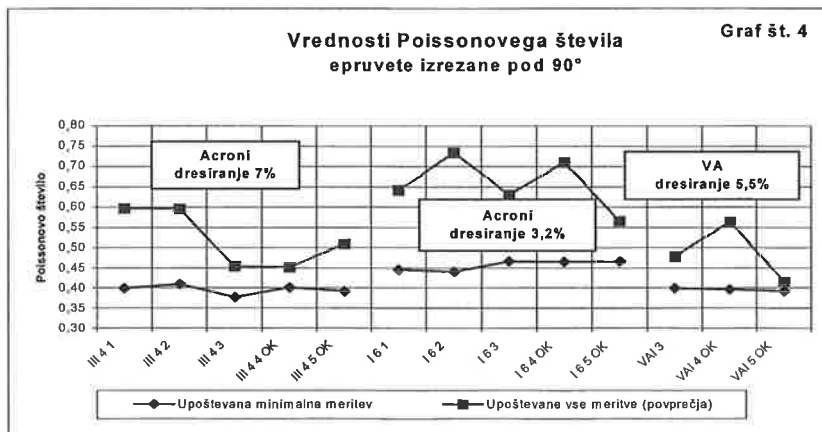
Oznaki l_0 in b_0 sta razvidni iz slike 3, Δl se določi na osnovi rezultata merilnega protokola, edina neznanka je tako sprememba širine vratu epruvete Δb .

Kriterij za določitev napetosti, pri kateri trgalni stroj zadrži epruveto, je izhajal iz rezultatov predhodnih trgalnih preizkusov. Najnižja napetost $R_{p0.2}$ je bila določena pri acroni elektropločevini, stopnja dresiranja 3.2% in je v rangi 330 N/mm^2 . Da bi bili rezultati meritve uporabni, se je nivo napetosti še dodatno znižal na 280 N/mm^2 – elastično področje.

Priprava epruvet je pri tem postopku igrala še toliko vidnejšo vlogo. Za določitev izhodiščnih parametrov je bila izmerjena debelina vratu epruvete v petih točkah, širina b_0 pa v šestih. Na ta način se je res popisalo dejansko geometrijsko stanje vratu epruvete. Prav tako se je v šestih točkah izmerila širina vratu v obremenjenem stanju – določitev širine b_l in s tem Δb . Začetno dolžino l_0 epruvete predstavlja začetna razdalja med čeljustima ekstenziometra in znaša 80 mm.

4.2 Analiza rezultatov

Rezultati povprečnih vrednosti Poissonovega števila, kjer so bile upoštevane vse meritve širine vratu epruvete pred obremenitvijo in pri notranji obremenitvi 280 N/mm^2 , so bili v neskladju s teorijo. Le-ta namreč določa, da je maksimalna vrednost v omejena z 0.5 v primeru obremenitve v plastičnem področju. Iz tega sledi ugotovitev, da je izvor napake merilnega postopka vezan na predpostavko, da je širina vratu epruvete vseskozi konstantna. Iz meritev je razvidno, da se širina vratu epruvete spreminja v okviru dovoljenih toleranc.



Za naš namen pa je očitno tudi to geometrijsko odstopanje preveliko. S tega naslova se je določila minimalna širina vratu epruvete pred obremenitvijo ter pri obremenitvi, ki povzroča notranjo napetost 280 N/mm². Na ta način se je lociralo mesto, kjer se pojavi začetna kontrakcija vratu.

Spreminjanje Poissonovega števila, izračunanega po obeh metodah, je za epruvete izrezane pod kotom 90° grafično predstavljeno v grafu št. 4.

Če opazujemo rezultate meritev po drugi metodi je očitno, da dosega Poissonovo število najvišje vrednosti pri Acroni pločevini, stopnja dresiranja 3.2%. Tu je meja plastičnosti najnižja in vrednosti se približujejo limitni vrednosti 0.5.

5 KONTROLA MERITEV

Kontrolo uspešnosti vseh zgoraj navedenih meritev je mogoče izvesti na osnovi pogoja o simetriji napetostnega in deformacijskega tenzorja ortotropnega telesa. Poznano enačbo

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

lahko z uporabo indeksov, ki ponazarjajo orientacijo izreza trgalnih epruvet, zapišemo kot

$$\frac{E_0 \nu_{90}}{E_{90} \nu_0} = 1. \quad (4)$$

Ujemanje dejanskih rezultatov, izračunanih po drugi metodi, je predstavljeno v tabeli 2. Razvidne so še povprečne vrednosti Poissonovega števila za zgoraj omenjene stopnje dresiranja.

Tabela 2: Kontrola ujemanja po enačbi 4 ter povprečne vrednosti za različne stopnje dresiranja

Oznaka vzorca	$(E_0 \nu_{90}) / (E_{90} \nu_0)$	$\bar{\nu}$ pri orient. 90°	$\bar{\nu}$ pri orient. 0°
III 4 1	0,996	0,395	0,360
III 4 2	1,029		
III 4 3	1,023		
III 4 4 OK	1,002		
III 4 5 OK	0,992		
I 6 1	0,993	0,456	0,434
I 6 2	1,006		
I 6 3	0,964		
I 6 4 OK	1,027		
I 6 5 OK	1,014		
VAI 3	1,002	0,395	0,370
VAI 4 OK	1,019		
VAI 5 OK	0,994		

6 ZAKLJUČEK

Za ugotavljanje spremembe širine vratu trgalne epruvete Δb je bilo potrebno uporabiti posebni mikrometer, saj ugotavljamo pomike velikostnega razreda 0.005 mm. Kot pa je razvidno iz tabele 2, rezultati ujemanja eksperimentalnih meritev zelo dobro opredeljujejo elektropločevino kot ortotropno telo.

7 LITERATURA

- [1] INTERNATIONAL STANDARD ISO 6892, Metallic materials – Testing at ambient temperature, Reference number ISO 6892: 1998(E), second edition 1998-03-01
- [2] S. G. Lekhitskii, Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Mir Publishers, Moscow, 1981,
- [3] V. Bratuš, Določitev premičnega stanja v izrezani plošči kot posledica predhodno plastične deformirane pločevine, Magistrsko delo, Ljubljana, 2002

OPTIMIRANJE OBLIKE KONSTRUKCIJ: TRISTRANIČNI PROJEKTNI ELEMENT

Marko Kegl

STRUCTURAL SHAPE OPTIMIZATION: A TRILATERAL DESIGN ELEMENT

POVZETEK

Prispevek obravnava izpeljavo tristraničnega projektne elementa za uporabo pri optimalnem projektiranju oblike konstrukcij. Osnovo za izpeljavo elementa predstavlja tristranična Bézierjeva ploskev, ki je običajno parametrizirana z uporabo baricentričnih koordinat. V prispevku je uporabljena drugačna parametrizacija, ki je bolj prilagojena postopkom optimizacije oblike. Na osnovi te ploskve je definiran projektni element - Bézierjevo telo, katerega mreža kontrolnih točk ima v topološkem smislu obliko tristranične prizme. Uporaba izpeljanega elementa je ilustrirana na dveh številčnih zgledih.

SUMMARY

The paper considers the derivation of a trilateral design element for shape optimization of structures. The element derivation is based on a trilateral Bézier patch, usually being parametrized by barycentric coordinates. In the paper another type of parametrization is used, which is more convenient for employment in optimization procedures. Based on this patch the design element is derived - a Bézier body whose control points represent a trilateral prism in the topological sense. The use of the derived element is illustrated by two numerical examples.

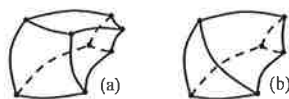
1. UVOD

Področje optimizacije oblike konstrukcij se je začelo intenzivneje razvijati približno pred dvema

desetletjema. Kmalu se je izkazalo, da pri optimizaciji oblike naletimo na nove težave, ki jih pri konvencionalni optimizaciji nismo poznali [1]. Te so bile več ali manj vezane na dejstvo, da se mreža končnih elementov pri optimizaciji oblike spreminja. To pa pripelje do kvarjenja mreže ter do nenatančnih rezultatov pri analizi odziva in občutljivosti.

Stopnja kvarjenja mreže je zelo odvisna od načina njene parametrizacije. Imam [2] je tako v svojem delu predstavil različne koncepte parametrizacije in enega od njih poimenoval *tehnika projektnih elementov*. Projektni element je v bistvu primerno parametriziran geometrijski objekt, ki končne elemente oskrbuje s potrebnimi geometrijskimi podatki (koordinate vozlišč, itd.). Imam je za projektni element predlagal 20-vozliščni izoparametrični element, malo kasneje pa sta Braibant in Fleury [3] v svojo formulacijo 2D projektne elementa vpeljala krivulje B-zlepkov. V sledečih letih smo na področju optimizacije oblike lahko opazili vse pogostejšo uporabo osnovnih konceptov tehnike projektnih elementov ter krivulj oziroma ploskev B-zlepkov (glej npr. [4-8]).

Pred kratkim je bil v [9] predstavljen koncept parametrizacije oblike s pomočjo tehnike projektnih elementov ter uporabe splošnega projektne elementa. Predlagan koncept obravnava zvezne in diskretne konstrukcije na enoten način, projektni element pa je definiran kot Bézierjevo telo. Topološko ima ta element obliko štiristranične prizme, zato ga bomo v članku imenovali kar *štiristranični projektni element* (slika 1a).



Slika 1. Štiristranični (a) in tristranični (b) projektni element

Mejna ploskev tega elementa je sestavljena iz šestih štiristraničnih Bézierjevih ploskev. Če je potrebno, lahko katerokoli od teh ploskev degeneriramo v tristranično ploskev s primernim pozicioniranjem kontrolnih točk. To je sicer možno, vendar pa ni najbolj racionalno, saj pri tem uporabljamo več kontrolnih točk, kot pa jih dejansko potrebujemo. V takem primeru je zato uporaba prave tristranične ploskve mnogo bolj primerna. Glede nato, je verjetno smotno definirati (razen štiristraničnega) tudi *tristranični projektni element* (slika 1b). Topološko je ta element tristranična prizma, njegova mejna ploskev pa je sestavljena iz dveh tristraničnih in treh štiristraničnih Bézierjevih ploskev.

2. PARAMETRIZACIJA TRISTRANIČNE BÉZIERJEVE PLOSKVE

Za razliko od štiristranične verzije je tristranična Bézierjeva ploskev parametrizirana z uporabo

baricentričnih koordinat $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$. Te koordinate med sabo niso neodvisne, saj morajo zadoščati pogoju $u + v + w = 1$. Krajevni vektor \mathbf{p} poljubne točke na tristranični ploskvi reda n je podan z [10]

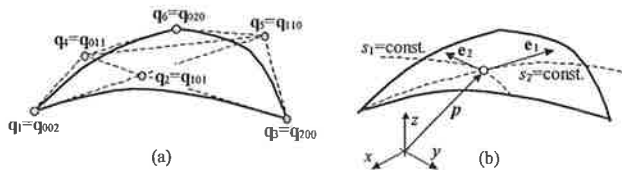
$$\mathbf{p} = \sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{ijk}^n \mathbf{q}_{ijk} \quad (1)$$

kjer je $|\mathbf{i}| = i + j + k$ in $i, j, k \geq 0$. Simbol \mathbf{q}_{ijk} označuje kontrolno točko, $B_{ijk}^n = \hat{B}_{ijk}^n(\mathbf{u})$ pa je bivariantni Bernsteinov polinom reda n , ki je definiran kot

$$B_{ijk}^n = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad |\mathbf{i}| = n \quad (2)$$

Vendar pa taka konvencionalna parametrizacija ni najprimernejša za izpeljavo projektnega elementa. Pri tem je namreč najugodnejše, če je parametriziran z neodvisnimi parametri, ter da ima primerne karakteristične parametrične smeri v vsaki točki. Da bi zadostili temu pogoju, moramo baricentrične koordinate nadomestiti z dvema primernima neodvisnima parametroma.

V ta namen najprej preštevilčimo kontrolne točke in pripadajoče polinome: kontrolni poligon tristranične ploskve je definiran z mrežo $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ kontrolnih točk \mathbf{q}_{ijk} . Vpeljimo nov dogovor ter kontrolne točke označimo z $\mathbf{q}_i, i = 1, \dots, N$, kjer je $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{q}_{00n}$, medtem ko so naslednje kontrolne točke tiste, pri katerih indeksi z leve naraščajo najhitreje (slika 2a). Enak dogovor sprejmimo tudi za polinome, tako da imamo $B_i^N, i = 1, \dots, N$, kjer je $B_1^N \equiv B_{00n}^n$.



Slika 2. Preštevilčenje kontrolnih točk (a) in predlagana parametrizacija ploskve (b)

Nova neodvisna parametra s_1 in s_2 vpeljimo tako, da dobimo primerne parametrične smeri, in sicer

$$u = 1 - s_1, \quad v = s_1 - s_1 s_2, \quad w = s_1 s_2 \quad (3)$$

kjer sta $s_1, s_2 \in [0, 1]$. S temi relacijami postavimo odvisnost $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(s_1, s_2)$, enostavno pa lahko tudi preverimo, da velja $u, v, w \in [0, 1]$ ter $u + v + w = 1$. S tem dogovorom lahko poljubno točko na ploskvi zapišemo kot

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N S_i^N \mathbf{q}_i \quad (4)$$

kjer je $S_i^N = \hat{B}_i^N(\hat{\mathbf{u}}(s_1, s_2))$, tako da lahko zapišemo $S_i^N = \hat{S}_i^N(s_1, s_2)$ in posledično $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}(s_1, s_2)$. S to neodvisno parametrizacijo dobimo primerne parametrične smeri $\mathbf{e}_1 = \partial\mathbf{p}/\partial s_1$ in $\mathbf{e}_2 = \partial\mathbf{p}/\partial s_2$ (slika 2b), ploskev pa s tem postane primerna tudi za izpeljavo projektnega elementa.

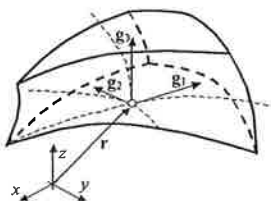
3. TRISTRANIČNI PRIZMATIČNI PROJEKTNI ELEMENT

Za tristranično ploskev potrebujemo shemo N kontrolnih točk. Če vzamemo M takšnih shem, dobimo tristranično prizmatično shemo $N \times M$ kontrolnih točk \mathbf{q}_{ij} , $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$. Te kontrolne točke lahko definirajo tristranični projektni element (slika 3), krajevni vektor njegove poljubne točke pa lahko zapišemo kot

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M S_i^N U_j^M \mathbf{q}_{ij} \quad (5)$$

kjer je $U_j^M = \hat{U}_j^M(s_3)$ j -ti univariantni Bernsteinov polinom [10] reda $M-1$, izražen v odvisnosti od $s_3 \in [0,1]$. Parametrične smeri elementa so podane z $\mathbf{g}_i = \partial\mathbf{r}/\partial s_i$, $i=1,2,3$ (slika 3).

Označimo sedaj s $\mathbf{s}^0 = [s_1^0, s_2^0, s_3^0]^T$ točko, ki določa lego poljubnega vozlišča nekega končnega elementa. Nadalje predpostavimo, da sta lahko \mathbf{s}^0 kakor tudi vse kontrolne točke odvisne od projektnih spremenljivk, zbranih v vektorju \mathbf{b} . Torej velja $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}_{ij}(\mathbf{b})$ in $\mathbf{s}^0 = \mathbf{s}^0(\mathbf{b})$.



Slika 3. Tristranični projektni element s karakterističnimi smermi v točki \mathbf{r}

Za analizo konstrukcije potrebujemo v splošnem za vsako vozlišče naslednje geometrijske podatke: krajevni vektor \mathbf{r}^0 ter morda smerni vektor \mathbf{n}^0 (lupine, nosilci). Če predpostavimo, da lahko \mathbf{n}^0 izrazimo v odvisnosti od \mathbf{g}_i^0 potrebujemo torej za analizo odziva in občutljivosti izraze za naslednje količine: \mathbf{r}^0 , \mathbf{g}_i^0 , $d\mathbf{r}^0/d\mathbf{b}$ ter $d\mathbf{g}_i^0/d\mathbf{b}$.

Krajevni vektor izrazimo enostavno kot

$$\mathbf{r}^0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E_{ij}^{NM} \mathbf{q}_{ij} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0} \quad (6)$$

kje je $E_{ij}^{NM} = S_i^N U_j^M$. Smerni vektorji so podani z

$$\mathbf{g}_k^0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} \mathbf{q}_{ij} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0}, \quad k=1,2,3 \quad (7)$$

kjer je

$$\frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} = \begin{cases} (\partial S_i^N / \partial s_k) U_j^M, & k=1,2 \\ S_i^N (\partial U_j^M / \partial s_k), & k=3 \end{cases} \quad (8)$$

Odvod krajevnega vektorja vozlišča po projektnih spremenljivkah je podan z

$$\frac{d\mathbf{r}^0}{d\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} \frac{ds_k^0}{d\mathbf{b}} \right) \mathbf{q}_{ij} + E_{ij}^{NM} \frac{d\mathbf{q}_{ij}}{d\mathbf{b}} \right] \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0} \quad (9)$$

medtem, ko so odvodili smernih vektorjev

$$\frac{d\mathbf{g}_k^0}{d\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial^2 E_{ij}^{NM}}{\partial s_k \partial s_m} \frac{ds_m^0}{d\mathbf{b}} \right) \mathbf{q}_{ij} + \frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} \frac{d\mathbf{q}_{ij}}{d\mathbf{b}} \right] \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0}, \quad k=1,2,3 \quad (10)$$

Izrazi (6-10) so vse kar potrebujemo za izračun potrebnih geometrijskih podatkov (ter njihovih odvodov po projektnih spremenljivkah) za poljuben končni element.

4. ZGLEDA

Za ilustracijo teorije bomo obravnavali dva zgleда. Prvi vsebuje zvezno konstrukcijo, njegov namen pa je ilustrirati prednosti tristraničnega elementa kjer ta predstavlja bolj naravno izbiro. Drug zgled vsebuje diskretno konstrukcijo, njegov namen pa je pokazati uporabnost enakega pristopa tudi za relativno enostavne primere. V obeh zgledih sta podatka o materialu enaka: elastični modul znaša $E = 210000 \text{ MPa}$, Poissonov količnik pa je $\nu = 0.3$.

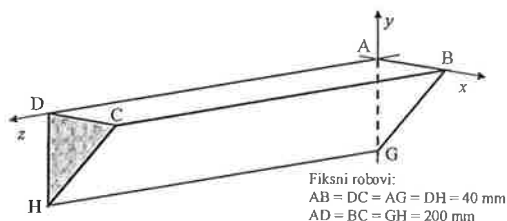
Oba zgleда sta zapisana v obliki nelinearnega optimizacijskega problema in rešena z uporabo optimizacijskega modula AMOPT [11-12].

Zgled 1. Optimizacija tristranične konzole

Obravnavajmo tristranično konzolo, ki jo prikazuje slika 4. Konzola je togo podprta pri $z = 0$ (ploskev ABG) in obremenjena na gornji ploskvi ABCD z eno od dveh enakomerno porazdeljenih sil: (I) $f_y = -40 \text{ N/cm}^2$ in (II) $f_x = 30 \text{ N/cm}^2$. Obe obremenitvi sta ločeno upoštevani v okviru

enega optimizacijskega problema.

Naš namen je določiti obliko robov BG in CH kakor tudi obliko ploskve BCHG tako, da bo teža konzole minimalna. Pri katerikoli od obeh obremenitev von Misesove napetosti ne smejo preseči meje 100 MPa .

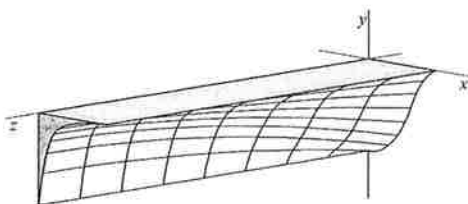


Slika 4. Tristranična konzola

Za parametrizacijo mreže končnih elementov bomo uporabili en tristranični projektalni element s 15×3 kontrolnimi točkami. Kontrolne točke, ki določajo obliko ploskve BCHG so odvisne od 18 projektivnih spremenljivk. Konstrukcija je diskretizirana z uporabo 20-vozliščnih končnih elementov tipa serendipity.

Preglednica 1. Primerjava začetnega in optimalnega projekta

	Začetni	Optimalni
Volumen [cm^3]	160.0	93.5
Max. prekoračitev pogojev [%]	27.9	0.0



Slika 5. Optimalna oblika konzole

Postopek reševanja je bil stabilen, optimalna oblika pa je bila dobljena po 5 iteracijah. Kot je razvidno iz preglednice, je optimizacijski proces izpolnil postavljene pogoje (na začetku so ti bili prekoračeni) in hkrati zmanjšal volumen konstrukcije. Optimalna oblika je prikazana na sliki 5.

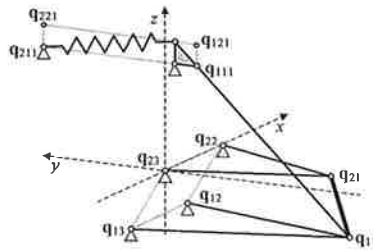
Še komentar k izbiri projektne elementa. Za uporabo tristranične variante smo potrebovali $15 \times 3 = 45$ kontrolnih točk. Če bi uporabili štiristranično varianto, bi za enako fleksibilnost potrebovali element s $5 \times 5 \times 3 = 75$ kontrolnimi točkami. To pa je precej več kot 45, torej je v

danem primeru uporaba tristraničnega elementa precej bolj racionalna.

Zgled 2. Optimizacija obese Formula S

V drugem primeru bomo obravnavali obeso majhnega dirkalnika, narejenega na Fakulteti za strojništvo za tekmovanje Formula Student 2002 v Birminghamu. Dejansko izvedbo obese smo tukaj uporabili kot začetno konstrukcijo, kot cilj pa smo si zastavili minimizacijo napetosti v elementih obese pri konstantni teži konstrukcije.

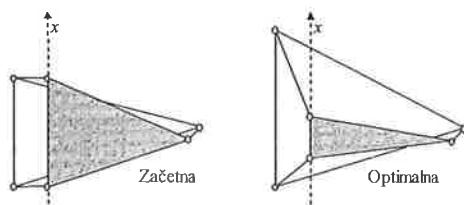
Konstrukcija je opisana s pomočjo dveh projektlnih elementov DE1 in DE2 (slika 6). DE1 is je tristranični element s 3×2 kontrolnimi točkami (KT) $q_{11} \dots q_{32}$, medtem ko je DE2 štiristranični element z $2 \times 2 \times 1$ KT $q_{111} \dots q_{221}$. Pri iskanju najboljše izvedbe lahko nekatere KT premikamo v x smeri (smer vožnje). Vse KT elementa DE2 se lahko premaknejo za enako razdaljo (1 projektna spremenljivka), medtem ko se KT q_{12} , q_{22} , q_{13} in q_{23} premikajo neodvisno. Torej imamo skupaj 5 projektlnih spremenljivk.



Slika 6. Prikaz desne sprednje obese in obeh uporabljenih projektlnih elementov

Optimizacijski problem formuliramo tako: najdi takšne lege KT, da bodo faktorji $\xi = \sigma / \sigma^*$ v petih paličnih elementih minimalni, medtem ko bo teža obese ostala nespremenjena. Pri tem smo s simbolom σ označili dejansko napetost v palicah, simbol σ^* pa označuje ali dopustno napetost (za natezne palice) ali pa polovico uklonske napetosti (za tlačene palice). Razen tega so omejeni tudi pomiki vzmetnega elementa, s čimer zagotovimo varno delovanje obese. Trije ločeni obremenitveni primeri so obravnavani v eni optimizacijski nalogi: (a) vožnja čez oviro, (b) polno zaviranje in (c) vožnja v oster levi ovinek. Zaradi velikih pomikov nihajke, je obeso potrebno obravnavati kot kinematično nelinearen sistem.

Problem je bil rešen po približno 20 iteracijah. Rezultati so dokaj zadovoljivi, saj se je največji faktor $\max \xi$ zmanjšal od 0.917 na približno 0.562. Varnostni faktor za napetosti se je torej povečal za približno 63% pri enaki teži obese. Začetna in končna oblika projektlnega elementa DE1 (pogled od zgoraj) sta prikazani na sliki 7.



Slika 7. Obliki projektnega elementa DE1

5. ZAKLJUČEK

V prispevku je bil predstavljen tristranični projektne element. Čeprav lahko namesto tristraničnega elementa vedno uporabimo splošnejšega štiristraničnega, pa tristranična varianta mnogokrat predstavlja bolj naravni izbor. Posledica je manjše število potrebnih kontrolnih točk, kar pomeni manj priprave vhodnih podatkov in manj geometrijskih pogojev. Tristranične projektne elemente lahko poljubno kombiniramo s štiristraničnimi.

6. LITERATURA

- [1] Haftka RT, Grandhi RV. Structural shape optimization - a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1986; **57**: 91-106.
- [2] Imam MH. Three-dimensional shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1982; **18**: 661-673.
- [3] Braibant V, Fleury C. Shape optimal design using B-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1984; **44**: 247-267.
- [4] Shyy YK, Fleury C, Izadpanah K. Shape optimal design using high-order elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988; **71**: 99-116.
- [5] Maute K, Ramm E. Adaptive topology optimization. *Structural optimization* 1995; **10**: 100-112.
- [6] Ohsaki M, Nakamura T, Isshiki Y. Shape-size optimization of plane trusses with designer's preference. *Journal of structural engineering* 1998; **124**: 1323-1330.
- [7] Kegl M, Antes H. Shape optimal design of elastic space frames with non-linear response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1998; **43**: 93-110.
- [8] Wang X, Zhou J, Hu Y. A physics-based parametrization method for shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1999; **175**: 41-51.
- [9] Kegl M. Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2000; **49**: 1571-1588.
- [10] Farin G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design* (2nd edn). Academic Press: New York, 1993.
- [11] Kegl M, Oblak MM. Optimization of mechanical systems: on non-linear first-order approximation with an additive convex term. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 1997; **13**: 13-20.
- [12] Kegl M, Butinar BJ, Kegl B. An efficient gradient-based optimization algorithm for mechanical systems. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 2002; **18**: 363-371.

Določanje kritične obremenitve krožnih kolobarjev v elasto-plastičnem območju

Boštjan Brevec, Franc Kosel *

Determination of buckling loads of circular annular plates in the elastic-plastic region

Povzetek

V prispevku je opisano eksperimentalno določanje kritične obremenitve ter izbočitvenega koeficienta krožnega kolobarja konstantne debeline iz materiala z utrjevalno karakteristiko. Kolobar je na zunanjem robu členkasto podprt ter obremenjen z enakomerno tlačno obremenitvijo, notranji rob pa je prost in neobremenjen. Nestabilno stanje se pojavi, ko je napetostno stanje v kolobarju že v elasto-plastičnem področju. Rezultate preizkusov primerjamo z rezultati matematičnega modela, v katerem upoštevamo idealizirano elastično linearno utrjevalno karakteristiko materiala ali izmerjeno dejansko karakteristiko. Opisan je postopek merjenja, preizkuševališče, način izbire materiala ter določitve geometrije preizkušancev, ki zagotavlja, da pride pri preizkusu do izbočitve v elasto-plastičnem območju. Razlika med meritvami in izračuni znaša 5.5%.

Abstract

The paper treats the experimental determination of the buckling load and the buckling coefficient of a circular annular plate with constant thickness which is made of a elastic-plastic hardening material. The annular plate is on the outer edge simply supported and uniformly loaded, the inner edge is free and not loaded. The unstable state appears when the stress state is already in the elastic-plastic domain. The experimental results are compared to the results obtained from the mathematical model which can take into account an idealized elastic linear hardening rheological model or a measured stress-strain curve. The paper describes the measuring procedure, the equipment and the choice of the material and the geometry of the specimens, which assure that elastic-plastic buckling occurs during the experiment. The difference between the experimental and numerical results is 5.5%.

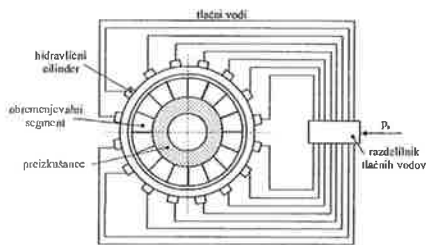
*Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, Aškerčeva 6, SI-1000 Ljubljana
(bostjan.brevec@fs.uni-lj.si, franc.kosel@fs.uni-lj.si)

1 Uvod

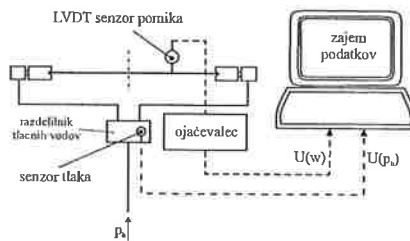
Ekspperimentalno določanje kritične obremenitve temelji na merjenju pomikov plošče v prečni smeri w v odvisnosti od obremenitve. Meritve izvajamo na preizkuševališču za preučevanje stabilnosti okroglih plošč, ki omogoča obremenjevanje krožnih plošč po zunanjem in/ali notranjem robu in je bilo zasnovano za raziskave stabilnosti plošč v elastičnem področju [1, 2, 3, 4]. Na podlagi izmerjene zveze med obremenitvijo in prečnim pomikom w lahko s pomočjo ustreznih metod (Southwellova [5] in metoda prevojnne točke [4]) določimo obremenitev, pri kateri krožna plošča preide iz stabilnega v nestabilno stanje. Pri izbočitvi plošče v elastičnem področju, ki se pojavi pri dovolj vitkih–tankih ploščah, pride do elastičnih deformacij in plošča se po razbremenitvi vrne v začetno stanje, trajnih deformacij ni. Pri izbočitvi v elasto–plastičnem področju, pride do trajnih deformacij, po razbremenitvi se vzpostavi novo deformirano ravnotežno stanje. Namen preizkusov je primerjava z rezultati matematičnega modela [6], [7], pri katerem kritične obremenitve računamo z uporabo ravnotežne metode reševanja stabilnostnih problemov ob upoštevanju dveh teorij plastičnosti.

2 Preizkuševališče

Sestavljeno je iz *vpenjalnega dela* (slika 1) s 16–imi krožnimi obremenjevalnimi segmenti s hidravličnimi cilindri, hidravlično črpalko, krmilnikom in krmilnim vezjem za regulacijo tlaka ter *elektronskega merilnega sklopa* (slika 2), ki zajema senzor tlaka *HBM P19*, LVDT senzor pomika *HBM WA 50* z ojačevalnikom *MES HPSC 3102*, ter osebni računalnik z A/D kartico *INTELLIGENT INSTRUMENTATION PCI-20428W-1* za zajem podatkov ter programsko opremo *Visual Designer*.



Slika 1: Shema preizkuševališča



Slika 2: Shema merilne verige

Pri preizkusu merimo odvisnost $p_h(w)$. Obremenitev roba plošče izračunamo posredno iz izmerjenega tlaka v hidravličnem sistemu. Zvezo med obremenitvijo in tlakom v hidravličnem sistemu določimo z umerjanjem tako, da z ustreznim merilnikom sile merimo silo obremenjevalnih segmentov (hidravličnih cilindrov) v odvisnosti od tlaka. Meritve večkrat ponovimo, rezultate pa aproksimiramo z regresijsko premnico. Tlak v hidravličnem sistemu p_h merimo na razdelilniku tlačnih vodov, pomike v prečni smeri w pa z LVDT senzorjem. Ta je nameščen na posebno konstrukcijo (šestilo), ki je pritrjena na zunanji obroč preizkuševališča in omogoča merjenje pomikov na izbranem radiju tudi v obodni

sméri. Izhodne analogne signale merimo in shranjujemo na osebnem računalniku preko A/D kartice za zajem podatkov.

Preizkušanci–krožne plošče so lahko polne ali pa z izrezi poljubne oblike. Obremenitev je mogoča na zunanjem robu, notranji rob pa je običajno neobremenjen in prost, razen pri ploščah z notranjimi krožnih odprtinami, ko s posebno pripravo obremenimo tudi notranji rob. Rob krožne plošče mora biti posebej obdelan tako, da vpetje čimbolj ustreza členkasti podpori. Pomembnejši tehnični podatki preizkuševališča so: radij segmentov (zunanji radij preizkušancev) $b = 150$ mm ali $b = 300$ mm; število hidravličnih cilindrov in obremenjevalnih segmentov $N_s = 16$; dolžina loka segmenta $L_s = 58.9$ mm; hidravlični pogonski agregat *HPA-2B/320-16-2.2*, maksimalni tlak 32 MPa, pretok 2 l/min; nazivni presek hidravličnega cilindra $A_{nom} = 126$ mm².

3 Izbira preizkušancev

Preučevanje izbočitve v elasto–plastičnem področju zahteva razmeroma debele preizkušance. Če definiramo vitkost kot razmerje med zunanjim premerom kolobarja in debelino $\eta = \frac{2b}{h}$, to pomeni preizkušance ustrezno majhne vitkosti η . Konstrukcija preizkuševališča s hidravličnimi elementi ter največji hidravlični tlak, ki znaša $p_{h,max} = 32$ MPa, nam določajo največjo razpoložljivo obremenitev $P_{z,max} = 63.8$ N/mm.

Mejna vitkost η_{mej} , pod katero se plošča izboči v elasto–plastičnem področju, je odvisna od načina obremenitve, podprtja, razmerja radijev $\delta = \frac{a}{b}$ in materialnih lastnosti (σ_{pl} , E , ν). Določimo jo lahko, če poznamo elastično napetostno stanje ter izbočitveni koeficient κ_{el} za elastično izbočitev. V našem primeru podrobneje analiziramo osnosimetrično elastično napetostno stanje σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ v kolobarju, ki je na zunanjem robu obremenjen z enakomerno tlačno obremenitvijo $p_z = -p$, notranji rob pa je neobremenjen. Osnosimetrično elastično napetostno stanje opisujeta enačbi:

$$\sigma_{rr}(r) = -p \frac{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}{1 - \delta^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r) = -p \frac{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}{1 - \delta^2}.$$

Največja Misesova primerjalna napetost σ_M^{max} se pojavi na notranjem robu ($r = a$), kjer se, ko primerjalna napetost doseže mejo plastičnosti σ_{pl} , prične plastifikacija. Obremenitev pričetka plastifikacije izračunamo iz pogoja $\sigma_M^{max} = \sigma_{pl}$:

$$\sigma_M^{max} = \sqrt{\sigma_{rr}(a)^2 - \sigma_{rr}(a)\sigma_{\varphi\varphi}(a) + \sigma_{\varphi\varphi}(a)^2} = \frac{2p}{1 - \delta^2},$$

$$p_y = \frac{\sigma_{pl}(1 - \delta^2)}{2}.$$

Izbočitev v elasto–plastičnem področju dobimo, ko je kritična obremenitev p_{cr}^{el} večja od obremenitve pričetka plastifikacije p_y oziroma $p_{cr}^{el} \geq p_y$. Ker je izbočitveni koeficient za

elastično izbočitev κ_{el} znan, lahko izračunamo mejno vitkost in s tem minimalno debelino preizkušanca:

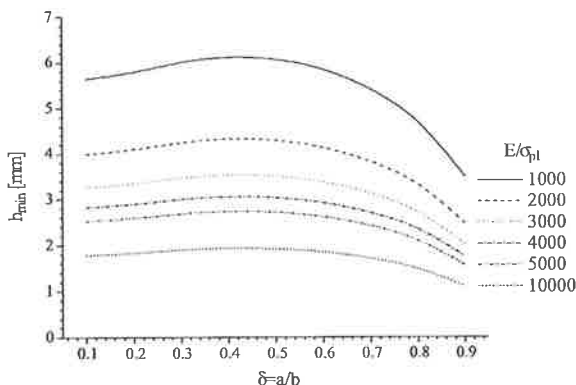
$$\eta_{mej} = \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}(1-\nu^2)}} \cdot \sqrt{\frac{2\kappa_{el}^2}{3(1-\delta^2)}} \quad , \quad h_{min} \geq 2b \cdot \eta_{mej}$$

Maksimalno debelino preizkušanca izračunamo iz pogoja, da kritična obremenitev ob izbočitvi ne preseže največje obremenitve preizkuševališča $P_{z,max}$. Ker je kritična obremenitev v elasto-plastičnem območju manjša od tiste za elastično območje, najbolj neugoden primer izberemo tako, da predpostavimo elastično izbočitev kolobarja. Ocena za maksimalno debelino preizkušanca oziroma minimalno vitkost, ki sledi iz pogoja $p_{cr}^e \cdot h_{max} \leq P_{z,max}$, je:

$$h_{max} \leq \sqrt[3]{\frac{12 P_{z,max} (1-\nu^2) b^2}{\kappa_{el}^2 E}}$$

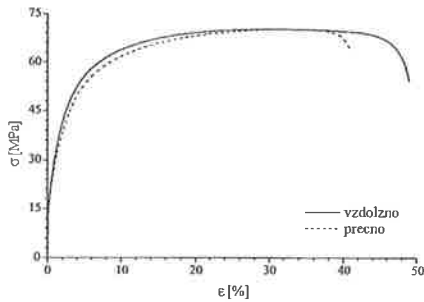
$$\eta_{min} \leq \sqrt[3]{\frac{2 \kappa_{el}^2 E b}{3 P_{z,max} (1-\nu^2)}}$$

Debelino preizkušancev izberemo med $h_{min} \leq h \leq h_{max}$. Diagram na sliki 3 prikazuje minimalne debeline za kolobarja s prostim notranjim in členkasto podprtim zunanjim robom ter obremenitvijo $\alpha = 0$, $\beta = -1$. Debeline so podane za različna razmerja radijev δ in razmerja E/σ_{pl} . Ker je maksimalna obremenitev $P_{z,max}$, ki jo na preizkuševališču dosežemo, razmeroma majhna, moramo izbrati material z razmeroma majhnim modulom elastičnosti E in ustrezno mejo plastičnosti σ_{pl} , ki mora poleg primernih mehanskih lastnosti imeti tudi elastično utrjevalno karakteristiko.

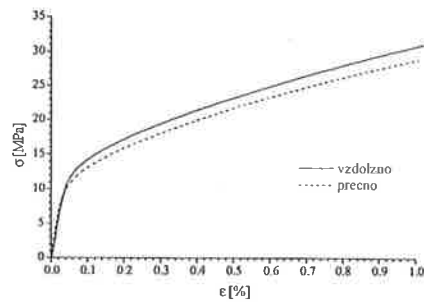


Slika 3: Mejne debeline h_{min} pri različnih razmerjih δ ter E/σ_{pl} , $\nu = 0.3$

Na osnovi pregleda standardov smo izbrali Al pločevino debeline $h = 4$ mm v osnovnem mehkem stanju (oznaka po standardu EN AW-1050A [Al99,5] oziroma po DIN standardu DIN Al99,5 stanje O/H111), za katero je deklarirana meja plastičnosti $R_{p0,2}$ najmanj 20 MPa. Dejanske mehanske lastnosti smo izmerili naknadno z enoosnimi nateznimi preizkusi. Preizkušance smo izdelali tako, da so bili orientirani v smeri valjanja ter prečno na smer valjanja pločevine. Na ta način smo preverili anizotropijo materiala.



Slika 4: Izmerjeni $\sigma - \varepsilon$ diagram materiala preizkušancev



Slika 5: Izmerjeni $\sigma - \varepsilon$ diagram, območje do 1 % skupne deformacije

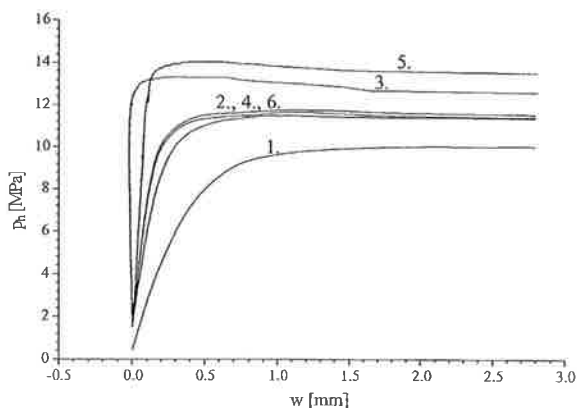
Diagrama na slikah 4 in 5 prikazujeta srednje vrednosti nateznih preizkusov za prečno in vzdolžno orientacijo preizkušancev glede na smer valjanja. Razvidno je, da ima material izrazito utrjevalno karakteristiko. V smeri valjanja so napetosti tečenja nekoliko višje napetosti, modul elastičnosti in meja plastičnosti pa sta približno enaka. Diagram na sliki 5 prikazuje točko začetka plastifikacije, kjer vidimo, da je meja plastičnosti σ_{pl} precej nižja od $R_{p0,2}$ in $R_{p0,1}$. Izmerjene mehanske lastnosti so: elastični modul $E = 30800$ MPa; meja plastičnosti $\sigma_{pl} = 10$ MPa; meja plastičnosti $R_{p0,1} = 15.3$ MPa; meja plastičnosti $R_{p0,2} = 17.9$ MPa. Če aproksimiramo diagram v elasto-plastičnem področju do skupne deformacije 5% z linearno utrjevalnim reološkim modelom, je faktor linearnega utrjevanja materiala približno $f = 0.4$.

4 Rezultati meritev

Izdelali smo šest preizkušancev z zunanjim radijem $b = 150$ mm in razmerjem radijev $\delta = 0.4$. Pred preizkusi smo izmerili dejanske dimenzije ter preverili začetno neravnost preizkušancev, za katero se je pri predhodnih raziskavah izkazalo, da ima precejšen vpliv na rezultate meritev [1], [2], [4]. Kontrolo smo izvedli na dva načina in sicer optično z ravno letvijo ter z merjenjem relativne neravnosti zunanjšega ($r = b$) in notranjšega ($r = a$) roba kolobarja (1) glede na izbrano začetno točko. Preizkušane smo vpeli v preizkuševališče tako, da smo izničili morebitne zračnosti na mestih podpor in na ta način zagotovili čimbolj enakomerno zunanjo obremenitev. Pri tem igra pomembno vlogo natančnost priprave roba preizkušanca.

Diagrami na sliki 6 prikazujejo izmerjene funkcije $p_h(w)$. Vidimo, da z naraščanjem obremenitve-tlaka p_h naraščajo tudi pomiki v prečni smeri w . Zanimivo je, da za razliko

od preizkusov pri katerih pride do elastične izbočitve, ne dobimo diagrama s prevojno točko temveč kolobar pri kritični obremenitvi zelo hitro preide v novo stabilno stanje, za katero je po razbremenitvi značilen trajni pomik w_{izb} , ki znaša od 11 do 13.5 mm (tabela 1).



Slika 6: Izmerjeni diagrami $p_h(w)$

V nasprotju s predhodnimi raziskavami, kjer so kritično obremenitev iz rezultatov meritev določali z metodo prevojne točke [4] ali s Southwellovo metodo [5], [1], [2], smo lahko točko prehoda kolobarja iz stabilnega v nestabilno stanje natančno določili že iz diagramov. Pri tem smo za kritično obremenitev $p_{h,cr}$ upoštevali največjo izmerjeno obremenitev pri posameznem preizkusu.

Diagrami meritev preizkušancev 2, 4 in 6 se med seboj dobro ujemajo. Meritev 1 prikazuje hitrejšo naraščanje deformacije v prečni smeri ter nižjo vrednost tlaka ob izbočitvi, kar lahko pripišemo izmerjeni večji začetni neravnosti od ostalih preizkušancev. Pri meritvah preizkušancev 3 in 5 je značilen majhen prečni pomik w vse do točke, v kateri je tlak skoraj enak kritičnemu tlaku, sledi pa trenuten prehod v novo deformirano stabilno stanje, pri čemer tlak celo nekoliko pade. Čeprav se začetna neravnost preizkušancev 3 in 5 bistveno ne razlikuje od preizkušancev 2, 4 in 6, predvidevamo, da sta preizkušanca v teh primerih pokazala nadkritično obnašanje. To lahko potrdimo z dejstvom, da znaša teoretična obremenitev za izbočitev v elastičnem področju 22.153 N/mm, obremenitvi pri kateri sta preizkušanca 3 in 5 izbočila, pa sta za 21.2 % oziroma za 27.5 % večji.

Če vzamemo kot merodajne preizkuse 2, 4 in 6, znaša povprečni hidravlični tlak ob izbočitvi $p_{h,cr} = 11.633$ MPa, kar ustreza zunanji enotski kritični obremenitvi $P_{z,cr} = 23.15$ N/mm oziroma izbočitvenemu koeficientu $\kappa = 1.706$. Ugotovljena absolutna napaka merjenja zunanje enotske obremenitve znaša ± 1.03 N/mm, kar pri izmerjeni zunanji enotski obremenitvi $P_{z,cr} = 23.15$ N/mm ustreza relativni napaki meritve $\pm 4.5\%$.

Tabela 1: Relativna neravnost kolobarja, maksimalna razlika

Pr.	r=a [mm]	r=b [mm]	w _{izb} [mm]
1.	0.65	0.56	11.0
2.	0.38	0.25	12.0
3.	0.26	0.20	13.5
4.	0.33	0.29	13.2
5.	0.35	0.25	13.0
6.	0.11	0.27	12.8

Tabela 2: Izmerjene kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti

Pr.	p _{h,cr} [MPa]	P _{z,cr} [N/mm]	κ [/]
1.	10.02	19.77	1.577
2.	11.49	22.85	1.695
3.	13.40	26.85	1.838
4.	11.77	23.44	1.717
5.	14.06	28.24	1.884
6.	11.64	23.16	1.707

5 Izračuni preizkušancev

Za geometrijo in mehanske lastnosti preizkušancev ($a = 59.017$ mm, $b = 150.5$ mm, $h = 3.997$ mm $E = 30800$ MPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_{pl} = 10$ MPa) izvedemo primerjalne izračune z matematičnim modelom [6], [7]. Pri tem upoštevamo linearni utrjevalni reološki model materiala s faktorjem utrjevanja $f = 0.4$, za primerjavo pa izvedemo izračune tudi z upoštevanjem izmerjenega $\sigma - \varepsilon$ diagrama, slika 4 in 5. Upoštevamo dve teoriji plastičnosti in sicer končne napetostno deformacijske zveze (KNDZ, Hencky–jeve enačbe) ter diferencialne napetostno deformacijske zveze (DNDZ, Reuss–Prandtlove enačbe).

Tabela 3: Izračunane kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti, linearno utrjevalni reološki model

	KNDZ	DNDZ
p_{cr}/σ_{pl}	0.5179	0.5186
$(p_{cr}/\sigma_{pl})^{el}$	0.5542	0.5542
P_{cr} [N/mm]	20.699	20.730
P_{cr}^{el} [N/mm]	22.153	22.153
$\Delta_{P_{cr}}$	-6.6 %	-6.4 %
κ	1.6134	1.6146
κ_{el}	1.6691	1.6691
Δ_{κ}	-3.3 %	-3.3 %

Tabela 4: Izračunane kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti, dejanski $\sigma - \varepsilon$ diagram

	KNDZ	DNDZ
p_{cr}/σ_{pl}	0.5200	0.5226
$(p_{cr}/\sigma_{pl})^{el}$	0.5542	0.5542
P_{cr} [N/mm]	20.783	20.889
P_{cr}^{el} [N/mm]	22.153	22.153
$\Delta_{P_{cr}}$	-6.2 %	-5.7 %
κ	1.6167	1.6208
κ_{el}	1.6691	1.6691
Δ_{κ}	-3.1 %	-2.9 %

Rezultati izračunov so prikazani v tabelah 3 in 4, kjer je podana tudi primerjava elasto-plastičnih kritičnih obremenitev in izbočitvenih koeficientov z elastičnimi kritičnimi obremenitvami in izbočitvenimi koeficienti. Razlike izračunov po eni oziroma drugi teoriji plastičnosti so minimalne, pri čemer izračuni z upoštevanjem diferencialnih napetostno deformacijskih zvez dajejo nekoliko višje kritične obremenitve kot v primeru končnih napetostno deformacijskih zvez. Če primerjamo izračunane vrednosti z izmerjenim izbočitvenim koeficientom $\kappa = 1.706$, $\pm 4.5\%$, ugotovimo, da znaša razlika 5.5%.

6 Zaključek

Glede na predhodne eksperimentalne raziskave stabilnosti krožnih kolobarjev v elastičnem področju, pri katerih so prehod iz stabilnega v nestabilno stanje določali z metode prevojne točke ali Southwellovo metodo, so preizkusi, pri katerih je prišlo do elasto-plastične izbočitve, pokazali drugačno obnašanje. Kolobar preide v nestabilno stanje skoraj v trenutku pri relativno majhnem prečnem pomiku, ki nato naraste do velikega trajnega pomika pri skoraj konstantni obremenitvi. Ta lastnost omogoča direktno določanje kritične obremenitve iz diagrama meritve. Eksperimentalno določeni izbočitveni koeficienti so 5.5% večji od izračunanih, pri čemer znaša ugotovljena merilna negotovost eksperimentalnih rezultatov $\pm 4.5\%$. Ocenjujemo, da je ujemanje rezultatov zadovoljivo, čeprav bi z uporabo natančnejšega merilnika sile pri določanju zveze med silo cilindra in hidravličnim tlakom merilno negotovost eksperimentalnih rezultatov lahko še zmanjšali. Pri izračunih, kjer smo upoštevali linearno utrjevalni reološki model ter izmerjeni $\sigma - \varepsilon$ diagram materiala, vidimo, da aproksimacija z linearnim utrjevalnim modelom daje primerljive rezultate.

Literatura

- [1] Tomaž Kumelj. Stabilnost ploskovnih elementov. Master's thesis, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 1977.
- [2] Miha Baebler. Eksperimentalno določanje stabilnosti ploskovnih elementov. Master's thesis, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, 1979.
- [3] Miha Baebler and Franc Kosel. Experimental investigation of the stability of a plate with hole. In *Anton Kuhelj memorial volume*, pages 205–214. SAZU, Ljubljana, 1982.
- [4] Franc Kosel and Jin Chen. Buckling of a thin annular plate subjected to two apposite locally acting pressures and supported at two opposite points. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(12):1325–1343, 1997.
- [5] S.P. Timoshenko and J.M. Gere. *Theory of elastic stability*. Mc-Graw Hill, New York, 1961.
- [6] Boštjan Bremec and Franc Kosel. Izbočitev krožnega kolobarja v elastičnem-plastičnem področju z upoštevanjem utrjevalne karakteristike. In Leopold Škerget, editor, *Zbornik del – Kuhljevi dnevi '01*, pages 65–72. Slovensko društvo za mehaniko, 2001.
- [7] Boštjan Bremec and Franc Kosel. Buckling of a circular annular plate in the elastic-plastic region: an elastic linear hardening rheological model. *Journal of mechanical Engineering–Strojniški vestnik*, 47(9):554–565, 2001.

VPLIV ZRNATE STRUKTURE NA ELASTO-PLASTIČNI ODZIV POLIKRISTALNEGA SKUPKA

Marko Kovač¹, Igor Simonovski¹, Leon Cizelj¹

EFFECT OF GRAIN STRUCTURE ON THE ELASTIC-PLASTIC RESPONSE OF POLYCRYSTALLINE AGGREGATE

Povzetek

Ena od ključnih predpostavk klasične mehanike kontinuuma je idealiziranje nehomogene mikrostrukture materiala. Ob takšni predpostavki ne moremo natančno napovedati razlik med meritvami odziva različno velikih, a geometrijsko podobnih preizkušancev (vpliv velikosti). Za določitev vpliva zrnate strukture na makroskopski odziv je predlagan pristop, ki modelira elasto-plastično obnašanje materiala na mezoskopski ravni. Glavna ideja je razdelitev kontinuuma na posamezne dele. Obravnava makroskopskega elementa je razdeljena na modeliranje naključne kristalne strukture (uporaba Voronojevega mozaika in naključne orientiranosti kristalne rešetke) ter izračun napetostnega oziroma deformacijskega polja. Glavni namen prispevka je ocena minimalne velikosti polikristalnega skupka, nad katero se makroskopska nehomogenost zrnate strukture danega materiala porazgubi in zato ni pričakovati, da bi povzročala opaznejši vpliv velikosti.

Abstract

One of the key assumptions of classical continuum mechanics is idealization of non-homogenous microstructure of material. With this assumption in mind the differences between measured responses of specimens, which are different in size but geometrically similar (size effect) cannot be predicted accurately. A numerical approach, which models elastic-plastic behavior on mesoscopic level, is proposed to determine effect of polycrystalline grain structure on macroscopic response. The main idea is to divide continuum into a set of sub-continua. Analysis of macroscopic element is divided into modeling the random grain structure (using Voronoi tessellation and random orientation of crystal lattice) and calculation of strain/stress field. The main purpose of the paper is to estimate minimum size of polycrystalline aggregate above which the macroscopic inhomogeneity of grain structure of given material vanishes and is therefore not expected to cause significant size effects.

¹ Institut "Jožef Stefan", Odsek za reaktorsko tehniko, Jamova 39, 1000 Ljubljana, Slovenija

1 Uvod

V zadnjih letih je bilo veliko naporov vloženih v določanje mehanskih lastnosti polikristalnih skupkov različnih velikosti. Klasična mehanika kontinuuma predpostavlja, da so lastnosti materiala homogene prek celotnega spektra tipičnih dolžin in zato neodvisne od velikosti preizkušanca. Razlik med meritvami odziva različno velikih, a geometrijsko podobnih preizkušancev (vpliv velikosti) tako ne moremo natančno napovedati [1]. To je v nasprotju z eksperimentalnimi podatki, ki kažejo, da velikost preizkušanca pomembno vpliva na obnašanje materiala. Tako se je pojavilo več pristopov, ki numerično modelirajo nehomogen material na mezoskopskem nivoju. Pri tem so se uveljavili pristopi, ki poskušajo napovedati obnašanje polikristalnih skupkov z upoštevanjem zrnate strukture materiala [2]. Dosedanji postopki so bili bolj osredotočeni na elastično območje, pristopi k mezoskopskemu modeliranju plastičnih deformacij pa so se razvili šele v zadnjem desetletju.

Za določitev vpliva polikristalne zrnate strukture na makroskopski odziv je predlagan numerični pristop, ki modelira elasto-plastično obnašanje materiala na mezoskopski ravni. Glavna ideja je razdelitev kontinuuma (npr. polikristalnega skupka) na posamezne dele (npr. kristalna zrna). Skupne lastnosti takšnega polikristalnega skupka so posledica lastnosti naključno oblikovanih in orientiranih kristalnih zrn ter njihovega števila v polikristalnem skupku. Obravnava makroskopskega elementa je razdeljena na modeliranje naključne kristalne strukture (Voronovej mozaik in naključna orientiranosti kristalne rešetke) ter izračun napetostnega oziroma deformacijskega polja (uporaba enostavnih fizikalnih modelov).

Uporabljena je metoda končnih elementov (programski paket ABAQUS [3]), ki se je v dosedanjih raziskavah izkazala kot primerna za računsko vrednotenje vedenja polikristalnih skupkov na mezoskopski ravni [2], [4]. Zaradi računske zahtevnosti je analiza omejena na 2D modele. V analizi so uporabljeni podatki za jeklo za reaktorske tlačne posode 22 NiMoCr 3 7, ki ima bainitno mikrostrukturo s kubično prostorsko centrirano rešetko.

Poglavitni namen prispevka je ocena minimalne velikosti polikristalnega skupka nad katero makroskopska nehomogenost zrnate strukture danega materiala izgine in zato ni pričakovati, da bi povzročala opaznejši vpliv velikosti.

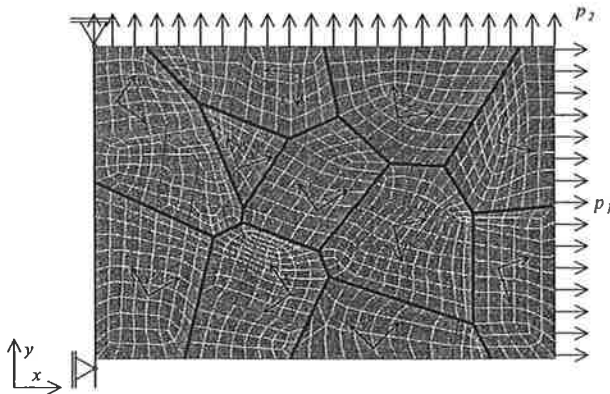
2 Teoretični model

Osnovne predpostavke teoretičnega modela so:

- Za modeliranje naključne polikristalne strukture je uporabljen Voronovej mozaik.
- Vsako polikristalno zrno je predpostavljeno anizotropno elastično z naključno orientacijo kristalne rešetke.
- Model plastičnosti predpostavlja, da plastična deformacija nastane zaradi zdrsa po vnaprej določenih ravninah zdrsa kristalne rešetke. Ravnine in smeri zdrsa so določene z orientacijo kristalne rešetke, ki se od zrna do zrna razlikuje (naključna orientacija).

2.1 Voronovej mozaik

Koncept Voronovevega mozaika je šele od nedavnega obsežneje uporabljen v znanosti o materialih, še posebej za modeliranje naključnih mikrostruktur kot so na primer skupki zrn v polikristalih, vzorci medkristalnih razpok in kompozitni materiali [4], [5]. Voronovej mozaik tvori celična struktura, ki jo dobimo iz Poissonovih točk tako, da postavimo mejo med celicama pravokotno na zveznico (na polovico razdalje) med sosednjima Poissonovima točkama. Rezultat je množica konveksnih mnogokotnikov (slika 1), ki popolnoma zapolni tako razdeljeno ravnino. Vsi v tem prispevku uporabljeni mozaiki so izdelani s programom VorTess [6].



Slika 1: Primer Voronojevega mozaika z vrisanimi orientacijami posameznih kristalnih zrn in mrežo končnih elementov

2.2 Anizotropna elastičnost

Jeklo za reaktorske tlačne posode 22 NiMoCr 3 7 ima kubično prostorsko centrirano rešetko s precej izrazitim ortotropnim elastičnim odzivom. Predpostavljeno je, da se monokristal odziva kot kontinuum, pri čemer zanj velja posplošeni Hookov zakon [7]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

kjer σ_{ij} predstavlja tenzor napetosti 2. reda, C_{ijkl} tenzor elastičnih konstant kontinuuma 4. reda in ε_{kl} tenzor specifičnih deformacij. Elastične lastnosti polikristalnega skupka so popolnoma določene z lastnostmi in medsebojnim delovanjem posameznih monokristalov. Elastični materialni parametri so pridobljeni iz literature za α -železo s kubično prostorsko centrirano kristalno rešetko (npr. [8], [9]). Predpostavljeno je, da majhne količine legimih elementov ne vplivajo na elastično togost monokristalov [9]. Uporabljeni so naslednji elastični snovni parametri: $c_{iiii} = 230$ GPa, $c_{ijij} = 135$ GPa in $c_{ijij} = 117$ GPa [9].

2.3 Kristalna plastičnost

Kristalna plastičnost predpostavlja, da je plastična deformacija posledica zgolj zdrsa kristalnih ravnin. Deformacije zaradi difuzije, združevanja in zdrsa med kristalnimi zrnji niso upoštevane. Predpostavljeno je, da je Schmidova napetost (strižna napetost v sistemu zdrsa) gonilna sila zdrsa [10]. Sistem zdrsa je definiran s kombinacijo ravnine (določena z normalo $m_i^{(\alpha)}$) in smerjo zdrsa ($s_i^{(\alpha)}$) znotraj kristalne rešetke. Kubična prostorsko centrirana rešetka ima tri družine ravnin zdrsa: $\{110\}$, $\{112\}$ in $\{123\}$ ter eno družino smeri zdrsa: $\langle 111 \rangle$. To pomeni 48 možnih sistemov zdrsa [11]. Osnovni zakon kristalografškega zdrsa se glasi:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \cdot (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = C_{ijkl} \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \dot{\gamma}^{(\alpha)} (s_i^{(\alpha)} m_j^{(\alpha)} + s_j^{(\alpha)} m_i^{(\alpha)}) \right) \quad (2)$$

Plastičnost neodvisno od hitrosti deformacije lahko obravnavamo kot mejni primer plastičnosti odvisne od hitrosti deformacije [10]. Hitrost zdrsa $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ sistema zdrsa α je določena z ustrezno Schmidovo napetostjo $\tau^{(\alpha)}$:

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{a}^{(\alpha)} \left(\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}} \right) \left(\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}} \right)^{n-1}, \quad (3)$$

pri čemer je $\dot{a}^{(\alpha)}$ referenčna stopnja strižne napetosti, n je občutljivostni parameter strižne napetosti, in $g^{(\alpha)}$ trenutno stanje utrjevanja monokristala. V limiti, ko se n približuje neskončnosti, enačba (3) ustreza enačbi za material neodvisen od hitrosti deformacije. Trenutno stanje strižnega utrjevanja monokristala $g^{(\alpha)}$ je določeno iz:

$$\dot{g}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad (4)$$

kjer $h_{\alpha\beta}$ predstavlja modul utrjevanja. Modul utrjevanja je obravnavalo več avtorjev (npr. [10], [12]), vsi pa imajo za osnovo empirične modele. V naši raziskavi smo uporabili Pierce et al in Asaro [12] zakon o utrjevanju materiala, ki za izračun modula utrjevanja uporablja naslednji enačbi:

$$h_{\alpha\alpha} = h(\gamma) = h_0 \operatorname{sech}^2 \left| \frac{h_0 \gamma}{\tau_S - \tau_0} \right| \quad \text{in} \quad h_{\alpha\beta} = q h(\gamma) \quad (\alpha \neq \beta), \quad (5)$$

kjer h_0 je začetni modul utrjevanja, τ_0 meja tečenja, ki je enaka začetni vrednosti trdnosti materiala $g^{(\alpha)}(0)$, τ_S je mejna napetost nad katero se začnejo velike plastične deformacije, γ kumulativni zdrs in q faktor utrjevanja. Plastični snovni parametri so pridobljeni iz literature za kristalno plastičnost neodvisno od hitrosti deformacije (npr. [11]) in iz rezultatov nateznega preizkusa obravnavanega jekla. Uporabljene so bile naslednje vrednosti: občutljivostni parameter strižne napetosti $n = 50$, referenčna hitrost strižne napetosti $\dot{a}^{(\alpha)} = 0,001 \text{ s}^{-1}$, začetni modul utrjevanja $h_0 = 70 \text{ MPa}$, mejna napetost velikih plastičnih deformacij $\tau_S = 15,5 \text{ MPa}$, meja tečenja $\tau_0 = 155 \text{ MPa}$ in faktor utrjevanja $q = 1,0$.

Enačbe (2)-(5) so za uporabo z metodo končnih elementov podane v inkrementalni obliki [10]. Te enačbe so v splošnem zelo toge [7]. Togost sistema narašča z naraščanjem števila sistemov zdrs. Zaradi togosti potrebuje klasična integracijska shema zelo majhne korake (in dolge računske čase) za zagotovitev stabilnosti rešitve.

2.4 Ocena velikosti reprezentativnega volumskega elementa

V literaturi se je za najmanjši vzorec nehomogene snovi, ki je makroskopsko homogena, uveljavil termin reprezentativni volumski element (RVE). Velja, da pri vzorcu nehomogene snovi, večje od RVE, vpliv velikosti na makroskopskem nivoju ni opazen [7]. Velikost RVE polikristalnega skupka je določena s primerjavo makroskopskega tenzorja elastičnih konstant kontinuuma C^*_{ijkl} in tenzorja togostnih konstant kontinuuma D^*_{ijkl} . Pri tem so makroskopske veličine povprečene po celotnem polikristalnemu skupku. Za vsak polikristalni skupek večji od RVE velja [4], [13]:

$$C^*_{ijkl} \cong (D^*_{ijkl})^{-1}. \quad (6)$$

Enačba (6) v splošnem ne velja za polikristalne skupke manjše od RVE. Obnašanje takšnih polikristalnih skupkov je odvisno od njihovih velikosti in makroskopskih robnih pogojev [7]: makroskopski tenzor elastičnih konstant kontinuuma predpostavlja robni pogoj s predpisano napetostjo, makroskopski tenzor togostnih konstant kontinuuma pa robni pogoj s predpisanim pomikom. Z upoštevanjem relacij med napetostmi in specifičnimi deformacijami (kot npr. v

enačbi (1)), je enačbo (6) mogoče poenostaviti z uporabo makroskopskih napetosti ali specifičnih deformacij [14], npr.:

$$\langle \sigma_{ekv_n} \rangle \cong \langle \sigma_{ekv_d} \rangle. \quad (7)$$

Indeksa n in d označujeta robna pogoja s predpisano napetostjo oziroma pomikom. Tako poenostavljeno merilo je, navkljub poenostavitvam, dovolj dobra ocena za predstavitev ključne tendence [14]. Nekateri avtorji za določitev velikosti RVE uporabljajo ekstrapolacijo z upoštevanjem velikosti polikristalnega skupka [13]. Razmerje med makroskopskima tenzorjema elastičnih konstant kontinuuma in togostnih konstant kontinuuma za polikristalni skupek se lahko izrazi kot [13]:

$$C_{ijkl}^* \cdot D_{klmn}^* = I_{ijmn} + O(V/V_{RVE}), \quad (8)$$

kjer V_{RVE} predstavlja velikost RVE, V velikost polikristala manjšega od RVE in O oceno residuuma. Z upoštevanjem enačbe (7) in dejstva, da je število zrn i v polikristalnem skupku sorazmerno njegovi velikosti, je namesto enačbe (8) mogoče uporabiti:

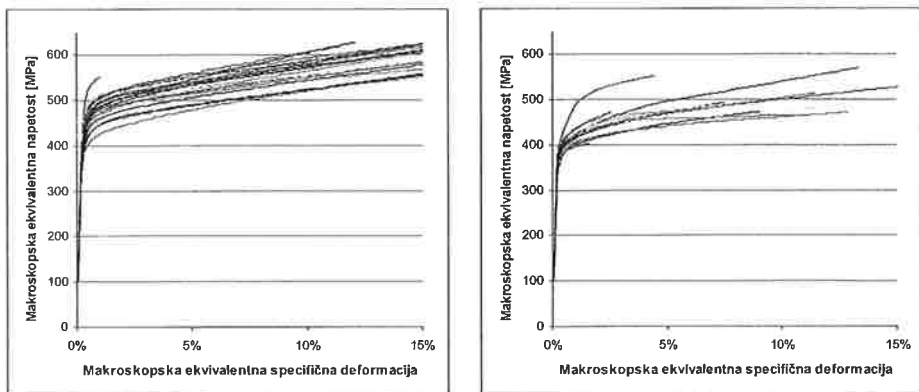
$$\langle \sigma_{ekv_n} \rangle : \langle \sigma_{ekv_d} \rangle = 1 + O(i/i_{RVE}) \quad (9)$$

3 REZULTATI

Predstavljeni so nekateri rezultati predlaganega računskega pristopa. Predstavljeni so primeri makroskopskega odziva polikristalnih skupkov z različnimi orientacijami kristalnih rešetk in robnimi pogoji.

3.1.1 Diagram σ - ε

Na sliki 2 je predstavljena zveza med makroskopsko ekvivalentno (Misesovo) napetostjo in makroskopsko ekvivalentno specifično deformacijo za 30 različnih primerov naključnih orientacij kristalnih rešetk za polikristalni skupek s 14 zrni (slika 1). Predstavljena sta primerata z robnimi pogoji s predpisanim pomikom in napetostjo.



Slika 2: Zveza med makroskopsko ekvivalentno napetostjo in ekvivalentno specifično deformacijo pri robnih pogojih s predpisanim pomikom (levo) in napetostjo (desno)

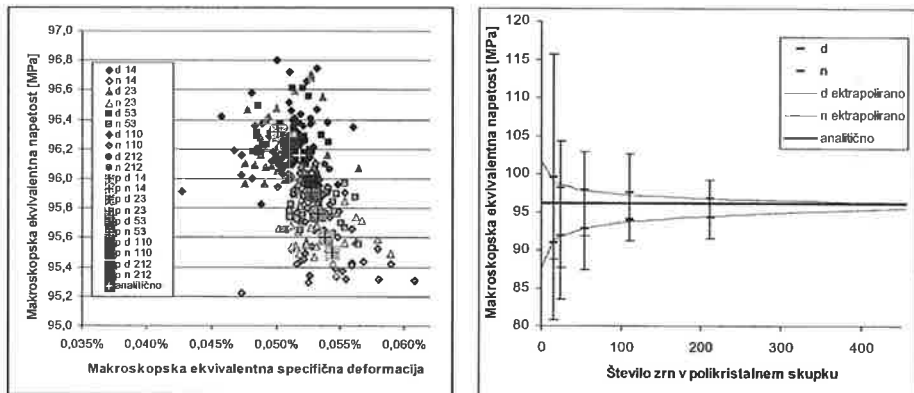
Razlika v poteku krivulj zaradi različnih orientacij kristalnih rešetk je razločno vidna. V elastičnem območju krivulje močno sovpadajo, raztros meje tečenja pa je precejšen. Na robu

predpisana napetost v povprečju povzroči bolj tog odziv. To je skupaj z že opisanimi težavami vzrok za manjše število analiziranih primerov.

3.1.2 Preliminarna ocena velikosti RVE v elastičnem območju

Analize v elastičnem območju so bile opravljene na modelih s 14, 23, 53, 110 in 212 zmi. Vsak model je bil analiziran za 30 primerov naključne orientacije kristalne rešetke (z na robu predpisano napetostjo oziroma pomikom). Analize so bile izvedene pri zunanji obremenitvi $p_1 = 200$ MPa in $p_2 = 100$ MPa (slika 1). Rezultati so primerjani z analitično rešitvijo v izotropnem kontinuumu s snovnimi lastnostmi: $E = 210$ GPa in $\nu = 0,29$ [4].

Povprečne vrednosti so bile izračunane prek vseh 30 primerov orientacij kristalne rešetke za vsak model in robne pogoje. Rezultati so prikazani na sliki 3 (levo), pri čemer n in d označujeta robne pogoje s predpisano napetostjo oziroma pomikom, p povprečno vrednost, sledeča številka pa število zrn v polikristalnem skupku. Prikazana je tudi analitična rešitev ($\epsilon_{el} = 0.0515\%$ and $\sigma_{el} = 96.2$ MPa). Opaziti je mogoče trend zmanjševanja raztrosa rezultatov ob večanju števila zrn v modelu. Povprečne vrednosti napetosti in specifičnih deformacij se pri povečevanju števila zrn v modelu bližajo analitični rešitvi, pri čemer se od slednje najbolj razlikujejo rezultati modela s 14 zmi in najmanj rezultati modela z 212 zmi. Iz raztrosa rezultatov (povprečne vrednosti ne sovpadajo z analitičnimi) je razvidno, da RVE ni bil doščzen.



Slika 3: Raztros makroskopskih ekvivalentnih napetosti in deformacij (levo) ter konvergenca makroskopske ekvivalentne napetosti v elastičnem območju (desno)

Za oceno velikosti RVE so bili izračunane makroskopske ekvivalentne napetosti pri makroskopski ekvivalentni specifični deformaciji $\epsilon_{ekv} = 0,0515\%$ (v skladu z analitično rešitvijo). Slika 3 (desno) prikazuje makroskopske ekvivalentne napetosti v odvisnosti od števila zrn v polikristalnemu skupku pri robnih pogojih s predpisanim pomikom (označeno z d) in napetostjo (n). Ekstrapolacijske črte so narisane v skladu z enačbo (9).

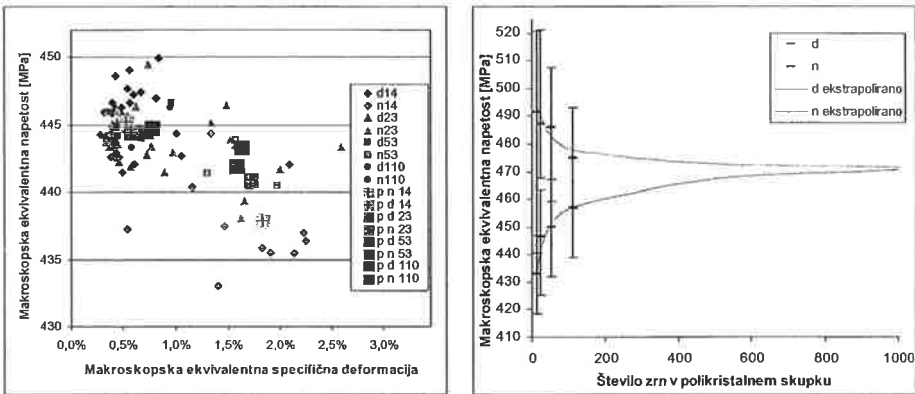
Tendenca k analitični rešitvi in zmanjševanju raztrosa pri povečevanju števila zrn je jasno vidna. Ocena RVE je določena iz enačbe (9). Z omejitvijo residuuma na 1% znaša preliminarna ocena velikosti RVE 280 zrn (kar ustreza polikristalnemu skupku velikosti približno 0,3 mm). Pri residuumu 0,1% znaša predvidena preliminarna velikost RVE 450 zrn (0,5 mm). Ugotovimo lahko, da so preliminarne ocene v okviru pričakovanih iz literature (npr. [13]).

3.1.3 Preliminarna ocena velikosti RVE v plastičnem območju

Analize v plastičnem območju so bile opravljene na modelih s 14, 23, 53, in 110 zrn s po 30 primeri naključne orientacije kristalnih rešetk (vsak primer z na robu predpisano napetostjo oziroma pomikom). Analize so bile izvedene pri zunanji obremenitvi $p_1 = 1000$ MPa in $p_2 = 500$ MPa (slika 1).

V inkrementalnih enačbah, ki popisujejo kristalno plastičnost, je bil uporabljen majhen integracijski korak (1% celotne obremenitve), kar je povzročilo veliko časovno zahtevnost izračuna. Navkljub majhnemu integracijskemu koraku pa je zaradi togosti enačb prišlo do divergence in s tem do predčasnega zaključka nekaterih analiz. Te težave niso dovoljevale, da bi bilo analiziranih vseh 30 primerov naključnih orientacij kristalnih rešetk, toda razpoložljivi rezultati vseeno omogočajo, da predstavimo in pojasnimo bistvene trende. V prihodnosti bo za izračun potreben še manjši korak ali drugačna integracijska shema (npr. [7]).

Povprečne vrednosti so bile izračunane za vsak model in robne pogoje. Rezultati so prikazani na sliki 4 (levo), pri čemer n in d označujeta robne pogoje s predpisano napetostjo oziroma pomikom, p povprečno vrednost, sledeča številka pa število zrn v polikristalnemu skupku. Videti je močnejši trend zmanjševanja raztrosa rezultatov ob povečevanju števila zrn v modelu. Povprečne vrednosti napetosti in specifičnih deformacij se pri povečevanju števila zrn v modelu bližajo skupnemu povprečju. Raztros rezultatov je večji kot 1%, zato smatramo, da RVE ni bil dosežen.



Slika 4: Rزتros makroskopskih ekvivalentnih napetosti in specifičnih deformacij (levo) ter konvergenca makroskopske ekvivalentne napetosti v plastičnem območju (desno)

Pri oceni velikosti RVE v plastičnem območju je bil uporabljen enak postopek kot pri oceni v elastičnem območju. Makroskopske ekvivalentne napetosti so bile izračunane pri makroskopski ekvivalentni specifični deformaciji $\epsilon_{ekv} = 1$ %. Slika 4 (desno) prikazuje makroskopske ekvivalentne napetosti v odvisnosti od števila zrn v polikristalnemu skupku pri robnih pogojih s predpisanim pomikom (označeno z d) in napetostjo (n). Ekstrapolacijske črte so narisane v skladu z enačbo (9).

Tendencia k skupnemu povprečju in zmanjševanju raztrosa pri povečevanju števila zrn je jasno vidna. Z omejitvijo residuuma na 1% preliminarna ocena velikosti RVE znaša 750 zrn (kar ustreza polikristalnemu skupku velikosti približno 0,6 mm). Pri residuumu 0,1% znaša predvidena preliminarna velikost RVE nad 1000 zrn (0,7 mm).

4 ZAKLJUČEK

V prispevku je bil predstavljen računski pristop za modeliranje elasto-plastičnega odziva materiala, ki združuje najpomembnejše mezoskopske značilnosti in kompatibilnost s klasično mehaniko kontinuuma. Uporabljeno je bilo eksplicitno modeliranje naključne zrnate strukture. Zrna se smatrajo kot monokristali (modelirani z anizotropno elastičnostjo in kristalno plastičnostjo). Pristop je bil uporabljen za preliminarno oceno velikosti RVE polikristalnega skupka, nad katero makroskopska nehomogenost zrnate strukture danega materiala izgine in zato ni pričakovati, da bi povzročala vpliv velikosti.

Naključna zrnata struktura je vzrok za vpliv velikosti v polikristalnih skupkih manjših od RVE. Preliminarna velikost RVE v elastičnem območju je 450 zrn, kar ustreza vzorcu velikosti približno 0,5 mm. Preliminarna velikost RVE v plastičnem območju je 1000 zrn, kar ustreza vzorcu velikosti približno 0,7 mm. Oba podana primera sta izračunana ob predpostavki 0,1% residuuma. Dobljeni rezultati so v skladu s rezultati iz literature. Predstavljen računski pristop dobro popisuje vplive zrnate strukture na elasto-plastičen odziv polikristalnega materiala.

V prihodnosti predvidevamo dokončno oceno za velikost RVE v elastičnem in plastičnem območju. Prav tako bomo razširili model, da bo vključeval razvoj poškodovanosti materiala in pohitritev izračuna (izdelava drugačne integracijske časovne sheme).

5 LITERATURA

- [1] Needleman, A. Computational Mechanics at the Mesoscale. *Acta Materialia*. 2000; 48:105-124.
- [2] Watanabe, Osamu; Zbib, Hussein M., and Takenouchi, Eiji. Crystal Plasticity, Micro-shear Banding in Polycrystals using Voronoi Tessellation. *International Journal of Plasticity*. 1998; 14(8):771-778.
- [3] Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc. ABAQUS/Standard User's Manual, Version 5.8. Pawtucket, R.I., USA: Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc.; 1998.
- [4] Cizelj, Leon and Kovač, Marko. Constitutive Models for the Elastic-Plastic Polycrystalline Aggregate with Stochastic Arrangement of Grains. *Rev O. Ljubljana: Institut Jožef Stefan*; 2001; IJS-DP-8334.
- [5] Aurenhammer, Franz. Voronoi Diagrams-A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure. *ACM Computing Surveys*. 1991; 23(3):345-405.
- [6] Riesch-Oppermann, Heinz. VorTess, Generation of 2-D random Poisson-Voronoi Mosaics as Framework for the Micromechanical Modelling of Polycrystalline Materials. Karlsruhe, Germany: Forschungszentrum Karlsruhe; 1999; Report FZKA 6325.
- [7] Nemat-Nasser, Sia and Hori, Muneo. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. Amsterdam: North-Holland; 1993.
- [8] Nye, J. F. *Physical Properties of Crystals*. Oxford: Clarendon Press; 1985.
- [9] Grimvall, Göran. *Thermophysical Properties of Materials*. Amsterdam: North-Holland; 1999.
- [10] Huang, Yonggang. A User-material Subroutine Incorporating Single Crystal Plasticity in the ABAQUS Finite Element Program. Cambridge, Massachusetts: Harvard University; 1991; MECH-178.
- [11] Nemat-Nasser, Sia; Okinaka, Tomoo, and Ni, Luqun. A Physically-based Constitutive Model for BCC Crystals with Application to Polycrystalline Tantalum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998; 46(6):1009-1038.
- [12] Asaro, Robert J. *Micromechanics of Crystals and Polycrystals*. *Micromechanics in Applied Mechanics*. 1983; 23:2-115.
- [13] Weyer, Stefan. Experimentelle untersuchung und mikromechanische Modellierung des Schädigungsverhaltens von Aluminiumoxid unter Druckbeanspruchung. Karlsruhe, Germany: Universität Karlsruhe; 2001.
- [14] Cizelj, Leon; Kovač, Marko; Petrič, Zoran; Fabjan, Ljubo, and Mavko, Borut. Effects of Grain Structure on Elastic-plastic Behavior of Polycrystalline Aggregate. *Rev O. Ljubljana: Institut Jožef Stefan*; 2002; IJS-DP-8547.

PROCES ENOOSNE OVIRANE POVRAČLJIVOSTI PRI MATERIALIH Z OBLIKOVNIM SPOMINOM

Tomaž Videnič¹, Franc Kosel²

PROCESS OF UNIAXIAL CONSTRAINED RECOVERY IN SHAPE MEMORY MATERIALS

POVZETEK:

V elementih izdelanih iz materialov z oblikovnim spominom se lahko ustvarijo znatne napetosti, če je obratna martenzitna transformacija (iz martenzita v avstenit) med segrevanjem ovirana z zunanjo oviro. Proces imenujemo ovirana povračljivost. Na osnovi posplošene termodinamične analize procesa oblikovnega spomina so R. Stalmans, L. Delaey in J. van Humbeeck predstavili enoosni model, ki opisuje proces ovirane povračljivosti in se zelo dobro sklada z eksperimentalnimi rezultati. Vendar pa so zapisani izrazi v diferencialni obliki, kar je manj praktično za uporabo. V pričujočem prispevku so ti izrazi zapisani v končni obliki. Izpeljana je tudi enačba, ki povezuje nekatere osnovne lastnosti svojstvene gradivom z oblikovnim spominom.

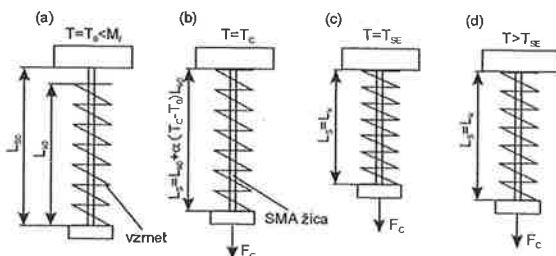
SUMMARY:

In elements made of shape memory materials significant recovery stresses can be generated, if the shape recovery, associated with the reverse martensitic transformation, is constrained by an external obstacle during heating. The process is called constrained recovery. On the basis of a generalised thermodynamic analysis of shape memory behaviour, the uniaxial model was proposed by R. Stalmans, L. Delaey and J. van Humbeeck, which describes the process of constrained recovery and is in excellent agreement with experimental results. However, those equations are written in a differential form and are little clumsy to use. Here, equations are written in a closed form. An interesting mathematical expression is also deduced, which connects some different shape memory data.

¹ mag. Tomaž Videnič, univ. dipl. inž. stroj., ² prof. dr. Franc Kosel, univ. dipl. inž. stroj., Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za nelinearno mehaniko, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

1. UVOD

Precejšnje napetosti se ustvarijo v elementih iz materiala z oblikovnim spominom, če je med segrevanjem povrtnitev avstenitne strukture ovirana z zunanjo oviro, celoten proces pa se imenuje ovirana povračljivost. Element iz materiala z oblikovnim spominom je SMA žica (Shape Memory Alloy), zunanji oviri pa sta konstantna sila F_C in vzmet iz običajnega materiala [1]. Na sliki 1 je prikazan celoten proces enoosne ovirane povračljivosti.



Slika 1: Proces enoosne ovirane povračljivosti

Ločimo štiri temperaturna območja: (a) SMA žica ima martenzitno strukturo med temperaturama T_0 in $A_S(\sigma_C)$, pri kateri se prične obratna martenzitna transformacija v žici; napetost σ_C pa je sila F_C deljena s prečnim presežkom žice Q . (b) Z naraščanjem temperature se obratna martenzitna transformacija v SMA žici nadaljuje (žica se krči, vzmet pa se razteguje), dokler se pri temperaturi T_C žica in vzmet ne dotakneta. (c) Nad temperaturo T_C je retranformacija v SMA žici ovirana zaradi sile F_C , kakor tudi zaradi vzmeti in poteka do temperature T_{SE} , pri kateri je retranformacija v žici končana. V tem temperaturnem območju se napetost v SMA žici povečuje, zato je tudi temperatura T_{SE} precej višja od $A_f(0)$, pri kateri se retranformacija konča ob odsotnosti napetosti v žici. (d) Nad temperaturo T_{SE} je SMA žica v avstenitnem območju in se obnaša, kot da je iz običajnega materiala (z naraščanjem temperature se razteguje).

2. MODELIRANJE ENOOSNE OVIRANE POVRAČLJIVOSTI

Celoten proces enoosne ovirane povračljivosti je opisan v dostopni literaturi [1]. Kljub temu, da veljajo zakonitosti, ki so poznane iz mehanike kontinuuma, pa je potreben bolj splošen pristop pri opisu celotnega termomehanskega obnašanja sistema, ki sloni na posplošeni termodinamični analizi obnašanja materialov z oblikovnim spominom [1-3]. Glavni rezultat te analize je Clausius-Clapeyron-ova enačba, ki jo lahko zapišemo [1]:

$$\left\{ \frac{d\sigma_S}{dT} \right\}_{\epsilon_{SR} = konst.} \approx f_{CC}(\epsilon_{SR}) = S_1 \epsilon_{SR} + S_2 \quad (1)$$

V enačbi (1) je σ_S napetost v SMA žici, T je temperatura žice in vzmeti, S_1 in S_2 sta konstanti neodvisni od temperature, ki ju določimo z eksperimentom [1], ϵ_{SR} pa je povračljivi delež deformacije žice. Namesto izraza (1) lahko upoštevamo še enostavnejši izraz:

$$\left\{ \frac{d\sigma_S}{dT} \right\}_{\epsilon_{SR} = konst.} \approx S = konst. \quad (2)$$

Prednost enačbe (2) je v tem, da lahko napetostno razmerje S izrazimo na teoretičen način z drugimi osnovnimi lastnostmi materialov z oblikovnim spominom, rezultati preračuna pa tudi ne odstopajo bistveno od rezultatov dobljenih z upoštevanjem izraza (1), ki se pa zelo dobro skladajo

z eksperimentalnimi rezultati [1]. V nadaljevanju so popisana vsa štiri temperaturna območja z upoštevanjem izraza (2).

2.1 TEMPERATURNO OBMOČJE $T_0 \leq T \leq A_S(\sigma_S)$

Celotno deformacijo SMA žice lahko zapišemo na naslednji način:

$$\varepsilon_S = \varepsilon_{S0} + \alpha_S(T - T_0) + F_C / (QE_S) \quad (3)$$

V izrazu (3) je ε_S celotna deformacija SMA žice, ε_{S0} je povračljiva deformacija žice, ki ostane po obremenitveno-razbremenitvenem ciklu pri temperaturi T_0 , α_S je linearni temperaturni razteznostni koeficient žice, E_S pa je modul elastičnosti žice. Temperatura, pri kateri se prične obratna martenzitna transformacija v SMA žici $A_S(\sigma_C)$, se lahko določi s pomočjo Clausius-Clapeyron-ove enačbe (2) in se zaradi delovanja sile F_C poviša:

$$A_S(\sigma_C) = A_S(0) + \sigma_C / S \quad (4)$$

Pri temperaturi $A_S(0)$ se prične obratna martenzitna transformacija v SMA žici ob odsotnosti obremenitev. V primeru enosmernega oblikovnega spomina, tako natezna kot tudi tlačna obremenitev povzroči dvig temperature $A_S(\sigma_C)$, zato v primeru tlačne obremenitve upoštevamo v izrazu (4) napetost σ_C po absolutni vrednosti. Iz preizkusov je znano, da v primeru dvosmernega oblikovnega spomina temu ni tako [4].

Vzmet je v tem temperaturnem območju neobremenjena, z naraščanjem temperature pa se razteguje:

$$\varepsilon_k = (L_k - L_{k0}) / L_{k0} \quad (5)$$

$$\varepsilon_k = \alpha(T - T_0) \quad (6)$$

V izrazu (5) je ε_k deformacija vzmeti, L_k trenutna dolžina vzmeti, L_{k0} dolžina vzmeti pri temperaturi T_0 , v izrazu (6) pa je α linearni temperaturni razteznostni koeficient vzmeti. Podobno lahko zapišemo tudi za deformacijo SMA žice:

$$\varepsilon_S = (L_S - L_0) / L_0 \quad (7)$$

V izrazu (7) je L_S trenutna dolžina SMA žice, L_0 pa je dolžina žice pred obremenitveno-razbremenitvenim ciklom pri temperaturi T_0 . Velja še omeniti, da veljata izraza (5) in (7) v vseh štirih temperaturnih območjih.

2.2 TEMPERATURNO OBMOČJE $A_S(\sigma_C) \leq T \leq T_C$

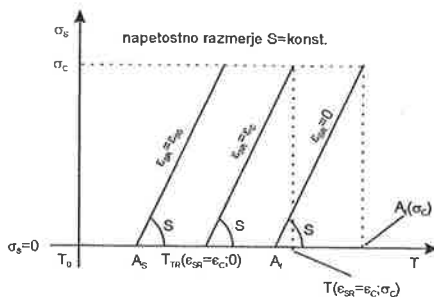
Pri temperaturi $A_S(\sigma_C)$ se v SMA žici, ki je še vedno obremenjena s silo F_C , začne obratna transformacija v avstenit. Deformacija SMA žice je:

$$\varepsilon_S = \varepsilon_{SR} + \alpha_S(T - T_0) + F_C / (QE_S) \quad (8)$$

Izraz (8) je zelo podoben izrazu (3), le da povračljivi delež deformacije SMA žice ni več konstanten, ampak se s temperaturo zmanjšuje. Neznanko ε_{SR} lahko določimo s pomočjo enačbe (2):

$$T(\varepsilon_{SR}, \sigma_C) = T_{TR}(\varepsilon_{SR}, 0) + \sigma_C / S \quad (9)$$

Trenutno temperaturo $T(\varepsilon_{SR}, \sigma_C)$ lahko krajše označimo tudi s T , medtem ko je $T_{TR}(\varepsilon_{SR}, 0)$ ravnotežna transformacijska temperatura pri ustreznem ε_{SR} in ob odsotnosti obremenitve ($\sigma_S=0$) in jo lahko določimo iz znanih temperatur $A_S(\sigma_S=0)$ in $A_f(\sigma_S=0)$: $T_{TR}(\varepsilon_{S0}, 0) = A_S(0)$ in $T_{TR}(0, 0) = A_f(0)$. Izraz (9) je predstavljen tudi na sliki 2.



Slika 2: Ravnotežne temperature v SMA žici v odvisnosti od napetosti

Temperatura T_C mora biti med temperaturama $A_S(\sigma_C)$ in $A_f(\sigma_C)$, ki se tudi lahko določi iz izraza (2), ob upoštevanju $\epsilon_{SR}=0$:

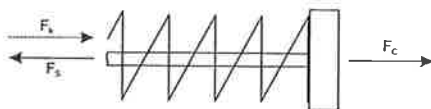
$$A_f(0, \sigma_C) = A_f(0, 0) + \sigma_C / S \quad (10)$$

Pri temperaturi T_C , ko se SMA žica in vzmet dotakneta, je povračljivi delež deformacije žice: $\epsilon_C = \epsilon_{SR}(T_C)$, dolžini žice in vzmeti pa sta od temperature T_C naprej enaki.

Deformacijo vzmeti lahko določimo iz izraza (5).

2.3 TEMPERATURNO OBMOČJE $T_C \leq T \leq T_{SE}$

V tem območju je izpeljava bolj zapletena, saj napetost v SMA žici ni več konstantna ampak se z naraščanjem temperature T povečuje (ϵ_{SR} se zmanjšuje, vzmet pa se upira krčenju). Upoštevati je potrebno novo mehansko ravnotežno stanje, ki velja za sistem SMA žica-vzmet-sila F_C . Na sliki 3 je narisano omenjeni sistem z zunanji in notranji silami.



Slika 3: Sile, ki delujejo na sistem SMA žica-vzmet-sila F_C

Sistem na sliki 3 mora biti v statičnem ravnotežju. Za silo v vzmeti F_k lahko zapišemo:

$$F_k = k[L_{k0}(1 + \alpha(T - T_0)) - L_k] \quad ; \quad F_k > 0 \quad (11)$$

V izrazu (11) je k vzmetna konstanta vzmeti. Z upoštevanjem ravnotežne enačbe, izrazov (11) in (7) ter enakosti dolžin SMA žice in vzmeti lahko zapišemo za deformacijo SMA žice:

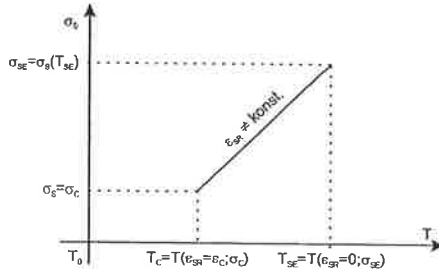
$$\epsilon_S = C_1 + C_2 T + C_3 \sigma_S \quad (12)$$

Konstante v izrazu (12) pa so:

$$C_1 = (L_{k0} - L_0 - \alpha T_0 L_{k0} + F_C / Q) / L_0$$

$$C_2 = \alpha L_{k0} / L_0 \quad C_3 = -Q / (k L_0) \quad (13)$$

V izrazu (12) sta dve neznaniki ϵ_S in σ_S , zato potrebujemo še eno enačbo. Vendar pa v tem temperaturnem območju ne moremo direktno uporabiti Clausius-Clapeyron-ove enačbe, saj je od temperature T_C navzgor, $\epsilon_{SR} \neq \text{konst.}$, slika 4.



Slika 4: Nad temperaturo T_C izraza (2) ne moremo uporabiti, ker je $\epsilon_{SR} \neq \text{konst.}$

Problem je elegantno rešen v članku [1], rezultat pa je modificirana Clausius-Clapeyron-ova enačba, ki velja v primeru, ko je $\epsilon_{SR} \neq \text{konst.}$ V našem primeru, lahko zapišemo:

$$d\sigma_s / dT = P_s(C_2 - \alpha_s) / (1 - P_s C_3) + S(E_s - P_s) / (E_s(1 - P_s C_3)) = \text{konst.} \quad (14)$$

Iz izraza (14), kjer je P_s superelastični modul med razbremenjevanjem, določimo napetost v SMA žici:

$$\sigma_s(T) = F_c / Q + [P_s(C_2 - \alpha_s) + S(1 - P_s / E_s)](T - T_C) / (1 - P_s C_3) \quad (15)$$

Povračljivi delež deformacije v SMA žici:

$$\epsilon_{SR}(T) = \epsilon_c + [C_2 - \alpha_s - S(1 - E_s C_3) / E_s](T - T_C) / (1 - P_s C_3) \quad (16)$$

Temperaturo T_{SE} določimo iz pogoja: $\epsilon_{SR}(T_{SE}) = 0$:

$$T_{SE} = T_C + \epsilon_c E_s (1 - P_s C_3) / [S(1 - E_s C_3) - E_s(C_2 - \alpha_s)] \quad (17)$$

Zapišemo lahko tudi izraz $d\sigma_s / d\epsilon_s = E_{OP}$, ki je nekakšen elastični modul med procesom ovirane povračljivosti in je konstanten (neodvisen je od naraščajoče temperature T):

$$d\sigma_s / d\epsilon_s = [E_s P_s(C_2 - \alpha_s) + S(E_s - P_s)] / [E_s(C_2 - \alpha_s P_s C_3) + S C_3(E_s - P_s)] = E_{OP} \quad (18)$$

Seveda je E_{OP} odvisen od obeh elementov, ki sodelujeta v procesu ovirane povračljivosti: SMA žice in vzmeti. Lahko je tako pozitiven, kot tudi negativen, odvisno od lastnosti SMA žice in vzmeti.

Dolžini SMA žice in vzmeti sta enaki, lahko pa ju določimo iz enačb (7) in (5).

2.4 TEMPERATURNO OBMOČJE $T_{SE} \leq T \leq T_{KON}$

SMA žica in vzmet sta še naprej v kontaktu, retranformacija v žici pa je končana, tako da se oba elementa z naraščanjem temperature raztegujeta. Prirastek dolžine SMA žice dL_s lahko zapišemo na dva načina:

$$dL_s = \alpha L_{k0} dT - Q d\sigma_s / k \quad (19)$$

$$dL_s = \alpha_s L_{SE} dT + d\sigma_s L_{SE} / E_s \quad (20)$$

V izrazu (20) je $L_{SE} = L_s(T_{SE}) = L_k(T_{SE})$. Z izenačitvijo izrazov (19) in (20) dobimo:

$$d\sigma_s / dT = E_s(C_4 - \alpha_s) / (1 - E_s C_5) = \text{konst.} \quad (21)$$

Novi konstanti v enačbi (21) sta:

$$C_4 = \alpha L_{k0} / L_{SE} \quad C_5 = -Q / (k L_{SE}) \quad (22)$$

Z integracijo izraza (21) in ob upoštevanju $\sigma_{SE} = \sigma_s(T_{SE})$ lahko zapišemo napetost v SMA žici:

$$\sigma_s(T) = E_s(C_4 - \alpha_s)(T - T_{SE}) / (1 - E_s C_5) + \sigma_{SE} \quad (23)$$

Novi dolžini SMA žice in vzmeti, v odvisnosti od temperature, dobimo z integracijo izrazov (19) ali (20):

$$L_S = L_{SE} \left[1 + (C_4 - \alpha_S E_S C_5)(T - T_{SE}) / (1 - E_S C_5) \right] \quad (24)$$

Če je $C_4 < \alpha_S$, potem se napetosti v SMA žici in vzmeti v tem območju zmanjšujeta. V tem primeru lahko določimo tudi temperaturo T_L pri kateri SMA žica in vzmet nista več v kontaktu in je napetost v SMA žici $\sigma_S = F_C / Q$, vzmet pa je spet neobremenjena, kot v prvih dveh temperaturnih območjih:

$$T_L = T_{SE} + (1 - E_S C_5)(F_C / Q - \sigma_{SE}) / (E_S (C_4 - \alpha_S)) \quad (25)$$

3. TEORETIČNA DOLOČITEV NAPETOSTNEGA RAZMERJA S

Za obravnavo ovirane povračljivosti na opisani način je potrebno poznati napetostno razmerje S. V članku [1] je enoosna ovirana povračljivost rešena z upoštevanjem izraza (1), vendar pa so izrazi za temperaturno območje $T_C \leq T \leq T_{SE}$ v diferencialni obliki. Smiselno jih je zapisati v končni obliki, tako da dobimo za napetost v SMA žici:

$$\sigma_S(T) = A + E_S (C_2 - \alpha_S) T / (1 - E_S C_3) + B \exp \left[S_1 (1 - E_S C_3) T / (E_S (1 - P_S C_3)) \right] \quad (26)$$

Izraz za povračljivi del deformacije v SMA žici pa je:

$$\epsilon_{SR}(T) = E_S (1 - P_S C_3) d\sigma_S / (S_1 (E_S - P_S) dT) - E_S P_S (C_2 - \alpha_S) / (S_1 (E_S - P_S)) - S_2 / S_1 \quad (27)$$

V izrazu (26) sta konstanti A in B, ki ju lahko enostavno določimo iz robnih pogojev: $\sigma_S(T_C) = F_C / Q$ in $\epsilon_{SR}(T_C) = \epsilon_C$:

$$B = \frac{E_S - P_S}{S_1 (1 - E_S C_3)} e^{\frac{S_1 (1 - E_S C_3)}{E_S (1 - P_S C_3)} T_C} \left[\frac{E_S^2 (C_2 - \alpha_S) (1 - P_S C_3)}{(E_S - P_S) (1 - E_S C_3)} - \epsilon_C S_1 - \frac{E_S P_S (C_2 - \alpha_S)}{E_S - P_S} - S_2 \right] \quad (28)$$

$$A = \frac{F_C}{Q} - \frac{E_S (C_2 - \alpha_S)}{1 - E_S C_3} T_C - B e^{-\frac{S_1 (1 - E_S C_3)}{E_S (1 - P_S C_3)} T_C} \quad (29)$$

Določimo še temperaturo T_{SE} iz pogoja: $\epsilon_{SR}(T_{SE}) = 0$:

$$T_{SE} = T_C + \frac{E_S (1 - P_S C_3)}{S_1 (1 - E_S C_3)} \ln \frac{E_S (C_2 - \alpha_S) - (\epsilon_C S_1 + S_2) (1 - E_S C_3)}{E_S (C_2 - \alpha_S) - S_2 (1 - E_S C_3)} \quad (30)$$

V izrazu (30) upoštevamo $k=0$, $\alpha=0$ in $F_C=0$, kar pomeni, kakor da vzmeti sploh ni. S smiselno zamenjavo: $A_S(0) = T_C$, $A_f(0) = T_{SE}$ in $\epsilon_{S0} = \epsilon_C$ lahko zapišemo izraz (30):

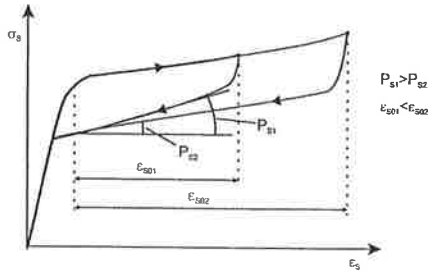
$$A_f(0) = A_S(0) - P_S \ln \left[S_2 / (S_1 \epsilon_{S0} + S_2) \right] / S_1 \quad (31)$$

Izraz (31) povezuje transformacijski temperaturi ob odsotnosti obremenitve in omogoča teoretično določitev napetostnega razmerja S. Ob upoštevanju izraza (2) lahko zapišemo iz enačbe (31):

$$S = \lim_{S_1 \rightarrow 0} \frac{S_1 \epsilon_{S0} \exp(S_1 (A_S(0) - A_f(0)) / P_S)}{1 - \exp(S_1 (A_S(0) - A_f(0)) / P_S)}$$

$$S = P_S \epsilon_{S0} / [A_f(0) - A_S(0)] \quad (32)$$

Izraz (32) je zelo zanimiv, saj na enostaven način povezuje nekatere osnovne lastnosti materialov z oblikovnim spominom in omogoča teoretično določitev napetostnega razmerja S iz ostalih, lažje merljivih podatkov. Napetostno razmerje je odvisno od deformacije ϵ_{S0} , kar se sklada z nedavno objavljenimi rezultati [5], odvisno pa je tudi od superelastičnega modula med razbremenjevanjem P_S , slika 5.



Slika 5: Povezava med P_S in ϵ_{S0}

Na podoben način, kakor določimo enačbo (31), lahko iz izraza (27) zapišemo ($k=0$, $\alpha=0$ in $F_C=0$):

$$\epsilon_{SR} = [(S_1 \epsilon_{S0} + S_2) \exp(S_1(A_S(0) - T)/P_S) - S_2]/S_1 \quad (33)$$

Upoštevamo izraz (2), izvedemo limitni proces ter vstavimo enačbo (32):

$$\epsilon_{SR} = \epsilon_{S0} (A_T(0) - T) / (A_T(0) - A_S(0)) \quad (34)$$

Enačbi (33) in (34) popisujeta proces proste povračljivosti. V literaturi se velikokrat upošteva linearna povezava med ϵ_{SR} in T , izraz (34), tukaj pa je ta zveza izpeljana na osnovi konstantnega napetostnega razmerja S . Če pa upoštevamo izraz (1), je povezava med ϵ_{SR} in T eksponentna, izraz (33).

4. REZULTATI

Za primerjavo obeh teorij določimo napetostno in deformacijsko stanje v Ni-Ti-Cu žici med procesom ovirane povračljivosti. Vhodne podatke izberemo iz literature [1]:

$A_S(0)=49 \text{ }^\circ\text{C}$	$P_S=3650 \text{ MPa}$	$k=100 \text{ N/mm}$	$S_1=114.18 \text{ MPa/K}$
$A_T(0)=57 \text{ }^\circ\text{C}$	$F_C=10 \text{ N}$	$\alpha=100 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	$S_2=8.6505 \text{ MPa/K}$
$T_0=30 \text{ }^\circ\text{C}$	$Q=\pi \cdot 1.15^2/4 \text{ mm}^2$	$\alpha_S=6.6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	
$E_S=27000 \text{ MPa}$	$L_{S0}=100 \text{ mm}$	$\epsilon_{S0}=0.02155$	

Iz dolžine SMA žice po obremenitveno-razbremenitvenem ciklu pri temperaturi T_0 , L_{S0} , lahko določimo tudi dolžino žice pred obremenitveno-razbremenitvenim ciklom L_0 :

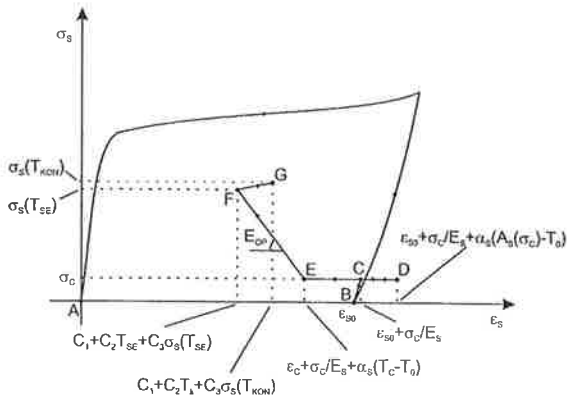
$$L_0 = L_{S0} / (1 + \epsilon_{S0}) \quad (35)$$

Z upoštevanjem izraza (32) lahko določimo napetostno razmerje S na teoretičen način:

$$S = 9.8322 \text{ MPa/K} = \text{konst.}$$

V omenjenem članku [1] sta konstanti S_1 in S_2 določeni s pomočjo meritev, ki so precej bolj zapletena od meritev parametrov, ki nastopajo v izrazu (32).

Na sliki 6 je shematsko prikazan celoten proces ovirane povračljivosti v SMA žici ob upoštevanju izraza (2) za zgoraj izbrane podatke. Proces od točke A do B ni obravnavan v tem članku (SMA žico pri temperaturi T_0 , ki je pod temperaturo M_f , natezno obremenimo in razbremenimo, tako da je v točki B povračljivi del deformacije ϵ_{SR} enak ϵ_{S0} , obenem pa je to tudi celotna deformacija SMA žice ϵ_S). Proces od točke B do D ustreza prvemu temperaturnemu območju $T_0 \leq T \leq A_S(\sigma_C)$, od D do E drugemu območju $A_S(\sigma_C) \leq T \leq T_C$, od E do F tretjemu območju $T_C \leq T \leq T_{SE}$ in od F do G četrtemu območju $T_{SE} \leq T \leq T_{KON}$. Elastični modul med procesom ovirane povračljivosti je v našem primeru negativen: $E_{OP}=-11091.5 \text{ MPa}$.



Slika 6: Napetostno-deformacijsko stanje v SMA žici

V tabeli 1 so zbrane temperature, pri katerih se konča retranformacija v SMA žici T_{SE} in napetosti pri tej temperaturi v primeru ovirane povračljivosti v odvisnosti od vnaprej izbrane kontaktne povračljive deformacije ϵ_c .

Tabela 1: Primerjava rezultatov obeh teorij

ϵ_c [%]	T_{SE} [°C]	$\sigma_s(T_{SE})$ [MPa]	T_{SR} [°C]	$\sigma_s(T_{SE})$ [MPa]
0	58.113	9.628	57.979	9.628
0.1	58.884	16.453	58.664	16.357
0.3	60.391	30.077	60.033	29.821
1	65.357	77.503	64.831	76.996
1.9	71.137	137.975	71.012	137.767
2.155	72.669	155.020	72.765	155.009
$f_{CC}(\epsilon_{SR}) = S_1 \epsilon_{SR} + S_2$			$f_{CC} - S = 9.8322 \text{ MPa/K}$	

Temperature in napetosti so računane po obeh teorijah, tako da je narejena tudi primerjava med teorijama. S primerjavo rezultatov v tabeli 1 vidimo, da so razlike zelo majhne, tako da je uporaba enostavnejše teorije $f_{CC} = S = \text{konst.}$ smiselna. Glavna prednost enostavnejše teorije je v tem, da se lahko izognemo eksperimentalnemu določanju konstant S_1 in S_2 . Poleg tega pa predstavlja izraz (32) doslej neznan funkcijsko zvezo med različnim lastnosti materialov z oblikovnim spominom.

5. LITERATURA

- 1) R. Stalmans, L. Delaey and J. Van Humbeeck: J. de Phys. IV, 7, C5 (1997), pp. 47-52.
- 2) R. Stalmans, J. Van Humbeeck and L. Delaey: AMD-Vol. 189/PVP-Vol. 292: *Mechanics of Phase Transformations and Shape Memory Alloys* – ASME 1994, ed. by C. Brinson and B. Moran, Chicago, USA, (1994), pp. 39-44.
- 3) J. Van Humbeeck and R. Stalmans: *Shape Memory Materials*, ed. by K. Otsuka and C. M. Wayman, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), pp. 151-159.
- 4) R. Stalmans, J. Van Humbeeck and L. Delaey: Mater. Trans. JIM, 33 (1992), pp. 289-293.
- 5) D. Vokoun and R. Stalmans: *Smart Structures and Materials 1999: Mathematics and Control in Smart Structures*, ed. by V. V. Varadan, Proc. SPIE Vol. 3667 (1999), pp. 825-835.

DOLOČITEV KORELACIJSKE DOLŽINE V STOHAŠTIČNEM MATERIALNEM MODELU

Igor Simonovski¹, Marko Kovač¹, Leon Cizelj¹

DETERMINATION OF THE CORRELATION LENGTH IN STOCHASTIC MATERIAL MODEL

POVZETEK:

Mehanika kontinuuma in reologija kot njen sestavni del praviloma predpostavljata homogenost in pogosto tudi izotropnost obravnavane snovi. Taki predpostavki lahko zadostujeta za inženirske analize delov, ki so bistveno večji od nehomogenosti snovi in le zmerno deformirani, pogosto pa ne zadoščata pri analizi razvoja mikropoškodb oziroma za analizo materiala v elasto-plastičnem območju. Nehomogenost in anizotropnost materiala lahko upoštevamo s primernim numeričnim modelom, ki razdeli kontinuum na končno število naključno porazdeljenih kristalnih zrn s spremenljivimi snovnimi lastnostmi. Numerična zahtevnost omenjenega postopka je precejšnja. Prispevek predstavlja začetni korak k zmanjšanju numerične zahtevnosti modeliranja elasto-plastičnega obnašanja nehomogenega materiala. Zmanjšanje numerične zahtevnosti je mogoče z upoštevanjem samo bistvenih podatkov o nehomogenostih. Ena izmed možnih metod za oceno nehomogenosti je tudi korelacijska dolžina. V prispevku je prikazan postopek izračuna korelacijske dimenzije iz dvodimenzionalnega napetostnega polja ter težave pri izračunu korelacijske dimenzije na dvodimenzionalnem napetostnem polju.

ABSTRACT:

As a rule the continuum mechanics assumes homogeneity and isotropicity of the involved material. These assumptions are satisfactory for engineering load capability analysis and the engineering life-time analysis of the parts that are significantly larger than the order of the material inhomogeneities and are only moderately deformed. However, the inhomogeneity of the material becomes more and more important when analyzing the initiation and propagation of cracks or load capability of the material in the vicinity of the limit strength. The inhomogeneity and anisotropicity of the material can be modelled by dividing the continuum into limited number of randomly shaped grains with variable material properties. However, this procedure is numerically quite demanding. The solution to this problem is envisioned by the development of the methods that transfer the significant data on the inhomogeneity into the classical macroscopic models. The interesting method is the usage of the correlation length. The correlation length can be used to estimate the domain of influence of the individual inhomogeneities in the simulated aggregate of randomly oriented and shaped crystal grains. This article deals with several issues relating to the calculation of correlation length from a 2D stress field.

¹ vsi Institut "Jožef Stefan", Odsek za reaktorsko tehniko, Jamova 39, 1000 Ljubljana, Slovenija

1 Uvod

Mehanika kontinuuma in reologija kot njen sestavni del praviloma predpostavljata homogenost in pogosto tudi izotropnost obravnavane snovi. Taki predpostavki lahko zadostujeta za inženirske analize delov, ki so bistveno večji od nehomogenosti snovi in le zmerno deformirani, pogosto pa ne zadoščata pri analizi razvoja mikropoškodb oziroma za analizo materiala v elasto-plastičnem območju. Realna struktura jekel je v splošnem nehomogena in anizotropna. Materialne lastnosti so lahko spreminjajo od točke do točke in tudi v odvisnosti od smeri. Pri modeliranju konstrukcijskih elementov (n.pr. z metodo končnih elementov) se anizotropnost materiala lahko modelira z izborom primerne materialnega modela. Nehomogenost materiala se največkrat zanemari. Pri analizi razvoja mikropoškodb, približevanju mejnih stanj materialov ali pri zmanjševanju preizkušanca do nivoja velikosti nehomogenosti materiala pa je vpliv nehomogenosti in anizotropnosti potrebno upoštevati. Nehomogenosti praviloma predstavljajo izhodišče za mikroskopske poškodbe, ki se lahko razvijejo v makroskopske razpoke in pripeljejo do porušitve materiala.

Uporabo stohastičnih metod v mehaniki lahko v literaturi zaznamo čedalje pogosteje. Uporabljamo jih lahko za modeliranje naključnih lastnosti materiala, geometrije in obremenitve konstrukcijskih elementov. Chakraborty [1] modelira porazdelitev Young-ovega modula v konzolnem nosilcu s pomočjo Gaussovega naključnega procesa. Modelira tudi variacije v zvezni obremenitvi konzolnega nosilca. Tudi v tem primeru uporabi Gaussov naključen proces. Stohastične metode se uporabljajo tudi za realnejše modeliranje geometrijskih nepravilnosti cilindričnih lupin. Schenk in Schuëller [2] le te modelirata z Gausovim naključnim procesom. Za izračun dejanskih odstopanj lupine od idealne oblike uporabita Karhunen-Loève transformacijo, nato pa meje porušitve cilindra izračunata s pomočjo metode končnih elementov. Na ta način poizkušata popisati raztros nosilnosti cilindričnih lupin. Stohastičen pristop k modeliranju procesa razvoja razpok lahko zasledimo pri Zheng in Ellingwood-u [3], ki predpostavita, da je časovni gradient naraščanja velikosti razpoke odvisen tudi od ne-Gaussovega naključnega procesa. Pristop sta uporabila za izračun razvoja razpok zajeznih vrat hidroelektrane.

Nehomogenost in anizotropnost materiala lahko upoštevamo z razdelitvijo kontinuuma na končno število naključno porazdeljenih kristalnih zrn [4], ki jih naredimo z Voronojevim mozaikom [5]. Znotraj vsakega kristalnega zrna predpostavimo homogenost in anizotropnost snovnih lastnosti. Gledano v celoti je kontinuum sestavljen iz kristalnih zrn s spremenljivimi snovnimi lastnostmi. Makroskopski odziv celotnega preizkušanca je odvisen od snovnih lastnosti in orientacije vsakega kristalnega zrna ter se lahko izračuna z metodo končnih elementov. Namen takega pristopa je izboljšava reološkega modela in realnejša simulacija obnašanja materiala v elasto-plastičnem območju. Numerična zahtevnost omenjenega postopka je precejšnja. Numerično zahtevnost bi bilo mogoče zmanjšati z upoštevanjem samo bistvenih nehomogenostih. Ena izmed metod za določitev bistvenih nehomogenosti je korelacijska dolžina s pomočjo katere lahko ocenimo statistično odvisnost napetostnega stanja v določeni smeri, posledično pa lahko ocenimo območje vpliva posameznega kristalnega zrna na makronivoju. V prispevku je prikazan postopek izračuna korelacijske dolžine iz dvodimenzionalnega napetostnega polja ter težave pri izračunu korelacijske dolžine na dvodimenzionalnem napetostnem polju.

2 Teoretične osnove

Avtokorelacijska funkcija $R_{xx}(t_1, t_2)$ naključnega procesa $x(t)$ je definirana z izrazom (1), kjer oznaka E predstavlja matematično upanje, $f_{x(t_1)x(t_2)}$ pa povezano gostoto verjetnosti [6]. Kovariančna funkcija $K_{xx}(t_1, t_2)$ naključnega procesa $x(t)$ je definirana z izrazom (2) in jo lahko izrazimo z avtokorelacijsko funkcijo, izraz (3).

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1) \cdot x(t_2)] = \iint x_1 \cdot x_2 \cdot f_{x(t_1), x(t_2)}(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad (1)$$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - E[x(t_1)]) \cdot (x(t_2) - E[x(t_2)])] \quad (2)$$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) - E[x(t_1)] \cdot E[x(t_2)] \quad (3)$$

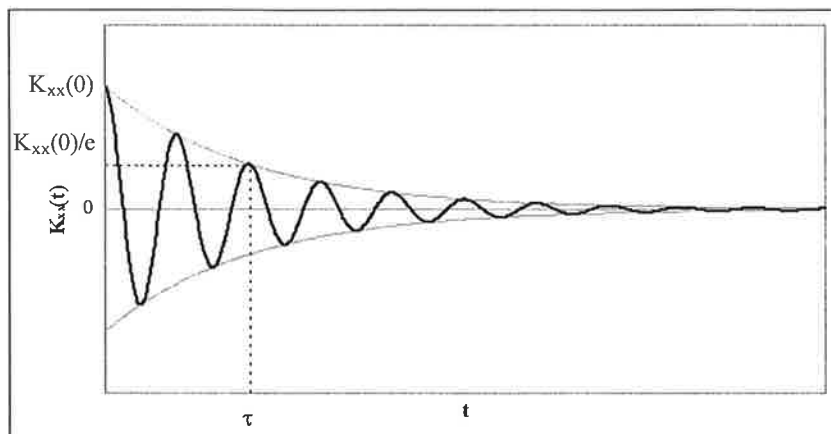
Za stacionarne naključne procese velja, da je povezana gostota verjetnosti $f_{x(t_1), x(t_2)}$ odvisna samo od razlike $t_2 - t_1$ zato sta tudi avtokorelacijska in kovariančna funkcija odvisni samo od $t_2 - t_1$. V kolikor dodatno velja še, da je povprečna vrednost naključnega procesa enaka nič, veljata izraza (4) in (5).

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(0, t_2 - t_1) = R_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(t), \quad t = t_2 - t_1 \quad (4)$$

$$K_{xx}(t) = K_{xx}(t_2 - t_1) = R_{xx}(t) - \underbrace{E[x(0)]}_{=0} \cdot \underbrace{E[x(t_2 - t_1)]}_{=0} = R_{xx}(t) \quad (5)$$

Za kovariančne funkcije oblike (6) lahko definiramo korelacijski čas τ z vrednostjo parametra t , pri katerem pade ovojnica kovariančne funkcije na vrednost $K_{xx}(0)/e$, slika 1. V primerih, kjer je kovariančna funkcija odvisna od dolžine imenujemo korelacijski čas τ korelacijska dolžina in jo označimo s λ .

$$K_{xx}(t) = K_{xx}(0) \cdot e^{-|t|/\tau} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (6)$$



Slika 1: Določitev korelacijskega časa nihajoče kovariančne funkcije

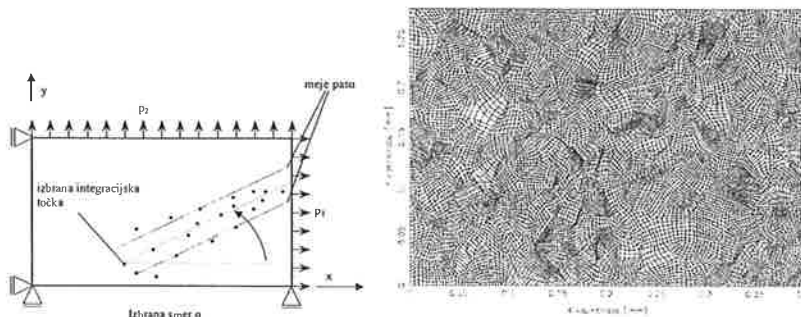
2.1 Izračun korelacijske dolžine iz polja napetosti

Pravokotni preizkušane zvezno obremenimo kot je prikazano na sliki 2. Preizkušane modeliramo s končnim številom naključno porazdeljenih in orientiranih kristalnih zrn, ki jih dobimo z uporabo Voronojevega mozaika [7]. Posamezno kristalno zrno sestavljajo končni elementi katerih materialni model upošteva anizotropno elastičnost. Znotraj kristalnega zrna je usmerjenost končnih elementov enaka, med kristalnimi zrni pa se spreminja. Pri analizi so uporabljeni podatki za jeklo reaktorske tlačne posode 22 NiMoCr 3 7, ki ima bainitno mikrostrukturo s kubično, prostorsko centrirano kristalno rešetko.

$$\sigma_{Mises} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot s_{ij} \cdot s_{ij}}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

Tenzor napetosti σ_{ij} izračunamo z uporabo metode končnih elementov. Mreža končnih elementov je sestavljena iz 212 kristalnih zrn in je prikazana na sliki 2. Iz tenzorja napetosti lahko določimo Mises-ovo

napetost σ_{Mises} , izraz (7). V izrazu (7) predstavlja s_{ij} tenzor deviatorja napetosti ter δ_{ij} Kroneckerjev δ tenzor. Pri uporabi metode končnih elementov (program ABAQUS) dobimo tenzor napetosti σ_{ij} ter Mises-ovo napetost v Gaussovih integracijskih točkah končnega elementa. Za Mises-ovo napetost predpostavimo, da je naključna spremenljivka. V izbrani Gaussovi integracijski točki lahko v določeni smeri izračunamo korelacijsko dolžino, če v tej smeri poznamo vrednosti Mises-ove napetosti. Te določimo tako, da se postavimo v izbrano Gaussovo integracijsko točko ter v izbrani smeri poiščemo tiste integracijske točke, ki ležijo znotraj pasu določene širine, slika 2. Tako dobljene Mises-ove napetosti tvorijo vektor vrednosti naključne spremenljivke. Točke v vektorju so med seboj različno oddaljene zato z interpolacijo tvorimo nov vektor podatkov \mathbf{g} v katerem so točke medseboj enako oddaljene.



Slika 2: Obremenitev preizkušanca (levo) in mreža končnih elementov (desno)

Iz vektorja \mathbf{g} izračunamo avtokorelacijsko funkcijo z uporabo diskretnega korelacijskega teorema, izraz (8), [8]. V izrazu (8) predstavljata simbola G_k in H_k diskretno Fourierovo transformacijo vektorjev \mathbf{g} in \mathbf{h} , znak $*$ predstavlja kompleksno konjugacijo. Diskretno korelacijo izračunamo tako, da najprej izračunamo diskretno Fourierovo transformacijo vektorjev \mathbf{g} in \mathbf{h} , nato pomnožimo transformacijo vektorja \mathbf{g} s kompleksno konjugirano transformacijo vektorja \mathbf{h} in na zadnje izračunamo inverzno diskretno Fourierovo transformacijo. Diskretno avtokorelacijo vektorja \mathbf{g} izračunamo, če namesto vektorja \mathbf{h} uporabimo kar vektor \mathbf{g} .

$$\text{Corr}(\mathbf{g}, \mathbf{h})_j \Leftrightarrow G_k H_k^* \quad (8)$$

Za določitev korelacijske dolžine je potrebno izračunati še ovojnico avtokorelacijske funkcije. Trenutna ovojnica $A(t)$ funkcije $f(t)$ je definirana z izrazom (9), kjer predstavlja $H(t)$ Hilbertovo transformacijo funkcije $f(t)$, izraz (10).

$$A(t) = \sqrt{(f(t))^2 + (H(t))^2} \quad (9)$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi \cdot (t - \tau)} \cdot f(\tau) \cdot d\tau \quad (10)$$

3 Rezultati

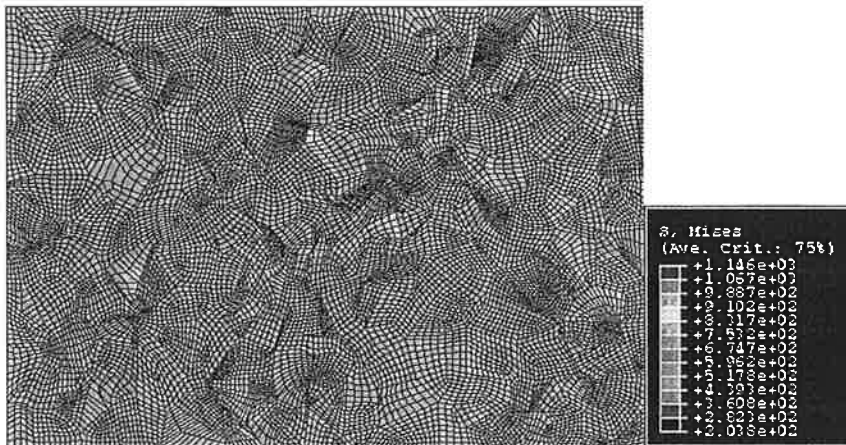
Preizkušanec velikosti 0.4 x 0.28 [mm] modeliramo z 212 kristalnimi zrni in ga obremenimo s $p_1=800$ [MPa] in $p_2=100$ [MPa] kot je prikazano na sliki 2. Uporabljeni so izoparametrični bikvadratični elementi ter Hookov reološki model (idealno elastično telo). Elastični snovni parametri so podani v [7]. Za vsako

integracijsko točko končnega elementa so bile vrednosti korelacijske dimenzije izračunane v smereh 0, 90, 180, in 270 [°]. V vseh primerih je širina pasu iskanja integracijskih točk v posamezni smeri 0.004 [mm]. Slika 3 prikazuje izračunane Mises-ove napetosti. Vidimo lahko, da se vrednosti Misesove napetosti skozi preizkušane spreminjajo, kar je predvsem posledica nezveznosti na mejah kristalnih zrn, ki so posledica različnih velikosti in usmeritev kristalnih zrn.

Slika 4 prikazuje vrednosti korelacijske dolžine v smeri 0 [°]. Korelacijske dolžine so največje v območju [0 do 0.15]x[0 do 0.10] [mm], kjer dosežejo vrednost do 0.0122 [mm], tabela 1. V omenjenem območju odgovarja največja vrednost korelacijske dolžine redu velikosti kristalnega zrna. Z večanjem horizontalne koordinate se korelacijske dolžine zmanjšujejo, nad vrednostjo horizontalne koordinate 0.35 [mm] pa so izračunane vrednosti korelacijske dolžine zanemarljive.

Vrednost\Smer	0 [°]	90 [°]	180 [°]	270 [°]	Povprečje vseh smeri
Najmanjša	0	0	0	0	0.0001
Največja	0.0122	0.0089	0.0109	0.0090	0.0050

Tabela 1: Največje in najmanjše vrednosti korelacijske dolžine v posameznih smereh

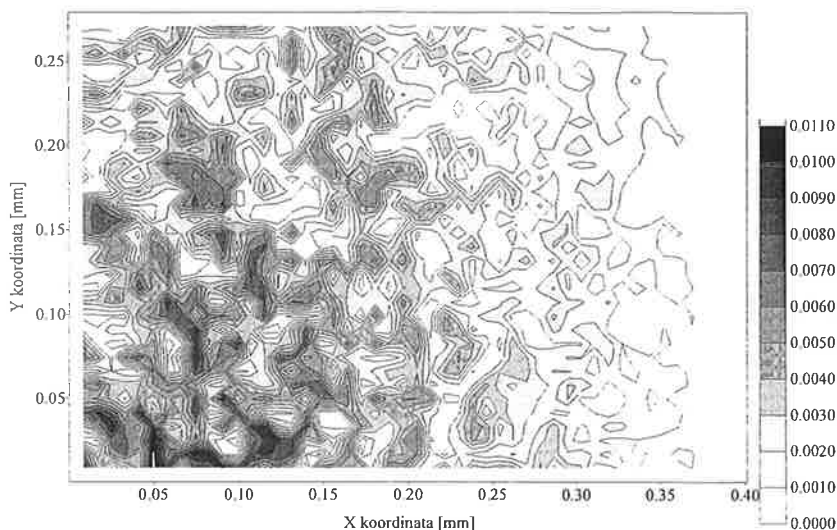


Slika 3: Izračunane Misesove napetosti

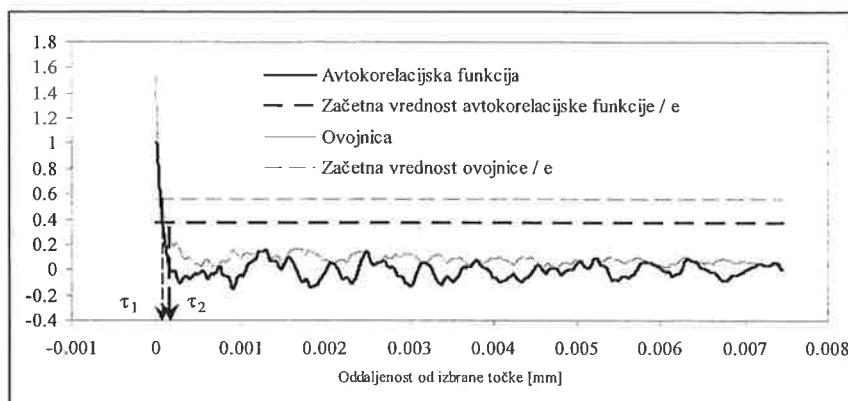
Vzrok za zmanjšanje korelacijske dolžine v smeri 0 [°] je zelo verjetno manjše število točk, ki se nahajajo znotraj pasu iskanja integracijskih točk. Z večanjem vrednosti horizontalne koordinate se namreč dolžina pasu iskanja integracijskih točk v smeri 0 [°] zmanjšuje. V skrajnem primeru, ko je vrednost horizontalne koordinate enaka širini preizkušanca ($x=0.40$ [mm]), v smeri 0 [°] ni več nobene integracijske točke. Posledično korelacijske dolžine v tej smeri ne moremo več izračunati oziroma privzamemo, da je enaka nič. Na ta problem naletimo tudi pri izračunu korelacijskih dolžin v ostalih smereh.

Pri izračunu korelacijske dolžine se pojavi tudi problem napake pri izračunu ovojnice. Slika 5 prikazuje avtokorelacijsko funkcijo in ovojnico za 3. Gaussovo točko 843-tega končnega elementa (koordinate [0.31175, 0.15421] [mm]) v smeri 180 [°].

Opazimo lahko, da ima ovojnica pri majhnih oddaljenostih od izbrane točke večje vrednosti od avtokorelacijske funkcije, katere največja vrednost je teoretično za naključne procese $E[x^2]$.



Slika 4: Korelacijska dolžina, nivoji sivine odgovarjajo velikosti korelacijske dolžine, smer 0°

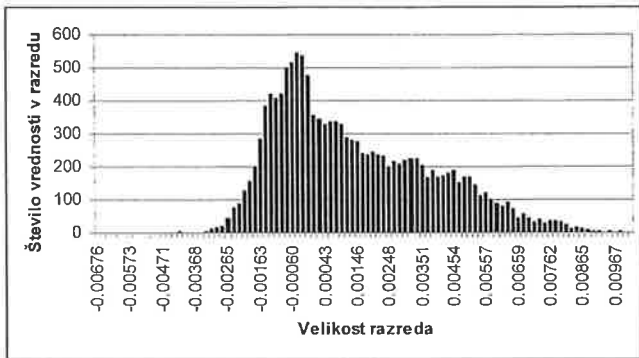


Slika 5: Primer izračunane avtokorelacijske funkcije in ovojnice, izbrana integracijska točka $[0.31175, 0.15421]$ [mm], smer 180°

Razlika se ohrani tudi, če izračunamo ovojnico avtokorelacijske funkcije, kateri so bile dodano ničle (zero padding). Zaradi tega dobimo različne korelacijske dolžine, če izhajamo iz začetne vrednosti avtokorelacijske funkcije (τ_2) ali začetne vrednosti ovojnice (τ_1). Korelacijsko dolžino moramo torej določiti glede na začetno vrednost avtokorelacijske funkcije in ne glede na začetno vrednost ovojnice.

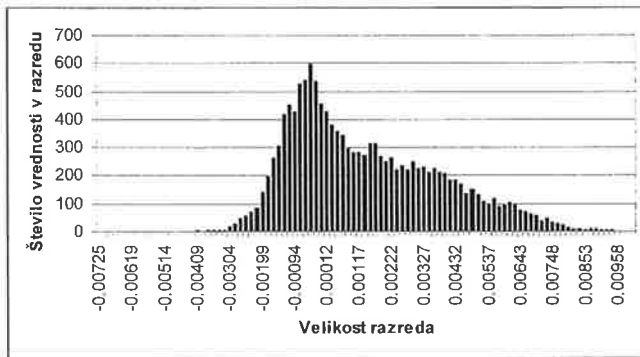
Primerjavo velikosti korelacijske dolžine in horizontalne velikosti končnega elementa lahko izvedemo, z izračunom razlike navedenih vrednosti. Za vrednost korelacijske dolžine izberemo največjo vrednost korelacijske dolžine izmed vseh štirih smeri, horizontalno velikost končnega elementa ocenimo z največjo razliko x-koordinat Gaussovih točk. Slika 6 prikazuje histogram dobljenih vrednosti. Izmed 13648 končnih elementov je korelacijska dolžina manjša od horizontalne velikosti končnega elementa v 5261 primerih oziroma v 38.5 [%]. V 8387 primerih oziroma v 61.5 [%] je korelacijska dolžina večja od horizontalne

velikosti končnega elementa. Pri tem je korelacijska dolžina v povprečju za 0.00283 [mm] večja od horizontalne velikosti končnega elementa.



Slika 6: Histogram razlik med največjo korelacijsko dolžino v izbrani točki in horizontalno velikostjo končnega elementa

Do podobnih ugotovitev lahko pridemo tudi pri primerjavi največje korelacijske dolžine v izbrani točki in vertikalne velikosti končnega elementa. Histogram razlik teh dveh veličin je prikazan na sliki 7. V 5204 primerih oziroma 38 [%] je korelacijska dolžina manjša od vertikalne velikosti končnega elementa, v 8444 primerih oziroma 62 [%] pa večja od vertikalne velikosti končnega elementa. Pri tem je korelacijska dolžina v povprečju za 0.00275 [mm] večja od vertikalne velikosti končnega elementa.

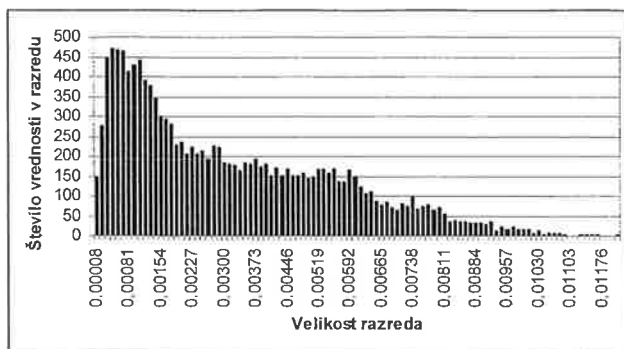


Slika 7: Histogram razlik med največjo korelacijsko dolžino v izbrani točki in vertikalno velikostjo končnega elementa

Slika 8 prikazuje histogram največjih vrednosti korelacijskih dolžin za integracijske točke. Povprečna velikost kristalnega zrna je 0.023 [mm], kar pomeni, da je v 100 [%] primerih korelacijska dolžina manjša od povprečne velikosti kristalnega zrna.

4 Zaključek

Prispevek predstavlja začetni korak k zmanjšanju numerične zahtevnosti modeliranja elasto-plastičnega obnašanja nehomogenega materiala na mezoskopski ravni z razdelitvijo kontinuuma na končno število naključno porazdeljenih kristalnih zrn. Zmanjšanje numerične zahtevnosti je mogoče z upoštevanjem samo bistvenih podatkov o nehomogenostih. Ena izmed možnih metod za oceno nehomogenosti je tudi korelacijska dolžina.



Slika 8: Histogram največje korelacijske dolžine v izbrani točki

V prispevku je prikazan postopek izračuna korelacijske dimenzije iz dvodimenzionalnega napetostnega polja ter težave pri izračunu korelacijske dimenzije na dvodimenzionalnem napetostnem polju. S povečevanjem horizontalne koordinate se v območju iskanja zmanjšuje število Gaussovih točk, kar neposredno vpliva na kvaliteto ocene korelacijske dolžine v smeri 0 [°]. Podobno se število točk zmanjšuje tudi pri ostalih smereh za katere želimo izračunati korelacijske dolžine. To slabost bi bilo mogoče zmanjšati z izračunom 2D avtokorelacijske funkcije, kjer bi upoštevali napetostno stanje kot 2D naključno spremenljivko. V sedanjem postopku smo pri izračunu korelacijske dolžine v posamezni smeri za napetost prevzeli, da je 1D naključna spremenljivka.

Za izračun korelacijske dolžine je potrebno izračunati tudi ovojnico avtokorelacijske funkcije. Pri izračunu ovojnice se je v posameznih primerih izkazalo, da so vrednosti ovojnice pri začetnih argumentih do 50% večje od avtokorelacijske funkcije, katere največja vrednost je teoretično za naključne procese $E[\chi^2]$. Tega odstopanja ni bilo možno odpraviti z dodajanjem ničel avtokorelacijski funkciji. Pri izračunu korelacijske dolžine je zato potrebno paziti, da izhajamo iz največje vrednosti izračunane avtokorelacijske funkcije in ne izračunane ovojnice.

Izračunane vrednosti korelacijskih dolžin kažejo, da je korelacijska dolžina manjša od povprečne velikosti kristalnega zrna. Povprečna velikost kristalnega zrna je 0.023 [mm]. Glede na majhne vrednosti korelacijske dolžine lahko sklepamo, da se informacija o vrednosti Misesove napetosti zelo hitro izgublja. V posameznih primerih je vrednost izračunane korelacijske dolžine reda velikosti kristalnega zrna—območje [0 do 0.15]x[0 do 0.10] [mm], slika 4.

Literatura

- [1] Chakraborty, S. in Dey, S.,S.. *Stochastic Finite Element Method for Spatial Distribution of Material Properties and External Loading*. Computers & Structures, Vol. 55, No. 1, strani 41-45, 1995.
- [2] Schenk, C., A. in Schuëller, I.R. *Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections*. International Journal of Non-Linear Mechanics. Sprejeto v objavo.
- [3] Zheng, R. in Ellingwood, B., R.. *Stochastic fatigue growth in steel structures subject to random loading*. Structural Safety, 1998, Vol. 20, strani 303-323.
- [4] Cizelj, L. in Riesch-Oppermann, H.. *Modelling the early development of secondary side stress corrosion cracks in steam generator tubes using incomplete random tessellation*. Nuclear Engineering and Design, 1. 2002, Vol. 212, strani 21-29.
- [5] Aurenhamer, Franz.. *Voronoi Diagrams - A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure*. ACM Computing Surveys. 1991, 23(3), strani 345-405.
- [6] Grabec, I. in Gradisek, J.. *Opis naključnih pojavov*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, l.2000.
- [7] Kovač, M., Simonovski, I. in Cizelj, L.. *Vpliv zrnate strukture na elasto-plastičen odziv polikristalnega skupka*. Kuhljevi dnevi 2002.
- [8] Press, W.,H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W., T. in Flannery. B. P.. *Numerical Recipes in C, second edition*. Cambridge University Press, 1999.

OSNOSIMETRIČNO PREOBLIKOVANJE DEBELOSTENSKE CEVI POD VPLIVOM TLAČNE SILE IN NOTRANJEGA NADTLAKA

Franc Kosel¹, Janez Pipan², Jože Petrišič³

MANUFACTURING ROTATIONAL SYMMETRIC TUBE WITH INSIDE PRESSURE AND AXIAL COMPRESSION

POVZETEK

Prispevek obravnava proces preoblikovanja osnosimetrične debelostenske cevi z uporabo notranjega nadtlaka in zvezno porazdeljene tlačne sile, ki deluje na robu cevi. Debelostenska cev med ustreznim procesom preoblikovanja lahko preide v različno oblikovane votle osnosimetrične konstrukcijske dele. Tehnološki proces preoblikovanja poteka tako, da se najprej doseže proces plastične izbočitve cevi zaradi delovanja zvezno porazdeljene tlačne sile, nato pa se zaradi delovanja notranjega nadtlaka osrednji del cevi razširi v plastičnem področju in prilagodi obliki orodja. Z ustreznim razmerjem istočasnega delovanja zvezno porazdeljene tlačne sile in notranjega nadtlaka se uspe doseči takšno napetostno stanje v steni cevi, da se med procesom preoblikovanja nikjer ne pojavi nestabilno tečenje in kot posledica tega tudi tanjšanje stene, temveč se debelina stene cevi lahko celo poveča. Naloga je bila rešena z uporabo računalniškega programa ABAQUS, rezultati pa primerjani s preizkusi, za katere je bilo izdelano orodje, ki je omogočilo preoblikovanje debelostenske cevi v prisekano kroglo. Primerjava rezultatov kaže zelo dobro ujemanje.

ABSTRACT

The process of rotational symmetric tube bulging with inside pressure and axial compression enables the standard tubes to be formed into different rotational symmetric hollow parts in such a way that their central part is expanded into a desired shape while the ends remain unchanged. The superposition of axial compression contributes to a more favorable forming stress state, which is reflected in larger forming limits and smaller wall thinning in the widened area. The problems characterizing the process are a limited range of compression stability and difficulties met when establishing and optimizing the technological parameters of the process whose course cannot be defined in an analytical way. Based on a physical model of the forming process a numerical model was built. Using ABAQUS code the model was simulated over the entire stress/forming region. The comparison of the computer simulated forming process with the experimentally obtained results showed that the model was highly accurate. Finally the paper studies the influences of particular parameters on the stability of the process showing on a practical example how it is possible to achieve tube bulging without wall thinning.

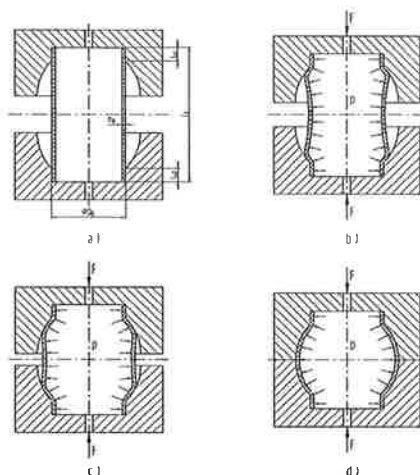
¹ prof.dr. Franc Kosel, univ.dipl.inž., UL, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, Slovenija

² dr. Janez Pipan, univ.dipl.inž., Mala vas 10A, 1000 Ljubljana, Slovenija

³ izr.prof.dr. Jože Petrišič, univ.dipl.mat., UL, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, Slovenija

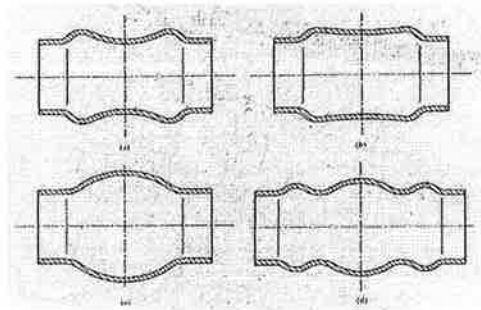
1. Opis procesa

Geometrija procesa izbočitve osnosimetrične debelostenske lupine zaradi delovanja notranjega nadtlaka in osne sile je razvidna iz sl.1. Razvidne so posamezne faze preoblikovanja. Začetna dolžina nedeformirane cevi L_T , sl.1a, je za predvideni osni skrčec daljša od vsote vseh skrčkov pri procesu izbočevanja. V prvi fazi procesa obremenjujemo cev tako, da se pojavi nestabilno stanje in proces neoviranega izbočenja, sl.1b. Konec prve faze je tedaj, ko se zaradi izbočevanja cev prične nalegati na stene orodja. V naslednji fazi je proces naleganja na stene orodja intenzivnejši in je odvisen od oblike orodja, plastičnega utrjevanja materiala in razmerja med notranjim tlakom in osno silo, sl.1c. Zadnja faza pa predstavlja kalibriranje v končno obliko orodja, sl.1d.



Sl.1: Faze osnosimetričnega procesa preoblikovanja debelostenske cevi z upoštevanjem delovanja notranjega tlaka in osne tlačne sile v preoblikovalnem orodju

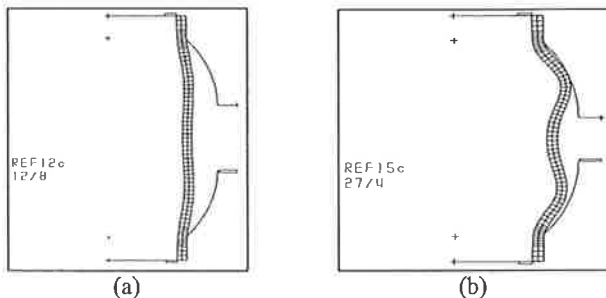
Na obliko izbočitve cevi vplivajo: geometrija orodja, mehanske lastnosti materiala, utrjevanje materiala v plastičnem področju, razmerja med tlakom in osno silo ter prosta dolžina nedeformirane cevi, za katero se pri preoblikovanju cev skrči. Da bi zagotovili stabilni proces plastičnega preoblikovanja, ki bi zagotavljal, da se nikjer v steni cevi ne bi pojavila kontrakcija in nestabilno tečenje materiala in da bi gubanje po izbočitvi potekalo tako, da bo imel končni proizvod pravilno obliko in se prilegal notranji obliki orodja, je za vsak preizkušaneec potrebno določiti optimalni potek tako notranjega nadtlaka, kakor tudi osne sile. Obe funkciji zunanje obremenitve določimo kot funkciji osnega premikanja gibljivega dela orodja, ki se je v laboratoriju izvajal korakoma. Vpliv kombinacije osne sile in tlaka na deformiranje cevi po procesu izbočenja, je razviden iz slike 2. Rezultati laboratorijskega preizkusa so bili dobljeni za standardne primere debelostenskih cevi v območju razmerij med debelino cevi in njenim zunanjim premerom in sicer od 0.3 do 0.18.



Sl. 2: Tipične oblike izbočitev debelostenske cevi, ki se pojavijo kot posledica tlaka, osne sile in začetne nedeformirane dolžine
 a) prevladujoč vpliv osne sile
 b) zmeren vpliv osne sile
 c) prevladujoč vpliv notranjega nadtlaka
 d) enako kot primer a) le da je začetna dolžina večja

2. Numerična simulacija procesa

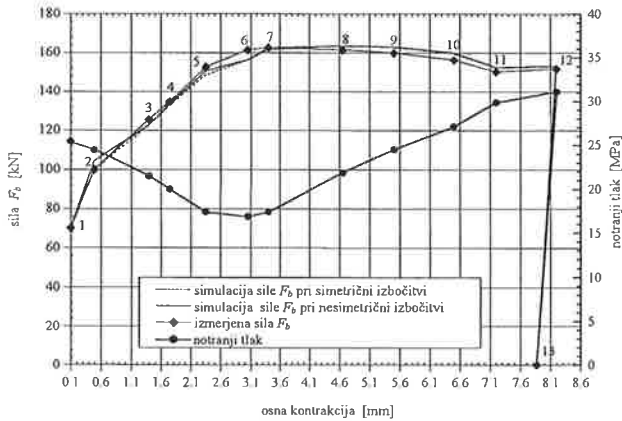
Numerična simulacija preoblikovalnega procesa je bila izdelana z uporabo profesionalnega programa ABAQUS (7). Program omogoča analizo velikih plastičnih deformacij ob upoštevanju plastičnega utrjevanja, Missesovega pogoja plastičnosti in uporablja Reuss - Prandtlove enačbe za računanje zvez med prirastki napetosti in deformacij. Upoštewane so naslednje predpostavke: gradivo je homogeno in izotropno, orodje je idealno togo, upoštevano je trenje med orodjem in cevjo s tornim količnikom 0.1. Preizkušane je pred, med in po preoblikovanju osnosimetričen.



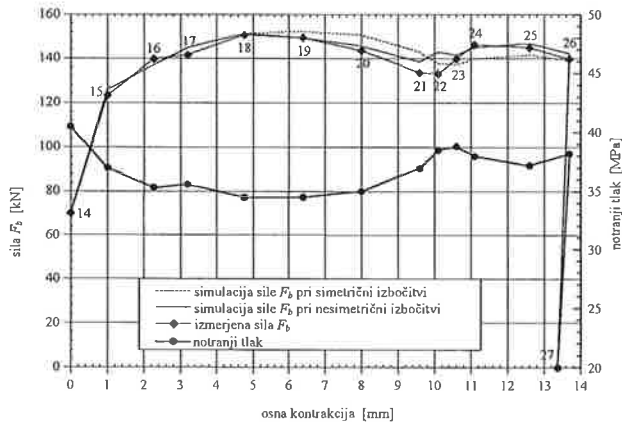
Sl.3: (a) Deformirana mreža ob koncu prve preoblikovalne faze, (b) Deformirana mreža ob koncu druge preoblikovalne faze

Izbrane predpostavke pomenijo določeno odstopanje od realnosti, zato je bil izdelan tudi preizkus in primerjan z računalniško simulacijo. Primerjano je bilo deformacijsko stanje po posameznih deformacijskih. Na slikah 3a in 3b so predstavljeni rezultati računalniške simulacije deformacijskega stanja po prvi ni drugi stopnji preoblikovalnega procesa.

Med izvajanjem preizkusov je bilo pogosto pri več preizkušancih ugotovljeno, da se pojavi v vzdolžni smeri manjša nesimetrija. To dejstvo je bilo upoštevano pri numerični simulaciji tako, da je bila ena zunanja mrežna točka na enem koncu cevi premaknjena za 0.045 mm proti osi cevi, debeline 3.68mm in z zunanjim polmerom 30.245 mm. Za računalniško simulacijo, ki je razvidna iz sl.3, je bilo upoštevano spreminjanje zunanje obremenitve v dveh stopnjah tako, kot je razvidno iz sl.4 in sl.5. Računalniška simulacija je bila izdelana tako za vzdolžno simetrijo kot tudi za majhno vzdolžno nesimetrijo.



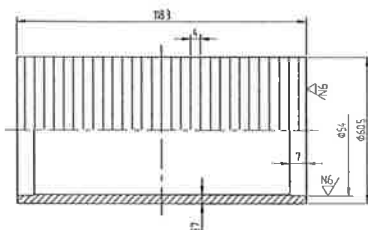
Sl.4: Funkcije sile, ki deluje na podporno ploščo orodja F_b in notranjega tlaka za računalniško simulacijo vzdolžno simetričnega in nesimetričnega procesa izbočenja ter potek teh funkcij med preizkusom za prvo fazo preoblikovanja, ki vsebuje od 1 do 13 obremenitveno – deformacijskih korakov



Sl.5: Funkcije sile, ki deluje na podporno ploščo orodja F_b in notranjega tlaka za računalniško simulacijo vzdolžno simetričnega in nesimetričnega procesa izbočenja ter potek teh funkcij med preizkusom za drugo fazo preoblikovanja, ki vsebuje od 14 do 27 obremenitveno – deformacijskih korakov

3. Izdelava preizkusov in primerjava rezultatov

Zaradi lažje primerjave rezultatov preizkusa in računalniške simulacije so bili preizkušanci označeni s prečnimi kolobarji. Razdalja med kolobarji je bila enaka kot z – koordinata pri vozliščih računalniškega modela, sl.6. Za izvedbo preizkusov je bilo izdelano posebno orodje, ki se je vgradilo v hidravlično prešo, sl.7.



Sl.6: Označitev preizkušanca s prečnimi kolobarji

Sila, ki se pojavi na zgornji plošči orodja F_p in sila, ki deluje na podporno ploščo orodja F_b , sta odvisni od velikosti notranjega nadtlaka p , kot sledi:

$$p = k_1 \cdot (F_p - F_b) \quad (1)$$

Oсна sila, ki deluje na preizkušane F_A pa je tako enaka:

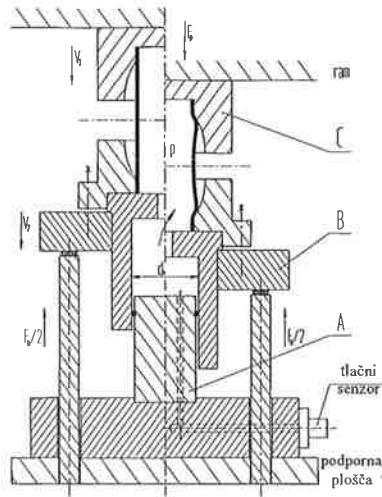
$$F_A = F_b + k_2 \cdot (F_p - F_b) = F_b + k_3 \cdot p \quad (2)$$

kjer imajo koeficienti naslednje oblike

$$k_1 = \frac{4}{\pi \cdot d_v^2}, \quad k_2 = 1 - \frac{d_0^2}{d_v^2}, \quad k_3 = \frac{\pi}{4} (d_v^2 - d_0^2),$$

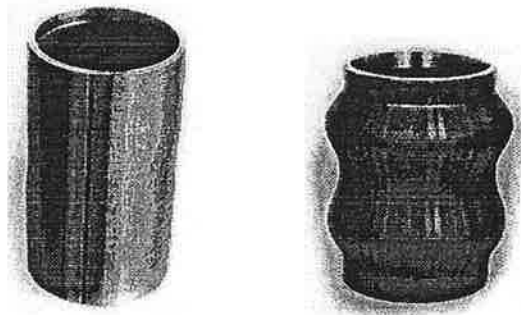
S parametrom d_0 je označen notranji premer nedeformirane cevi, d , pa predstavlja notrani premer hidravličnega cilindra.

Hidravlični del stiskalnice in preoblikovalno orodje sta bila opremljena s tlačnim pretvornikom, pretvornikom sile in premika ter so bili povezani z računalnikom za sprotno vrednotenje vseh elementov preoblikovalnega procesa.



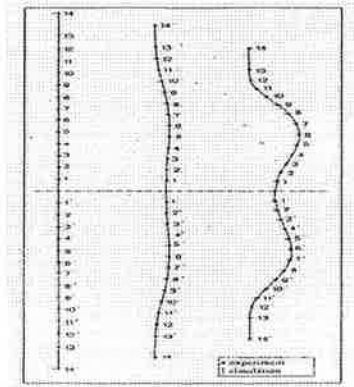
Sl 7: Naprava, ki je omogočila preoblikovanje debelostenske cevi

Na fotografiji, sl.8, je predstavljen preizkušane po prvi in po drugi preoblikovalni fazi.



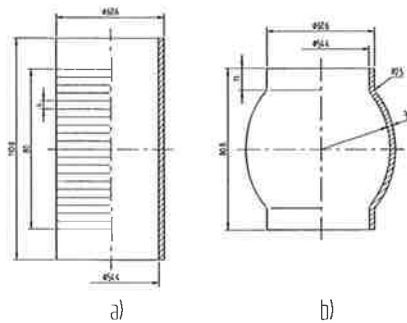
Sl.8: Preizkušane po prvi in po drugi preoblikovalni fazi

Iz primerjave deformacijskega stanja določenega z numerično simulacijo, sl.3, in deformacijskega stanja določenega s preizkusom po prvi in po drugi preoblikovalni fazi, sl.8, je razvidno zelo dobro ujemanje, sl.9.

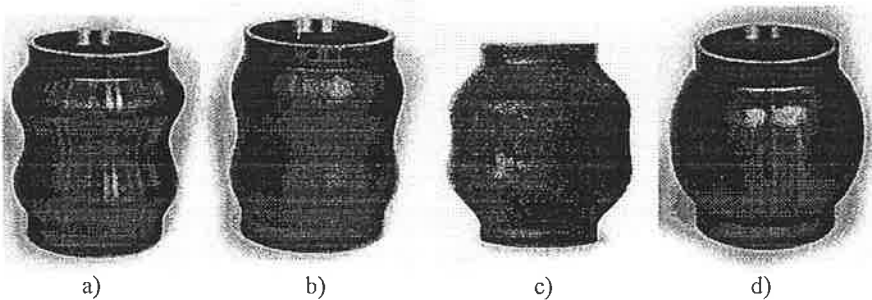


Sl.9: Primerjava deformacijskega stanja določenega z numerično simulacijo in deformacijskega stanja določenega s preizkusom po prvi in po drugi preoblikovalni fazi

Za primer je bilo izdelano tudi preoblikovanje debelostenske cevi v presečno kroglo. Uporabljena je bila varjena cev iz avstenitnega jekla 11.X5CrNi189 po ISO 683-13, z zunanjim premerom 60.6 mm in debelino stene 3.1 mm. Presekana krogla je imela končni zunanji premer 85 mm, sl. 10.



Sl.10: Začetna nedeformirana cev in delna krogla po preoblikovanju



Sl.11: Preoblikovalne faze in končno stane preizkušanca

Slike od 11a do 11d prikazujejo preoblikovalne faze. Potrebne so bile štiri preoblikovalne faze. Iz sl.12 pa je razvidno, da se debelina med preoblikovanjem ni nikjer stajšala, ampak se je celo odebilila. Razviden pa je tudi potek izračunane debeline stene.

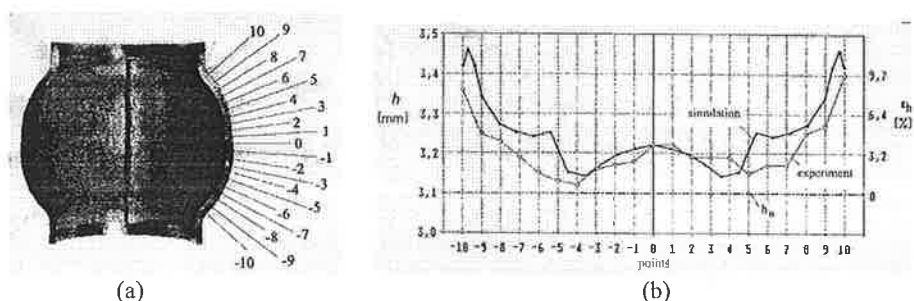


Fig. 12: a) Prečni prerez končne oblike in mesta meritev debeline stene
 b) Potek debeline stene na mernih mestih in potek pripadajočih izračunanih vrednosti.

5. Zaključek

Iz rezultatov dela je razvidno, da je možno z uporabo računalniškega programa določiti parametre za ustrezen proces preoblikovanja debelostenskih cevi ob pogoju, da se debelina stene cevi ne zmanjša. Ugotovljeno je tudi bilo, da predpostavke pri numerični simulaciji niso imele bistvenega vpliva na dejansko stanje in da je simulacija preoblikovalnega procesa potekala pri skoraj enakih deformacijskih stanjih po posameznih preoblikovalnih fazah, kot se je to dogajalo med procesom preoblikovanja v orodju na hidravličnem stroju.

6. Literatura

1. Ogura, T., Ueda, T., Takagi, R., Über die Anwendung eines hydraulischen Ausbauchverfahrens. *Industrie-Anzeiger* **88**. (1966) Nr. 37, 107-110, Nr.48, 137-140.
2. Ueda, T., Differential gear casings for automobiles by liquid bulge forming processes. *Sheet Metal Industries* (1983), March 181-185, April 220-224.
3. Miyagawa, M., Flüssigausbauchformverfahren für Rohrabzweigstücke. *Blech Rohre Profile*, **30** (1983) 1, 32-35.
4. Pipan, J., Bulging process of tubes loaded by inside pressure and axial compression. *PhD. thesis*, University of Ljubljana, 1993.
5. Pipan, J. Kosel, F., Numerical solution of rotational symmetric tube bulging with inside pressure and axial compression. *Int. Journal of Mechanical Sciences* **44** (2002) 645-664.

Siskov model toka nenevtonskih tekočin v gnani kotanji z metodo kontrolnih volumnov

Marjan Delić, Jure Marn, Zoran Žunič ¹

Sisko model for non-Newtonian fluid flow in driven cavity using control volume method

Povzetek

Analizirali smo primernost metode končnih volumnov za izračun tokovnih razmer v nestisljivi viskozni nenevtonski tekočini ob uporabi Siskovega modela. Prav tako smo analizirali natančnost numeričnih rezultatov v odvisnosti od gostote mreže. Metodo smo testirali na primeru gnane kotanje. Numerično dobljene rezultate smo primerjali z vrednostmi iz literature. Za reološki model smo uporabili modelne parametre dobljene na osnovi eksperimenta s cevnim viskozimetrom.

Summary

The authors have analyzed suitability of finite volume method to calculate incompressible viscous non-Newtonian fluid flow where Sisko model was used. In addition, convergence criteria are presented and convergence depending on mesh size analyzed. The method is tested in driven cavity setup and compared with results available in open literature. For rheological model, parameters obtained from experiment with capillary viscometer were used.

Uvod

Obravnavali smo tokovne razmere v nestisljivi viskozni nenevtonski tekočini in pri tem uporabili Siskov model. Sistem parcialnih diferencialnih enačb osnovnih zakonov ohranitve smo

¹Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, Maribor

reševali z diskretno metodo končnih volumnov. Kontinuitetno in gibalno enačbo smo povezali z uporabo principa umetne stisljivosti. Konvektivne tokove smo računali po metodi karakteristik, difuzijske tokove in izvorne člene pa s končnimi razlikami (upwind in centralnimi končnimi razlikami). Za napredovanje po času smo uporabili eksplicitno metodo Runge-Kutta četrtega reda. Natančnost in konvergenco metode smo preizkusili na primeru gnane kotanje. Za reološki model smo uporabili modelne parametre dobljene na osnovi eksperimenta s cevnim viskozimetrom.

Definicija problema

Ravninski tok viskozne nestisljive tekočine lahko opišemo z gibalnima in kontinuitetno enačbo, katere ob zanemaritvi volumskih sil zapišemo v obliki.

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

Reševanje Navier-Stokesovih enačb zapisanih za osnovne fizikalne spremenljivke za tok nestisljivega fluida je težavno ker tlak ni termodinamična veličina. To pomanjkljivost odpravimo z vključitvijo časovnega odvoda v kontinuitetno enačbo. Problem oscilacij numerične rešitve odpravimo z navidezno stisljivostjo

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

kjer imenujemo koeficient β umetna stisljivost.

Z vpeljavo brezdimenzijskih spremenljivk, kjer sta L in v_∞ , karakteristična dolžina in hitrost,

$$x_i^* = \frac{1}{L} x_i, \quad v_i^* = \frac{1}{v_\infty} v_i, \quad p^* = \frac{1}{\rho_0 v_\infty^2} p, \quad t^* = \frac{v_\infty}{L} t, \quad \beta^* = \frac{1}{v_\infty^2} \beta.$$

prevedemo enačbi 1 in 2 v naslednjo obliko:

$$\frac{1}{\beta^*} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} = 0,$$

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (v_j^* v_i^*) = - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left((\mu_{NN}^*) \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right),$$

V zgornjih enačbah nastopajo same brezdimenzijske vrednosti, zato bomo zaradi prikladnosti pisanje zvezdice (*) opustili.

Sistem enačb za ravninski tok nestisljivega nenevtonskega fluida ob upoštevanju umetne stisljivosti in ob uporabi brezdimenzijskih spremenljivk lahko zapišemo v konzervativni obliki kot eno samo vektorsko enačbo [2, 4].

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial E_{vis}}{\partial x} + \frac{\partial G_{vis}}{\partial y}, \quad (4)$$

kjer je

$$Q = \begin{Bmatrix} p/\beta \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_x^2 + p \\ v_x v_y \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{Bmatrix} v_y \\ v_x v_y \\ v_y^2 + p \end{Bmatrix}, \quad E_{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xx} \\ \tilde{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}, \quad G_{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xy} \\ \tilde{\tau}_{yy} \end{Bmatrix}$$

in

$$\tilde{\tau} = \mu_{NN} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Z vpeljavo lokalnih koordinat (ξ, η) , katerih povezavo s kartezijskim koordinatnim sistemom podamo z:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta},$$

prevedemo enačbo 4 v obliko

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathcal{E}_{vis}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{G}_{vis}}{\partial \eta}, \quad (5)$$

kjer so:

$$Q = JQ, \quad \mathcal{E} = J \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} E + \frac{\partial \xi}{\partial y} G \right), \quad \mathcal{G} = J \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} E + \frac{\partial \eta}{\partial y} G \right), \quad \mathcal{E}_{vis} = J \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} E_{vis} + \frac{\partial \xi}{\partial y} G_{vis} \right),$$

$$\mathcal{G}_{vis} = J \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} E_{vis} + \frac{\partial \eta}{\partial y} G_{vis} \right) \quad \text{in} \quad J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Poznamo več enostavnejših zakonov tečenja. Pri teh zakonih je na splošno $\underline{\tau}$ podan z izrazom $\underline{\tau} = -\mu (\dot{\gamma}) \dot{\gamma}$, kjer lahko tenzor deformacijske hitrosti in deformacijsko hitrost zapišemo kot:

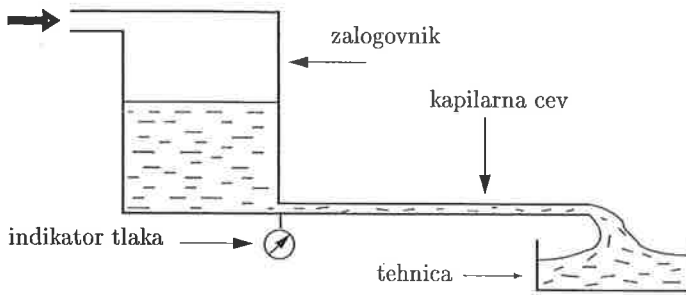
$$\dot{\underline{\gamma}} = \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\underline{\gamma}} : \dot{\underline{\gamma}})},$$

kjer smo z operatorjem $:$ označili sled tenzorja.

Reološki model - Siskov model

V okviru sodelave s Premogovnikom Velenje smo opravili meritve viskoznosti na cevnem viskozimetru, prikazanem na sliki 1. Bistvena sestavna dela viskozimetra sta zalogovnik in kapilarna cev, skozi katero se pri različnih tlakih pretaka zmes, katere viskoznost se določa.

komprimiran zrak



Slika 1: Vodoravni kapilarni viskozimeter

Meritve smo opravljali na treh različnih mešanich elektro-filterskega pepela (produkt termoelektrarne Šoštanj) in vode.

	masni delež pepela [%]	masni delež vode [%]	gostota zmesi [kg/m ³]
ZMES A	50	50	1364
ZMES B	60	40	1469
ZMES C	63	37	1524

Tabela 1: Masni deleži pepela in vode v zmesih in gostota zmesi

V tabeli 1 so podani masni deleži vode in pepela, ter gostote izbranih zmesi.

Ker je zmes ne-newtonska tekočina smo za zakon tečenja izbrali Siskov model, katerega uvrščamo v skupino generaliziranih newtonskih tekočin in ga lahko zapišemo v obliki:

$$\tau = (\mu_{\infty} + m \cdot \dot{\gamma}^{n-1}) \dot{\gamma} , \quad (6)$$

oziroma

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\infty} + m \dot{\gamma}^{n-1} . \quad (7)$$

Triparametrski model je sestavljen iz newtonskega in nenevtonskega dela. μ_{∞} , m in n so vrednosti, podane za vsako tekočino posebej in se določijo na osnovi meritev viskoznosti. Če postavimo $\mu_{\infty} = 0$, $n = 1$ in $m = \mu$, velja izraz za newtonsko tekočino.

Na osnovi meritev so ob uporabi metode najmanjših kvadratov izpeljani parametre Siskovega modela [3] in sicer:

- za zmes A

$$\mu(\dot{\gamma}) = 0.001339 + 0.000059 \dot{\gamma}^{1.6771} \quad (8)$$

- za zmes B

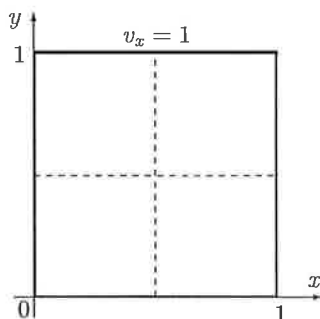
$$\mu(\dot{\gamma}) = 0.000628 + 0.000124\dot{\gamma}^{1.6171} \quad (9)$$

- za zmes C

$$\mu(\dot{\gamma}) = 0.000008 + 0.006181\dot{\gamma}^{1.1719} \quad (10)$$

Rezultati

Model smo preizkusili na primeru gnane kotanje. Gnana kotanja, kot značilen dvodimenzionalen primer je pravokotnik s tremi mirujočimi stranicami in eno pomično stranico, ki se giblje s konstantno hitrostjo. V našem primeru je to kvadrat z brezdimenzijsko dolžino stranice 1 in brezdimenzijsko hitrostjo pomika zgornje plošče 1. Geometrija kotanje je prikazana na sliki 2. Črtkani liniji po sredini kotanje označujeta osrednji liniji (navpično in horizontalno) po katerih smo primerjali hitrostne profile. Dodatna pričakovana težava tega primera je diskontinuiteta v stičiščih mirujočih in gibajoče se stranice.



Slika 2: Geometrija in robni pogoji: gnana kotanja

V prvem delu rezultatov je prikazana konvergenca rezultatov v odvisnosti od gostote mreže. Rezultate smo primerjali z vrednostmi iz literature. Kot primerjalne vrednosti smo uporabili najnižje negativne vrednosti vodoravne in navpične komponente hitrosti na osrednjih linijah. Odstopanje od primerjalnih vrednosti smo definirali z izrazoma [3]:

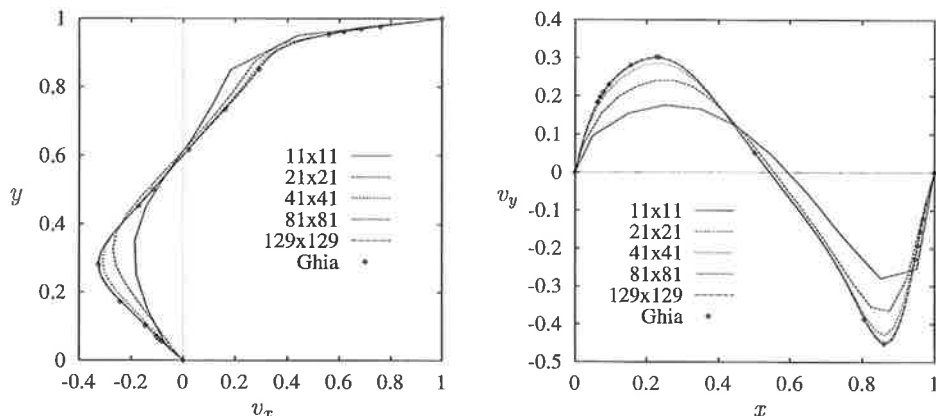
$$\Delta v_x = \frac{|v_{xref} - v_x|}{|v_{xref}|} \cdot 100 \quad [\%] \quad , \quad \Delta v_y = \frac{|v_{yref} - v_y|}{|v_{yref}|} \cdot 100 \quad [\%] \quad .$$

Konvergenca rezultatov za različne gostote mreže je prikazana v tabeli 1. Rezultati so primerjani z referenčnimi vrednostmi za newtonsko tekočino za $Re = 400$.

	Δv_x %	Δv_y %
11 × 11	44.17	38.60
21 × 21	20.63	19.71
41 × 41	5.50	5.19
81 × 81	1.02	0.80
129 × 129	0.28	0.19

Tabela 2: Odstopanje rezultatov v odvisnosti od gostote mreže. Siskov model: $\mu_\infty = 0.$, $m=0.0025$, $n=1$.

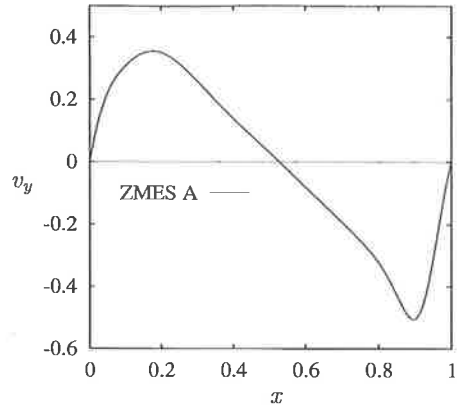
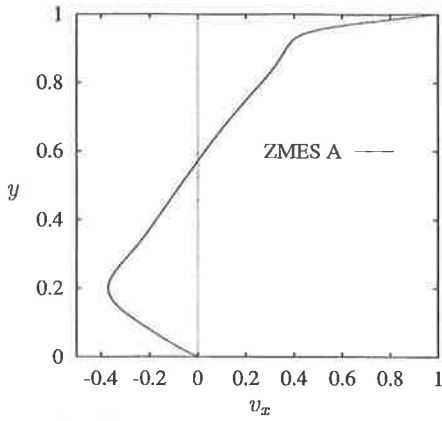
Pri redkejših ekvidistančnih mrežah, zaradi visokih gradientov ob trdih stenah (predvsem zgornji) pride do večjih odstopanj od primerjalnih vrednosti. Z zgoščevanjem mreže se rezultati približujejo referenčnim vrednostim. Z najgostejšo mrežo (129 × 129) dobimo manj kot 0.3 % odstopanja od referenčnih vrednosti za izbrane parametre newtonskih modelov. Potek hitrostnih profilov v odvisnosti od gostote mreže je prikazan na sliki 3.



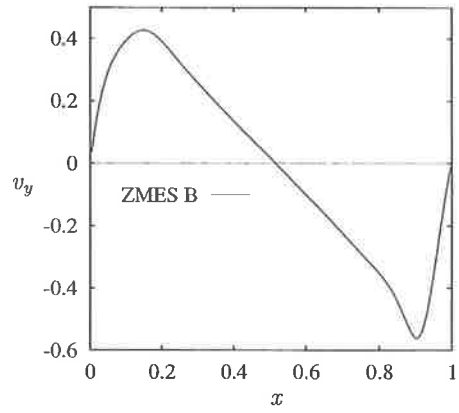
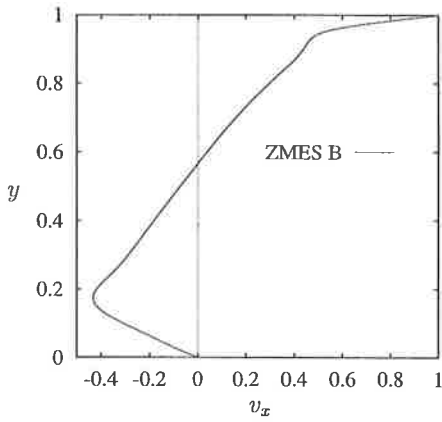
Slika 3: Profil horizontalne hitrosti v_x skozi navpično središčnico in vertikalne hitrosti v_y skozi vodoravno središčnico za različne gostote mreže (Siskov model: $\mu_\infty = 0.$, $m = 0.0025$, $n = 1$).

Na slikah 4, 5 in 6 so prikazani rezultati izračuna tokovnih razmer v gnani kotanji, kjer so modelni parametri za Siskov model dobljeni na osnovi eksperimenta s cevnim viskozimetrom (enačbe 8, 9, in 10.)

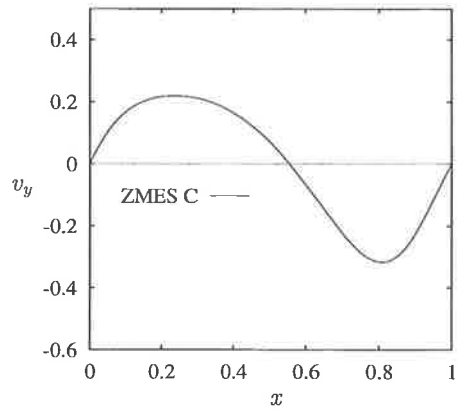
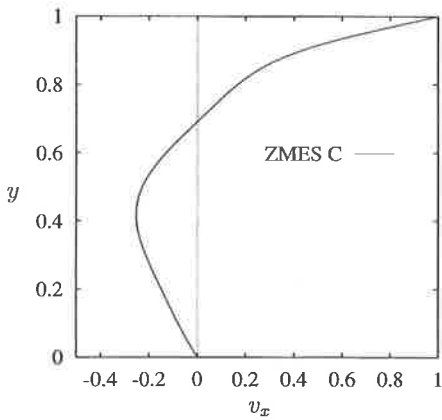
Iz primerjave oblik profilov z rezultati iz literature za Newtonske [1] tekočine je glede na gradiente hitrosti (strmine profilov) moč zaključiti, da je zahtevnost izračuna za najredkejšo zmes (in s tem najmanj viskozno tekočino) primerljiva z izračunom za newtonsko tekočino za Reynoldsovo število $Re = 1000$.



Slika 4: Profil horizontalne hitrosti v_x skozi navpično središčnico in vertikalne hitrosti v_y skozi vodoravno središčnico za zmes A (129×129 vozlišč).



Slika 5: Profil horizontalne hitrosti v_x skozi navpično središčnico in vertikalne hitrosti v_y skozi vodoravno središčnico za zmes B (129×129 vozlišč).



Slika 6: Profil horizontalne hitrosti v_x skozi navpično središčnico in vertikalne hitrosti v_y skozi vodoravno središčnico za zmes C (129×129 vozlišč).

Zaključek

V Metodo kontrolnih volumnov smo uporabili za računanje tokovnih razmer v laminarni viskozni nestisljivi nenevtonski tekočini, kjer smo kot reološki model uporabili Siskov model. Formulacija je testirana na primeru gnane kotanje. Prikazan je vpliv natančnosti rezultatov v odvisnosti od gostote mreže. Prikazani rezultati dobljeni z najgostejšo mrežo (129×129 vozlišč) se zelo dobro ujemajo z primerjalnimi vrednostmi v literaturi. Pri zadnjih treh izračunih so modelni parametri Siskovega modela določeni na osnovi eksperimenta s cevnim viskozimetrom za tri različne gostote zmesi pepela in vode.

Literatura

- [1] U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin: **High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method**, Journal of computational physics 48, str. 387-411, 1982
- [2] J. Marn, M. Delić, Z. Žunič: **Non-Newtonian Fluid Flow Analysis with Finite Difference and Finite Volume Numerical Models**, Applied Rheology, Vol 11, str. 325-335, 2001
- [3] P. Ternik: **Modeliranje toka nenevtonskih disperznih sistemov**, Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 2002.
- [4] Z. Žunič: **Numerična obravnava problema aerodinamike vozil**, Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 1997.

VPLIV DELEŽA TRDNIH DELCEV NA REOLOGIJO DISPERZNE ZMESI

Primož Ternik, Jure Marn¹

SOLIDS MASS FRACTION INFLUENCE TO RHEOLOGY OF DISPERSED MIXTURE

Povzetek

V prispevku obravnavamo laminarni tok nenewtonske disperzne zmesi elektrofiltrskega pepela in vode. V odvisnosti od masnega deleža trdnih delcev smo modelirali tok skozi ravno cev, kjer nas je zanimala dolžina in potek razvijanja hitrostnega profila za predpisano povprečno hitrost. Izvedena je tudi analiza vpliva gostote mreže na numerične rezultate.

Summary

The paper presented deals with a laminar flow of non-Newtonian dispersed mixture of an electrostatic filter ash and water. Depending on solids mass fraction the flow through a pipe was modeled with a focus on an entrance length and development of a velocity profile for prescribed average velocity. Also, the nodalisation analysis was performed.

¹Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija

1 Uvod

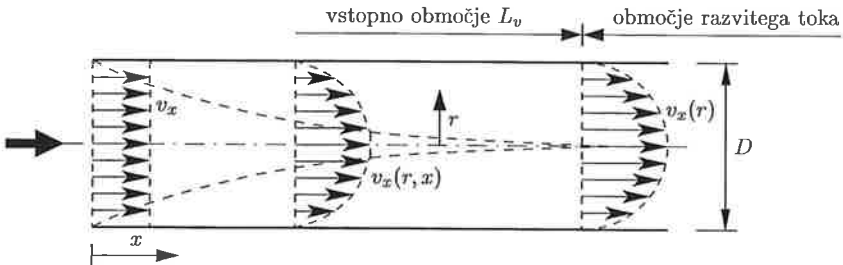
V odvisnosti od masnega deleža elektrofiltrskega pepela izkazujejo disperzne zmesi različno reološko obnašanje. Manjši je delež pepela, bolj je zmes nenevtonska, kar posledično vpliva na hitrostne razmere, linijske in lokalne tlačne izgube toka zmesi skozi elemente cevnih sistemov (Ternik [4]).

Kljub dobremu obvladovanju laminarnega toka nenevtonskih disperznih zmesi v območju popolnoma razvitega hitrostnega profila se postavlja vprašanje, kakšen je vpliv deleža trdnih delcev na reološko obnašanje zmesi v območju razvijanja hitrostnega profila. Vprašanje, na katerega skušamo odgovoriti s prispevkom, je lahko pomembno v primerih, ko se zaradi laminarnega ali lokalno laminarnega toka prične del trdnih delcev v območju razvijanja hitrostnega profila posedati.

Prav tako nam bo analiza toka nenevtonske disperzne zmesi različne sestave v območju razvijanja hitrostnega profila dala odgovor na vprašanje ali so analitične rešitve za vstopno dolžino primerne tudi za nenevtonske tekočine in ali je definicija Reynoldsovega števila za potenčni zakon (Brodkey in Hershey [1]) primerna in tako uporabna tudi za izračunavanje ostalih tokovnih lastnosti (Fanningov faktor trenja...).

2 Laminarni tok tekočine skozi cev

Na sliki (1) so prikazane tokovne razmere za laminarni tok tekočine skozi vodnik krožnega preseka. V vstopnem območju vodnika ($x \leq L_v$) so viskozni učinki pomembni le v mejni plasti. Z napredovanjem toka se mejna plast debeli od stene proti sredini cevi. Hitrost vzdolž cevi je omejena z debelino mejne plasti in je v neviskoznem jedru navidežno konstantna.



Slika 1: Razvoj hitrostnega profila.

Na zadostni dolžini viskozna mejna plast zapolni celoten presek cevi in učinki viskoznih sil postanejo pomembni po celotnem preseku cevi. Hitrostni profil zavzame obliko, ki je neodvisna od vzdolžne razdalje

$$v_x = v_x(r). \quad (1)$$

Govorimo o stanju popolnoma razvitega hitrostnega profila.

Zaradi asimptotičnega približevanja stanju popolnoma razvitega toka so razviti kriteriji, ki so odvisni od tega, koliko se tok približa stanju popolnoma razvitega toka.

2.1 Vstopna dolžina

Za laminarni tok tekočine velja, da je vstopna dolžina L_v tista dolžina, na kateri hitrost toka v sredini cevi doseže 99 % vrednosti hitrosti popolnoma razvitega toka. Ostale definicije oz. kriteriji uporabljajo vrednost 95 % ali 97 %.

V literaturi (Ward-Smith [5]) so dostopne analitične rešitve za vstopno dolžino L_v :

$$\frac{L_v}{D} = 0,056 Re \quad (2)$$

ali (Škerget [3]):

$$\frac{L_v}{D} = 0,060 Re \quad (3)$$

ter (Kays in Crawford [2]):

$$\frac{L_v}{D} = \frac{1}{20} Re. \quad (4)$$

Primernost enačbe (2) je bila potrjena z eksperimentalnim delom za območje $500 < Re < 2000$.

Večina analitičnih rešitev temelji na iskanju takšne rešitve za hitrostni profil, ki (aproksimativno) zadovoljuje diferencialno obliko gibalne enačbe.

Vse enačbe (2) do (4) so izključno odvisne le od Re števila. Avtorji prispevka želijo ugotoviti, ali je moč tudi za nenevtonske tekočine poiskati brezdimenzijsko število, pri katerem bo vstopna dolžina odvisna le od njega.

3 Numerično modeliranje

S programskim paketom CFX-4.4 smo modelirali tok zmesi elektrofiltrskega pepela in vode skozi ravno cev. V odvisnosti od Reynoldsovega števila nas je za posamezno zmes zanimala dolžina, potrebna za razvoj popolnoma razvitega hitrostnega profila.

3.1 Vodilne enačbe

Obravnavamo laminarni in nestisljiv tok nenevtonske tekočine. Tako velja:

- *Kontinuitetna enačba:*

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (5)$$

- *Gibalna enačba:*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}. \quad (6)$$

Za opis nenevtonskega obnašanja zmesi elektrofiltrskega pepela in vode smo uporabili enačbo potenčnega zakona:

$$\tau_{ji} = K \dot{\gamma}_{ji}^n \quad (7)$$

oz. za posamezno zmes (Ternik [4]):

- Zmes I ($\xi_s = 50\%$, $\xi_l = 50\%$, $\rho = 1362 \text{ kg/m}^3$):

$$\tau_{ji} = 0,000105 \dot{\gamma}_{ji}^{1,6176}, \quad (8)$$

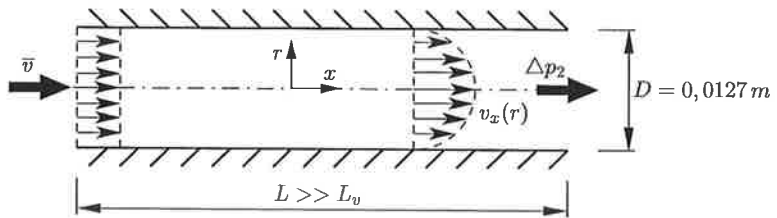
- Zmes II ($\xi_s = 63\%$, $\xi_l = 37\%$, $\rho = 1518 \text{ kg/m}^3$):

$$\tau_{ji} = 0,006185 \dot{\gamma}_{ji}^{1,1719}. \quad (9)$$

Pri tem je ξ_s masni delež elektrofiltrskega pepela in ξ_l masni delež vode v zmesi.

3.2 Robni pogoji

Slika (2) prikazuje geometrijo problema in uporabljene robne pogoje.



Slika 2: Geometrija in robni pogoji.

Uporabljeni robni pogoji:

- vstop: predpisan raven hitrostni profil,
- izstop: relativni tlak $\Delta p_2 = 0$.

ZMES I			ZMES II	
Re	\bar{v} [m/s]	L_v [m]	\bar{v} [m/s]	L_v [m]
500	0,00571	0,381	0,39657	0,381
1000	0,03498	0,762	0,91584	0,762
1500	0,10099	1,143	1,49435	1,143

Tabela 1: Vstopna dolžina L_v .

Pogoje popolnoma razvitega hitrostnega profila na izstopu smo dosegli z modeliranjem toka skozi zadostno dolžino cevi ($L \gg L_v$). Dolžino L_v za posamezno zmes smo ocenili s pomočjo enačbe (3) pri čemer je Reynoldsovo število (Brodkey in Hershey [1]):

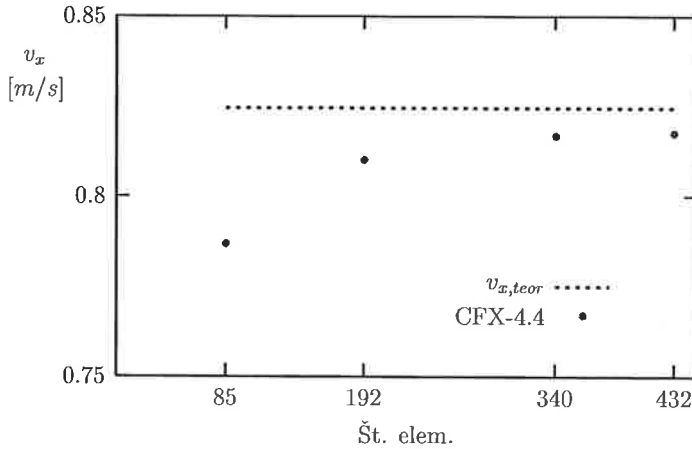
$$Re = \frac{D^n \bar{v}^{2-n} \rho}{8^{n-1} K \left(\frac{3n+1}{4n} \right)}. \quad (10)$$

Rezultate za posamezno zmes prikazuje Tabela (1).

4 Rezultati numeričnega modeliranja

4.1 Nodalizacijska analiza

Z nodalizacijsko analizo smo proučili vpliv gostote mreže na natančnost numeričnega modeliranja. Pri tem smo povečevali število elementov po prečnem preseku cevi. Faktor povečevanja števila elementov v posamezni smeri krožnega preseka je bil 1,5.



Slika 3: Nodalizacijska analiza.

Slika (3) prikazuje rezultate nodalizacijske analize za zmes II, pri čemer je teoretična hitrost izračunana za vrednost $Re = 500$, enačba (10), kot (Ternik [4]):

$$v_x(r=0) = \bar{v} \left(\frac{3n+1}{n+1} \right). \quad (11)$$

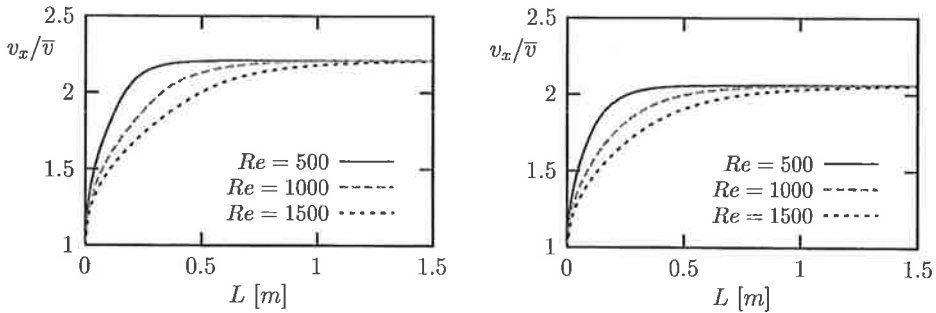
Na osnovi primerjave odstopkov od teoretične vrednosti (Δv_x), Tabela (2), smo se odločili za kompromis med mrežo 2 (192 elementov) in mrežo 4 (432 elementov).

Mreža	$v_{x,CFX}$ [m/s]	$v_{x,teor}$ [m/s]	Δv_x [%]
1	0,7867	0,8245	-4,60
2	0,8101	0,8245	-1,75
3	0,8168	0,8245	-0,94
4	0,8176	0,8245	-0,83

Tabela 2: Rezultati nodalizacijske analize.

4.2 Dolžina vstopnega območja

Slika (4) prikazuje razvoj hitrosti $v_x(r=0)$ v sredini cevi. Za obe zmesi lahko zaključimo, da je vstopna dolžina L_v odvisna le od vrednosti Re števila in ne od lastnosti posamezne zmesi.



Slika 4: Vstopna dolžina; zmes I (levo), zmes II (desno).

Primerjava teoretično in numerično dobljenih vrednosti za L_v , Tabela (3), potrjuje primernost uporabe Reynoldsovega števila, enačba (10), za primer newtonske zmesi opisane s potenčnim zakonom.

ZMES I			ZMES II	
Re	$L_{v,teor} [m]$	$L_{v,CFX} [m]$	$L_{v,teor} [m]$	$L_{v,CFX} [m]$
500	0,381	0,375	0,381	0,375
1000	0,762	0,750	0,762	0,750
1500	1,143	1,125	1,143	1,125

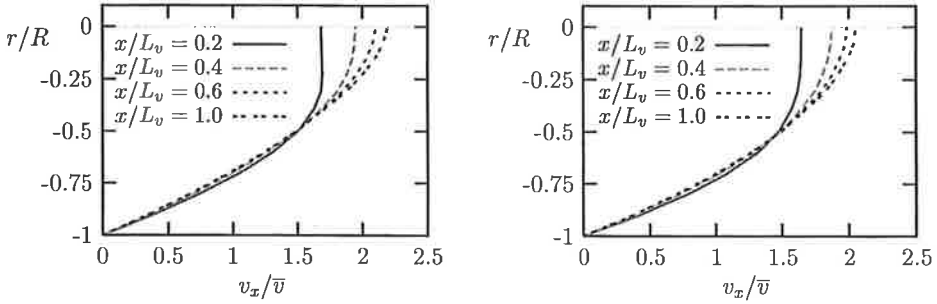
Tabela 3: Primerjava rezultatov za L_v .

Tako ugotovimo, da z enačbo (10) določeno brezdimenzijsko število Re ustreza za analizo toka newtonskih tekočin.

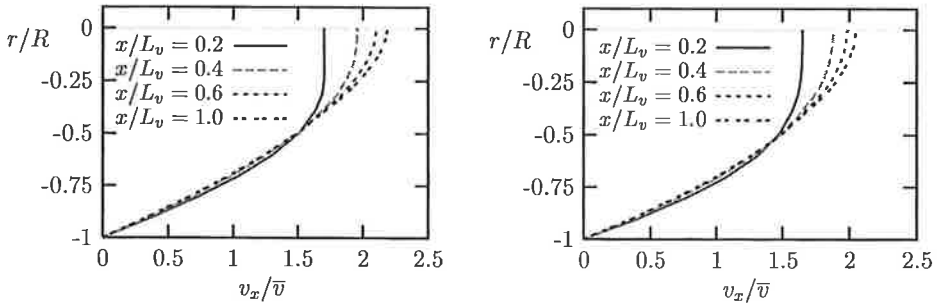
4.3 Hitrostne razmere v vstopnem območju

Sliki (5) in (6) prikazujeta hitrostne razmere po višini cevi za različne vrednosti x/L_v . Neodvisno od sestave zmesi in vrednosti Re števila je potek podoben; na majhni oddaljenosti od vstopa je izraženo nevizkozno jedro (konstantna hitrost v okolici sredine cevi), ki se z večanjem x/L_v zmanjšuje.

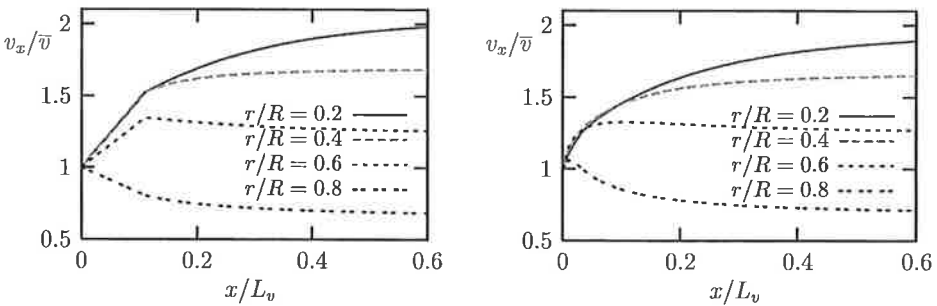
Sliki (7) in (8) prikazujeta potek hitrosti za različne vrednosti r/R . Tok v bližini sredine cevi enakomerno pospešuje in hitrost se približuje svoji končni vrednosti. V območju blizu stene cevi ($r/R = 0,8$) pride do lokalne pospešitve toka, ki zaradi delovanja viskoznih sil preide v postopno zmanjševanje hitrosti in enakomerno približevanje končni vrednosti.



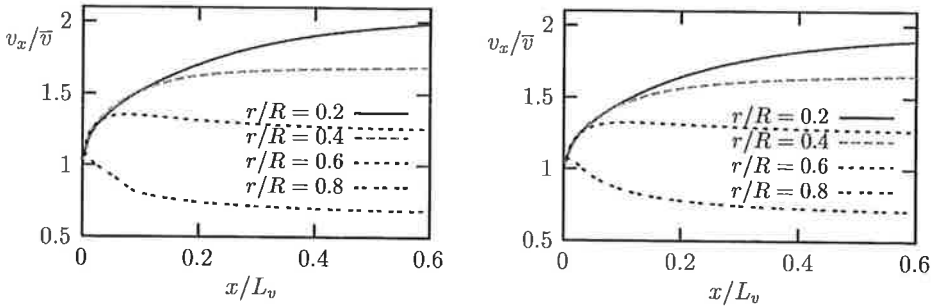
Slika 5: Razvoj hitrostnega profila ($Re = 500$); zmes I (levo), zmes II (desno).



Slika 6: Razvoj hitrostnega profila ($Re = 1500$); zmes I (levo), zmes II (desno).



Slika 7: Razvoj hitrostnega profila ($Re = 500$); zmes I (levo), zmes II (desno).



Slika 8: Razvoj hitrostnega profila ($Re = 1500$); zmes I (levo), zmes II (desno).

5 Zaključki

Z uporabo programskega paketa CFX-4.4 smo analizirali vpliv deleža trdnih delcev na reološko obnašanje nenevtonske disperzne zmesi. Rezultati numeričnega modeliranja toka zmesi elektrofiltrskega pepela in vode skozi cev so potrdili primernost analitičnih enačb, ki podajajo odvisnost vstopne dolžine le od vrednosti Re števila tudi za nenevtonske tekočine.

Natančnost, predvsem pa neodvisnost vpliva gostote mreže na numerično dobljene rezultate, smo potrdili z nodalizacijsko analizo.

Primerjava numeričnih in teoretičnih vrednosti za vstopno dolžino L_v je potrdila primernost definicije (Brodkey in Hershey [1]) Re števila za analizo toka nenevtonskih tekočin, opisanih s potenčnim zakonom.

Pokazano je tudi, da pri isti vrednosti Re števila sestava zmesi ne vpliva na dolžino vstopnega območja in na hitrostne razmere v območju razvijanja hitrostnega profila.

Literatura

- [1] BRODKEY, R.S., HERSHEY, H.C.: *Transport Phenomena*, McGraww-Hill Book Company, Inc., USA, 1988.
- [2] KAYS, W.M., CRAWFORD, M.E.: *Convective heat and mass transfer*, McGraw-Hill Book Company, Inc., USA, 1987.
- [3] ŠKERGET, L.: *Mehanika tekočin*, Univerza v Mariboru (tehniška fakulteta), Univerza v Ljubljani (Fakulteta za strojništvo), Maribor, 1994.
- [4] TERNIK, P.: *Modeliranje toka nenevtonskih disperznih sistemov*, magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Slovenija, 2002.
- [5] WARD-SMITH, A.J.: *Internal fluid flow: The fluid dynamics of flow in pipes and ducts*, Oxford University Press, USA, 1980.

ANALIZA KINEMATIKE TOKA V ROTIRAJOČEM DIFUZORJU

Tom Bajcar¹, Brane Širok¹, Ferdinand Trenc¹, Dragica Jošt²

ANALYSIS OF FLOW KINEMATICS IN A ROTATING DIFFUSER

POVZETEK:

V prispevku so predstavljene raziskave hitrostnega polja toka zraka v rotirajočem aksialnem difuzorju okroglega prereza. Meritve hitrostnih komponent toka so potekale s pomočjo laser-Dopplerjeve anemometrije (sistem LDA). Z meritvami je bila potrjena delitev toka na zunanji rotirajoči del ob vrteči steni in notranji nerotirajoči del v vzdolžni osi difuzorja. Ugotovljen je bil signifikanten porast vseh treh komponent hitrosti v ozkem pasu ob vrteči steni difuzorja. Poleg tega je bil izveden tudi numerični izračun hitrostnega polja v difuzorju s pomočjo treh različnih turbulentnih modelov.

SUMMARY:

The paper describes a study of the flow velocity field inside a rotating axial diffuser with a circular cross-section. Measurement of the flow velocity components was performed by an LDA system. Velocity component measurements confirmed the existence of two types of the flow: a rotating region near the rotating wall and a non-rotating region near the longitudinal axis of the diffuser. Significant increase of all three velocity components was observed in a thin layer at the rotating diffuser wall. In addition, three different turbulence closure models were applied for velocity field prediction inside the rotating diffuser.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

² Turboinštitut, Rovšnikova 7, 1000 Ljubljana

1. Uvod

Analiza hitrostnega polja turbulentnega toka fluida v vrtečem aksialnem difuzorju ima svoje osnove v raziskavah toka fluida skozi difuzor in preučevanju vrtničnih tokov. Začetek pomembnejših raziskav toka v difuzorju segajo nekako v prva desetletja 20. stoletja, predvsem z namenom preučiti dogajanje v mejni plasti difuzorja pri različnih kotih divergence (razširitve) difuzorja (Kováts, 1964). Preveliki koti divergence namreč povzročijo, da se mejna plast ob steni difuzorja na določenem mestu odlepi od stene, kar je posledica aksialnih tlačnih gradientov.

Ena izmed glavnih značilnosti vrtničnih tokov je pojav centrifugalne sile kot posledice radialnega tlačnega gradienta, ki se pojavi v vrtničnih tokovih (Gupta in sod., 1984). V najpreprostejši obliki z zanemarljivo strižnih sil ima radialni tlačni gradient $\frac{\partial p}{\partial r}$ obliko:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \cdot \frac{u_r^2}{r}, \quad (1)$$

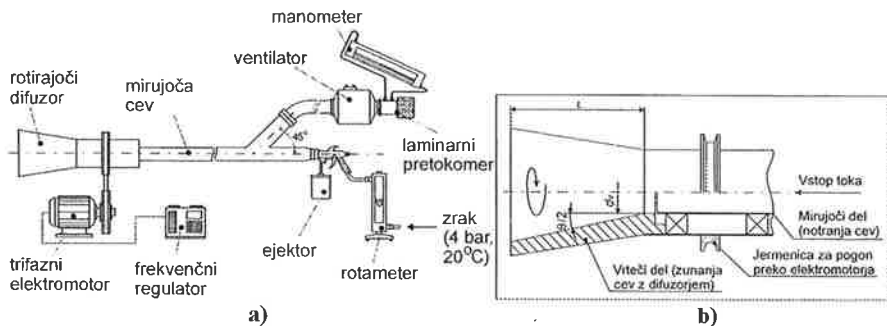
kjer je ρ gostota fluida, u_r njegova obodna hitrost, r pa radij. Centrifugalna sila pospešuje širjenje curka vrtničnega toka radialno navzven.

Raziskave turbulentnih vrtničnih tokov, ki nastanejo v aksialno rotirajočih ravnih ceveh (Imao in sod., 1996), so pokazale predvsem povečanje obodnih in radialnih komponent hitrosti fluida v bližini vrteče stene cevi, profili aksialne komponente hitrosti fluida pa so po obliki postali bolj podobni laminarnim kot turbulentnim (t.i. laminarizacija). Poleg tega je bilo ugotovljeno tudi zmanjšanje hidravličnih izgub v primerjavi z mirujočo cevjo.

Očitno je, da toka skozi vrtečo cev ni mogoče povsem primerjati s tokom skozi vrteči difuzor, saj je potrebno pri slednjem upoštevati geometrijo difuzorja, ki povzroči mnoge kvalitativne in kvantitativne spremembe v toku, še posebej v njegovi mejni plasti oz. v plasteh fluida tik ob steni difuzorja. Raziskave vrtničnega toka v aksialnih difuzorjih okroglega prereza so redke; ena izmed izčrpnějšíh je študija Clausena in sod. (1993), ki predstavlja raziskavo vrtničnega toka iz vrteče cevi, katerega vrtnicec prepreči odlepljanje mejne plasti od stene mirujočega difuzorja s kotom divergence 20° . Rezultati tu predstavljenega eksperimenta so v nadaljevanju pogosto primerjani z ugotovitvami zgoraj navedenih raziskav.

2. Opis eksperimenta

Analiza hitrostnega polja v difuzorju je bila izvedena na merilni postaji, ki jo prikazuje slika 1. Postavljena je bila v Laboratoriju za toplotne batne stroje na Fakulteti za strojništvo Ljubljani.



Slika 1: a) shema merilne postaje; b) shema zgradbe rotirajočega difuzorja.

Difuzor, katerega shema je na sliki 1b, je bil izdelan iz pleksi stekla in je bil preko jeklene zunanje cevi in ležajev povezan z notranjo mirujočo cevjo. Geometrijske karakteristike difuzorja so naslednje: dolžina konusnega dela $L = 165$ mm, kot razširitve oz. divergence $\theta = 18^\circ$, vstopni premer $d_v = 60$ mm, razmerje izstopnega in vstopnega prereza $A_{iz}/A_v = 3,5$.

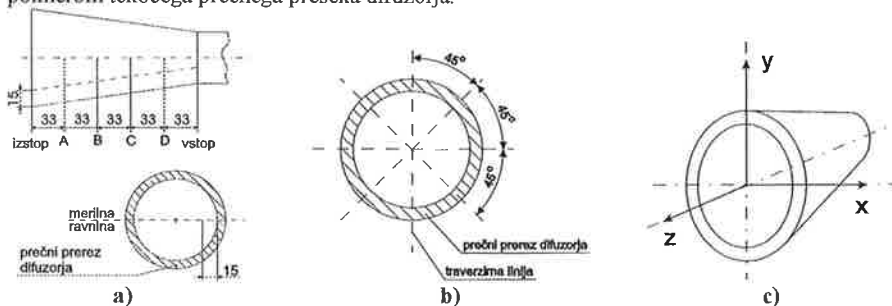
Difuzor se je vrtel okrog svoje vzdolžne osi preko jermenice s pomočjo dvopolnega trofaznega elektromotorja SEVER moči 1,5 kW pri 2810 min^{-1} . Elektromotor je bil krmiljen z vektorskim frekvenčnim pretvornikom MITSUBISHI FREQROL-A024, s katerim se je lahko spreminjala vrtilna frekvenca elektromotorja in s tem tudi difuzorja. Na koncu mirujoče cevi dolžine 1900 mm, ki je vodila k difuzorju, je bil pritrjen ejektor, ki je služil kot generator delcev oz. izvor pasivnega polutanta, potrebnega za vizualizacijo toka ter merjenje hitrostnih profilov z LDA metodo. Kemična sestava kapljic polutanta je bila 80 vol% vode in 20 vol% zelo goste tekočine za meglo (tip E) proizvajalca Conrad Electronic. Ejekcija kapljic je bila izvedena s pomočjo stisnjene zraka z nadtlakom 4 bar, ki je tekel skozi rotameter HEINRICHS 237929, kar je v mirujoči cevi vzpostavilo prostorninski tok 4 l/s. Z uporabo aksialnega ventilatorja in njegovega napetostnega regulatorja se je prostorninski tok v mirujoči cevi lahko povečal. Prostorninski tok zraka skozi ventilator je bil merjen z laminarnim pretokomerom MERIAM Instruments – Laminar Flow Element Model 50MC2-2f. Tok zraka je iz ventilatorja vstopal v mirujočo cev pod kotom 45° . Difuzor je deloval pri treh različnih vrtilnih frekvencah in treh različnih prostorninskih tokovih zraka oz. Reynoldsovih številih (tabela 1).

Vrtilne frekvence difuzorja f (Hz)	Prostorninski tok zraka na vstopu v difuzor \dot{V} (l/s)	Reynoldsovo število na vstopu v difuzor Re (-)
0	4	$5.84 \cdot 10^3$
30	8	$1.17 \cdot 10^4$
52.8	13.8	$2.01 \cdot 10^4$

Tabela 1: Vrtilne frekvence difuzorja, prostorninski tokovi in Reynoldsova števila v difuzorju.

Smer vrtenja difuzorja je bila pri obeh vrtilnih frekvencah enaka, in sicer v nasprotni smeri urinega kazalca, opazovano od izstopa iz difuzorja proti njegovemu vstopu. Vsa navedena Reynoldsova števila predstavljajo Reynoldsova števila na vstopu v difuzor.

Merjenje hitrostnih profilov z LDA sistemom je potekalo pri vseh obratovalnih pogojih, in sicer v pasu 15 mm ob steni na štirih ekvidistančnih prečnih presekih (A, B, C in D) v notranjosti difuzorja (slika 2a), poleg tega pa tudi na vstopnem in izstopnem prerezu difuzorja na štirih traverzirnih linijah (slika 2b). Slika 2c prikazuje uporabljeni koordinatni sistem. Razmerje r/R na diagramih predstavlja razmerje oddaljenosti merilnega mesta od vzdolžne osi difuzorja s polmerom tekočega prečnega preseka difuzorja.

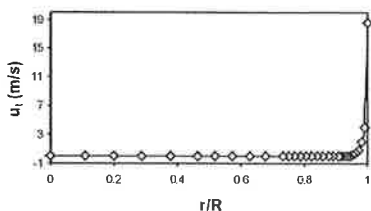


Slika 2: a) – merilna mesta znotraj difuzorja (mere v milimetrih); b) – traverzorne linije na vstopnem in izstopnem prerezu difuzorja; c) – uporabljeni koordinatni sistem.

3. Rezultati

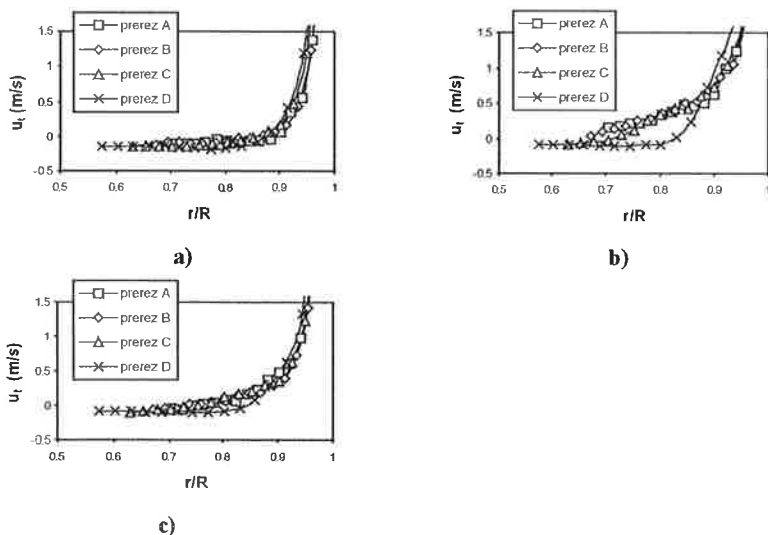
3.1. Potek časovno povprečenih srednjih vrednosti obodnih komponent hitrosti (u_t)

Vrtenje difuzorja okoli njegove vzdolžne osi povzroči v toku zraka obodne komponente hitrosti, saj plasti zraka ob notranji steni difuzorja sledijo gibanju (rotaciji) stene. S tem se v ravnini x - y difuzorja pojavi vrtnec (slika 3).



Slika 3: Časovno povprečene srednje vrednosti obodne hitrosti u_t na izstopu iz difuzorja na x -osi koordinatnega sistema ($f = 52.8$ Hz, $Re = 5.84 \cdot 10^3$).

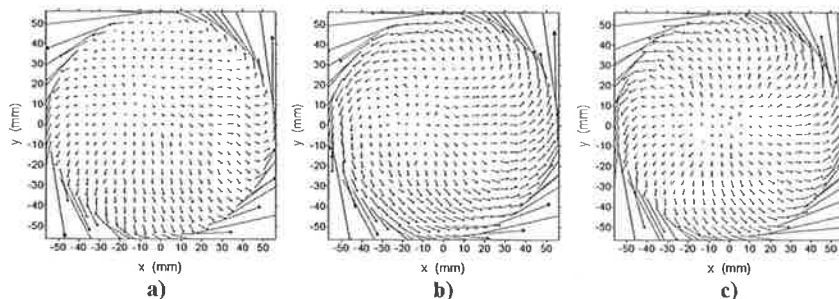
S slike 3 je razvidno, da v difuzorju rotira le del toka zraka v ozkem pasu ob vrteči steni. Rotirajoče območje je velikosti ~ 4 mm in obkroža nerotirajoči del toka. Podoben fenomen je bil opažen tudi v primeru rotirajoče cevi (Cannon in Kays, 1969). Oblika profilov obodnih komponent hitrosti se spreminja s spreminjanjem vrtničnega razmerja $N = u_{t, \text{stene}} / \bar{u}_a$, ki predstavlja razmerje obodne hitrosti stene difuzorja in povprečne aksialne hitrosti zraka na izbranem prečnem prerezu difuzorja (slika 4).



Slika 4: Časovno povprečene obodne komponente hitrosti na prečnih prerezih difuzorja A, B, C in D; a) $-f = 30$ Hz, $Re = 1.17 \cdot 10^4$; b) $-f = 30$ Hz, $Re = 2.01 \cdot 10^4$; c) $-f = 52.8$ Hz, $Re = 2.01 \cdot 10^4$.

S slike 4 je razvidno, da vpliv vrteče stene na tok zraka v difuzorju narašča s povečevanjem prečnega premera difuzorja v smeri od vstopa proti izstopu difuzorja. Povečan vpliv vrteče stene se kaže v širšem področju, kjer so obodne hitrosti zraka pozitivne oz. imajo isti predznak kot obodna hitrost stene difuzorja. Vrtinčno razmerje N je višje na prečnih prerezih, ki so bližje izstopu iz difuzorja (npr. prereza A in B), na teh prerezih pa je širše tudi območje pozitivnih obodnih hitrosti zraka.

Primerjava med slikama 4a in 4b pokaže, da je pri enakih vrtinčnih frekvencah difuzorja in istih prečnih prerezih difuzorja vpliv vrteče stene močnejši v primeru višjih Reynoldsovih števil, torej pri nižjem razmerju N . Podoben pojav je opazen tudi v primeru, ko se pri enakem Reynoldsovem številu zmanjša vrtinčna frekvenca difuzorja in s tem razmerje N (sliki 4b in 4c). To potrdijo tudi hitrostni diagrami v ravnini x - y na izstopu iz difuzorja (slika 5).

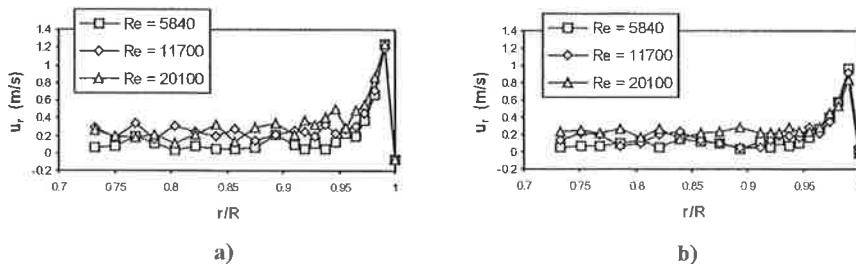


Slika 5: Diagrami hitrosti na izstopu iz difuzorja v ravnini x - y : a) – $f = 30$ Hz, $Re = 1.17 \cdot 10^4$; b) – $f = 30$ Hz, $Re = 2.01 \cdot 10^4$; c) – $f = 52.8$ Hz, $Re = 2.01 \cdot 10^4$.

3.2. Potek časovno povprečenih srednjih vrednosti radialnih komponent hitrosti (u_r)

V rotirajočem difuzorju se kot posledica radialnega tlačnega gradienta (en.1) pojavi radialna komponenta hitrosti zraka v smeri proti vrteči steni difuzorja. Največje radialne komponente hitrosti se po pričakovanju pojavijo v območju najvišjih obodnih hitrosti, saj so le-te glavni vzrok za nastanek radialnih komponent (centrifugalna sila).

Na sliki 6 so prikazani diagrami radialnih komponent hitrosti pri različnih delovnih pogojih difuzorja na njegovem izstopu.



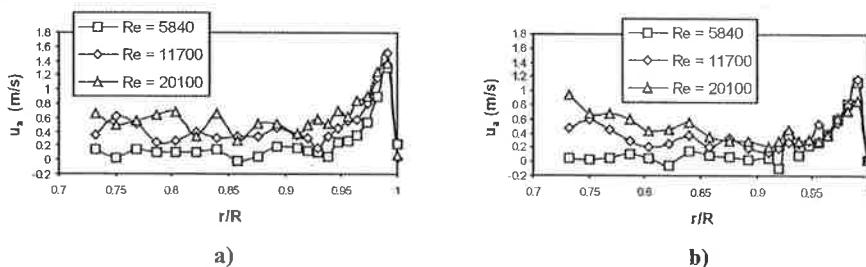
Slika 6: Potek časovno povprečenih radialnih komponent toka: a) – izstop difuzorja, $f = 52.8$ Hz; b) – izstop iz difuzorja, $f = 30$ Hz.

Diagrami na sliki 6 kažejo, da največje vrednosti radialne komponente hitrosti nastopijo tik ob steni difuzorja na oddaljenosti $r/R \approx 0.99$. Največje vrednosti obodne hitrosti nastopijo sicer

neposredno na vrteči steni sami ($r/R = 1$), vendar zaradi stene tam radialne komponente ni. Poleg tega je razvidna odvisnost poteka radialnih komponent hitrosti od frekvence vrtenja difuzorja ter (aksialnega) Reynoldsovega števila, torej od razmerja N . Pri višji frekvenci vrtenja difuzorja in nespremenjenem Reynoldsovem številu (višji N) se pojavijo višje vrednosti radialnih komponent hitrosti, kar lahko pričakujemo, saj so v tem primeru višje tudi obodne komponente hitrosti zraka. Po drugi strani pa se pri višjih vrednostih Reynoldsovega števila in nespremenjeni vrtilni frekvenci difuzorja (nižji N) pojavijo nižje vrednosti radialnih komponent hitrosti zraka; z naraščanjem radialne oddaljenosti od stene difuzorja pa vrednosti radialnih hitrosti pri nižjih vrednostih N postopoma prerastejo tiste pri višjih vrednostih N .

3.3. Potek časovno povprečenih srednjih vrednosti aksialnih komponent hitrosti (u_a)

Na prečnih presekih, ki so bližje izstopu iz difuzorja in kjer so obodne komponente hitrosti izrazitejše, se pojavi lokalni vrh vrednosti aksialnih hitrosti tik ob rotirajoči steni difuzorja (slika 7).



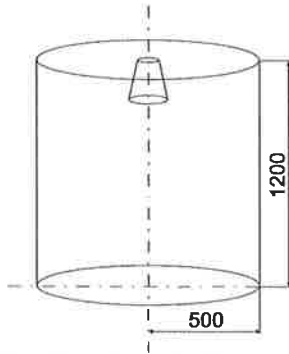
Slika 7: Potek časovno povprečenih aksialnih komponent toka na izstopu iz difuzorja: a) $f = 52,8$ Hz; b) $f = 30$ Hz.

Porast aksialnih komponent tik ob steni ni bil opažen ne v primeru rotirajoče ravne cevi (Murakami in Kikuyama, 1980), prav tako pa tudi ne v primeru vrtničnega toka v mirujočem difuzorju (Clausen in sod., 1993). Eden izmed vzrokov tega pojava leži v delovanju centrifugalne sile, ki potiska tok zraka proti steni difuzorja in s tem proti izstopu iz difuzorja (stena difuzorja namreč divergira v smeri proti njegovemu izstopu). Drugi vzrok pa je čelna stena difuzorja oz. debelina stene difuzorja na njegovem izstopu; med rotacijo difuzorja se zrak ob tej steni zaradi delovanja centrifugalne sile pomika v radialno-obodni smeri navzven v okoliški prostor (Schlichting and Gersten, 2000), na njegovo mesto pa priteka nov zračni tok, ki ga čelna stena difuzorja "črpa" iz notranjosti difuzorja oz. iz mejne plasti ob notranji steni difuzorja. Zaradi navedenih vzrokov ni med eksperimentom nikoli prišlo do odcepljanja plasti zraka tik ob notranji steni difuzorja (povratni tok), kljub temu, da je bil kot divergence difuzorja večji od 14° . S slike 7 je tudi razvidno, da je potek aksialnih komponent hitrosti zraka ob steni difuzorja podoben poteku radialnih komponent hitrosti v istem območju difuzorja (slika 6).

3.4. Rezultati numeričnih modelov

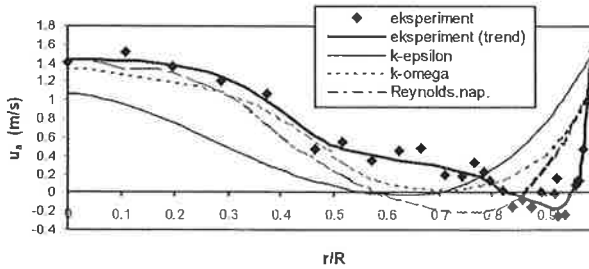
Numerični izračun toka zraka v rotirajočem difuzorju je potekal s pomočjo CFD programskega paketa CFX-TASCflow, verzija 2.10. Pri tem so bili uporabljeni trije turbulentni modeli, ki so že vsebovani v omenjenem programskem paketu: model $k-\epsilon$, model $k-\omega$ SST in model Reynoldsovih napetosti. Začetni pogoji so bili za vse tri modele podani z eksperimentalnimi meritvami, s katerimi so bile določene časovno povprečene hitrostne komponente toka zraka na vstopu v

difuzor. Na sliki 8 je prikazano območje okrog difuzorja (okolica, robni pogoji), ki je bilo uporabljeno pri modeliranju.



Slika 8: Shematski prikaz okolice difuzorja, ki je bila upoštevana pri numeričnem izračunu tokovnega polja v difuzorju (mere so v milimetrih).

Rezultati numeričnih modelov in primerjava z eksperimentalno dobljenimi vrednostmi so prikazani na sliki 9.



Slika 9: Primerjava vrednosti povprečnih aksialnih hitrosti na izstopu iz difuzorja - koordinatna os x ($f = 30$ Hz, $Re = 1.17 \cdot 10^4$).

Vsi turbulentni modeli napovejo porast aksialnih komponent hitrosti tik ob steni vrtečega difuzorja, kjer te vrednosti dosežejo velikost 1.1 m/s (model $k-\omega$ SST) do 1.4 m/s (model $k-\epsilon$), torej so velikostnega razreda izmerjenih vrednosti. Aksialne hitrosti pri eksperimentu padejo na vrednost ~ 0 m/s že na oddaljenosti $r/R = 0.95$, medtem ko je pri turbulentnih modelih ta padec bolj položen. Najhitreje padajo vrednosti aksialne hitrosti pri rezultatih modela Reynoldsovih napetosti, najpočasneje pa pri modelu $k-\epsilon$. Tudi majhno območje povratnega toka, ki se pojavi pri eksperimentu na oddaljenosti $r/R \approx 0.92$, napovedo turbulentni modeli pri nižjih vrednostih r/R (razen modela $k-\omega$, ki povratnega toka na tem delu osi x ne napove).

Zaradi širšega pasu visokih vrednosti aksialnih komponent hitrosti zraka ob steni difuzorja model $k-\epsilon$ tudi ne napove dovolj visokih aksialnih hitrosti v bližini vzdolžne osi difuzorja. Tu sta eksperimentalnim vrednostim precej bližje ostala dva modela, še posebej model Reynoldsovih napetosti.

4. Zaključki

V prispevku je bila izvedena analiza kinematike toka zraka v rotirajočem aksialnem difuzorju s kotom razširitve 18° z namenom ugotoviti vpliv vrteče stene na tok v difuzorju. Analiza je bila opravljena s pomočjo meritev hitrostnega polja z metodo LDA ter z numeričnim modeliranjem toka v difuzorju.

Rezultati potrjujejo pojav dveh tipov toka v rotirajočem difuzorju: rotirajoči tok zraka ob steni in nerotirajoči tok v vzdolžni osi difuzorja; to pomeni, da vpliv rotacije stene ne seže globoko v notranjost difuzorja. Profili obodne komponente hitrosti so zato konkavni. V območju $r/R < 0.1$ se pojavi ekstrem vrednosti vseh treh komponent hitrosti, predvsem na tistih prečnih prerezih difuzorja, ki so bližje izstopu. Rezultati eksperimenta so poleg tega pokazali tudi odvisnost poteka komponent hitrosti zraka v rotirajočem difuzorju od vrtilne frekvence difuzorja in Reynoldsovega števila.

V splošnem so najbližje rezultatom eksperimentalnih meritev rezultati modela Reynoldsovih napetosti, kar potrjujejo tudi rezultati modeliranja toka znotraj vrtečih cevi (Hirai in sod., 1988). To izhaja iz same narave tega turbulentnega modela, saj upošteva precej manj poenostavitev kot dvoenačbni modeli. Posledica tega pa je daljši čas računanja oz. večji računski napor, ki ga model Reynoldsovih napetosti zahteva.

5. Literatura

1. Cannon J. N., Kays W. M., Heat Transfer to a Fluid Flowing inside a Pipe Rotating about its Longitudinal Axis, ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 91, No. 1, 135-139, 1969
2. Clausen P. D., Koh S. G., Wood D. H., Measurements of a Swirling Turbulent Boundary Layer Developing in a Conical Diffuser, Experimental Thermal and Fluid Science, 6, 39-48, 1993
3. Gupta A. K., Lilley D. G., Syred N., Swirl Flows, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1984
4. Hirai S., Takagi T., Matsumoto M., Predictions of the Laminarization Phenomena in an Axially Rotating Pipe Flow, Journal of Fluids Engineering, Vol.110 (December), 424-430, 1988
5. Imao S., Itoh M., Harada T., Turbulent characteristics of the flow in an axially rotating pipe, Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 17, No. 5, 444-451, 1996
6. Kováts A., Design and Performance of Centrifugal and Axial Flow Pumps and Compressors, Pergamon Press Ltd., Oxford, 1964
7. Murakami M., Kikuyama K., Turbulent Flow in Axially Rotating Pipes, Journal of Fluids Engineering, Vol. 102 (March), 97-103, 1980
8. Schlichting H., Gersten K., Boundary-Layer Theory, Springer, Berlin, 2000

RAZVOJ METODE NAPOVEDI KAVITACIJSKE EROZIJE NA HIDRAVLIČNIH STROJIH

Matevž Dular¹, Brane Širok¹, Franci Vehar²

DEVELOPMENT OF A METHOD FOR CAVITATION EROSION PREDICTION IN TURBOMACHINERY

Povzetek

Predstavljen je razvoj metode napovedi kavitacijske erozije na hidravličnih strojih. Na osamljenem profilu in na lopatici radialne črpalke smo obravnavali vizualne in erozijske efekte kavitacije. Predstavljena je nova metoda vrednotenja kavitacijskih poškodb, ki temelji na računalniški vizualizaciji. Z računalniško vizualizacijo je bila izvedena analiza kavitacijskih struktur nad osamljenim profilom v kavitacijskem tunelu in nad rotorsko lopatico črpalke n_q 32. Razvit je bil empirični model, ki povezuje intenzivnost kavitacijske erozije in kinematike kavitacijske strukture nad potopljenim telesom. Predstavljena je napoved kavitacijske ogroženosti na lopaticah rotorja črpalke. Študija je del petega okvirnega evropskega projekta „Cavismonitor“.

Ključne besede: kavitacija, erozija, računalniško podprta vizualizacija, empirični model kavitacije

Summary

The paper describes the development of a method for cavitation erosion prediction in turbomachinery. Visual and erosion effects on an isolated profile and on a radial pump blade were discussed. A new method for the assessment of the cavitation damage is presented. The method is based on the computer-aided visualization. Analysis of cavitation structures was carried out for the isolated profile in the cavitation tunnel as well as for the rotor blade of the n_q 32 pump. An empirical model which connects cavitation erosion intensity with cavitation structure kinematics on the submerged body was developed. Prediction of cavitation threat on pump rotor blades is presented as well. Presented study is a part of the 5th Framework European Project »Cavismonitor«.

Key words: cavitation, erosion, computer aided visualization, empirical model of cavitation

¹ Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

² Turboinštitut d.d., Rovšnikova 7, 1000 Ljubljana

Uvod

Kavitacija v hidravličnih strojih povzroča: vibracije, povečanje hidrodinamskega upora, spremembe kinematike toka, hrup in erozijo. Vsi učinki kavitacije povzročajo hidravlične izgube v pretočnem traktu in zmanjšujejo moč in učinkovitost strojev. Naš namen je časovno in prostorsko povezati vidne topološke kavitacijske strukture z erozijo na površini potopljenega telesa.

Pojav kavitacije je tesno povezan z lokalnimi časovno spremenljivimi hidrodinamskimi lastnostmi, kot sta lokalna kinetična energija toka in lokalni statični tlak. V primeru, da lokalni statični tlak pade pod vrednost pripadajočega uparjalnega tlaka tekočine, se v opazovanem področju oblikuje dvofazni tok kapljevine in pare, ki v področju povečanega statičnega tlaka preko kondenzacije pare preide v enofazni kapljevinski tok. Ta pojav spremljajo značilne tlačne pulzacije.

Metode raziskav kavitacije delimo na integralne in lokalne metode. Integralne metode, ki temeljijo na osnovnih parametrih stroja, so v celoti standardizirane in podprte z mednarodnimi priporočili. Uporabljajo se pri prevzemnih preskusih na modelih hidravličnih strojev, kot so vodne turbine, propelerji in črpalke. Z lokalnimi metodami, kamor štejemo tudi računalniško podprto vizualizacijo, obravnavamo kavitacijo časovno in prostorsko. Lokalne metode služijo predvsem kot dopolnilo integralnim metodam.

Kavitacijska erozija

Kavitacijo delimo glede na obliko kavitacijskih struktur v tekočini, glede na stopnjo ali režim kavitacije in glede na vzroke za nastanek kavitacije [4]. Po obliki delimo kavitacijo na kavitacijo izoliranih mehurčkov, kavitacijo v obliki žepa ali kavitacijskega oblaka in vrtnično kavitacijo, ki nastaja na mestih velike tangencialne napetosti v tekočini. Z vidika kavitacijske erozije na hidravličnih strojih je najpomembnejša kavitacija v obliki žepa ali kavitacijskega oblaka, katerega kavitacijski mehurčki implodirajo nad trdno površino rotorskih lopatic stroja [1,3,4,5,10].

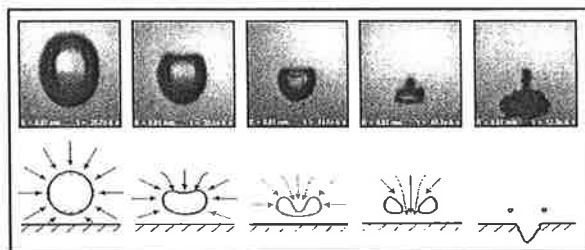
Množico lastnosti, ki vplivajo na nastanek, razvoj in vrsto kavitacije, delimo na hidravlične in geometrične lastnosti. Med hidravlične lastnosti sodijo hitrost fluida, fluktuacije hitrosti, tlak in fluktuacije tlaka. Med geometrične lastnosti pa oblika, orientacija in hrapavost telesa. Osnovne značilnosti kavitacijskega stanja v odvisnosti od hidravličnih pogojev toka opišemo z brezdimenzijskim kavitacijskim številom Th [4,11], ki vključuje referenčni tlak p_{∞} , tlak uparjanja kapljevine p_u in hitrost toka v_{∞} :

$$Th = \frac{p_{\infty} - p_u(T_{\infty})}{\rho \cdot v^2 / 2} \quad (1)$$

S pomočjo kavitacijskega števila Th lahko opišemo kavitacijske pogoje toka fluida glede na pogoje brez kavitacije, začetno stopnjo kavitacije in kavitacijo v različnih fazah. Z zmanjšanjem kavitacijskega števila Th narašča kavitacijska ogroženost. Poleg povečane hitrosti toka in zmanjšanja statičnega tlaka v fluidu vplivajo na kavitacijo tudi geometrijske značilnosti kot so ostri robovi obtekanega telesa, povečanje vpadnega kota in povečana hrapavost površine.

Najpomembnejša nezaželjena posledica kavitacije je erozijska poškodba materiala, povzročena z implozijo kavitacijskih mehurčkov v bližini trdne površine [1,3,5,7,10]. Kolaps kavitacijskega mehurčka je proces, ki generira motnje in šoke z visokimi tlačnimi amplitudami v točki kondenzacije mehurčka. Če se ta proces odvija blizu trdne stene, nastanejo visoke lokalne mehanske obremenitve v strukturi materiala. Ponavljanje te

obremenitve zaradi množice mehurčkov, ki implodirajo, povzročajo utrujanje materiala in „razkrajanje“ materialne strukture na površini. Tlačna motnja nastane v trenutku, ko kavitacijski mehurčki v oblaku implodirajo in s tem povzročijo udarni val, ki se širi na vse strani. Dovolj velik tlačni val ter bližina trdne stene vplivata na sferično simetrijo posameznih mehurčkov, ki se nahajajo blizu stene [1,11]. Ob tem mehurček postane nestabilen v svoji obliki, nastala asimetrija pa lahko ob prehodu v področje z večjim tlakom zavzame obliko pospešenega curka kapljevine, usmerjenega skozi mehurček proti trdni steni. Tako imenovani mikrocurk curek (slika 1) doseže veliko lokalno hitrost, ki povzroči udarni šok z visoko lokalno obremenitvijo materiala [10,11].

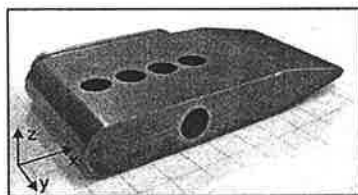


Slika 1: Mehанизem nastanka mikrocurka (prirejeno po [11])

Ekspiriment

Ekspirimentalno delo je obsegalo študijo kavitacije na simetričnem profilu v zaprtem kavitacijskem tunelu. Delo je potekalo na Tehniški univerzi v Darmstadtu – Laboratorij za turbinske stroje in vodno energijo in v Turboinštitutu v Ljubljani. Kavitacijski preskus na simetričnem profilu je bil izveden na kavitacijskem tunelu na Univerzi v Darmstadtu, kjer je bila opravljena tudi ekspirimentalna analiza erozijskih poškodb na izbranih mestih površine profila. V izbranih delovnih točkah so bile posnete zaporedne digitalizirane slike topoloških struktur kavitacijskih oblakov. Predprocesirano vizualizacijsko gradivo je bilo analizirano s programsko opremo v Turboinštitutu v Ljubljani.

Pri ekspirimentu je bil uporabljen simetrični profil (slika 2) s polkrožnim vpadnim robom dolžine 107,9 mm, širine 50 mm in debeline 16 mm. Oblika profila z ravnimi vzporednimi stenami je bila izbrana zaradi tehnologije vrednotenja erozije na kontrolnih površinah – vzorcih.



Slika 2: Profil z izbranim koordinatnim sistemom

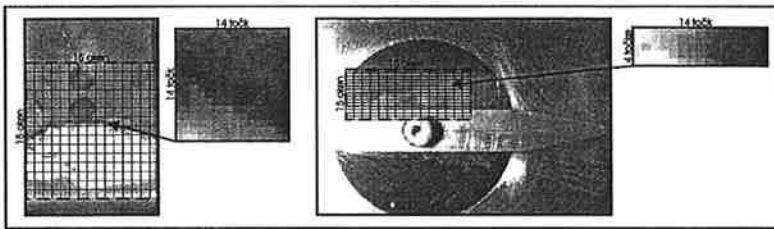
Profil je bil nameščen v kavitacijski tunel s sklenjenim tokokrogom, tako da je bilo mogoče spreminjati tlak (kavitacijsko število – Th) in nominalno hitrost v v sistemu. Srednja hitrost v v testni ravnini pred profilom je znašala $v = 16$ m/s. Med ekspirimentom se je spreminjal tlak v sistemu in vpadni kot profila v mejah od 0° do $7,5^\circ$.

Na profilu so bili nameščeni štirje cilindrični vzorci premera 10 mm, narejeni iz čistega bakra. Baker je primeren material zaradi mehanskih lastnosti, predvsem zaradi majhne trdote in nizke odpornosti na tlačne impulze, ki jih povzroči kavitacija. Kavitacijsko število se je spreminjalo z nastavljanjem tlaka v kavitacijskem tunelu tako, da se je vstopni rob kavitacijskega oblaka nahajal nad določenim vzorcem na profilu. Izbrana so bila štiri kavitacijska števila za vsak vpadni kot profila.

Vizualizacija

Kavitacija je viden pojav, zato ga lahko opazujemo z računalniško vizualizacijo. Kavitacijski oblaki, ki so predmet raziskave, oblikujejo skalarna polja jakosti svetlobe v prostoru in času. S pomočjo časovno zaporedne digitalizacije slik so bile generirane posamezne sočasne časovne vrste, ki popisujejo kavitacijske strukture.

Za vsak kavitacijski režim sta bili posneti dve seriji 500 slik s frekvenco zajemanja slik 25 slik/s. Profil smo osvetljevali s stroboskopsko lučjo pod kotom 45°. Prva serija predstavlja pogled na profil od zgoraj, druga pa s strani. Signal iz video kamere je bil digitaliziran s kartico za zajemanje slik s 24-bitno barvno ločljivostjo v sistemu jpeg. Za nadaljno uporabo in analizo v programu za kvantifikacijo dinamičnih pojavov na digitalnih slikah Dynascan je bila ločljivost zmanjšana na 256 odtenkov sivine. Statistično vrednoteno vidno polje je bilo razdeljeno na 225 oken (slika 3).



Slika 3: Vidni polji in vzorčni okni matrike pri pogledu od zgoraj in od strani

Pri pogledu od zgoraj je bila velikost vsakega okna 14x14 točk, pri pogledu od strani pa je bilo okno veliko 4x14 točk. Za vsako okno je bila izračunana skalarna funkcija [4,5]:

$$A(i, j, n) = \frac{1}{K \cdot L} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L E(k, l, n), \quad \text{kjer je } E(k, l, n) \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}, \quad (2)$$

kjer E podaja lokalno, A pa povprečno svetlost. Kvantitativna ocena kavitacijske strukture na opazovanem območju profila v vertikalni in horizontalni smeri prečno na profil je podana v obliki prostorskih topoloških porazdelitev skalarnе funkcije [4,5]:

$$\mu(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A(i, j, n), \quad \sigma(i, j) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [A(i, j, n) - \mu(i, j)]^2}. \quad (3, 4)$$

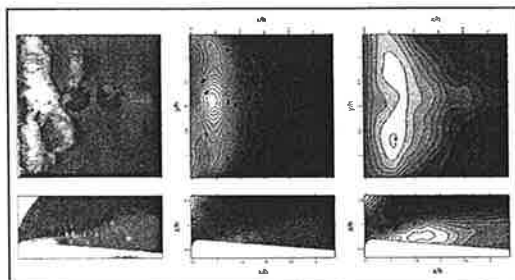
kjer je $\mu(i, j)$ povprečna jakost, $\sigma(i, j)$ pa standardna deviacija jakosti svetlobe.

Z enačbami 3 in 4 so bile ocenjene lokalne karakteristike topoloških struktur kinematike kavitacijskega oblaka pri različnih integralnih parametrih kavitacije.

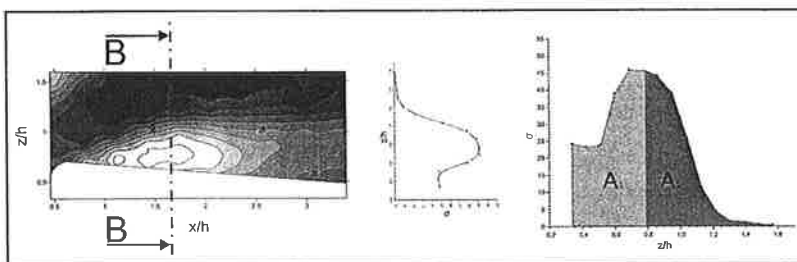
Lego in vrednost maksimalne jakosti kavitacije je mogoče oceniti iz slike 4, ki prikazuje vzorčno porazdelitev intenzitete kavitacije nad profilom. Oba parametra se značilno spreminjata z integralnimi parametri kavitacije.

Mesto in intenzivnost kavitacije, ki sta opisani s parametroma μ in σ v odvisnosti od brezdimenzijskih koordinat x/h in y/h , kjer sta x in y koordinati v meridianski ravnini profila, h pa je debelina profila, sta značilno odvisni od kavitacijskega števila Th . Z zmanjševanjem kavitacijskega števila se jakost kavitacije povečuje, lega največjih vrednosti spremenljivk μ in σ pa se premika vzdolž profila. Pomemben parameter je predvsem standardna deviacija svetlosti σ , ki fizikalno podaja fluktuacijo v velikosti kavitacijskega oblaka na določenem mestu. Tako lahko predpostavimo, da mesto implozije kavitacijskega oblaka in mesto maksimalne poškodbe površine vzorca sovpadata z mestom maksimuma fluktuacij v velikosti oblaka – z mestom maksimuma standardne deviacije svetlosti σ .

Naslednji pomemben podatek o kavitacijskih razmerah na osamljenem profilu je odmik kavitacijskega oblaka od površine profila. Oddaljenost kavitacijskega oblaka od površine je določena iz diagramov lokalnih porazdelitev jakosti kavitacije pri pogledu s strani. Na sliki 5 je prikazana porazdelitev standardne deviacije svetlosti pri konstantni vrednosti x/h v odvisnosti od z/h .



Slika 4: Hitrost toka je 16 m/s, $\delta=5^\circ$, $Th=2,43$



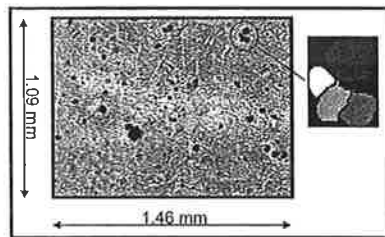
Slika 5: Določanje oddaljenosti implozije kavitacijskega oblaka

Preizkusili smo več metod določanja mesta implozije kavitacijskega oblaka. Kot najboljša pa se je pokazala metoda, ko smo za mesto implozije kavitacijskega oblaka vzeli vrednost z/h , kjer je diagram porazdelitve standardne deviacije svetlosti σ ploščinsko razdeljen na dva enaka dela ($A_1 = A_2$) (slika 5). Brezdimenzijska oddaljenost mesta implozije l kavitacijskega oblaka od površine profila je bila določena z razliko mesta implozije in brezdimenzijsko višino profila na tem mestu. Pri tem ni bil upoštevan vpliv naklonskega kota profila δ .

Vrednotenje poškodb

Ocenjevanje erozijskih poškodb temelji na vrednotenju geometrijskih sprememb na površini vzorca. Vzorci so bili v profil vstavljeni poravnano s površino in izpostavljeni toku. Čas preizkusa je bil 30 minut. Spremembe so se odražale kot luknjice na površini (slika 6), ki so posledica erozije zaradi kavitacije. Luknjice na površini vzorca imajo premer velikostnega reda 10^{-5} m [1].

Jakost erozijskih učinkov kavitacije je bila določena z metodo štetja luknjic. Razvit je bil program vrednotenja, ki luknjice prešteje in oceni njihovo površino. Program je upošteval prekrivanje dveh ali več luknjic. Jakost kavitacije kvantitativno podajata število N in površina luknjic A_d . Uporabljena metoda omogoča relativno medsebojno primerjavo vzorcev na profilu.



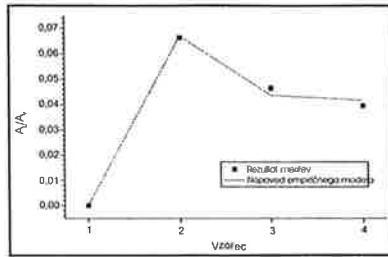
Slika 6: Poškodovana površina vzorca (prirejeno po [1])

Empirični model

Empirični fenomenološki model temelji na hipotezi, da je jakost erozije sorazmerna jakosti fluktuacije kavitacijskega oblaka (popisana s standardno deviacijo svetlosti) in obratno sorazmerna oddaljenosti kavitacijskega oblaka l od površine profila. Intenziteto erozije izrazimo z A_d/A_{ref} . Napoved jakosti kavitacijske erozije za opazovani eksperiment podaja enačba:

$$\frac{A_d}{A_{ref}} = 0,0129 \cdot \frac{\log_{10}(\sigma - 25)}{l^{0,965}} \quad (5)$$

Če je rezultat empiričnega modela negativen oziroma nedoločljiv ga obravnavamo kot $A_d/A_{ref} = 0$. Koeficienti v enačbi 5 so določeni z metodo najmanjših kvadratov odstopanja modeliranih od izmerjenih vrednosti. Koeficient „25“ izberemo kot funkcijo materiala in pomeni prag, ki ga mora doseči intenzivnost kavitacije, da pride do erozije površine [10]. Ujemanje napovedi modela z eksperimentalno izmerjenimi vrednostmi erozije za štiri lokacije čepov na profilu prikazuje slika 7.



Slika 7: Primerjava napovedi modela in eksperimentalnih vrednosti erozije na vzorcih

Kavitacija na radialni črpalki

Metodo napovedi kavitacijske erozije (predstavljen empirični model), ki smo jo razvili pri delu z osamljenim profilom, smo uporabili pri napovedi erozijskih učinkov kavitacije na lopatici radialne črpalke n_q32 .

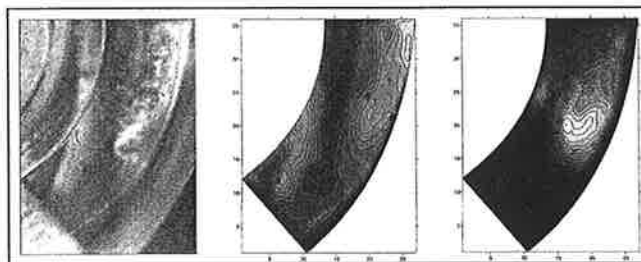
Črpalka je enostopenjska, ima aksialen vstop v rotor in radialen izstop. Črpalka deluje optimalno pri pretoku $Q_{opt}=0.064 \text{ m}^3/\text{s}$. Eksperiment smo izvajali na postaji za preizkušanje radialnih modelnih črpalk, ki omogoča merjenje hidravličnih, energijskih in kavitacijskih karakteristik črpalk. Vrednotili smo 15 različnih kavitacijskih režimov - pri petih različnih pretokih. Poleg pretoka Q smo spreminjali tudi tlak v sistemu - posledično pa vrednost NPSH, ki je določena z:

$$NPSH = \frac{P_2 - P_u}{\rho_2 \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} - (Z_{ref} - Z_2). \quad (6)$$

NPSH (neto pozitivna sesalna višina), pomeni skupno absolutno tlačno višino na neki referenčni točki z odšteto višino pamega tlaka vode in iztočnimi izgubami.

Ponovili smo postopek vizualizacije procesa kavitacije. V vsaki seriji je bilo 400 slik (format zapisa bmp), ki smo jih nato obdelali s programom Dynascan. Opazovalno polje je zavzemalo celotno lopatico na sliki in je bilo razdeljeno na matriko z 972 enotami velikosti 11×11 točk.

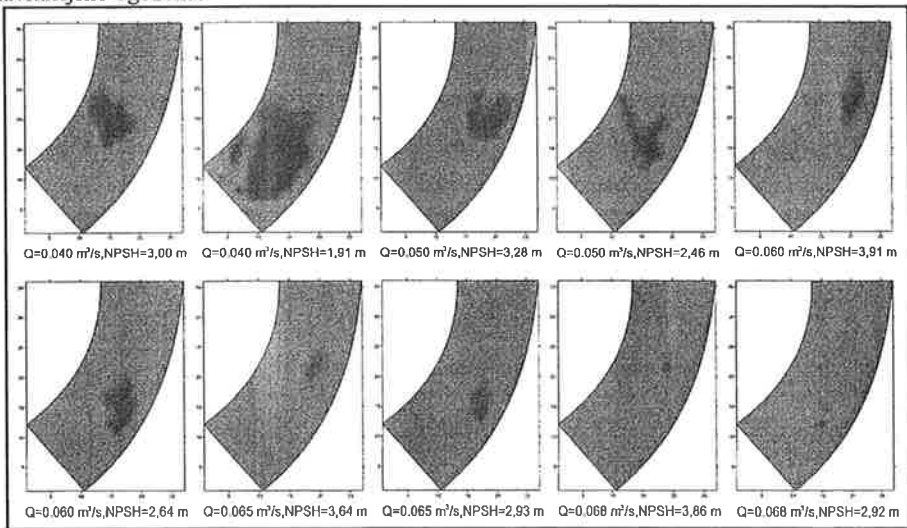
Vzorčno porazdelitev intenzitete kavitacije nad lopatico črpalke prikazuje slika 8 (levo je slika lopatice, v sredini je konturni diagram srednje vrednosti svetlosti, desno pa diagram standardne deviacije svetlosti).



Slika 8: Volumski pretok je $0,05 \text{ m}^3/\text{s}$, $NPSH=3,28 \text{ m}$

S pomočjo empiričnega modela (enačba 5) smo želeli napovedati mesto, obliko in velikost kavitacijske poškodbe lopatice črpalke. Problem je predvsem prostorsko ukrivljena površina lopatice, ki izključuje možnost opazovanja (snemanja) z dveh pogledov. Tako smo s slik dobili le informacijo o legi in o intenziteti kavitacije, ne pa tudi o oddaljenosti kavitacijskega oblaka od površine. Na podlagi drugih meritev smo postavili hipotezo, da se oddaljenost kavitacijskega oblaka od površine vzdolž lopate bistveno ne spreminja in jo lahko obravnavamo kot konstanto [1].

Določili smo lahko mesto in obliko verjetnosti nastanka kavitacijske erozije. Na diagramih je z rdečo barvo označeno območje kavitacijske ogroženosti, z zeleno pa „varno“ območje. Pri režimih z večjimi vrednostmi NPSH ni bilo opazne kavitacije, torej lopatica ni bila kavitacijsko ogožena.



Slika 9: Mesta največje verjetnosti nastanka kavitacijske poškodbe, za različne kavitacijske režime

Resneje je kavitacijsko ogrožena lopatica pri minimalnem pretoku $Q_{opt}=0.04 \text{ m}^3/\text{s}$. Pričakovano se pokaže, da je lopatica bolj ogrožena pri nižjih vrednostih NPSH in pri manjših pretokih Q. Vidimo tudi, da se z večanjem pretoka Q mesto kavitacijske ogroženosti pomika proti vpadnemu robu lopatice in da pri tem slabi, kar je posledica spremenjene kinematike toka okoli lopatice.

Zaključki

Predstavili smo nov pogled na obravnavanje kavitacije - računalniško podprto vizualizacijo. V prvem delu naloge smo kavitacijo raziskovali na osnovnem (fenomenološkem) nivoju. Zato smo obravnavali kavitacijske strukture nad enostavnim profilom v kavitacijskem tunelu. Ta pristop nam omogoča opazovanje struktur z več strani, kjer lahko enostavno določimo intenziteto kavitacije in oddaljenost kolapsa kavitacijskega oblaka od profila. Pri

kompleksnejših eksperimentih na modelnih črpalkah in turbinah te možnosti v večini primerov nimamo.

Pri merjenju erozijskih učinkov kavitacije smo uporabili novo metodo - metodo štetja luknjic. V ta namen je bil razvit nov sistem za vrednotenje in pripadajoča programska oprema. Metoda, ki smo jo testirali na enostavnem profilu, obeta velike možnosti za enostavno vrednotenje poškodb na površinah z zahtevnejšo geometrijo (prostorsko ukrivljena lopatica črpalke ali turbine). Problem metode je predvsem zagotavljanje enakih (ponovljivih) lastnosti zaznavala (materiala), v našem primeru vzorca.

Pokazali smo, da so porazdelitve kavitacijskih struktur tesno povezane s kavitacijskimi razmerami. Sklepali smo, da obstaja fenomenološka povezava med prostorsko porazdelitvijo kavitacijske strukture in kavitacijsko erozijo - fenomenološki empirični model. Maksimalno poškodbo smo predpostavili ob največji intenziteti σ in najmanjši oddaljenosti l .

Obravnavali smo tudi kavitacijo na lopatici radialne črpalke. Tudi tu smo s pomočjo računalniško podprte vizualizacije prostorsko in intenzitetno opredelili kavitacijske strukture. Za različne kavitacijske režime smo opredelili območja, kjer je verjetnost nastanka kavitacijske poškodbe večja.

Z nadaljnim razvojem metode bi bilo možno s pomočjo vizualizacije poleg mesta predviditi tudi velikost poškodbe na realnih hidravličnih strojih. V industriji računalniško podprta vizualizacija odpira nove možnosti za nadzor in kontrolo kavitacije na gonilnikih turbin in pri večjih procesnih črpalkah.

Zahvala

V prispevku opisano raziskovalno delo je podprla Evropska komisija (Commission of the European Communities Directorate-General for Energy and Transport) v okviru EU projekta 5. okvirnega programa: "*Cavitation Monitoring In Hydraulic Machines With Aid Of A Computer Aided Visualization Method (CAVISMONTOR)*", št. pogodbe: NNE5/1999/597.

Literatura

- [1] Bachert B., Lohrberg H., Stoffel B.: Cavismonitor - Cavitation monitoring in hydraulic machines with aid of a computer aided visualization method; 2nd International Symposium on Quantification of Visualized Processes in Fluid Dynamics, str. 10 - 22, Bled, 2002
- [2] Brennen C.E.: Cavitation and Bubble Dynamics; Oxford University Press, New York, Oxford, 1995
- [3] Hofmann M., Lohrberg H., Ludwig G., Stoffel B., Rebound J.-L., Fortes-Patella R.: Numerical and experimental investigations on the self - oscillating behaviour of cloud cavitation - Part 1: Visualisation; 3rd ASME / JSME Joint Fluids Engineering Conference, San Francisco CA, 1999
- [4] Kern I.: Eksperimentalna raziskava dinamičnih parametrov na modelu Kaplanove vodne turbine - Magistrska naloga; Univerza v Ljubljani - Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2000
- [5] Kern I., Rus T., Hočevar M., Djelič V., Širok B.: Study of topological structures of cavitation with dynamical analysis and computer aided visualisation; Proceedings of

9th IAHR International Meeting on the Behaviour of Hydraulic Machinery Under Steady Oscillatory Conditions, Paper C.3, Brno, 1999

- [6] Knapp R.T., Daily J.W., Hammit F.G.: Cavitation; McGraw-Hill Book Company, London, 1970
- [7] Ludwig G., Lohrberg H., Stoffel B.: Detection of 2-dimensional contours of cavitation pockets on a single hydrofoil; 2nd International Symposium on Quantification of Visualized Processes in Fluid Dynamics, str. 10 - 22, Bled, 2002
- [8] Novak M., Širok B., Hočevar M.: Computer vision system as a tool for the analysis of turbulent mixing flows; Proceedings of 9th IAHR International Meeting on the Behaviour of Hydraulic Machinery Under Steady Oscillatory Conditions, Paper C.2, Brno, 1999
- [9] Novak M., Širok B., Trdič F.: The measurement of time fluctuation of bluff body vortex street with aid of digital image-processing technique; Proceedings of 8th International Symposium on Flow Visualization ISFV '98, pp. 9.1 - 9.9, Sorrento, 1998
- [10] Pereira F.: Prédiction de l'érosion cavitation: approche énergétique - Doktorska disertacija; École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 1997
- [11] Young F.R.: Cavitation; Mc Graw-Hill Book Company, London, 1999

MRE ZA VISKOELASTIČEN TOK V KANALU Z NENADNO ZOŽITVIJO

L.Škerget ¹, M.Požarnik ²

BEM FOR SUDDEN CONTRACTION CHANNEL VISCOELASTIC FLOW

POVZETEK

*V prispevku je prikazan razvoj numerične sheme na osnovi metode robnih elementov (MRE) za modeliranje ravninskih tokov linearne in kvazilinearne Maxwelllove tekočine. Kot podlaga za razvoj služi shema za modeliranje nestisljivih viskoznih tokov, ki smo jo razširili in ji dodali potrebne člene za zajemanje viskoelastičnosti nenevtonskih tekočin. Posebno pozornost smo namenili integraciji ohranitvenih zakonov in reoloških modelov. Shema je zapisana za hitrostno-
vrtinčno formulacijo vodilnih enačb. Kot testni primer je predstavljen tok nenevtonske tekočine v kanalu z nenadno zožitvijo.*

SUMMARY

In the contribution boundary element method (BEM) numerical scheme development for the planar linear and quasilinear Maxwell fluid flows is shown. In particular, a singular boundary integral approach, which has been established for the viscous incompressible flow problem, is modified and extended to capture viscoelastic fluid state. A special attention is given to a proper integration of the conservation and constitutive equations. A velocity-vorticity formulation of the governing equations is adopted. As a test case a non-Newtonian flow in the sudden contraction channel is studied.

¹Prof.Dr. L. Škerget, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru, Slovenija

²Dr. M. Požarnik, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru, Slovenija

1 Uvod

V članku predstavljamo metodo robnih elementov (MRE) za reševanje Navier-Stokesovih enačb zapisanih za različne Maxwelllove viskoelastične tekočine na osnovi izvedenih spremenljivk. Uporabili smo zapis za vektorski potencial in vrtničnost. Formulacija v primerjavi z zapisom za osnovne spremenljivke omogoča izločitev tlaka iz računske sheme, kar pomeni, da se izognemo težavam pri predpisovanju robnih vrednosti tlaka v toku nestisljive tekočine. Z uporabo vektorskega potenciala določimo hitrostno polje, ki zadošča kriteriju ohranitve mase oziroma pogoju solenoidnosti hitrostnega vektorja.

Stabilnost in natančnost numeričnega algoritma dosežemo brez dodatnih stabilizacijskih tehnik z uporabo eliptične Laplaceove in parabolčne difuzijske osnovne rešitve, ki opisujeta linearen del transportnega pojava. Posebno pozornost smo posvetili integraciji ohranitvenih in reoloških modelov.

Robustnost razvite numerične sheme smo preverili s standardnim testnim primerom toka v kanalu z nenadno zožitvijo, kjer zaradi pospeševanja toka nastopijo velike lokalne napetosti.

2 Zakoni ohranitve

Sistem vodilnih parcialnih diferencialnih enačb ter enačb stanja temelji na zakonih ohranitve mase, gibalne količine in energije. Delo je omejeno na izotermni laminarni tok nestisljive viskoelastične izotropne tekočine.

Opazovani funkciji polja predstavljata vektor hitrosti $v_i(r_j, t)$ in tlačno polje $p(r_j, t)$, ki zadoščata kontinuitetni in gibalni enačbi

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad (2)$$

ki sta zapisani v obliki kartezičnega tenzorskega zapisa x_i in kjer so ρ nespremenljiva gostota tekočine, t čas, g_i težnostni pospešek, σ_{ij} napetostni tenzor in $D(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + v_k \partial(\cdot)/\partial x_k$ Stokesov oziroma snovski odvod spremenljivke (\cdot) .

Kontinuitetno (1) ter gibalno enačbo (2) dopolnimo z izbranim reološkim modelom ter ju rešujemo skladno s predpisanimi robnimi ter začetnimi pogoji. Ti so v splošnem odvisni od vrste zapisa. Uporabimo lahko zapis za osnovne ali izpeljane spremenljivke.

3 Reološki model

Cauchyjev napetostni tenzor σ_{ij} lahko v primeru toka nestisljive tekočine ločimo na prispevek tlaka in dodatnega deviatoričnega napetostnega tenzorja τ_{ij}

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (3)$$

kjer je δ_{ij} Kroneckerjeva delta funkcija. Bistveni del dinamike viskoelastičnih tekočin je izbira primerne reološkega modela, ki podaja soodvisnost dodatnih napetosti (3) in kinematike toka.

V prispevku prikazane diferencialne konstitutivne enačbe so implicitni Maxwellovi reološki modeli. Za širok spekter materialov, kot so na primer tekočine s pojemajočim spominom, lahko zapišemo odvisnost med napetostnim in deformacijskim tenzorjem ter njunimi odvodi po času. Komponente napetosti in deformacij so lahko spodnje ali zgornje konvektivne.

Poljuben simetrični tenzor drugega reda u_{ij} , ki ga lahko enačimo z dodatnim napetostnim tenzorjem τ_{ij} ali deformacijskim tenzorjem ϵ_{ij} , je mogoče zapisati na več načinov. Z naslednjim izrazom najprej definirajmo Stokesov snovski odvod

$$\frac{Du_{ij}}{Dt} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k}, \quad (4)$$

nato zgornje konvektivni odvod

$$\overset{\nabla}{u}_{ij} = \frac{Du_{ij}}{Dt} - u_{ik}L_{jk} - u_{jk}L_{ik}, \quad (5)$$

medtem ko je spodnje konvektivni odvod določen z

$$\overset{\Delta}{u}_{ij} = \frac{Du_{ij}}{Dt} + u_{ik}L_{kj} + u_{jk}L_{ki}, \quad (6)$$

kjer nadpisa ∇ in Δ označujeta spodnje oziroma zgornje konvektivna odvoda. Hitrostni gradient L_{ij} je definiran kot

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (7)$$

V linearnem Maxwellovem modelu vsebuje dodatni napetostni člen τ_{ij} viskozne in elastične učinke

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\eta_0 \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (8)$$

kjer materialna konstanta tekočine λ_1 predstavlja napetostni relaksacijski čas, medtem ko η_0 označimo dinamično viskoznost. Vpliv elastičnosti, ki je podan z lokalnim odvodom dodatnega napetostnega tenzorja po času, je pomemben le med prehodnim pojavom. Z razvojem hitrostnega profila lokalni časovni odvod izgublja pomembnost tako, da v stacionarnem stanju prevladujejo učinki viskoznosti.

Kvazilinearni Maxwellov model, podan v naslednji obliki

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\eta_0 \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (9)$$

zajema nelinearnost zaradi lokalnega in konvektivnega odvoda napetostnega tenzorja. Model (9) ni uporaben v praksi, kljub temu pa ga zaradi enostavnosti lahko uporabimo za študij stabilnosti in natančnosti razvitega numeričnega algoritma.

V nadaljevanju sta prikazana oba konvektivna Maxwellova modela. Zgornje konvektivni Maxwellov model je podan z

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tau}_{ij} = 2\eta_0 \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (10)$$

medtem ko spodnje konvektivnega zapišemo kot

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \overset{\Delta}{\tau}_{ij} = 2\eta_0 \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (11)$$

Zgornje konvektivni Maxwellov model mnogokrat služi za testiranje numeričnih algoritmov, saj je gibanje nekaterih realnih tekočin, vsaj v omejenem obsegu, mogoče opisati z enačbo (10). Zaradi tega zgornje konvektivni model (10) zapišemo v eksplicitni obliki

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\eta_0 \dot{\epsilon}_{ij} + \lambda_1 \left(\tau_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad (12)$$

kjer je del zgornje konvektivnega odvoda (Oldroyd) prenesen na desno stran enačbe. Razumeti ga je mogoče kot izvorni člen, ki predstavlja produkcijo napetosti.

4 Povzetek vodilnih enačb formulacije za osnovne spremenljivke

Zaključen sistem enačb [4], [2] zapišemo s kombiniranjem konstitutivnih enačb (3) in (10) ter vključitvijo σ_{ij} v enačbo ohranitve gibalne količine (2)

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (13)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \eta_0 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial \overset{\nabla}{\tau}_{ij}}{\partial x_j}, \quad (14)$$

$$\tau_{ij} = 2\eta_0 \dot{\epsilon}_{ij} - \lambda_1 \overset{\nabla}{\tau}_{ij}, \quad (15)$$

kjer $P = p - \rho g_j r_j$ predstavlja modificiran tlak. Zaključen sistem enačb (13) - (15) je formalno identičen enačbam, ki opisujejo tok newtonske viskozne tekočine z izjemo dodatnega člena, ki je posledica zgornje konvektivnega odvoda napetostnega tenzorja. Ta člen v enačbi ohranitve gibalne količine pomeni dodatno nelinearnost dinamičnega sistema enačb.

Za tok v ravnini sistem enačb od (13) do (15) zagotavlja šest enačb za šest neznanek, v_1 , v_2 , P , τ_{11} , τ_{12} in τ_{22} . Enačbe je potrebno rešiti za primerne robne in začetne pogoje. Če predpostavimo, da so vse funkcije polja, npr. $v_i^n = v_i^n(r_j, t_n)$, $\tau_{ij}^n = \tau_{ij}^n(r_j, t_n)$, itd., v časovnem koraku $t = t_n$ znane, je potrebno določiti vrednosti v naslednjem $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

5 Hitrostno - vrtnična formulacija

Z vektorjem vrtničnosti $\omega_i(r_j, t)$, ki pomeni rotor hitrostnega polja $v_i(r_j, t)$

$$\omega_i = e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} = 0, \quad (16)$$

računsko shemo gibanja tekočine razdelimo na kinematični in kinetični del [6]. Kinetiko podamo z nelinearno parabolično difuzivno-konvektivno prenosno enačbo vrtničnosti, ki pomeni rotor

gibalne enačbe (14), v obliki stavka

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \nu_0 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \omega_j v_i}{\partial x_j} - \frac{\lambda_1}{\rho} e_{ijk} \frac{\partial^2 \tau_{km}^{\nabla}}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (17)$$

za $i, j, k, m = 1, 2, 3$, ki se v primeru ravninskega toka poenostavi v skalarno enačbo za vrtinčnost

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\lambda_1}{\rho} e_{ij} \frac{\partial^2 \tau_{jk}^{\nabla}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (18)$$

za $i, j, k = 1, 2$. Enačba (17) podaja časovno spremembo vrtinčnosti delca tekočine zaradi viskozne difuzije, konvekcije, učinkov deformacije in elastičnosti tekočine. V primerjavi z enačbo gibanja newtonske viskozne tekočine je enačba (17) močnejše nelinearna, prav zaradi močno nelinearnega elastičnega izvornega člena.

Kinematika gibanja nestisljive tekočine je podana z definicijo vektorskega potenciala $\psi_i(r_j, t)$

$$v_i = e_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} = 0, \quad (19)$$

kjer vektorski potencial ψ_i predstavlja solenoidno vektorsko polje. Z neposredno povezavo enačb (16) in (19) kinematiko zapišemo v obliki eliptične Poissonove enačbe za vektorski potencial

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_j} + \omega_i = 0. \quad (20)$$

Enačba (20) podaja kinematiko gibanja nestisljive tekočine oziroma kompatibilnost hitrostnega in vrtinčnega polja v dani točki prostora in časa.

6 Metoda robnih elementov

Uporaba Greenovih osnovnih rešitev predstavlja eno izmed osnovnih lastnosti in prednosti metode robnih elementov (MRE). Ker osnovne rešitve opisujejo le linearni del transportnega pojava, je izbira primerne linearne operatorja $\mathcal{L}[\cdot]$ ključnega pomena za zapis integralnih enačb, ki odgovarjajo prvotnemu sistemu ohranitvenih diferencialnih enačb.

Obstoječe diferencialne modele lahko zapišemo v obliki naslednjega splošnega stavka

$$\mathcal{L}[u] + b = 0, \quad (21)$$

kjer je $\mathcal{L}[\cdot]$ eliptični ali parabolični linearni diferencialni operator, $u(r_j, t)$ je poljubna funkcija polja in $b(r_j, t)$ nehomogeni del, v katerem združimo člene nelinearnih vplivov oziroma telesnih sil.

Lokalni časovni odvod tenzorja napetosti $\partial \tau_{ij} / \partial t$ je mogoče aproksimirati na različne načine. Običajno uporabimo končne razlike, kot na primer implicitno Eulerjevo shemo prvega reda

$$\left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} \right)^{n+1} \simeq \frac{\tau_{ij}^{n+1} - \tau_{ij}^n}{\Delta t}, \quad (22)$$

ali asimetrično tristopenjsko shemo drugega reda

$$\left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t}\right)^{n+1} \simeq \frac{3\tau_{ij}^{n+1} - 4\tau_{ij}^n + \tau_{ij}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (23)$$

Z uporabo Eulerjeve sheme (22) konstitutivno enačbo (12) zapišemo za časovni korak $n + 1$

$$\tau_{ij} = 2\eta_0 \dot{\epsilon}_{ij} - \lambda_1 \left(\frac{\tau_{ij} - \tau_{ij}^n}{\Delta t} + v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right) + \lambda_1 \left(\tau_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right). \quad (24)$$

Modificiran zgornje konvektivni odvod $\overset{\nabla}{\tau}'_{ij}$ analogno enačbi (10) zapišemo kot

$$\tau_{ij} + \lambda'_1 \overset{\nabla}{\tau}'_{ij} = 2\eta'_0 \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (25)$$

kjer so modificirani parametri definirani kot

$$\eta'_0 = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_1/\Delta t}, \quad \text{in} \quad \lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1/\Delta t}, \quad (26)$$

z opuščnim nadpisom $n + 1$. Napetostni tenzor τ_{ij} je v primeru enostavne linearne Maxwellove tekočine (8) podan z eksplicitno povezavo viskoznege člena in začetnih pogojev.

Zaključen sistem modificiranih vodilnih enačb (13) - (15), zapisan za izpeljane spremenljivke, se glasi

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_j} + \omega_i = 0, \quad (27)$$

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \nu'_0 \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \omega_j v_i}{\partial x_j} - \frac{\lambda'_1}{\rho} e_{ijk} \frac{\partial^2 \overset{\nabla}{\tau}'_{km}}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (28)$$

$$\tau_{ij} = 2\eta'_0 \dot{\epsilon}_{ij} - \lambda'_1 \overset{\nabla}{\tau}'_{ij}, \quad (29)$$

kjer se transportna enačba vrtinčnosti (28) v primeru ravninskega toka poenostavi v

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu'_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\lambda'_1}{\rho} e_{ij} \frac{\partial^2 \overset{\nabla}{\tau}'_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (30)$$

Za zapis kinetike toka viskoelastične tekočine v integralni obliki je potrebno upoštevati parabolično difuzivno-konvektivno naravo transportne enačbe vrtinčnosti (30). Z uporabo linearnega paraboličnega difuzivnega diferencialnega operatorja

$$\mathcal{L}[\cdot] = \bar{\nu} \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\cdot)}{\partial t}, \quad (31)$$

kjer je $\bar{\nu} = \nu'_0 =$ konstanta, transportno enačbo vrtinčnosti (30) zapišemo v obliki nehomogene parabolične difuzivne enačbe

$$\mathcal{L}[\omega] + b = \nu'_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \omega}{\partial t} + b = 0, \quad (32)$$

z naslednjim integralnim stavkom zapisanim za časovni korak $\Delta t = t_F - t_{F-1}$

$$c(\xi) \omega(\xi, t_F) + \nu'_0 \int_{\Gamma} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \omega \frac{\partial u^*}{\partial n} dt d\Gamma = \nu'_0 \int_{\Gamma} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{\partial \omega}{\partial n} u^* dt d\Gamma \quad (33)$$

$$+ \int_{\Omega} \int_{t_{F-1}}^{t_F} b u^* dt d\Omega + \int_{\Omega} \omega_{F-1} u_{F-1}^* d\Omega,$$

kjer je u^* parabolna difuzivna osnovna rešitev. Enačba (33) predstavlja kinetiko vrtnčnosti v integralni obliki. Linearni del transporta vrtnčnosti je predstavljen izključno z robnimi integrali. Območni integral nehomogenega nelinearnega prispevka b

$$b = -\frac{\partial v_j \omega}{\partial x_j} - \frac{\lambda'_1}{\rho} e_{ij} \frac{\partial^2 \tau'_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (34)$$

vsebuje konvekcijo in modificiran elastični del. Celoten integralni stavek kinetike vrtnčnosti se glasi

$$\begin{aligned} c(\xi) \omega(\xi, t_F) + \nu'_0 \int_{\Gamma} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \omega \frac{\partial u^*}{\partial n} dt d\Gamma &= \nu'_0 \int_{\Gamma} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{\partial \omega}{\partial n} u^* dt d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \omega v_j n_j u^* dt d\Gamma + \int_{\Omega} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \omega v_j \frac{\partial u^*}{\partial x_j} dt d\Omega \\ &- \frac{\lambda'_1}{\rho} e_{ij} \int_{\Gamma} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_k} n_i u^* dt d\Gamma + \frac{\lambda'_1}{\rho} e_{ij} \int_{\Omega} \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_k} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} dt d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \omega_{F-1} u_{F-1}^* d\Omega. \end{aligned} \quad (35)$$

Člen $e_{ij} (\partial \tau'_{jk} / \partial x_k)$ zapišemo v naslednji obliki

$$e_{ij} \frac{\partial \tau'_{jk}}{\partial x_k} = e_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{\Delta t} \tau_{jk}^n + v_m \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_m} - \tau_{jm} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} - \tau_{km} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \right), \quad (36)$$

za $i, j, k, m = 1, 2$. Enačba (35) predstavlja integralni zapis transportne enačbe vrtnčnosti v viskoelastični tekočini. Iz enačbe (35) je razvidna popolna analogija med transportom vrtnčnosti v viskoelastični tekočini in transportom vrtnčnosti v toku newtonske viskozne tekočine z izjemo dodatnih elastičnih členov, ki delujejo kot močno nelinearni izvorni členi.

Enačba za vektorski potencial (27) je nehomogena eliptična vektorska Poissonova enačba. Uporabimo linearen eliptični Laplaceov diferencialni operator

$$\mathcal{L}[\cdot] = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (37)$$

zaradi česar sledi

$$\mathcal{L}[\psi_i] + b_i = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j \partial x_j} + b_i = 0. \quad (38)$$

Za zapis integralne oblike kinematike uporabimo Greenov teorem za vektorske funkcije

$$c(\xi) \vec{v}(\xi) + \int_{\Gamma} (\vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n}) \vec{v} d\Gamma = \int_{\Gamma} (\vec{\nabla} u^* \times \vec{n}) \times \vec{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{\omega} \times \vec{\nabla} u^* d\Omega. \quad (39)$$

Enačbo (39) lahko zapišemo za vrednosti indeksov $ijkij = 12312$ tudi v kompaktni obliki

$$\begin{aligned} c(\xi) v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_i \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma &= \int_{\Gamma} v_k \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_k} n_i - \frac{\partial u^*}{\partial x_i} n_k \right) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} v_j \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_i} n_j - \frac{\partial u^*}{\partial x_j} n_i \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \omega_j \frac{\partial u^*}{\partial x_k} d\Omega - \int_{\Omega} \omega_k \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega, \end{aligned} \quad (40)$$

kjer je u^* eliptična Laplaceova osnovna rešitev. Enačba (40) je ekvivalentna kontinuitetni enačbi in definiciji vrtinčnosti ter podaja kinematiko gibanja nestisljive tekočine v integralni obliki. Hitrostni robni pogoji so vključeni v robnih integralih, medtem ko je z območnim integralom podan vpliv vrtinčnega polja na razvoj hitrostnega polja. Robne vrednosti vrtinčnosti so v integralni obliki podane v območnem integralu. Izračun robnih vrednosti vrtinčnosti zaradi zapisa nesingularnega implicitnega sistema enačb zahteva tangentno obliko vektorske enačbe (39)

$$c(\xi) \vec{n}(\xi) \times \vec{v}(\xi) + \vec{n}(\xi) \times \int_{\Gamma} (\vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n}) \vec{v} d\Gamma = \vec{n}(\xi) \times \int_{\Gamma} (\vec{\nabla} u^* \times \vec{n}) \times \vec{v} d\Gamma + \vec{n} \times \int_{\Omega} \vec{\omega} \times \vec{\nabla} u^* d\Omega. \quad (41)$$

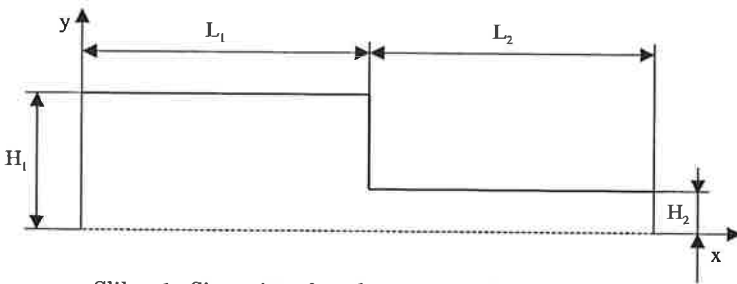
Kinematika ravninskih tokov je podana z dvema skalarnima enačbama, zapisanima na podlagi vektorske enačbe (39)

$$c(\xi) v_x(\xi) + \int_{\Gamma} v_x \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} v_y \frac{\partial u^*}{\partial t} d\Gamma - \int_{\Omega} \omega \frac{\partial u^*}{\partial y} d\Omega, \quad (42)$$

$$c(\xi) v_y(\xi) + \int_{\Gamma} v_y \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = - \int_{\Gamma} v_x \frac{\partial u^*}{\partial t} d\Gamma + \int_{\Omega} \omega \frac{\partial u^*}{\partial x} d\Omega. \quad (43)$$

7 Testni primer

Dopolnjeni numerični algoritem smo testirali na vstopno-izstopnem problemu toka viskoelastične tekočine v simetričnem kanalu s 4 : 1 nenadno zožitvijo, katerega geometrija je predstavljena na sliki 1.



Slika 1: Simetričen kanal z nenadno 4 : 1 zožitvijo.

Oba dela kanala (vstopni in izstopni) merita v dolžino $L_1 = L_2 = 10H_2$, kar zadošča za popolno razvitje hitrostnega profila. Tokovne razmere v kanalu podobne geometrije so podrobno predstavljene v [4]. Dimenzija H_2 je določena kot polovica višine izstopnega kanala ($H_2 = 0.125$).

Reynoldsovo število in Weissenbergovo število sta definirani kot

$$Re = \frac{\bar{v}_{out} L}{\nu}, \quad (44)$$

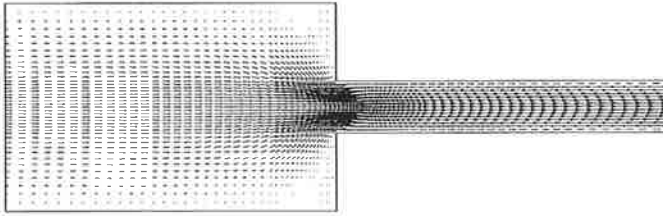
$$We = \frac{\lambda_1 \bar{v}_{out}}{L}, \quad (45)$$

kjer sta ν in λ_1 kinematična viskoznost tekočine in napetostni relaksacijski čas ter je \bar{v}_{out} karakteristična hitrost (povprečna izstopna). Tok v kanalu je zelo blizu Stokesovemu z Reynoldsovim številom $Re = 0.001$. Weissenbergovo število, ki je po poročanju avtorjev iz literature (npr. [1],[4]) odločilnega pomena za doseganje stabilnosti numeričnega algoritma, smo spreminjali od $We = 6.4 \times 10^{-3}$ ($\lambda_1 = 0.1$) do $We = 51.2 \times 10^{-3}$ ($\lambda_1 = 0.8$), kar je podobno navedenemu v [1].

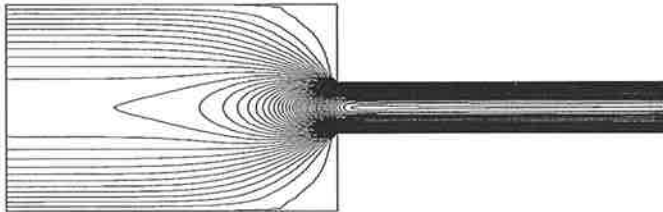
Za numerično modeliranje smo uporabili diskretizacijo, sestavljeno iz 280 oziroma 560 neekvidistantnih notranjih celic zgoščenih okoli ostrih vogalov pri zožitvi kanala. Pri vstopu v kanal smo predpisali razviti parabolični profil laminarnega toka s povprečno hitrostjo 0.002 m/s ($\bar{v}_{in} = 0.002 \text{ m/s}$). Ta vrednost ustreza izstopnemu paraboličnemu profilu z $\bar{v}_{out} = 0.008 \text{ m/s}$. Na trdnih stenah smo predpisali brezdrsne hitrostne robne pogoje. Na začetku modeliranja ($t = 0$) je bilo računsko območje popolnoma napolnjeno z mirujočo newtonsko tekočino ($\lambda_1 = 0$) oziroma z viskoelastično tekočino ($\lambda_1 > 0$).

Stacionarno stanje smo modelirali s časovnim korakom $\Delta t = 10^{16}$, medtem ko je vrednost podrelaksacijskega parametra znašala $\vartheta = 0.01$. Konvergenčni kriterij smo nastavili na $\epsilon = 0.000001$.

Slike 2 - 5 prikazujejo vektorsko polje hitrosti, izolinije hitrosti v koordinatnih smereh x in y ter polje vrtničnosti v stacionarnem stanju viskoelastičnega toka ($\lambda_1 = 0.8$) za $Re = 0.001$ in $We = 51.2 \times 10^{-3}$.



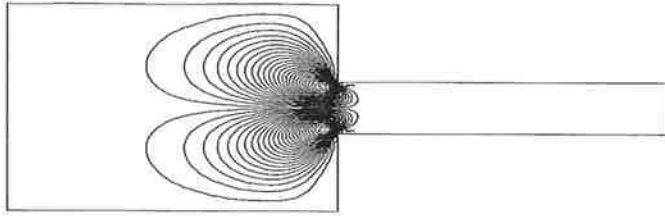
Slika 2: Vektorji hitrosti.



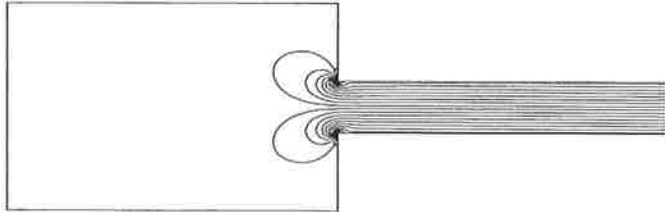
Slika 3: Izolinije hitrosti v smeri koordinatne osi x .

8 Zaključek

V prispevku je predstavljena metoda robnih elementov za modeliranje toka viskoelastične tekočine. Različni Maxwellovi modeli prikazujejo široko uporabnost MRE. Kljub dodatnim



Slika 4: Izolinije hitrosti v smeri koordinatne osi y .



Slika 5: Vrtinčno polje.

nelinearnim izvornim členom razvita shema ohranja vse prednosti modeliranja nestisljivih viskoznih tokov z MRE [3]. Kot testni primer služi kanal s 4 : 1 nenadno zožitvijo. Na podlagi rezultatov zaključimo, da je razvita shema stabilna in natančna.

Literatura

- [1] Aboubacar, M., Webster, M.F. A cell-vertex finite volume/element method on triangles for abrupt contraction viscoelastic flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2001; 98: 83-106.
- [2] Dou, H., Thien, N.P. The flow of an Oldroyd-B fluid past a cylinder in a channel: adaptive viscosity vorticity (DAVSS- ω) formulation; *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1999; 87: 47-73.
- [3] Hriberšek, M., Škerget, L. Fast boundary-domain integral algorithm for computation of incompressible fluid flow problems. *Int. J. Num. Meth. Fluids.* 1999; 31: 891-907.
- [4] Oliveira, P.J., Pinho, F.T. Plane contraction flows of upper convected Maxwell and Phan-Thien-Tanner fluids as predicted by a finite-volume method; *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1999; 88: 63-88.
- [5] Škerget, L., Alujevič, A., Brebbia, C.A., Kuhn, G. Natural and forced convection simulation using the velocity-vorticity approach. *Topics in Boundary Element Research.* 1989; 5(4): 49-86.
- [6] Škerget, L., Hriberšek, M., Kuhn, G. Computational fluid dynamics by boundary-domain integral method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1999; 46: 1291-1311.
- [7] Wu J.C. Problems of general viscous flow. *Developments in BEM. Elsevier Appl. Sci. Publ.* 1982; 2(2).

ROIM ZA NARAVNO KONVEKCIJO V POROZNI KOTANJI ZASIČENI Z NENEWTONSKO TEKOČINO

Renata Jecl¹
Leopold Škerget²
Eugen Petrešin³

BDIM FOR NATURAL CONVECTION IN POROUS CAVITY SATURATED WITH NON-NEWTONIAN FLUID

POVZETEK:

Namen prispevka je uporabiti na lanskem srečanju prikazano, razširjeno numerično shemo za reševanje prenosnih pojavov v porozni snovi zasičeni z nenevtonsko tekočino, za primer naravne konvekcije v pravokotni kotanji greti od strani. Kotanja je zapolnjena s homogeno, nedeformabilno porozno snovjo, popolnoma zasičeno z nenevtonsko tekočino, ki jo opišemo z Carreaujevim modelom. Tok je modeliran z uporabo razširjene Darcyjeve enačbe, ki upošteva poleg običajnega Darcyjevega člena še dodaten Brinkmanov viskozni člen analogen Laplaceovemu členu v Navier-Stokesovi enačbi za tekočino. Rezultati bodo primerjani z, v literaturi objavljenimi, vrednostmi dobljenimi z uporabo klasične Darcyjeve enačbe.

SUMMARY:

The objective of the present work is to use, on the previous meeting presented extended numerical scheme for solving transport phenomena in porous media saturated with non-Newtonian fluid, for the case of natural convection in a square porous cavity heated from the side. The cavity is filled with homogeneous, non-deformable porous media saturated with non-Newtonian fluid for which the Carreau model is considered. The flow is modeled with the use of modified Darcy equation taking into account the usual Darcy viscous term and also the additional Brinkman viscous term that is analogous to the Laplacian term appearing in the Navier-Stokes equation for fluid. The obtained results will be compared with the results from the literature valid for the Darcy equation.

¹ doc. dr. Renata Jecl, univ.dipl.ing., UM, Fakulteta za gradbeništvo, Smetanova 17, Maribor, Slovenija

² prof. dr. Leopold Škerget, univ.dipl.ing., UM, Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, Maribor, Slovenija

³ izr. prof. dr. Eugen Petrešin, univ.dipl.ing., UM, Fakulteta za gradbeništvo, Smetanova 17, Maribor, Slovenija

1. UVOD

V prispevku bomo obravnavali naravno konvekcijo, ki je eden izmed najpogosteje obravnavanih prenosnih pojavov v porozni snovi. Na začetku pojava tekočina v vertikalni kotanji miruje, zaradi različnih temperatur leve in desne stene pa se začne gibati. To gibanje navadno imenujemo naravna konvekcija, odvisno pa je od spremembe gostote, ki so posledica temperaturnih gradientov. Porozna snov, ki jo obravnavamo je popolnoma zasičena s tekočino, pri čemer veliko tekočin, ki jih srečujemo v inženirski praksi izkazuje nenewtonsko obnašanje. Le to je izraženo z nelinearno zvezo med strižno napetostjo in deformacijsko hitrostjo, kar lahko podamo z nekaterimi parametričnimi modeli.

2. MATEMATIČNA FORMULACIJA

Modificirane Navier-Stokesove enačbe, ki opisujejo prenosne pojave v porozni snovi so nelinearne parcialne diferencialne enačbe, v literaturi znane pod imenom Brinkmanov sistem (Nield [1]). Zakon o ohranitvi mase je podan s kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

kjer je v_i i -ta komponenta filtracijske hitrosti in x_i i -ta koordinata.

Gibalna enačba predstavlja osnovni zakon ohranitve gibalne količine v obliki:

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + F g_i - \frac{v_f}{K} v_i + v_{eff} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

kjer so ϕ poroznost, ρ gostota tekočine, v_f kinematična viskoznost tekočine, v_{eff} dejanska kinematična viskoznost porozne snovi, K propustnost porozne snovi, $\partial P/\partial x_j$ tlačni gradient.

Povezava med gostoto in temperaturo je podana z funkcijo F kot $F = (\rho - \rho_0)/\rho_0 = -\beta_T (T - T_0)$, kjer je ρ_0 referenčna gostota tekočine pri temperaturi T_0 in β_T koeficient temperaturnega volumskega raztezka. Koeficient propustnosti K je neodvisen od vrste tekočine, zavisi pa od geometrije porozne snovi. V splošnem je tenzor drugega reda, v primeru izotropne porozne snovi pa ga lahko upoštevamo kot skalar. Izračunati ga je možno v odvisnosti od geometrijskih parametrov, na primer z uporabo Charman-Kozenyjeve enačbe $K = d_p^2 \phi^3 / 150(1 - \phi)^2$, kjer d_p predstavlja premer zrn trdne faze porozne snovi. Gibalna enačba je razširjena Darcyjeva enačba saj vsebuje dva viskozna člena. Prvi je običajen Darcyjev člen (tretji člen desne strani enačbe), drugi pa je analogen Lapalceovemu členu, ki se pojavlja v Navier-Stokesovi gibalni enačbi za tekočino (zadnji člen desne strani enačbe). Ta člen se imenuje Brinkmanov člen, ki predstavlja viskozno vlečno silo trdne faze delujočo na gibajočo tekočino na njihovih kontaktnih površinah. Dejanska viskoznost v_{eff} je odvisna od geometrije porozne snovi in ima lahko v splošnem vrednost, ki ni enaka viskoznosti tekočine v_f zato uvedemo parameter Λ , ki predstavlja razmerje:

$$\Lambda = \frac{v_{eff}}{v_f}. \quad (3)$$

Najpogosteje v literaturi zasledimo vrednost $\Lambda = 1$ (npr. Lauriat & Prasad [2]), iz postopka povprečenja mikroskopskih enačb za tekočino po poroznem volumnu v makroskopske enačbe (Bear & Bachmat [3]) pa dobimo izraz za parameter Λ v obliki $\Lambda = 1/\phi$, kar je uporabljeno npr. v Amiri [4] in Jecl [5]. Z uporabo tako razširjene Darcyjeve enačbe - Brinkmanove enačbe lahko zadostimo brez zdrsnemu (no-slip) robnemu pogoju na nepropustnih površinah, ki omejujejo porozno snov. Pomembno je poudariti, da je Brinkmanova enačba v bistvu interpolacija med

Navier-Stokesovo enačbo za tekočino in klasično Darcyjevo enačbo. V limiti, ko gre propustnost proti neskončnosti ($K \rightarrow \infty$), se namreč Brinkmanova enačba prevede v Navier-Stokesovo, ko pa se vrednost propustnosti zmanjšuje in približuje nič ($K \rightarrow 0$), postane Brinkmanov člen zanemarljivo majhen in dobimo Darcyjevo enačbo.

Kot smo že omenili je porozna snov zasičena z nenevtonsko tekočino, ki jo bomo aproksimirali z uporabo takoimenovanih generaliziranih Newtonovih modelov (GNF – generalised Newtonian fluid models). Če se omejimo na nestisljive tekočine in zanemarimo njene elastične lastnosti lahko uporabimo različne empirične in polempirične modele odvisnosti med viskoznostjo μ in strižno oziroma deformacijsko hitrostjo $\dot{\gamma}$, kot na primer potenčni zakon, Ellisov model ali Carreaujev model (Škerget [6]). Konstitutivni model uporabljen v pričujočem prispevku je Carreaujev model:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\chi \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}, \quad (4)$$

kjer so μ_0 in μ_∞ začetna in neskončna dinamična viskoznost χ je časovna konstanta, n indeks toka, deformacijska hitrost je $\dot{\gamma} = (2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}$ (Škerget[7]), $\dot{\epsilon}_{ij}$ pa predstavlja tenzor deformacijskih hitrosti. Dinamična viskoznost μ je z kinematično viskoznostjo ν_f v gibalni enačbi (2) povezana z izrazom $\nu_f = \mu/\rho$. Če kinematično viskoznost razdelimo na konstantni in spremenljivi del kot $\nu_f = \bar{\nu}_f + \tilde{\nu}_f$, lahko Brinkmanov člen zapišemo v dveh delih in dobimo gibalno enačbo v obliki:

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + F g_i - \frac{\nu_f}{K} v_i + \Lambda \bar{\nu}_f \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \Lambda \tilde{\nu}_f \frac{\partial}{\partial x_j} (2 \dot{\epsilon}_{ij}). \quad (5)$$

Energijska enačba predstavlja zakon o ohranitvi energije:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi(\rho c_f) + (1-\phi)(\rho_s c_s)] T + (\rho c_f) \frac{\partial v_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (6)$$

kjer so ρ_s in ρ gostote trdne in tekoče faze porozne snovi, c_s in c_f specifične toplote pri konstantnem tlaku za trdno in tekočo fazo, T je temperatura, λ_e pa predstavlja dejansko toplotno prevodnost zasičene porozne snovi. Dejanska toplotna prevodnost λ_e se običajno določi z uporabo klasičnega "mešalnega" pravila $\lambda_e = \phi \lambda_f + (1-\phi) \lambda_s$, kjer λ_f in λ_s predstavljata toplotne prevodnosti tekočine in trdne snovi (Nield [1]). V primeru ko je $\lambda_s/\lambda_f \gg 1$ namesto mešalnega pravila uporabimo kombinacijo dveh členov, in sicer mirujoče komponente λ_m in razkrojene komponente λ_d v obliki $\lambda_e = \lambda_m + \lambda_d$ (Amiri [4]). Mirujočo komponento določimo iz

enačbe $\frac{\lambda_m}{\lambda_f} = (1 - \sqrt{1-\phi}) - \frac{2\sqrt{1-\phi}}{1-\phi B} \left[\frac{(1-\phi)B}{(1-\phi B)^2} \ln(\phi B) + \frac{B+1}{2} + \frac{B-1}{1-\phi B} \right]$, kjer $B = 1.25 \left[\frac{1-\phi}{\phi} \right]^{10/9}$

in $\phi = \frac{\lambda_f}{\lambda_s}$, medtem ko je razkrojena komponenta $\frac{\lambda_{dx}}{\lambda_f} = 0.5 \left[|v| \frac{d_p}{v_f} \right] \frac{v_f}{a_f}$, $\frac{\lambda_{dy}}{\lambda_f} = 0.1 \left[|v| \frac{d_p}{v_f} \right] \frac{v_f}{a_f}$,

pri čemer velja $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ če so v_x in v_y filtracijske hitrosti v x in y smeri. Toplotno difuzivnost porozne snovi definiramo kot $a_p = \lambda_e/\rho c_f$ in jo podobno kot kinematično viskoznost razdelimo na konstantni in spremenljivi del $a_p = \bar{a}_p + \tilde{a}_p$. Uvedemo še razmerje toplotnih kapacitet σ :

$$\sigma = \frac{\phi(\rho c_f) + (1-\phi)(\rho_s c_s)}{\rho c_f}, \quad (7)$$

pa lahko energijsko enačbo zapišemo v obliki:

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial v_j T}{\partial x_j} = \bar{a}_p \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{a}_p \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (8)$$

3. ROBNO OBMOČNA INTEGRALSKA METODA

Podane vodilne ohranitvene enačbe (1), (5) in (8) rešimo z uporabo robno območne integralne metode (ROIM). Numerične sheme ne bomo ponavljali, saj smo jo že večkrat opisali in predstavili na Kuhljevih dnevih. Bistveni koraki, ki vodijo do rešitve pa so:

- z uporabo hitrostno vrtinčne formulacije (HVF) zapišemo vodilne ohranitvene enačbe v obliki prenosnih enačb za kinematiko, kinetiko vrtinčnosti in temperaturno kinetiko,
- integralno obliko enačb prenosnih enačb izpeljemo s pomočjo metode utežnih ostankov in ustreznih Greenovih funkcij (parabolične difuzivne osnovne rešitve za kinematiko ter eliptične difuzivno-konvektivne osnovne rešitve za vrtinčno in temperaturno kinetiko),
- s postopkom diskretizacije roba in območja rešitve robno območne integralne enačbe zapišemo za vsa robna in notranja vozlišča in izpeljemo vezan matrični sistem katerega rešitev poiščemo z uporabo tehnike podobmočij, pri čemer uporabimo diskretni model, ki predstavlja vsako podobmočje sestavljeno iz štirih nezveznih 3-točkovnih kvadratnih robnih elementov in ene zvezne 9-točkovne kvadratne celice (Jecl [5]).

Upošteva se zgoraj našete korake izpeljemo matrične sisteme za izračun hitrosti, vrtinčnosti in temperature v obliki:

$$[H]\{v_i\} = [G] \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial n} + e_{ij} \omega n_j \right\} - e_{ij} [D_j] \{\omega\} + [B] \{v_i^{n-1}\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [H]\{\omega\} = & \frac{v_f}{\bar{v}_f} [G] \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} \right\} - \frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{v}_f} [G][v_n] \{\omega\} + \frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{v}_f} [G] \{ \phi^2 e_{ij} g_j F n_j \} + \\ & + \frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{v}_f} [D_j][\tilde{v}_j] \{\omega\} - \frac{\tilde{v}_f}{\bar{v}_f} [D_j] \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right\} - \frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{v}_f} [D_j] \{ \phi^2 e_{ij} g_j F + f_j \} - , \quad (10) \\ & - \frac{v_f}{\Lambda \bar{v}_f K} [D] \{\omega\} + \frac{1}{2 \phi^2 \Lambda \bar{v}_f \Delta \tau_v} [B] \{ 4\omega^n - \omega^{n-1} \} \end{aligned}$$

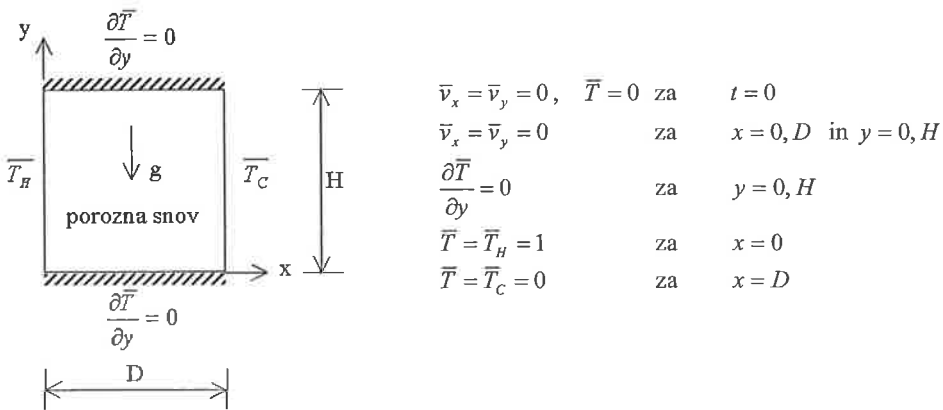
$$\begin{aligned} [H]\{T\} = & \frac{a_p}{\bar{a}_p} [G] \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \right\} - \frac{1}{\bar{a}_p} [G][v_n] \{T\} - \frac{\tilde{a}_p}{\bar{a}_p} [D_j] \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\} + \\ & + \frac{1}{\bar{a}_p} [D_j][v_j] \{T\} + \frac{1}{2 \bar{a}_p \Delta \tau_T} [B] \{ 4T^n - T^{n-1} \} \end{aligned} \quad (11)$$

V zgornjih enačbah pomenijo $[H]$, $[G]$, $[D]$, $[B]$ matrike sestavljene iz integralov, ki predstavljajo integracijo po robnih elementih in notranjih celicah, zapisanih za vsa robna in območna vozlišča, $\Delta \tau_v$ in $\Delta \tau_T$ sta modificirana časovna koraka za vrtinčnost ($\Delta \tau_v = t/\phi$) in temperaturo ($\Delta \tau_T = t/\sigma$), ki ju moramo vpeljati, da lahko uporabimo HVF pri transformaciji gibalne in energijske enačbe ter f_j predstavlja prispevek zaradi nelinearnih snovskih lastnosti, definiran kot

$$f_j = \phi^2 \Lambda \left(\frac{\partial \tilde{v}_f}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial \tilde{v}_f}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x}, 2 \frac{\partial \tilde{v}_f}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}_f}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right).$$

4. TESTNI PRIMER

Učinkovitost metode ter pravilnost delovanja predlagane numerične sheme bomo testirali na primeru naravne konvekcije v porozni kotanji greti od strani. Kotanja je zapolnjena s homogeno, nedeformabilno, porozno snovjo, popolnoma zasičeno z newtonsko tekočino, katere viskoznost je odvisna od strižne napetosti in jo opišemo z Carreaujevim modelom. Leva stena kotanje je greta, desna hladjena, horizontalni pa toplotno izolirani. Za porozno snov predpostavimo, da ima konstantno poroznost in propustnost ter da je hidrodinamično in toplotno izotropna. Tekočina s katero je porozna snov zasičena je v toplotnem ravnovesju s trdno fazo, kar pomeni da lahko toplotno obnašanje porozne snovi opišemo z eno samo enačbo za povprečno temperaturo. Matematična formulacija je podana z enačbami (1), (5) in (8), dopolniti pa jo je potrebno še z ustreznimi hidrodinamičnimi in temperaturnimi robnimi pogoji ter začetnimi pogoji, ki so poleg geometrije podani na sliki 1.



Slika 1. Geometrija ter robni in začetni pogoji za porozno kotanjo

Vodilni parametri problema naravne konvekcije v porozni kotanji so poroznost ϕ , propustnost porozne snovi K , ki jo definiramo v obliki Darcyjevega števila kot $Da = \Lambda(K/D^2)$, razmerje višine in širine kotanje $A = D/H$, porozno Rayleighovo število $Ra^* = g \beta_T K D \Delta T / \nu_f a_p$ in razmerje toplotnih kapacitet σ . V naših izračunih smo upoštevali: $\phi = 0.5$, $\Lambda = 1/\phi = 2$, $A = 1$, $\Delta T = 1$, $\sigma = 1$, parametri Carreaujevega modela pa so: $\mu_0 = 1.01$, $\mu_\infty = 5.9E-01$, $\chi = 0.81$ in $n = 0.364$. Numerično shemo smo najprej testirali na limitnem primeru, torej za tok Newtonske tekočine v porozni kotanji za $Ra^* = 100$. Rezultate smo primerjali z rezultati objavljenimi v literaturi (Lauriat [2]), kar je razvidno iz tabele 1.

$Ra^* \downarrow$	$Da \rightarrow$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
100	naši rezultati	1.086	1.685	2.402	2.823	2.95
	referenca [5]	/	1.70	2.41	2.84	3.02

Tabela 1.: Nusseltovo število za $Ra^* = 100$ in različna Darcyjeva števila – primerjava za Newtonsko tekočino

Vidimo, da se rezultati dobro ujemajo, še manjša odstopanja pa bi dosegli z gostejšo mrežo, saj so naši rezultati dobljeni na relativno redki mreži 20×20 podobmočij, referenčni pa z metodo končnih volumnov na dvakrat gostejši mreži (81×81 prostostnih stopenj). Primerov za še manjše Darcyjevo število nismo računali, saj je dokazano, da nadaljnje zmanjševanje ne vpliva bistveno na skupni prenos toplote. Ko je namreč $Da = 0$ (Darcyjev zakon) je vrednost Nusseltovega števila $Nu = 3.07$ (Lauriat [2]), kar je le za manj kot 2 % več kot pri $Da = 10^{-5}$.

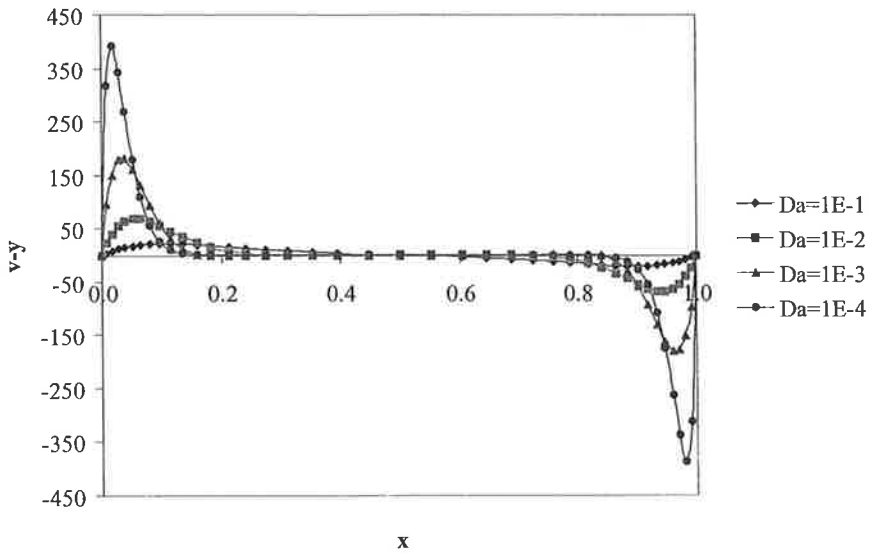
Rešitev problema za tok nenevtonske tekočine opisane z Carreaujevim modelom (izračun hitrosti, temperatur in prenosa toplote) smo poiskali za porozna Rayleighova števila 100, 200, 500 in 1000 ter za različna Darcyjeva števila od $Da = 10^{-1}$ do $Da = 10^{-4}$. Teh rezultatov ne moremo direktno primerjati, ker v literaturi nismo zasledili objave, kjer bi nenevtonsko tekočino modelirali z Carreaujevim modelom. Vse obstoječe študije so za potenčni zakon (Getachew [8], Hadim [9]), tako da lahko primerjamo le osnovne pokazatelje povezane s prenosom toplote in prerazporeditvijo hitrosti. Skupni prenos toplote izražen z Nusseltovim številom za vse izračunane primere je prikazan v tabeli 2. Konvergenčni kriterij vseh izračunov je bil $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$, časovni koraki pa so se zmanjševali z povečanjem poroznega Rayleighovega in zmanjševanjem Darcyjevega števila od $\Delta t = 0.1E+00$ do $\Delta t = 0.1E-03$. Izračuni za porozno Rayleighovo število $Ra^* = 100$ so bili izvedeni za dva primera z različno gostoto računske mreže, in sicer za mrežo 20×20 podobmočij, $r = 6$ in za mrežo 40×40 podobmočij, $r = 12$ pri čemer r predstavlja razmerje med najdaljšim in najkrajšim elementom. Rezultati za gostejšo mrežo so prikazani v oklepaju. Za gostejšo mrežo smo se odločili, ker se pri zelo majhnih Darcyjevih številih ($Da \leq 10^{-3}$) glavnina procesov dogaja zelo blizu vertikalnih sten (maksimalne hitrosti, močno konvektivno gibanje) in za zadovoljive rezultate potrebujemo v tem območju več računskih točk.

Da / Ra^*	100	200	500	1000
10^{-1}	1.166 (1.171)	1.428	1.946	2.416
10^{-2}	2.024 (2.041)	2.657	3.665	4.591
10^{-3}	3.089 (3.113)	4.318	6.304	8.082
10^{-4}	3.819 (3.865)	5.711	9.031	12.224

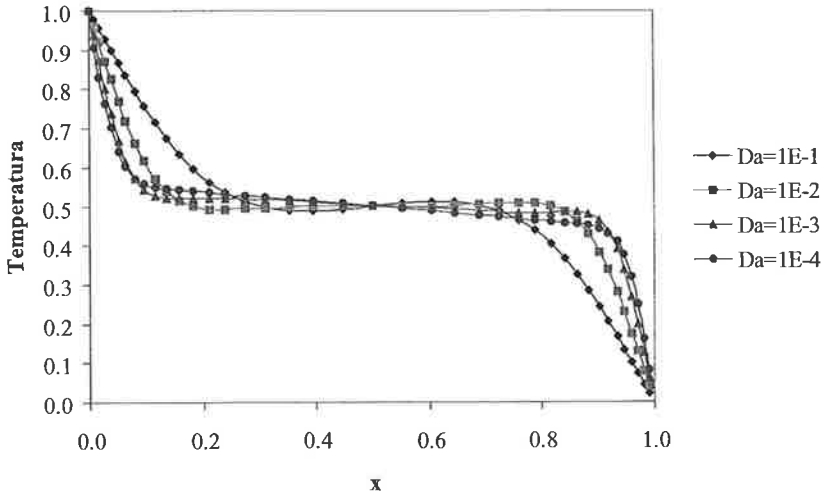
Tabela 2.: Nusseltovo število za različna porozna Rayleighova in Darcyjeva števila za nenevtonsko tekočino (Carreaujev model)

Iz rezultatov podanih v tabeli 2. lahko ugotovimo, (a) da Nusseltovo število vedno narašča z poroznim Rayleighovim številom, vpliv Darcyjevega števila pa je ravno obraten in (b) Nusseltovo število hitreje pada z povečevanjem Darcyjevega števila, ko je porozno Rayleighovo število višje, kar je vse v skladu z ugotovitvami iz omenjene literature (Getachew [8], Hadim [9]).

Vpliv povečanja Darcyjevega števila je podoben pri vseh poroznih Rayleighovih številih, zato bomo na tem mestu njegove vplive na hitrost in temperaturo analizirali le za en primer, in sicer za $Ra^* = 1000$. Na sliki 2. so prikazani vertikalni hitrostni profili skozi vodoravno središčnico kotanje, na sliki 3. pa razporeditev hitrosti skozi vodoravno središčnico kotanje za mrežo 20×20 podobmočij.



Slika 2.: Vertikalni hitrostni profili skozi vodoravno središčnico za $Ra^* = 1000$



Slika 3.: Razporeditev hitrosti skozi vodoravno središčnico za $Ra^* = 1000$

Iz slike 2. lahko ugotovimo, da ima za majhna Darcyjeva števila vertikalna porazdelitev hitrosti največje gradiente blizu vertikalnih sten, ko pa Darcyjevo število narašča se hitrosti manjšajo, in mesto nastopa maksimalne hitrosti se pomika od stene proti centru kotanje. To stanje je pričakovano, saj se za majhna Darcyjeva števila (ko velja $K \rightarrow 0$) Brinkmanova enačba prevede v

Darcyjev zakon, ki ne upošteva brez-zdrsnega robnega pogoja, pa je zato hitrost največja na vertikalnih stenah. V tem primeru je Darcyjevo število dovolj majhno, da postane viskozni Brinkmanov člen zanemarljiv in Darcyjev zakon zadovoljivo opiše dogajanje v kotanji. Ko pa Darcyjevo število narašča postaja vpliv viskoznega člena bolj in bolj pomemben in upočasnjuje hitrost tekočine v bližini vertikalnih sten, kar ima za posledico spremembo položaja maksimalne hitrosti. Vpliv Darcyjevega števila pa lahko analiziramo tudi iz slike 3. iz katere je razvidno, da se strmi temperaturni gradienti blizu vertikalnih sten znatno modificirajo (ublažijo) z naraščanjem Darcyjevega števila, vpliv na porazdelitev temperature blizu središča kotanje pa je minimalen. To ustreza dejstvu, da je pri majhnem Darcyjevem številu konvektivno gibanje znotraj kotanje močno, z njegovim naraščanjem pa viskozni vplivi upočasnjujejo z vzgonom povzročeno gibanje v kotanji ter povečujejo vpliv kondukcije tako da je skupni prenos toplote vsota kondukcije in kovekcije.

5. ZAKLJUČEK

V prispevku je obravnavan problem naravne konvekcije v porozni kotanji zasičeni z nenenewtonsko tekočino z uporabo ROIM. Rešitev temelji na uporabi modificiranih Navier-Stokesovih enačb z upoštevanjem Brinkmanove gibalne enačbe. Izpeljana numerična shema je preizkušena na primeru kvadratne kotanje grete od strani, pri čemer je nenenewtonska tekočina modelirana z Carreaujevim modelom. Primerjava za limitni primer toka Newtonske tekočine kaže na zadovoljivo ujemanje rezultatov, kar potrjuje, da lahko ROIM uspešno uporabimo tudi za reševanje zapletenih difuzivno-konvektivnih prenosnih pojavov v porozni snovi.

ZAHVALA

Delo Renate Jecl je del raziskovalnega projekta Z2-3289-0797/2001, ki ga finančno podpira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije.

LITERATURA

- [1] D.A. Nield, A. Bejan: "Convection in Porous Media", 2nd edition, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- [2] G. Lauriat, V. Prasad: "Natural Convection in a Vertical Porous Cavity: a Numerical Study for Brinkman-Extended Darcy Formulation", *J. of Heat Transfer*, **109**, pp. 688-696, 1987.
- [3] J. Bear, Y. Bachmat: "Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media", Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1991.
- [4] A.M. Amiri: "Analysis of momentum and energy transfer in a lid-driven cavity filled with porous medium", *Int. J. Heat Mass Trans.*, **43**, pp. 3513-3527, 2000.
- [5] R. Jecl, L. Škerget, E. Petrešin: "BEM for natural convection in non-Newtonian fluid saturated porous cavity", *Proceedings of the 24th International Conference on Boundary Element Methods*, Sintra, Portugal, WIT Press, pp. 489-500, 2002.
- [6] L. Škerget, N. Samec: "BEM for non-Newtonian fluid flow", *Engineering analysis with boundary elements*, **23**, pp. 435-442, 1999.
- [7] L. Škerget: "Mehanika tekočin", TF Maribor in FS Ljubljana, 1994.
- [8] D. Getachew, W.J. Minkowycz, D. Poulikakos: "Natural Convection in a Porous Cavity Saturated with a Non-Newtonian Fluid", *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, **10**, pp. 640-651, 1996.
- [9] H.A. Hadim, G. Chen: "Numerical Study of non-Darcy Natural Convection of a Power-law Fluid in a Porous Cavity", *Proceedings of the ASME Heat Transfer Division (HTD)*, **317-1**, pp. 301-307, 1995.

NUMERIČNA ANALIZA KARAKTERISTIK CURKA PLINSKEGA OLJA IN ALTERNATIVNIH GORIV

Martin Volmajer, Breda Kegl^{*}

NUMERICAL ANALYSIS OF SPRAY CHARACTERISTICS USING DIESEL AND SOME ALTERNATIVE FUELS

POVZETEK:

Prispevek obravnava karakteristike curka (domet, kot razpršitve, premer kapljic...) vbrizganega goriva v primeru uporabe plinskega olja ter dveh alternativnih goriv (biodizel in odpadno rastlinsko olje) na dizelskem motorju. Karakteristika vbrizgavanja in lastnosti curka so določene z uporabo obstoječih teoretično-empiričnih izrazov, enodimenzionalnega matematičnega modela ter računske dinamike tekočin.

SUMMARY:

This paper presents the spray characteristics (Penetration length, spray cone angle, droplet diameter...) of the injected fuel in case of using the diesel fuel and alternative fuels (biodiesel and waste cooking oil-WCO) on the diesel engine. Fuel injection and spray characteristics are defined using the existing theoretical-empirical models, one dimensional mathematical model and the computational fluid dynamics.

1 Uvod

Z uporabo alternativnih goriv rastlinskega izvora lahko klasičen dizelski motor z notranjim zgorevanjem obratuje z neto prirastkom emisij CO₂ enakim 0, kar pomeni, da ne povečuje količine enega izmed toplogrednih plinov v atmosferi. Kot gorivo rastlinskega izvora se običajno uporabljajo

^{*} Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor

estri maščob rastlin kot so npr.: oljna repica, sončnično olje, sojino olje, ipd. Glede na to, da gre v vseh primerih bolj ali manj le za predelana rastlinska olja, ki jih vsakodnevno uporabljamo za kuhanje, se v zadnjih letih kot alternativno gorivo pojavlja tudi odpadno rastlinsko olje.

Znano je, da lastnosti goriva, kakor tudi njegova sestava odločilno vplivata na proces vbrizgavanja ter s tem neposredno na proces zgorevanja in tvorbo nezaželenih produktov. Glede na to, da se sestava goriv rastlinskega izvora razlikuje od sestave mineralnih goriv, je za prilagoditev delovanja dizelskega motorja z alternativnimi gorivi potrebno dobro poznavanje omenjenih procesov.

Z uporabo paketov računske dinamike tekočin nam računalniška oprema danes dopušča relativno hitre analize procesa vbrizgavanja, tvorbe curka, kakor tudi zgorevanja in tvorbe emisij, s čemer lahko že pred prvimi praktičnimi preizkušnjami do neke mere prilagodimo motor novim delovnim pogojem.

Z namenom spoznavanja vplivov alternativnih goriv na proces vbrizgavanja in tvorbo curka, ter možnostjo predelave obstoječega sistema za obratovanje z rastlinskimi gorivi so bile izvedene tudi analize v predloženem delu.

2 Teoretične osnove

2.1 Lastnosti goriva

Rastlinska olja so zgrajena v obliki trigliceridov, ki jih sestavljajo tri verige ogljikovodikov povezane med seboj z glicerolom. Kot takšna sicer goriijo, a jih v praksi zelo redko uporabljamo v svoji prvotni obliki. Njihova največja slabost je zelo visoka viskoznost, ki povzroča težave z dovodom goriva. Tem težavam se lahko izognemo z gretjem goriva, večjim presekom cevi ali z esterifikacijo.

Tabela 1: Lastnosti goriv [1][2][3].

	Plinsko olje (D2)	Biodizel	Odpadno rastlinsko olje
ρ [kg/m ³]	820-845	875-900	915
ν [mm ² /s]	2-4,5	3,5-5,0	36,7
H [MJ/kg]	42,6	37,3	n.d.
Cetansko št.	46	>49	n.d.

Slednja predstavlja proces, pri katerem esterske vezi v trigliceridih hidroliziramo, s čemer tvorimo proste maščobne kisline, ki po reakciji z metanolom ali etanolom tvorijo metil- ali etil-estre. S tem dobimo tanjše, manj viskozne in bolj vnetljive molekule. Tako nastalo gorivo običajno imenujemo biodizel ali metilni (etilni) ester oljne repice. Njegove lastnosti se lahko razlikujejo v odvisnosti od izvorne rastline. Kot druga alternativa se lahko uporabi tudi rabljeno rastlinsko olje iz industrije proizvodnje hrane. Le-to ima podobne

lastnosti kot čisto rastlinsko olje, zato neesterificirano ni najprimernejše za uporabo. Lahko pa iz njega naredimo ester ali ga dodajamo plinskemu olju. Lastnosti biodizla, plinskega olja in odpadnega rastlinskega olja so predstavljene v tabeli 1 (Lastnosti nekaterih drugih metilnih estrov so predstavljene v [1]). V predstavljenih analizah je bilo uporabljeno rastlinsko olje, pri katerem ni bil izveden proces esterifikacije.

2.2 Numerična analiza

Numerična analiza je narejena z uporabo programskega paketa FIRE v7.2b (AVL Gradec, Avstrija) na delovnih postajah HP 9000/782 in 9000/785.

2.3 Empirični modeli za določitev karakteristik curka

Kot hiter pokazatelj trenda sprememb oblike curka in kvalitete razpršitve lahko služijo tudi nekateri empirični modeli, s katerimi lahko ocenimo srednji Sauterjev premer (d_{32}), domet (L_p) in kot stožca pri vrhu curka (θ). V predstavljenem delu so bili uporabljeni naslednji modeli: Filipović [4] (en.1) za srednji Sauterjev premer kapljic, Yule - Filipović [5] (en.2) za domet curka, ter Hiroyasu [6] (en. 3) za kot razpršitve.

$$d_{32}[\mu m] = 324,6 \cdot \left(\frac{\rho_a \cdot u_0^2 \cdot d_h}{\sigma_f} \right)^{-0,233} \cdot \left(\frac{\rho_f \cdot d_h \cdot \sigma_f}{\mu_f^2} \right)^{-0,082} \quad (\text{en.1})$$

$$L_p[\text{mm}] = 2,65 \cdot 10^3 \cdot d_h \cdot \left(\frac{\rho_a \cdot u_0^2 \cdot d_h}{\sigma} \right)^{-0,1} \cdot \left(\frac{\rho_f \cdot u_0 \cdot d_h}{\mu_f} \right)^{-0,3} \cdot \left(\frac{\rho_f}{\rho_a} \right)^{0,08} \quad (\text{en.2})$$

$$\theta = 0,05 \cdot \left(\frac{d_h}{\mu_a} \right)^{0,5} \cdot (\rho_a \cdot \Delta p)^{0,25} \quad (\text{en.3})$$

V enačbah 1-3 je ρ_a gostota zraka, ρ_f gostota goriva, σ_f predstavlja površinsko napetost goriva, μ_f dinamično viskoznost goriva, μ_a pa dinamično viskoznost zraka. Iztočna hitrost je določena z u_0 , tlačna razlika z Δp , medtem ko d_h predstavlja premer odprtine šobe.

2.4 Vbrizgalni sistem

V predloženem delu je bil analiziran proces vbrizgavanja in tvorbe curka za klasičen vbrizgalni sistem z linijsko tlačilko BOSCH PES4P120A72 in vbrizgalno šobo s štirimi izvrtinami premera

0,375 mm (BOSCH DLLA 148S), kjer imata odprtini #1 in #4 naklonski kot kanala odprtine enak 95°, odprtini #2 in #3 pa 49°.

3 Številčni primeri

Analize so bile izvedene pri dveh različnih obratovalnih režimih (Maksimalna moč in maksimalni navor) za tri različna goriva: biodizel, odpadno rastlinsko olje (WCO) in plinsko olje (D2).

Obratovalne karakteristike so določene s številom vrtljajev motorja in geometrijskim trajanjem tlačenja (MAKSIMALEN NAVOR: 600 min⁻¹, 1,976 mm, MAKSIMALNA MOČ: 1000 min⁻¹, 1,976 mm). Lastnosti goriv uporabljene v analizi so predstavljene v tabeli 1.

Analiza z uporabo CFD je potekala v diskretiziranem modelu v obliki kocke s stranico 300 mm, ki predstavlja vbrizgalno/zgorevalno komoro. Za izračun karakteristik vbrizgavanja, potrebnih za določitev začetnih in robnih pogojev CFD analize, je bil uporabljen enodimenzionalen matematičen model [7]. Uporabljene karakteristike vbrizgavanja za posamezno gorivo in obratovalno karakteristiko so rezultat analize predstavljene v [8].

Tlak v komori je enak 1 bar, temperatura 313 K. Začetna velikost kapljic in verjetnostna porazdelitev le-teh, ki ju programski paket zahteva za izračun curka goriva sta določeni v skladu z ugotovitvami predhodne analize [9]. Pri verjetnostnih porazdelitvah v primeru analize alternativnih goriv je določena velikost kapljic z največjo verjetnostjo za okrog 15% večja od tiste pri plinskem olju.

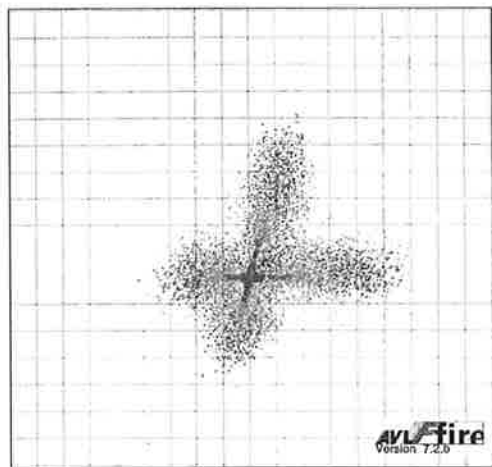
4 Rezultati

4.1 Numerična analiza

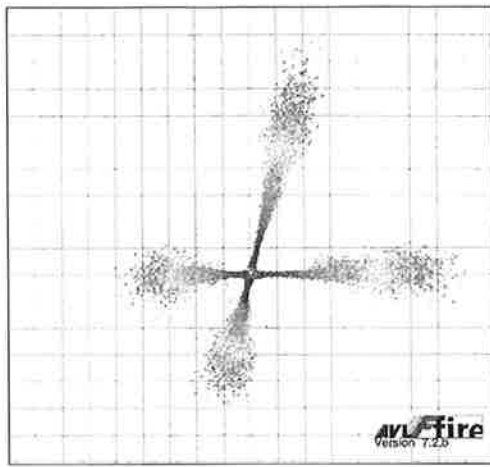
Na slikah 1-8 so prikazane oblike curka in položaj kapljic ob koncu vbrizgavanja, izračunane srednje vrednosti srednjega Sauterovega premera v komori, ter maksimalni domet curka pri posameznem gorivu. Iz slik je razvidno, da je domet curka odpadnega rastlinskega olja večji od dometov biodizla in plinskega olja. Prav tako je jasno vidna razlika med dometi curka v posameznem obratovalnem režimu. Zanimivo je, da so v primerjavi izračunanih maksimalnih dometov (Slika 7 in Slika 8) razlike nekoliko manjše kot bi lahko sklepali iz prikazanih slik curkov. Razlike med razbranim iz slik in absolutnimi vrednostmi so verjetno posledica tega, da maksimalni domet predstavlja pot najbolj oddaljene kapljice iz posamezne odprtine.

Pri izračunih srednjih vrednosti srednjih Sauterjevih premerov v komori je dobro viden trend večanja kapljic z uporabo goriv z višjo viskoznostjo. Velikost kapljic in domet curka sta glavna pokazatelja razpada curka goriva. Iz predstavljenih rezultatov lahko sklepamo, da je razpad curka najboljši v

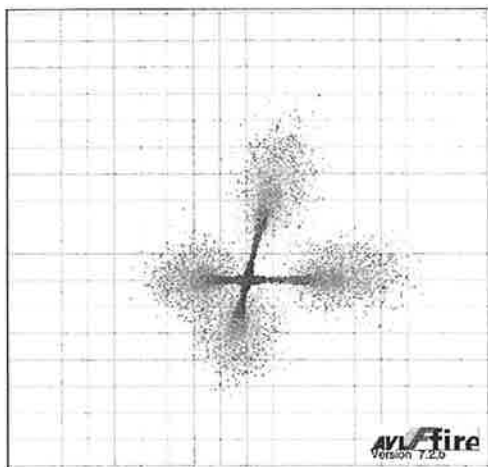
primeru uporabe plinskega olja, sledi biodizel, medtem, ko je razpad curka pri odpadnem rastlinskem olju, zaradi izredno visoke viskoznosti, pričakovano najslabši.



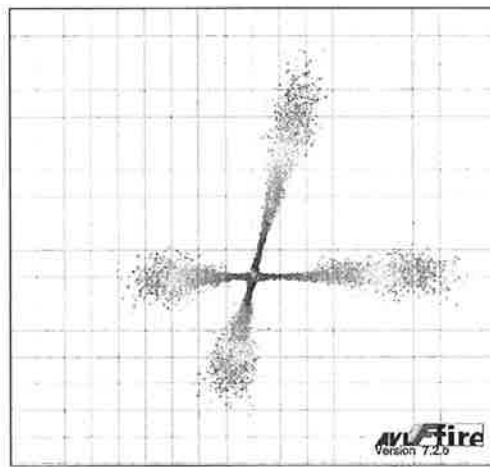
Slika 1: Curek D2 (MAKS.NAVOR: 66°OG).



Slika 2: Curek D2 (MAKS.MOČ: 68,8°OG).



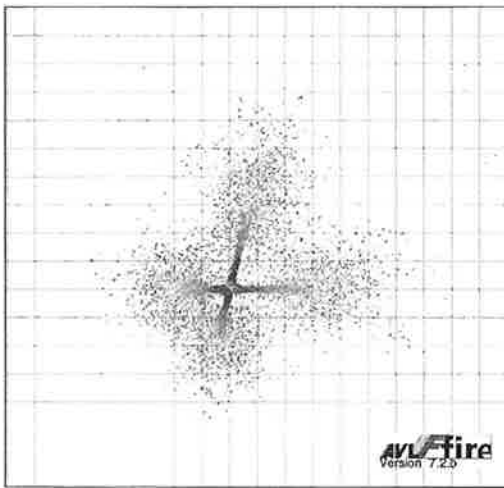
Slika 3: Curek biodizla (MAKS.NAVOR: 66°RG).



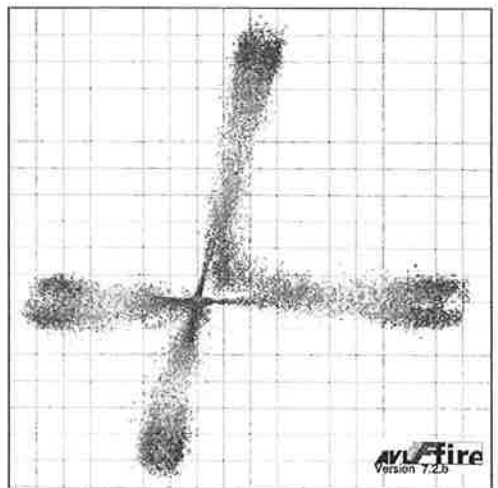
Slika 4: Curek biodizla (MAKS. MOČ: 68,8°OG).

Na osnovi analize slik curka so bile ocenjene tudi vrednosti kotov razpršitve, ki so v obeh obratovalnih karakteristikah približno enaki v primeru plinskega olja in biodizla in znašata okrog 45° na režimu maksimalnega navora ter okrog 25° pri maksimalni moči. V primeru uporabe odpadnega rastlinskega olja je kot v prvem primeru približno 35°, v drugem pa manj kot 20°.

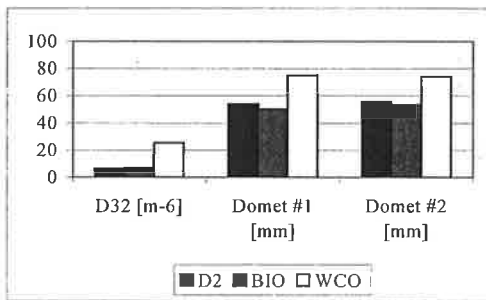
Računski časi so znašali okrog 60 (HP 9000/782) oz. 30 minut (HP 9000/785).



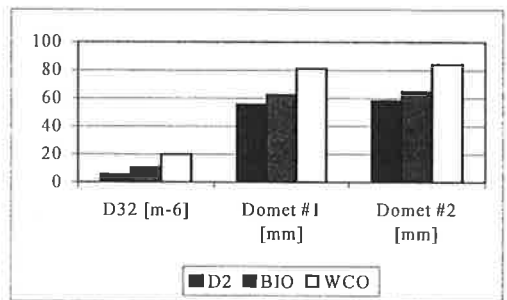
Slika 5: Curek WCO (MAKS.NAVOR: 66,1 °RG).



Slika 6: Curek WCO (MAKS. MOČ: 68,8°OG).



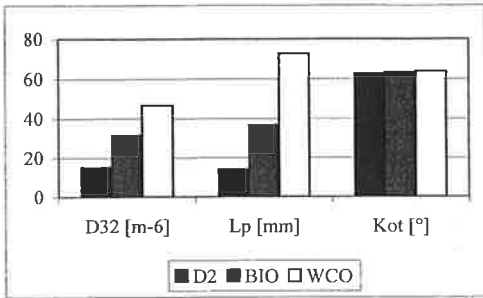
Slika 7: Primerjava karakteristik curka (d_{32} , dometa) pri MAKSIMALNEM NAVORU.



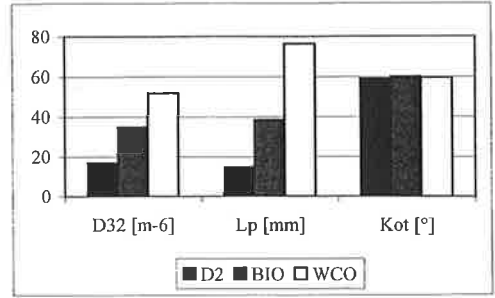
Slika 8: Primerjava karakteristik curka (d_{32} , dometa) pri MAKSIMALNI MOČI.

4.2 Empirični modeli

Rezultati empirične analize karakteristik curka so prikazani na slikah 9 in 10, od koder je ponovno jasno razviden najboljši razpad curka (velikost kapljic, domet) v primeru uporabe plinskega olja (D2). Na drugi strani so razlike v izračunanih vrednostih kota pri vrhu curka izredno majhne, kar je najverjetneje posledica tega, da uporabljen model premalo natančno upošteva spremembo uporabljenega goriva.



Slika 9: Primerjava rezultatov empiričnih modelov pri MAKSIMALNI MOČI.



Slika 10: Primerjava rezultatov empiričnih modelov pri MAKSIMALNEM NAVORU.

4.3 Primerjava rezultatov z analizo vplivov na procese v motorju

Kljub temu, da se rezultati numerične in empirične analize medsebojno ne ujemajo najboljše, lahko ugotovimo, da je v obeh analizah zaznan podoben trend spreminjanja karakterističnih veličin curka. Na podlagi podobnih trendov lahko analiziramo ter do neke mere določimo kakšen vpliv ima posamezno gorivo na proces vbrizgavanja, zgorevanja in tvorbe nezaželenih produktov zgorevanja. Tako je v vseh primerih, pri obeh analizah, najslabši razpad curka zaznan pri uporabi odpadnega rastlinskega olja, najboljši pa v primeru plinskega olja. Ob tem velja omeniti, da so vrednosti rezultatov analize z uporabo biodizla bližje plinskemu olju kot odpadnemu rastlinskemu olju, kar je logična posledica zelo podobnih lastnosti obeh goriv. Nenazadnje je biodizel danes praktično že v uporabi; dovoljenje za uporabo le-tega pa je tudi na svojih najsodobnejših dizelskih motorjih odobrilo precejšno število proizvajalcev. Torej se vprašanje ustreznosti oz. vpliva na procese vbrizgavanja, zgorevanja in tvorbe nezaželenih produktov zgorevanja na tem mestu postavlja bolj ali manj samo za odpadno rastlinsko olje, ki bi lahko ob predstavljenih rezultatih povzročalo nepopolno zgorevanje ter s tem povezano tvorbo nezaželenih produktov zgorevanja. V primeru slabšega razpada curka pri klasičnem dizelskem gorivu (plinsko olje) prihaja do povečanja emisij saj oz. trdnih delcev. Zaradi drugačne sestave goriva teh ugotovitev ne moremo neposredno prenesti na odpadno rastlinsko olje, temveč ravno obratno. Rastlinska olja imajo namreč v molekulah vezanega več kisika, kar ugodno vpliva na proces zgorevanja tudi v primeru slabšega razpada oz. v primeru, ko ni velikega presežka zraka. Težave se lahko pričakujejo predvsem z predolgim dometom in s tem povezanim zadevanjem goriva ob steno zgorevalne komore, zato je smiselno poiskati možnost spremembe geometrije zgorevalne komore v primeru delovanja motorja z odpadnim rastlinskim olje. Glede ostalih emisij

lahko do neke mere sklepamo, da bi lahko bile emisije NO_x, zaradi slabšega razpada curka, nekoliko nižje, kar pa zaradi razlik v sestavi goriva ne moremo trditi z gotovostjo.

5 Zaključki

Na osnovi predstavljenih rezultatov so možni naslednji zaključki v zvezi z uporabo plinskega olja, biodizla in odpadnega rastlinskega olja v dizelskem motorju:

- Biodizel in odpadno rastlinsko olje pri procesu vbrizgavanja tvorita večje kapljice in imata daljši domet, kar je posebej očitno v primeru odpadnega rastlinskega olja.
- Kot pri vrhu curka se med posameznimi primeri ne razlikuje bistveno.
- Za podrobnejšo analizo vplivov na procese vbrizgavanja in zgorevanja je potrebno opraviti še številne meritve obratovalnih karakteristik motorja ter pred tem po možnosti tudi curka vbrizganega goriva.
- Glede na to, da so uporabljeni modeli za razpad curka v CFD paketu razviti predvsem za analize plinskega olja in bencina, bi bilo za kasnejše analize procesa zgorevanja potrebno poiskati najprimernejše modele za uporabo pri alternativnih gorivih.

6 Literatura

- [1] T.Beer, et.al., Comparison on the Transport Fuels- Final report to the Australian Greenhouse Office on the Stage 2 study of Lifecycle Emission Analysis of Alternative Fuels for Heavy Vehicles, (http://www.dar.csiro.au/res/ggss/Life_Cycle_Analysis_for_Alternative_Fuels.htm)
- [2] DIN V 51606, Ausgabe:1994-06 Flüssige Kraftstoffe; Dieselkraftstoff aus Pflanzenölmethylester
- [3] W.Koerbitz, Biodiesel production in Europe and North America, an Encouraging Prospect, Renewable Energy 16 (1999), p. 1078-1083
- [4] Filipović I., Analiza motornih parametra ubrizgavanja alternativnih goriva, PhD Thesis, Mašinski Fakultet Univerze u Sarajevu, Sarajevo, 1983
- [5] Yule,A.J., Filipović I., On the break-up times and lengths of diesel sprays, Int. J. Heat and Fluid Flow, 1992, 13, p. 197-206
- [6] Hiruyasu H. et al., Fuel Spray Characterization in Diesel Engines, Combustion Modelling in Reciprocating Engines, p. 369-408, Plenum Press 1980
- [7] B.Kegl, An Improved Mathematical Model of Conventional FIE Processes, SAE 950079
- [8] M.Volmajer, B.Kegl, P.Pogorevc, Injection characteristics of an in-line fuel injection system using the alternative fuels, KONES 2002, Jurata, September 8-11, 2002
- [9] M.Volmajer, B.Kegl, Obravnavanje curka plinskega olja = Diesel-spray analysis. Strojniški vestnik., 2001, letnik 47, št. 10, str. 627-636.

.

**ANALIZA POGOJEV ZGOREVANJA V SEKUNDARNI KOMORI
SEŽIGALNE NAPRAVE S POMOČJO RAČUNSKE
DINAMIKE TEKOČIN**

Filip Kokalj in Niko Samec⁺

**ANALYSIS OF CONDITIONS FOR COMBUSTION IN SECONDARY
COMBUSTION CHAMBER OF INCINERATOR WITH
COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS**

POVZETEK:

V prispevku je obravnavana analiza zgorevanja v sekundarni komori sežigalne naprave s pomočjo programa računske dinamike tekočin CFX. Osredotočili smo se na analizo fizikalnih pogojev, ki zagotavljajo popolno zgorevanje. Primerjali in izbrali smo numerične modele, katerih rezultati se najbolj ujemajo z izmerjenimi vrednostmi. Napravili smo analizo obratovalnih pogojev in podali obratovalne omejitve za sekundarno komoro v smislu zagotavljanja zadostne kvalitete zgorevanja.

SUMMARY:

This paper presents the numerical analysis of combustion in second combustion chamber of incinerator using computational fluid dynamics package CFX. The focus was on physical conditions that assure complete combustion. Numerical models were compared and those producing best accuracy with measured values were chosen. Then followed the analysis of operating conditions and operating restriction were made to ensure high quality combustion.

⁺ Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru, Smetanova ulica 17, SI - 2000 Maribor

1. UVOD

Ravnanje z odpadki je tačas v svetu visoko razvita in tehnološko napredna dejavnost, ki je pod stalno javno kontrolo. Kurilne naprave za sežiganje odpadkov so neizbežno potrebne v vsaki sodobni in civilizirani družbi.

Glavna naloga, ki jo želimo doseči s postopkom sežiga, je termični razkroj celotne organske snovi. Produkt je skoraj inertna snov, ki lahko ostane za odlaganje okoljsko neprimeren, če vsebuje preveč okolju nevarnih anorganskih snovi. S sežigom smo odpravili fizikalni problem odpadka in delno kemijski problem. Slednji je namreč odvisno predvsem od parametrov zgorevanja, kurišča in sestave odpada.

S stališča navedenega je zelo pomembno poznavanje fizikalno - kemijskih procesov v zgorevalnem prostoru, ki jih je možno dokaj natančno simulirati z ustreznimi modeli računske dinamike tekočin (CFD). Rezultati numeričnih simulacij procesov zgorevanja pri različnih pogojih obratovanja omogočajo veliko podporo pri oblikovanju zgorevalnega prostora s stališča učinkovitega doseganja pogojev popolnega zgorevanja. Prav tako omogočajo dobro oceno makro parametrov procesov zgorevanja, ki jih je možno relativno enostavno preveriti na osnovi meritev. S pomočjo numeričnih simulacij procesov zgorevanja lahko ocenimo tudi obratovalno območje sežigalnice v obratovanju, predvsem s stališča območja količin in kurilne vrednosti odpadkov, količine dimnih plinov in količin dodanega zraka.

Težišče prispevka je namenjeno numerični analizi pogojev zgorevanja na osnovi

- homogenosti temperaturnega polja (področja nizkih temperatur),
- učinkovitosti zgorevanja na osnovi koncentracij produktov zgorevanja in
- dovajanja sekundarnega in terciarnega zraka pod različnimi pogoji

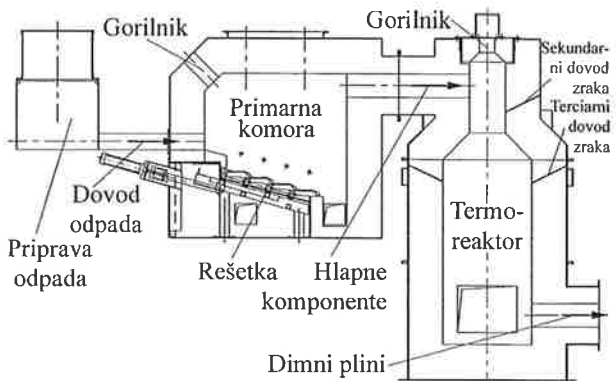
v sekundarni komori sežigalnice. V celoti je predstavljeno numerično modeliranje in simulacija zgorevanja v sekundarni komori obstoječe pilotne sežigalnice odpadkov kapacitete 25kg/h. Pri modeliranju smo uporabili različne module programskega CFD paketa CFX 4.4.

2. DVOKOMORNI SEŽIG

Dvokomorne sežigalnice so bile prvotno razvite za sežig industrijskih, bolnišničnih in nevarnih odpadkov, saj je zakonodaja za sežig teh odpadkov predpisovala strožja merila obratovanja, kot za sežig komunalnega (gospodinjanskega) odpada. Te sežigalnice so imele praviloma malo kapaciteto in so bile šaržno polnjene. Glavni namen uporabe sekundarne komore je bil izboljšati termični razpad organskega dela odpadkov.

Tovrstna dvokomorna oblika sežiga se je v svetu pričela pojavljati v 60. letih prejšnjega stoletja, ko so se pričele povečevati okoljske zahteve glede emisij. Temeljijo na primanjkljaju zraka v primarni komori in na presežku zraka v sekundarni komori, kar zagotavlja dober sežig, nizke emisije in manjšo porabo dodatnega goriva.

Na sliki 1 predstavljeni dvokomorni sistem zgorevanja, ki ga izdeluje podjetje KIV iz Vranskega in je namenjen za sežiganje trdnih odpadkov, je zasnovan na dveh fizikalno



Slika 1: Shema pilotne dvokomorne sežigalnice.

kemijskih procesih:

- segrevanje, sušenje in semi – pirolitično uplinjanje odpadkov v primarni komori in
- mešanje gorljivih plinov z zrakom, vžig in popolno zgorevanje v sekundarni komori, ki jo imenujemo tudi termoreaktor.

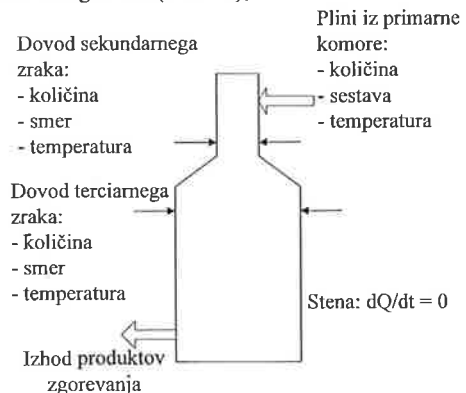
3. DOLOČITEV ROBNIH POGOJEV TERMOREAKTORJA

Za simulacijo dogajanja v zgorevalni komori in izbiro ustreznih modelov smo za robne pogoje uporabili izmerjene podatke in pridobljene projektantske podatke. Slednji so:

- hitrost plinov iz primarne komore: 0,25 m/s ($\approx 30 \text{ m}^3/\text{h}$),
- temperatura plinov iz primarne komore: 700°C ,
- količina zraka skozi sekundarne dovode: $60 \div 70\%$,
- količina zraka skozi terciarne dovode: $30 \div 40\%$,
- temperatura dovedenega zraka: temperatura okolice sežigalnice ($\approx 25^\circ\text{C}$),
- smer dovedenega zraka za vsak dovod posebej.

Robne pogoje smo nato spreminjali, da bi s tem ugotovili relativni vpliv posameznega robnega pogoja na zgorevanje in ugotovili obratovalno območje pilotne sežigalnice v smislu doseganja popolnega zgorevanja za različne količine in vrste odpadkov. Robne pogoje, ki smo jih predpisali in njihovo mesto na termoreaktorju, je razvidno iz slike 2.

Izmerjene vrednosti določenih obratovalnih parametrov so zajemale predvsem podatke o temperaturi in emisijah škodljivih snovi v produktih zgorevanja. Temperature v termoreaktorju, ki so bile izmerjene v času obratovanja, so bile vedno višje od predpisanih 850°C . Ponavadi se je povprečna temperatura pri stabilnem obratovanju gibala okrog 1000°C , temperatura na izhodu pa je bila od 100 do 150°C nižja, odvisno od pogojev obratovanja. Na osnovi teh podatkov o temperaturah skušamo oceniti kvaliteto numerične simulacije procesov zgorevanja v termoreaktorju.

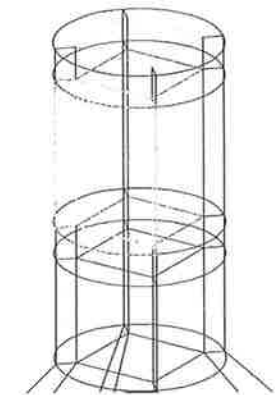


Slika 2: Robni pogoji termoreaktorja.

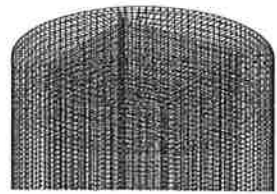
4. DISKRETNi MODEL TERMOREAKTORJA

Diskretni model smo v celoti izdelali s programskim paketom CFX 4.4. Program omogoča modeliranje trodimenzionalnih tokov in ima pomembne modele zgorevanja in sevalnega prenosa toplote. Zaradi omenjenih značilnosti in izkušenj drugih uporabnikov na tem področju smo se odločili uporabiti ta programski paket.

Po podrobni preučitvi načrtov smo ugotovili, da zaradi želje po avtentičnosti ni mogoče izdelati delnega modela in za take primere koristiti ponujene programske možnosti, s katerimi bi med izračunom prihranili veliko računalniškega časa. Na sliki 3 je vidna blokovna zgradba vrha termoreaktorja, ki smo jo izdelali skladno s priporočili za uporabo programskega paketa CFX 4.4. Na ta način smo zagotovili kasnejšo boljše zamreženost geometrije. Skladno s tem smo izdelali glavno konturo sekundarne komore. Sledila je natančna izdelava vseh priključkov: dovod plinov iz primarne komore, šest dovodov za sekundarni zrak, šest dovodov za terciarni zrak in kanal



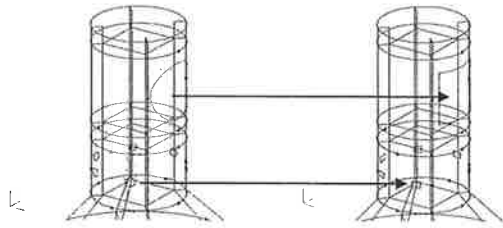
za odvod dimnih plinov. Po uspešni analizi smo tako dobili aproksimacijski zapis modelirane geometrije termoreaktorja z 275.674 končnimi volumni. Približno takšno število končnih volumnov so uporabljali tudi drugi. Oblika zamrežitve je vidna s slike 4, na kateri je prikazan vrh termoreaktorja.



Slika 4: Zamrežitev vrha termoreaktorja.

Pri numerični simulaciji se je nato pokazalo, da izračun s takšno geometrijo in obstoječo zamrežitvijo ne konvergira, niti v primeru, ko smo z modelom želeli simulirati enostavinski, izotermni nereaktivni tok. Ker je ponavadi kvaliteta in oblika zamreženosti tista, ki vpliva na konvergenco izračuna smo se odločili, da napravimo določene spremembe geometrijskega modela in računske mreže.

Ko poskus s spremembo gostote zamreženosti ni obrodil željenega rezultata, smo geometrijski model minimalno predelali, tako da je še vedno zelo ustrežal dejanskemu termoreaktorju, kar je prikazano na sliki 5. Obliko in mere glavne geometrije smo pustili nespremenjene, preoblikovali pa smo dotoke in odtok. Nova oblika dovodov in odtoka ni več okrogla, temveč je pravokotna. Velikost vseh predelav pa je po površini ostala enaka, tako da smo lahko za robne pogoje koristili enake podatke, kot smo jih želeli ob prvotni geometriji.



Slika 5: Potrebne spremembe geometrije modela.

Naša pozornost je bila namenjena modelu zgorevanja in sevanja, ki sta oba s fizikalnega stališča dogajanja v dejanski napravi bistvenega pomena za uspešno simulacijo procesa zgorevanja v termoreaktorju.

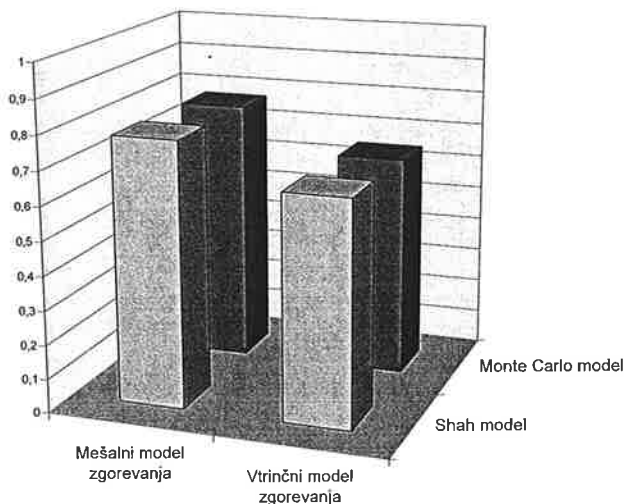
5. IZBOR NAJUSTREJŠIH MODELOV ZGOREVANJA IN SEVANJA

Izvedli smo simulacijo z mešalnim (Mixed is burnt) in vrtničnim (Eddy break up) modelom zgorevanja skupaj z modelom Monte Carlo (Monte) in diskretnim modelom sevalnega prenosa toplote (Shah), ki so na voljo v programskem paketu CFX 4.4. Izračun je bil pridobljen z zgoraj predstavljenimi podatki, ki so zapisani tudi na sliki 2. Z vsakim modelom zgorevanja smo preizkusili oba modela sevalnega prenosa toplote.

Primerjava rezultatov dveh modelov zgorevanja in dveh modelov sevalnega prenosa toplote nam ob analizi tokovnega in temperaturnega polja ter primerjavi polja reakcij in produktov pokažejo, da ni nobene praktične razlike med obema modeloma sevalnega prenosa toplote. Povsem drugače pa je pri primerjavi obeh modelov zgorevanja. Prve razlike so opazne že pri tokovnem polju, kjer so ob podobni tokovni porazdelitvi maksimalne hitrosti pri vrtničnem modelu zgorevanja za okrog 7% večje kot pri mešalnem modelu zgorevanja. Večje razlike med obema modeloma so že vidne pri primerjavi temperaturnih polj, ki odkrivajo, da vrtnični model napoveduje maksimalno temperaturo približno 750 stopinj višjo kot mešalni model, povprečna pa je višja za približno 300 stopinj. Primerjava polja reakcij pokaže, da pri vrtničnem modelu zgorevanje traja dlje časa in reakcije zapolnijo praktično celo komoro. Pri mešalnem modelu pa se proti izhodu že zaključujejo. Tako lahko pogledamo tudi povprečno sestavo produktov na samem izhodu iz sekundarne komore, kar je prikazano na grafikonu 1, ki nam daje relativen kvalitativni pregled koncentracije produktov in s tem vodenja procesa zgorevanja. Razvidna je precej višja koncentracija produktov pri mešalnem modelu zgorevanja, kot pri vrtničnem modelu zgorevanja. Razlike med obema modeloma sevalnega prenosa toplote pa tudi tukaj pravzaprav ni. Napovedana količina produktov zgorevanja je pri mešalnem modelu 20 % višja kot pri vrtničnem

modelu. Kot zaključek zgoraj povedanega lahko zapišemo, da vrtnični model napoveduje previsoke temperature in prenizke koncentracije produktov, saj na meritvah nikoli nismo izmerili tako visokih temperatur oziroma tako nizkih koncentracij produktov zgorovanja.

Graf 1: Primerjava povprečnih koncentracij produktov na izhodu iz termoreaktorja.



Dodatno smo preučili tudi spodnjo tabelo, v kateri smo združili zanimive podatke o poteku samega izračuna posameznega modela. Izpostaviti je potrebno, da smo v ukazni datoteki predpisali 3.000 iteracij ali masno tolerance velikosti 10^{-6} , vendar je program vedno prej opravil 3.000 iteracij, kot pa prišel do predpisane tolerance.

Tabela 1: Razmerje ostankov med drugo in zadnjo iteracijo.

	Mešalni mod. zgor. + Shah	Mešalni mod. zgor. + Monte	Vrtnični mod. zgor. + Shah	Vrtnični mod. zgor. + Monte
Skupni CPU [s]	4.576E+04	4.970E+04	4.498E+04	4.890E+04
Gibalna količina U	9.8E+01	5.6E+01	1.0E+02	9.2E+01
Gibalna količina V	5.9E+01	3.3E+01	6.5E+01	5.7E+01
Gibalna količina W	9.5E+01	4.2E+01	8.2E+01	7.1E+01
Masa	1.2E+03	3.3E+02	1.4E+03	6.8E+02
Turbulentna energija	2.0E+04	1.8E+04	1.2E+04	1.1E+04
Disipacija energije	3.4E+05	3.0E+05	1.4E+05	1.0E+05
Entalpija	4.3E+00	3.5E+00	3.7E+00	3.5E+00

Iz tabele je razviden razvoj izračuna v vseh štirih modelnih primerih. Vidimo lahko, da smo pri računanju z diskretnim modelom prenosa toplote (Shah) za simuliranje sevalnega prenosa toplote dobili v obeh modelnih primerih zgorovanja nekoliko manjše ostanke in predvsem krajši čas računanja (skoraj 10%). Omenjeno je vodilo k odločitvi, da delo nadaljujejo z mešalnim modelom zgorovanja (Mixed is burmt) in diskretno metodo sevalnega prenosa toplote (Shah).

6. DOLOČEVANJE MEJNIH POGOJEV OBRATOVANJA IN OPTIMIRANJE ZGOREVANJA
Sestavo plinov iz primarne komore oziroma njihovo kalorično vrednost smo simulirali z zmesjo metana in dušika. Količino metana, s katero smo simulirali kurilno vrednost goriva, smo povečali oziroma zmanjšali in pri tem zasledovali spreminjanje temperature in temperaturnega polja v

termoreaktorju. Prav tako smo preučili vpliv spremembe pretoka plinov iz primarne komore, kar je v praksi posledica spremembe količine odpada v primarni komori. Preverili smo tudi, kako vpliva mesto, smer in količina dovedenega zraka v termoreaktor na zgorevanje.

Spreminjanje kurilne vrednosti plina iz primarne komore

Kurilna vrednost plina močno vpliva na temperaturo v zgovalni komori. Kurilno vrednost plinov iz primarne komore smo simulirali s količino metana, ki je znašala 35%, 55% in 75%.

Hitrostno polje je za vse tri primere praktično nespremenjeno, saj v rezultatih ne opazimo večjih sprememb. Zanimivo je, da vsakokratno posamezno zvečanje količine metana (iz 35% na 55% in iz 55% na 75%) ne prinese pričakovanega povišanja najvišje temperature v termoreaktorju, zviša pa se povprečna temperatura v termoreaktorju in to za okrog 100 stopinj za posamezno povečanje količine metana, pri tem, da vsi ostali parametri ostanejo nespremenjeni. Pri tem se polje najvišjih temperatur istočasno pomakne vzdolž toka v termoreaktorju.

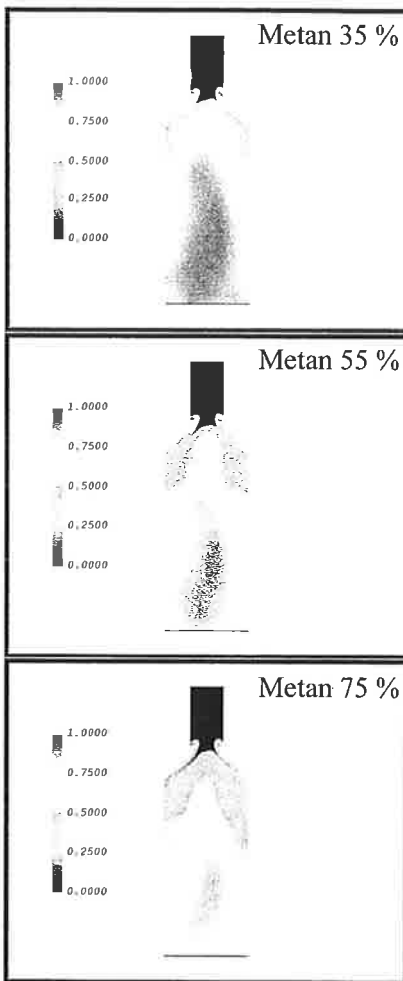
Koliko produktov in kje se tvorijo je razvidno iz naslednje slike 7, kjer imamo prikazan prerez vzdolž termoreaktorja. Če primerjamo zgornje in srednje rezultate simulacij na sliki 7 lahko ugotovimo, da sta položaj in tvorba produktov približno enaka, enaka je tudi koncentracija produktov na izhodu iz termoreaktorja. Spodnji rezultat na sliki 7 kaže, da je kurilna vrednost goriva prevelika in dovedeno gorivo v dani geometriji z enako količino zraka, kot v ostalih dveh primerih, ne uspe zgoreti do konca, zato je koncentracija produktov v spodnjem srednjem delu termoreaktorja in na izhodu nižja kot v srednjem oziroma zgornjem primeru. Ugotovimo lahko, da je najprimernejša kurilna vrednost plina pri koncentraciji metana okrog 55%, saj so pri nižji vrednosti prenizke temperature, pri višjih pa plin ne uspe zgoreti. Ob tem velja pripomniti, da to velja pri nespremenjenih ostalih pogojih.

Spreminjanje količine plinov iz primarne komore

Količina plinov iz primarne komore poleg ostalega vpliva na čas zadrževanja in je drugi izmed raziskovanih parametrov, ki vplivajo na zgorevanje.

Simulirali smo dotok plina s hitrostjo 0,25 m/s oziroma 30 m³ plina na uro, 0,38 m/s (45 m³/h) in 0,5 m/s (60 m³/h). Pri povečanjem dotoku se povečuje tudi najvišja hitrost in hitrosti v posameznih delih termoreaktorja.

Rezultati temperaturnih polj na sliki 8 jasno prikazujejo vpliv povečanega dovoda plinov iz primarne komore. Z večjim dovodom plinov pride v termoreaktor tudi večja količina metana, kar povzroči tudi izredno povečanje maksimalne in povprečne temperature in precej spremeni temperaturno polje v termoreaktorju.



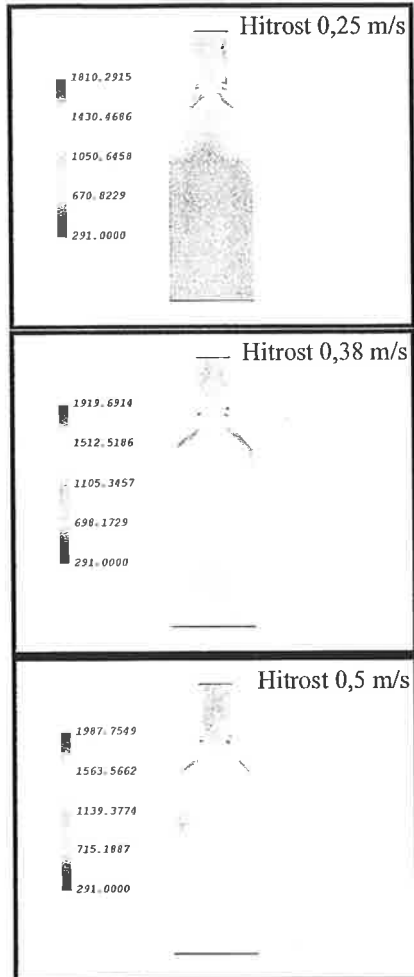
Slika 7: Koncentracija produktov.

Maksimalna temperatura se tako poveča za približno 100 stopinj.

Porazdelitev temperatur po termoreaktorju dobi z vsakim povečanjem hitrosti tudi povsem drugačno obliko. Pri prvem rezultatu (zgoraj) vidimo, da so najvišje temperature v okolici sekundarnega dovoda zraka, relativno visoke temperature pa se nato nadaljujejo pretežno ob steni. Pri drugem rezultatu (sredina) se temperature po celotnem termoreaktorju od sekundarnega dovoda zraka naprej dvignejo za dobrih 100 stopinj, izpostavili pa bi območje med obema dovodoma zraka, kjer so temperature povsod višje od 1500 K. Pri tretjem rezultatu se to območje visokih temperatur podaljša čez terciarni dovod zraka, kjer imamo tudi izjemno visoke temperature. Nasploh so temperature pri tem rezultatu, ocenjevano na splošno, zelo visoke, precej višje od v praksi izmerjenih temperatur v termoreaktorju. Srednji in spodnji pogoji kažejo primer, ko je dotok plinov iz primarne komore prevelik, kar povzroči izjemno visoke temperature in tako pospeši pretok skozi termoreaktor, da ni dovolj časa za popolno zgorevanje zmesi. To se odraža tudi na rezultatih simulacije produktov zgorevanja, ki so za srednji in spodnji primer izredno nizki.

Sprememba smeri in hitrosti dovajanja zraka

Simulacije smo izvedli na način, da smo spreminjali projektirane vrednosti. Slednje so s spremenjenimi hitrostmi in smermi predstavljene v tabeli 2. Sprememba smeri dovajanja zraka od projektiranih vrednosti pomeni pomik proti osi termoreaktorja. Predstavili bomo glavni vpliv spremenjenih smeri in hitrosti na povprečno temperaturo in tvorbo produktov. Ponovno je potrebno poudariti, da nismo pri tem spreminjali ostalih robnih pogojev, s katerimi bi lahko še dodatno pomembno vplivali na pogoje zgorevanja. Rezultate simulacije za povprečno temperaturo in tvorbo produktov lahko predstavimo grafom 2. Iz rezultatov vidimo, da ima sprememba hitrosti dovajanja zraka poleg spremembe tokovnega polja velik vpliv na povprečno temperaturo, ki se ustvari v sekundarni komori. Pokazalo se je, da že sama sprememba mesta dovajanja zraka (projektirana in spremenjena hitrost) ob enaki količini zraka dvigne povprečno temperaturo za okrog petdeset stopinj, vendar pa še odločilneje vpliva na kvaliteto zgorevanja, kar je razvidno iz količine produktov na izhodu. Količina produktov se poveča za okrog 10 %. S povečevanjem količine



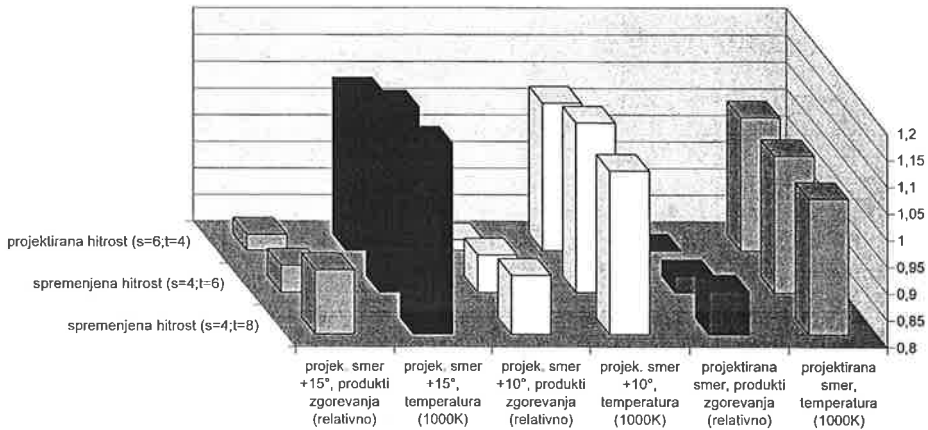
Slika 8: Temperaturno polje.

Tabela 2: Projektirane in spremenjene hitrosti zraka.

Veličina	Sekundarni zrak	Terciarni zrak
Hitrost	projektirana = 6 m/s	projektirana = 4 m/s
	4 m/s	6 m/s
	4 m/s	8 m/s
Smer	projektirana	projektirana
	projektirana + 10°	projektirana + 10°
	projektirana + 15°	projektirana + 15°

terciarnega zraka opazimo, da povprečna temperatura več ne naraste, celo malenkost pade, za 10 odstotkov pa se še poveča količina produktov na izhodu.

Graf 2: Vpliv smeri in hitrosti dovajanja zraka na povprečno temperaturo in tvorbo produktov.



ZAKLJUČEK

Uporaba sodobnih orodij, s katerimi je mogoče opraviti velik del razvoja novih in nadgradnje starih naprav in objektov, je v današnjem času hitrih sprememb in visokih zahtev po kvaliteti in želji po nizkih cenah, neizogibno potrebna za vse, ki sodelujejo pri razvoju in raziskavah.

Z inženirsko optimizacijo določenih parametrov smo raziskovali dogajanje v termoreaktorju. Izhodišče je predstavljala želja, da bi bil proces zgorevanja, ki se tam odvija, še popolnejši, kar na izhodu pomeni manj polutantov in boljše delovanje naprave. Izbrani parametri so imeli neposreden vpliv na parametre popolnega zgorevanja, s katerimi smo tudi določili obratovalna območja v smislu kurilne vrednosti plina in časa zadrževanja oziroma hitrosti dotoka plina iz primarne komore. Spremembe posameznih parametrov dovajanja zraka, ki vplivajo na kvaliteto mešanja, so bile izvedene na osnovi izkušenj in želje po čim večji reprezentativnosti dobljenih rezultatov, iz katerih so vidni tudi trendi za nadaljnje delo.

LITERATURA

1. Brunner Calvin R, "Handbook of Incineration Systems", McGraw – Hill, New York, 1991;
2. CFX 4.4, "Users Manual", AEA Technology, 2000;
3. Chen K. S., Tong C. H., "Modelling of Turbulent Burning Flow and Performance Evaluation of Municipal Solid Incinerator", Journal of Environmental engineering, 1150-1157, 1997;
4. Ficarella A., Laforgia D., "Numerical simulation of flow field and dioxins chemistry for incineration plants and experimental investigation", Waste Management 20, 27-49, 2000;
5. Heist D. K., Ravichanran M., Gouldin F. C., "Experiment and Numerical Study of an Incinerator - and Furnace - Related Flow", Combustion and Flame, 99, Elsevier Science Inc., 339-346, 1994;
6. Nasserzadeh V., Swithenbank J., Schofield C., Scott D. W., Loader A., Leonard A., "Design Optimisation of Coventry Municipal Solid Waste Incinerator", Journal of Environmental Engineering, 120, No. 6, 1615-1629, 1994,
7. Niessen Walter R., "Combustion and Incineration Processes: Applications in Environmental Engineering", Second Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995.

Določitev moči za mešanje zmesi melasa-voda v homogenizatorju s pomočjo numerične simulacije

Jožef Maučec¹, Matjaž Hriberšek, Sanib Bašič²

Determination of mixing power for mixing of cane sugar-water mixture by means of numerical simulation

Povzetek

V prispevku je prikazan način računalniškega določanja moči mešanja za primer mešanja newtonske zmesi melasa-voda v mešalni posodi - homogenizatorju. Uporabljen je programski paket CFX ProMixus, ki deluje na osnovi računalniške dinamike tekočin. Reološke lastnosti delovne zmesi so večinoma povzete po dostopni literaturi. V cilju izboljšanja kvalitete mešanja v homogenizatorju je bila izvedena računalniška analiza vpliva tipa mešala na porabo moči za mešanje, ki smo jo za izbrano konfiguracijo tudi eksperimentalno preverili. Kot delovni mešali smo izbrali turbinsko mešalo s šestimi lopaticami in aksialno mešalo s tremi poševnimi lopaticami. Obravnavali smo tudi vpliv tokovnih ovir na porabo moči mešala. Dobljeni rezultati kažejo, da predstavlja računalniška simulacija natančen pristop k določanju moči mešanja tudi v primeru mešanja nenevtonskih zmesi.

Summary

In the present paper, a computer-based determination of mixing power is shown for the case of mixing of non-newtonian mixture sugar cane - water in a mixing vessel - homogenizer. Computational fluid dynamics (CFD) based program package CFX Pro Mixus is used. Rheological data of the working mixture is obtained from the open literature. With the aim of improving quality of mixing in the homogenizer a computational analysis of influence of different impeller types on power consumption was performed, which was experimentally verified for a chosen configuration. As working impellers turbine impeller with six flat blades and a three blade inclined axial impeller were chosen. Influence of baffles in the homogenizer

¹ Lek d.d., Veterina Lipovci, 251/a Lipovci, 9231 Beltinci

² Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, 2000 Maribor

were was also studied. Obtained results show that CFD simulations offer accurate determination of mixing power also in the case of non-newtonian mixtures.

1. Uvod

Melasa je stranski proizvod pri proizvodnji sladkorja. Nizka cena in lastnosti, ki jih melasa ima, dajejo tej surovini možnost vsestranske uporabe, predvsem pri prehrani živali z mineralno vitaminskimi mešanici. Pri industrijski pripravi mineralno-vitaminskih mešanic z dodajanjem melase se mešanje pojavlja v dveh pomembnih korakih, 1). pripravi homogene zmesi melasa-voda, 2). mešanju mineralno-vitaminske zmesi s homogenizirano zmesjo melasa-voda, katerega ciljni produkt je homogena ne prašna mineralno vitaminska mešanica. Pogoji za uspešen potek koraka 2), ki predstavlja izredno zapleten dvofazni sistem kapljevito-trdno in katerega eksperimentalno in računsko ovrednotenje predstavlja velik in do sedaj slabo opisan problem, je ustrezna homogena priprava melase in vode, torej uspešna izvedba koraka 1). Iz eksperimentov je ugotovljeno, da dosežemo za različne mineralno-vitaminske mešanice najboljše rezultate mešanja z melaso z vsebnostjo od 70% do 80% suhe snovi pri temperaturi zmesi 40°C.

Prispevek obravnava tokovne razmere v homogenizatorju zmesi melasa-voda z uporabo numerične simulacije toka tekočine. Zmes melasa - voda obravnavamo kot nenevtonsko tekočino. Pomen dobljenih rezultatov je določitev odvisnosti potrebne moči premešanja za široko delovno področje realnih homogenizatorjev zmesi melasa-voda.

2. Teoretične osnove

Vsebina prispevka je osredotočena na funkcijo homogeniziranja - mešanja nenevtonske zmesi. Kot izhodišče so bile upoštevane stacionarne temperaturne razmere, delovni snovi melasa in voda dotekata v homogenizator z delovno temperaturo, obravnavan je nestisljiv viskozen tok, kapljevini se med sabo popolnoma mešata. Zaradi poenostavitve numeričnega izračuna obravnavamo enofazni režim obratovanja ter računamo s povprečnimi in konstantnimi vrednostmi snovnih lastnosti.

2.1 Vodilne enačbe

Gibanje tekočine kot kontinuuma opisujejo enačbe ohranitve. Enačbe ohranitve (podane v valjnih kordinatah (r, θ, z)) se sestojijo iz gibalnih enačb ter kontinuitetne enačbe nestisljive tekočine z $\rho = \rho_0$ [3]. Za razliko od newtonske tekočine je v našem primeru zaradi lastnosti snovi potrebno uporabiti drugačen konstitutivni model. Zveza med napetostnim tenzorjem, ki nastopa v osnovni obliki enačb ohranitve gibalne količine, in tenzorjem hitrosti deformacije je [3]:

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \eta(\xi, T, \dot{\gamma}) \cdot \dot{\epsilon}_{ij} \quad , \quad (1)$$

kjer je δ_{ij} -Kroneckerjeva delta funkcija in $\dot{\epsilon}_{ij}$ -tenzor deformacijskih hitrosti. Viskoznost zmesi melasa voda je v splošnem funkcija sestave zmesi, temperature in deformacijske hitrosti. Prav določitev ustreznega izraza za viskoznost je v numeričnem modelu ključnega pomena, saj predstavlja potencialno največjo napako v celotnem numeričnem postopku določitve željenih parametrov mešanja.

Obravnavane enačbe ohranitve se v valjnih koordinatah glasijo [6]:

- kontinuitetna enačba:

$$\boxed{\text{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0} \quad (2)$$

- gibalne enačbe:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u_r) + \text{div}(\rho \cdot \vec{v} \cdot u_r) - \rho \cdot \frac{u_r^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \text{div}(\tau_r) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + F_r \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u_\theta) + \text{div}(\rho \cdot \vec{v} \cdot u_\theta) - \rho \cdot \frac{u_r \cdot u_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \text{div}(\tau_\theta) - \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u_z) + \text{div}(\rho \cdot \vec{v} \cdot u_z) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\tau_z) + F_z \quad (5)$$

kjer so: \vec{v} -vektor hitrosti, ($\vec{v} (u_r, u_\theta, u_z)$ s hitrostmi v smeri r, θ in z), $\rho = \rho(\xi, T)$ -gostota, F_r, F_θ, F_z -komponente volumnskih sil (združujejo vpliv težnostnih, centrifugalnih in za rotirajoči koordinatni sistem Coriolisovih sil), τ_{ij} -tenzor strižnih napetosti in p - tlak.

2.2 Določitev dinamične viskoznosti delovne zmesi melasa-voda

Melasa je snov, katere viskoznost se zelo spreminja s temperaturo in suho snovjo. Viskoznost melase lahko drastično znižamo z dodatkom vode - v bistvu ji zmanjšamo vsebnost suhe snovi. Odstopanje melase od idealne viskoznosti je posebno izrazito v območju kotnih hitrosti od 0 do 50 s⁻¹. Po raziskavi [2] in Ostwald-De Waele-jevi enačbi lahko reološko zakonitost zmesi predstavimo v obliki zveze med strižno napetostjo in deformacijsko hitrostjo in sicer se melasa obnaša kot psevdoplastična tekočina, tako da uporabimo potenčni zakon:

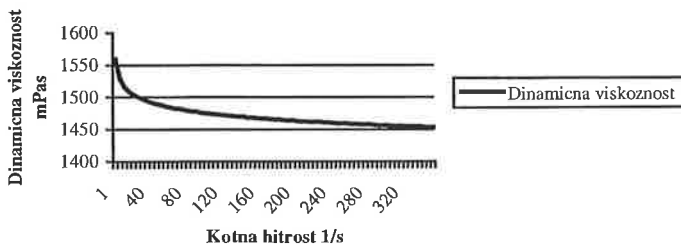
$$\eta(\dot{\gamma}, T, \xi) = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (6)$$

kjer je K, n -empirična parametra odvisna od sestave melase (ξ) in temperature T po [2], ter $\dot{\gamma}$ deformacijska hitrost. V tabeli 1 so podani empirični parametri modela (6) za različne suhosti w_{TS} melase in temperature, povzeti po [2].

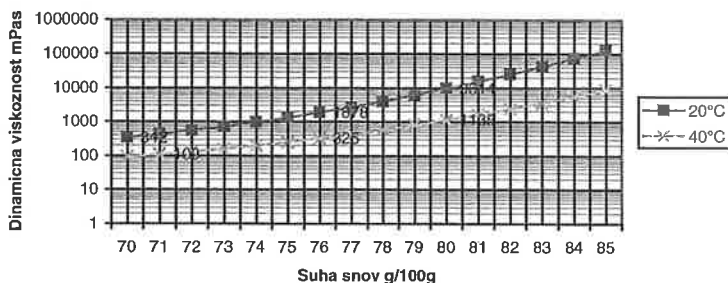
Parametri melase sladkorne pese						
K(T) v mPas T v °C	$w_{TS}=70\%$			$w_{TS}=80\%$		
	K(T)	n(T)	r	K(T)	n(T)	r
40	112,97	0,989	0,9824	1558,92	0,988	0,9908
20	439,90	0,992	0,9807	11975,34	0,975	0,9823

Tabela 1: Parametri modela psevdoplastične tekočine za zmes melasa-voda [2]

Slika 1 nazorno prikazuje potek viskozne funkcije za različne vrednosti deformacijske hitrosti. Na sliki 2 je prikaz območja dinamične viskoznosti v odvisnosti od sestave (stopnja suhe snovi od 70% do 80% naše delovno območje) in temperature (40°C in 20°C). Iz diagrama je razvidno, da ima na dinamično viskoznost večji vpliv sestava zmesi (suhost melase), kot pa temperatura.



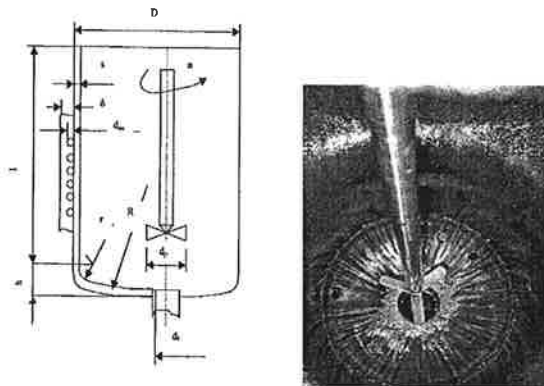
Slika 1: Dinamična viskoznost melase ($w_{TS}=80\%$, $T=40^{\circ}\text{C}$)



Slika 2: Dinamična viskoznost melase v izbranem delovnem območju

3. Model homogenizatorja

Homogenizator zmesi melasa-voda ima obliko cilindrične mešalne posode z enim mešalom, prikazano na sliki 3. Geometrijske veličine homogenizatorja so naslednje: premer mešala 120 mm, odmik od spodnjega dna posode 150 mm, premer posode 450 mm, krožno dno posode ASME oblike, višina zmesi v posodi 900 mm. Primer je bil obravnavan z ovirami in brez ovir. Volumen posode je bil konstanten 150 litrov.



Slika 3: Homogenizator zmesi melasa-voda

4. Numerični izračun

Numerične izračune smo opravili s pomočjo programskega paketa CFX-ProMixer [1] (AEA Technology Engineering Software). Programski paket rešuje vodilne enačbe v obliki SIMPLE algoritma z uporabo Rhie-Chow interpolacije, ki omogoča uporabo neortogonalnih prilagodljivih mrež [1] in [6].

Obravnavali smo vpliv osnovnih parametrov mešanja na potek prenosnih pojavov v obstoječem homogenizatorju proizvodnega obrata. Za izbrano posodo na sliki 3 in zmesi melasa-voda smo spreminjali naslednje parametre po tabeli 2:

GEOMETRIJA POSODE	
-tokovne ovire	-tip mešala
*brez tokovnih ovir	*radialno mešalo s 6 ravnimi lopaticami (Rushton)
*s tokovnimi ovirami ($\xi=45\text{mm}$, $\sigma=4.5\text{mm}$)	*aksialno mešalo s 3 poševnimi lopaticami (32°)
-vrtlina hitrost	
*dve različni vrtilni hitrosti (1380 min^{-1} in 300 min^{-1})	
SNOVNE LASTNOSTI ZMESI V POSODI	
$\eta(\dot{\gamma}, T, \xi) = K \cdot \dot{\gamma}^n - 1$	
$\rho = \rho(\xi, T)$	iz [7]
*sestava zmesi (80% in 70% vsebnosti suhe snovi)	
*dve različni temperaturi zmesi (40°C in 20°C)	

Tabela 2: Variranje podatkov za numerični izračun

Programski paket CFX ProMixus izračuna moč, potrebno za mešanje, z integriranjem poteka strižnih napetosti po diferencialnih površinah ter hitrosti na celotni površini lopatic mešala, [1].

5. Izvedene meritve

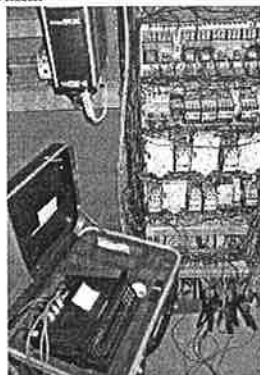
Poskuse smo izvedli na dejanski napravi (slika 3) v obratovalnem procesu in sicer pri parametrih modela 20 - tabela 3. Določevali smo potrebno moč za mešanje melase in vode.

Snovne lastnosti melase (% suhe snovi smo določili v laboratoriju Kmetijsko gozdarskega zavoda M. Sobota, ujemanje z dinamično viskoznostjo smo analizirali v Lekovem laboratoriju v Ljubljani z rotacijskim viskozimetrom, gostoto melase pa smo povzeli po [7]). Odstopanja podanih snovnih lastnosti melase v [2] in [7] od izmerjenih vrednosti so bila manjša od 5%, natančnost inštrumentov je bila večja od 98 %, natančnost metod pa večja od 95 %. Temperaturo smo merili s pomočjo Pt 100 sond (FLX-SCADA, SIMATIC S7 - Siemens). Natančnost meritve je bila 95%.

Dejanska naprava - homogenizator je imel prigraven elektromotor za katerega smo imeli podatke o izgubah v obratovalni točki. Tako nam ni bilo treba meriti vrtilnega momenta in hitrosti.

Za meritev moči smo uporabili energijski analizator VIP MK3 /VIP SYSTEM 3 proizvajalca Elcontrol iz Italije s serijsko številko M 11033 (slika 4). Natančnost odčitka je +/- 1,5%,

+/- 0,05A, kar je manj kot 3% napaka.



Slika 4: Meritve moči mešanja

Postopek merjenja (slika 4) moči smo opravili s pomočjo treh kleščnih merilcev med fazami in ničlo. Z uporabljenim instrumentom smo izmerili povprečne vrednosti moči v časovnih intervalih. Meritve smo periodično ponavljali.

Z instrumentom smo merili delovno moč elektromotorja (direktno prigraven na gred mešala). Skupne izgube elektromotorja z mešalom v delovni točki (297 W) smo imeli podane od proizvajalca VENESTRA. Tako smo potrebno moč za pogon mešala izračunali po enačbi :

$$P_{\text{mešala}} = P_{\text{meritve}} - 297W \quad (7)$$

Po znanem Gaussovem zakonu [4] smo določili zvezo med neodvisnimi merjenimi veličinami. Odstopanje izmerjenih vrednosti je bilo manjše od 7 % izračunane numerične vrednosti moči za pogon mešala modela 20, to je 743 W, kar pomeni, da so rezultati računalniških preračunov verodostojni.

6. Rezultati

Na osnovi realnih dimenzij homogenizatorja smo z računalniško simulacijo detajlno obravnavali 32 modelov, katerih osnovni delovni parametri so navedeni v Tabeli 3.

Model	Število obr/min	Tip mešala Rushton Aksialno	Tokovne ovire	Sestava melase % suhe snovi	Temperatura °C	P (W)	Potreben čas mešanja v (s) za doseganje variance koncentracije 5%
1	1380	Rushton	ne	70	40	1736	10
2	1380	Rushton	ne	70	20	1650	31*
3	1380	Rushton	ne	80	40	1576	28*
4	1380	Rushton	ne	80	20	1720	17*
5	1380	Rushton	da	70	40	1728	6
6	1380	Rushton	da	70	20	1642	6
7	1380	Rushton	da	80	40	1599	48*
8	1380	Rushton	da	80	20	1733	15*
9	300	Rushton	ne	70	40	17	196*
10	300	Rushton	ne	70	20	16	102
11	300	Rushton	ne	80	40	16	110*
12	300	Rushton	ne	80	20	32	25*
13	300	Rushton	da	70	40	18	117*
14	300	Rushton	da	70	20	15	82*
15	300	Rushton	da	80	40	17	100*
16	300	Rushton	da	80	20	32	17*
17	1380	aksialno	ne	70	40	198	109*
18	1380	aksialno	ne	70	20	244	118*
19	1380	aksialno	ne	80	40	333	29*
20	1380	aksialno	ne	80	20	743	20*
21	1380	aksialno	da	70	40	241	54*
22	1380	aksialno	da	70	20	287	37*
23	1380	aksialno	da	80	40	345	36*
24	1380	aksialno	da	80	20	726	19*
25	300	aksialno	ne	70	40	2,5	526*
26	300	aksialno	ne	70	20	3,6	127*
27	300	aksialno	ne	80	40	6,1	116
28	300	aksialno	ne	80	20	19	24*
29	300	aksialno	da	70	40	3	.*

30	300	aksialno	da	70	20	3,6	146*
31	300	aksialno	da	80	40	5,9	115*
32	300	aksialno	da	80	20	19	23*

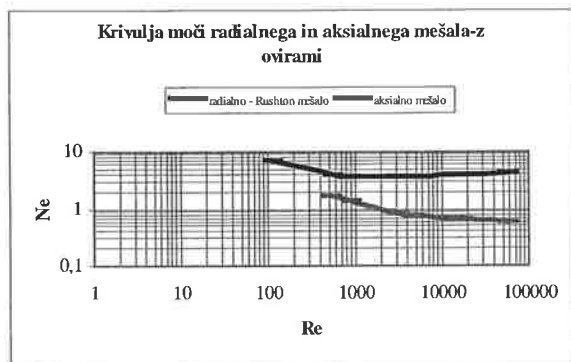
Tabela 3: Modeli povzeti po tabeli 2 in rezultati (*ekstrapolirane vrednosti)

6.1 Poraba moči pri mešanju newtonske zmesi melasa-voda

Karakteristiko moči Rushtonovega in aksialnega mešala s poševnimi ravnimi lopaticami zapišemo z brezdimenzijskimi števili. Ker geometrijske mere posode in mešala nismo spreminjali, lahko karakteristiko moči zapišemo z odvisnostjo med Newtonovim in Reynoldsovim številom. V brezdimenzijskih številih nastopajo tudi snovne lastnosti zmesi melasa-voda v odvisnosti od temperature in sestave zmesi oziroma suhe snovi v melasi. Parametra K in n za določitev viskoznosti sta odvisna od sestave zmesi, se pravi od vsebnosti suhe snovi zmesi melasa-voda in od temperature. Ker delovno zmes lahko spremljamo in tudi določimo v procesu s stopnjo suhe snovi in temperaturo se bomo pri analizi tudi na njihju sklicevali. Ustrezna parametra K in n vzamemo iz tabele 1.

Razlike med karakteristiko moči radialnega Rushtonovega mešala brez ovir in z ovirami skoraj ni. Pri Rushtonovem mešalu so razlike v moči pri 1380 obratov na minuto minimalne z ozirom na velik razpon snovskih lastnosti in znaša največ 10 %. Maksimalna potrebna moč za mešanje je 1736 W. Razlika moči pri mešanju z ovirami in brez ni omembe vredna. Podobno velja za Rushtonovo mešalo s 300 obrati na minuto s tem, da je največja moč potrebna za mešanje samo 32 W.

Razlika v moči aksialnega mešala, zaradi snovnih lastnosti je pri 1380 obrati na minuto skoraj štiri kratna, kar je lepo razvidno iz modelov od 17 do 24. Tako je največja moč 743 W pri modelu 20, katerega zmes ima 80% suhe snovi pri 20 °C brez ovir posode. Najmanjšo moč 198 W rabimo za mešanje pri modelu 17, pri zmesi s 70% suhe snovi in 40 °C brez ovir posode. Pri zmesi z 80% suhe snovi rabim pri 20 °C enkrat večjo moč kot pa pri zmesi z enako vsebnostjo suhe snovi pri temperaturi 40 °C, kar je razvidno iz modelov 19 in 20 ter iz modelov 23 in 24.



Slika 5: Primerjava krivulje moči radialnega in aksialnega mešala z ovirami

6.2 Opis tokovnih razmer v homogenizatorju

Tokovno polje za Rushtonovo mešalo s 1380 obrati na minuto (modeli 1 do 8) je izrazite radialne oblike. Strižne napetosti na steni so izrazite le v območju nekaj širin mešala. To ne

velja za modela 4 in 8, saj pri teh modelih ni opaziti izrazitih strižnih napetosti na steni posode.

Hitrostno tokovno polje za aksialno mešalo s 1380 obrati na minuto je blage aksialne oblike (modeli 17 do 24). Maksimalne strižne napetosti so skoncentrirane na mešalo razen pri modelu 21 kjer so skoncentrirane na ozko območje dna posode. Strižne napetosti na steni posode niso poudarjene.



Slika 6 : Absolutne vrednosti hitrosti za model 1 in 17



Slika 7 : Izoploskve maksimalnih strižnih napetosti v tekočini za model 1 in model 21

7. Sklep

Določanje moči mešanja v primeru nenewtonskih tekočin je dandanes še vedno področje intenzivnih raziskav. V pričujočem delu smo za izbran realni primer uporabili računalniško določanje moči in sicer na podlagi pristopa z Računalniško dinamiko tekočin. Kot najugodnejša varianta se izkaže aksialno mešalo. V obravnavanem primeru so rezultati pričakovani, saj je mešalna posoda relativno visoka, tako da aksialno-radialno tokovno polje izboljša mešanje v vertikalni smeri, obenem pa predstavlja tudi manjšo porabo moči kot v primeru Rushtonovega mešala. Dobljeni rezultati s programskim paketom CFX ProMixus in njihova primerjava z izvedenimi meritvami kažejo, da je takšen pristop zelo obetaven in predstavlja pomemben prispevek k metodam ovrednotenja tokovnih razmer v mešalnih posodah. Pri tem pa je potrebno poudariti, da je izredno pomemben faktor uspeha takšnih metod ne samo ustrezna aproksimativna metoda pač pa tudi kvaliteta podatkov o snovnih lastnostih tekočin, ki v sistemu nastopajo.

Literatura

- [1] CFX - Pro Mixus, AEA Technology (2001).
- [2] S. Torsten; *Viskositäts-und Oberflächenspannungsverhalten von reinen und tehnschen Saccharoselösungen*, Dissertation, Technischen Universität Berlin, Berlin (2000)
- [3] L. Škerget; *Mehanika tekočin*. Univerza v Mariboru, Maribor (1994)
- [4] M. Opara ; *Poraba moči in časi mešanja pri homogeniziranju nenewtonskih tekočin*. Disertacija, Ljubljana (1973)
- [5] W. Vincent; Joseph B; *Mixing -Theory and Practice*. San Diego (1966)
- [6] S. Bašič; M. Hriberšek; *Vpliv namestitve Rushtonovih mešal na tokovne tazmere v mešalnih posodah*, v. L. Škerget, ur., *Kuhljevi dnevi 01*, Portorož, 2001, str185-192
- [7] E. Hugot; *Handbook of cane sugar engineering*, Elsevier Pub. Co.; ISBN: 0444408967

Različne definicije strižnega in torzijskega središča

Marjan Stanek¹ Goran Turk²

On Different Definitions of Shear Center and Center of Twist

POVZETEK

Strižno središče običajno definiramo kot točko prečnega prereza, v kateri mora delovati prečna obtežba, da se linijski nosilec ne zvije okrog vzdolžne osi. Torzijsko središče pa definiramo kot točko prečnega prereza, okoli katerega se pri enakomerni torziji zasuka prečni prerez. Zanimivo je, da se kljub dokaj jasni mehanski definiciji strižnega in torzijskega središča v literaturi pojavlja več matematičnih definicij, ki ne dajo istega rezultata. V članku so opisane različne definicije strižnega in torzijskega središča, na primeru nesimetričnega prečnega prereza pa so prikazane tudi razlike, ki nastanejo pri uporabi različnih definicij.

SUMMARY

The shear center is usually defined as the point where the transversal force acts so that only flexure, i.e. bending without torsion, occurs. If the beam is subjected to pure torsion, the center of twist is defined as a point of cross-section about which the cross-section rotates. It is interesting that although the mechanical definition is very clear, different mathematical definitions yield different results. In the article we present different definitions of shear center and center of twist. In numerical example we describe the numerical differences resulting from various definitions.

1 UVOD

Pri mehanski analizi ravnih linijskih nosilcev najpogosteje ločeno obravnavamo upogib z osno silo in torzijo. Ta dva pojava lahko obravnavamo ločeno le, če so izpolnjeni določeni pogoji: obtežba mora biti taka, da povzroči le upogibanje z osnim raztezanjem oziroma krčenjem ali le zvijanje okrog vzdolžne osi. Strižno in torzijsko središče sta pomembni točki, s katerimi lahko opredelimo čisti upogib brez torzije oziroma enakomerno torzijo brez upogibanja.

¹ izr. prof. dr. Marjan Stanek†, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za mehaniko, Jamova 2, Ljubljana

² izr. prof. dr. Goran Turk, univ. dipl. ing. gradb., Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za mehaniko, Jamova 2, Ljubljana

2 Strižno in torzijsko središče

V literaturi obstajajo različne definicije strižnega in torzijskega središča. V tem razdelku prikažemo dve različni definiciji strižnega in dve različni definiciji torzijskega središča ter enačbe za račun njihovih koordinat.

2.1 Strižno središče

Definicija strižnega središča je zasnovana na definiciji upogiba z osno silo oziroma upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi. Oglejmo si dve definiciji upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi.[2]

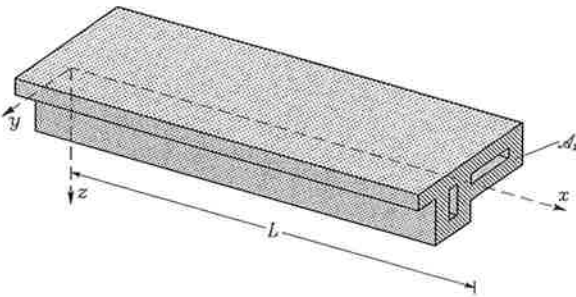
Prva definicija upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi

Saint-Venantov problem predstavlja reševanje osnovnih enačb linearne teorije elastičnosti (kinematičnih enačb, ravnotežnih enačb in enačb Hookovega zakona) za primer linijskega nosilca s konstantnim prečnim prerezom \mathcal{A}_x (slika 1), če predpostavimo, da je

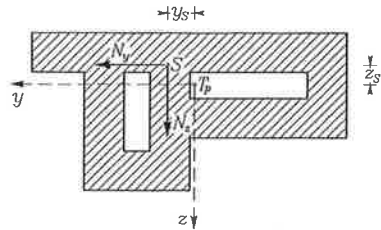
$$\sigma_{yz} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0. \quad (1)$$

Pri tem predpostavimo, da je nosilec obtežen le v krajnih prerezih $x = 0$ in $x = L$.

Rešitev enačb pokaže, da se odvod $\partial\omega_x/\partial x$ zasuka elementa prečnega prereza okrog vzdolžne osi od točke do točke prečnega prereza spreminja. Izraz $\partial\omega_x/\partial x$ predstavlja relativni zasuk dveh enako ležečih elementov sosednjih prečnih prerezov.



Slika 1: Obravnavamo linijski nosilec s konstantnim prečnim prerezom \mathcal{A}_x



Slika 2: Če prečni sili N_y in N_z delujeta v strižnem središču S , nastopa upogib brez zvijanja

Upogib brez zasuka lahko definiramo z zahtevo, da je povprečna vrednost $\partial\omega_x/\partial x$ po celem prečnem prerezu enaka nič

$$\int_{\mathcal{A}_x} \frac{\partial\omega_x}{\partial x} dA_x = 0. \quad (2)$$

Strižno središče S je točka prečnega prereza, skozi katero potekata prečni sili N_y in N_z , da v nosilcu nastane deformacijsko stanje, ki ustreza enačbi (2) (slika 2).

Pri taki definiciji upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi je lega strižnega središča odvisna od Poissonovega količnika ν . Izraza za koordinati y_S, z_S strižnega središča, ki ustreza pogoju (2), podaja več avtorjev. Oglejmo si tri primere.

Goodier podaja izraz za koordinato z_S ob predpostavki (2) [3]

$$\begin{aligned} y_S &= -\frac{1}{2(1+\nu)I_y} \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial \chi_y}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) y^3 - \left(2 + \frac{\nu}{2}\right) z^2 y \right) dA_x, \\ z_S &= -\frac{1}{2(1+\nu)I_z} \int_{\mathcal{A}_x} \left(z \frac{\partial \chi_z}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_z}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) z^3 - \left(2 + \frac{\nu}{2}\right) y^2 z \right) dA_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Strižni funkciji χ_y in χ_z določimo z integracijo parcialnih diferencialnih enačb [4]

$$\frac{\partial^2 \chi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_y}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

z ustreznimi robnimi pogoji

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_y}{\partial \eta} &= -\left(\frac{\nu}{2} z^2 + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) y^2\right) e_{\eta z} - (2 + \nu) y z e_{\eta y}, \\ \frac{\partial \chi_z}{\partial \eta} &= -\left(\frac{\nu}{2} y^2 + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) z^2\right) e_{\eta y} - (2 + \nu) y z e_{\eta z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Z upoštevanjem iste predpostavke dobi Sokolnikoff [5] naslednja izraza za y_S in z_S

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{2(1+\nu)(I_y I_z - I_{yz}^2)} (I_z S_2 - I_{yz} S_1), \\ z_S &= \frac{1}{2(1+\nu)(I_y I_z - I_{yz}^2)} (I_{yz} S_2 - I_y S_1), \end{aligned} \quad (6)$$

kjer oznaki S_1 in S_2 pomenita

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\mathcal{A}_x} \left[y \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + (1 + \nu) y^2 z - \nu z^3 \right] dA_x, \\ S_2 &= \int_{\mathcal{A}_x} \left[y \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - (1 + \nu) y z^2 + \nu y^3 \right] dA_x. \end{aligned}$$

Funkciji φ_1 in φ_2 sta harmonični strižni funkciji, ki ju izračunamo iz enačb

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

ob upoštevanju robnih pogojev

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = [(1 + \nu) y^2 - \nu z^2] e_{\eta y}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = [(1 + \nu) z^2 - \nu y^2] e_{\eta z}. \quad (8)$$

Sokolnikoff [5] pokaže, da enačbi strižnega središča po Goodieru in Sokolnikoffu določata isto točko. V diplomu Polone Vončina (mentor D. Jurišić), sta podana naslednja izraza za račun koordinat strižnega središča: [9]

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{2(1+\nu)I_y} \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{1+\nu}{2} y z^2 - \frac{1-\nu}{2} y^3 \right) dA_x, \\ z_S &= -\frac{1}{2(1+\nu)I_z} \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{1+\nu}{2} y^2 z + \frac{1-\nu}{2} z^3 \right) dA_x. \end{aligned} \quad (9)$$

Funkciji Φ_y in Φ_z sta harmonični strižni funkciji, ki ju izračunamo iz enačb

$$\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

ob upoštevanju robnih pogojev

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_y}{\partial \eta} &= (1 + \nu) y z e_{\eta y} + \left(\frac{1 + \nu}{2} z^2 + \frac{1 - \nu}{2} y^2 \right) e_{\eta z}, \\ \frac{\partial \Phi_z}{\partial \eta} &= \left(\frac{1 + \nu}{2} y^2 + \frac{1 - \nu}{2} z^2 \right) e_{\eta y} + (1 + \nu) y z e_{\eta z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Druga definicija upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi

Trefftz je predlagal definicijo upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi na osnovi deformacijske energije.[6] Če konzolni nosilec obtežimo v prostem krajišču s torzijskim momentom M , se to krajišče zasučje za kot α . Deformacijska energija v nosilcu je enaka delu W_1 , ki ga opravi moment na zasuku

$$W_1 = \frac{1}{2} M \alpha.$$

V primeru, če v prostem krajišču deluje le sila F_z , ki povzroči pomik w_L prostega krajišča konzole, je deformacijska energija W_2 enaka

$$W_2 = \frac{1}{2} F_z w_L.$$

Če delujeta moment M in sila F_z istočasno, deformacijska energija v nosilcu v splošnem ni enaka vsoti W_1 in W_2 . [8] Vzemimo, da na nosilec deluje najprej le moment M , ki opravi delo W_1 . Nato naj deluje še sila F_z , moment M pa je konstanten. Sila F_z opravi delo W_2 , moment M pa opravi še dodatno delo, ki ustreza kotu zasuka zaradi sile F_z . Trefftz definira upogib brez zvijanja okrog vzdolžne osi s pogojem, da je deformacijska energija zaradi omenjenega dodatnega dela, enaka nič.

V primeru, če prečni sili N_y in N_z delujeta v strižnem središču nastopa v nosilcu "čisti" upogib. Nato dodamo še moment M . V tem primeru je deformacijska energija nosilca enaka vsoti energij zaradi torzije in zaradi "čistega" upogiba. Vrstni red nanašanja F_z in M ni pomemben. Izraz za koordinati strižnega središča na osnovi tako definirane upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi lahko zapišemo z izbočitveno funkcijo Φ enakomerne torzije

$$y_S = -\frac{I_z I_{\Phi y} + I_{yz} I_{\Phi z}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad z_S = \frac{I_y I_{\Phi z} + I_{yz} I_{\Phi y}}{I_y I_z - I_{yz}^2}. \quad (12)$$

Pri tem je

$$I_{\Phi y} = \int_{\mathcal{A}_x} z \Phi dA_x, \quad I_{\Phi z} = \int_{\mathcal{A}_x} y \Phi dA_x, \quad (13)$$

Izbočitveno funkcijo Φ izračunamo iz enačbe [1]

$$\mathcal{A}_x : \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (14)$$

ob upoštevanju robnega pogoja

$$\mathcal{C}_x : \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z - \frac{1}{A_x} \int_{\mathcal{C}_x} \Phi dz \right) e_{\eta y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y + \frac{1}{A_x} \int_{\mathcal{C}_x} \Phi dy \right) e_{\eta z} = 0. \quad (15)$$

V tem primeru je strižno središče neodvisno od Poissonovega koeficienta ν , namesto enačbe (2) pa velja [8]

$$\int_{\mathcal{A}_{\text{cel}}} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \bar{\varphi} dA_x = 0.$$

S $\bar{\varphi}$ označimo razširjeno napetostno funkcijo φ , ki vključuje tudi odprtine v prečnem prerezu

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi & \text{na } \mathcal{A}_x, \\ \bar{\varphi} &= \varphi_{ni} & \text{na } \mathcal{A}_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Z A_{cel} je označeno območje prečnega prereza \mathcal{A}_x vključno z odprtinami.

2.2 Torzijsko središče

Tudi za torzijsko središče obstajajo različne definicije. Oglejmo si dve.

Prva definicija torzijskega središča

Torzijsko središče $C(y_C, z_C)$ je točka, okoli katere se prečni prerez v primeru enakomerne torzije zasučje. Z izbočitveno funkcijo Φ enakomerne torzije izračunamo koordinati y_C in z_C takole:[1]

$$y_C = \frac{1}{A_x} \int_{\mathcal{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dA_x, \quad z_C = -\frac{1}{A_x} \int_{\mathcal{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dA_x. \quad (16)$$

Druga definicija torzijskega središča

V rešitvi za Saint-Venantov problem upoštevamo, da se nosilec le zasučje okrog vzdolžne osi. Nato vzamemo, da veljajo za prečni prerez $x = 0$, kjer je konzola vpeta, naslednji pogoji:[7]

a) Pomika u_y in u_z sta enaka nič:

$$u_y = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{za } x = 0.$$

b) Če v rešitvi za Saint-Venantov problem upoštevamo, da se nosilec le zasučje okrog vzdolžne osi, lahko vzdolžni pomik u_x izrazimo s tremi parametri c , p in q . Če nato zahtevamo, da ima povprečna vrednost kvadrata vzdolžnega pomika u_x minimalno vrednost glede na parametre c , p in q

$$\int_{\mathcal{A}_x} (u_x(c, p, q))^2 dA_x = \text{minimum} \quad \text{za } x = 0,$$

kar lahko napišemo z enačbami

$$\int_{\mathcal{A}_x} u_x dA_x = 0, \quad \int_{\mathcal{A}_x} y u_x dA_x = 0, \quad \int_{\mathcal{A}_x} z u_x dA_x = 0, \quad (17)$$

dobimo izraz za torzijsko središče, ki sovпада s strižnim središčem, definiranim po Trefftzu (enačbi (12)), kar pokaže Veubeke [8]

$$y_C \equiv y_S = -\frac{I_z I_{\Phi y} + I_{yz} I_{\Phi z}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad z_C \equiv z_S = \frac{I_y I_{\Phi z} + I_{yz} I_{\Phi y}}{I_y I_z - I_{yz}^2}. \quad (18)$$

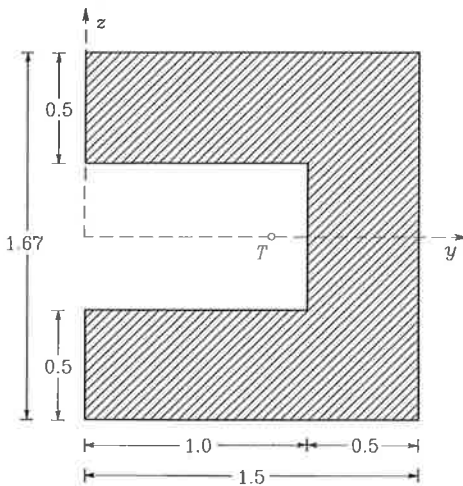
3 Računski primer

Obravnavajmo prečni prerez z eno simetrijsko osjo. Dimenzije prečnega prereza so podane na sliki 3, vrednost Poissonovega koeficienta pa je $\nu = 0.3$. Izračunajmo strižno in torzijsko središče prečnega prereza po različnih definicijah. Za reševanje parcialnih diferencialnih enačb uporabimo diferenčno metodo.

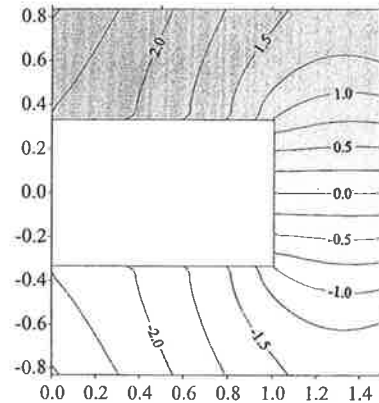
Parcialne diferencialne enačbe (4), (7) in (10) z robnimi pogoji (5), (8) in (11) za določitev strižnih funkcij so primeri Neumanove naloge, ki nimajo enolične rešitve. Zato moramo enačbam dodati še en pogoj, na primer:

$$\chi(T_0) = 0 \quad \text{ali} \quad \int_{\mathcal{A}_x} \chi dA_x = 0.$$

Z dodatnim pogojem dobimo eno enačbo več, kot imamo neznank. Rang matrike pa je enak številu neznank, kar pomeni, da imamo eno rešitev, do katere lahko pridemo z razcepom po singularnih vrednostih (SVD - singular value decomposition). Kljub temu, da z dodatnim pogojem strižni funkciji umetno pripišemo neko vrednost, to na končni rezultat ne vpliva, saj za račun strižnega središča v vseh primerih potrebujemo le odvode strižnih funkcij. Strižno funkcijo χ_y prikazujemo na sliki 4.



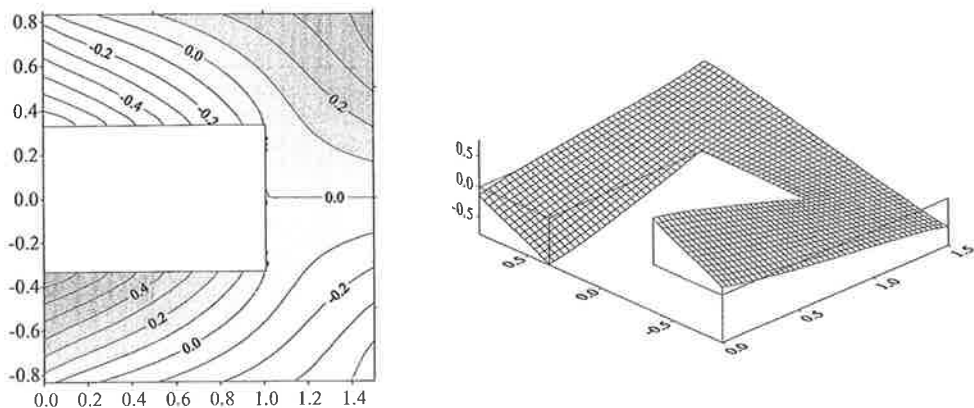
Slika 3 Prečni prerez z eno simetrijsko osjo



Slika 4 Strižna funkcija χ_y po enačbah (4) in (5)

Parcialna diferencialna enačba za določitev izbočitvene funkcije (14) in (15) ni običajen Neumanov problem, saj v robnem pogoju nastopa tudi integral neznane funkcije $\Phi(y, z)$. Zato ima problem enolično rešitev in ne potrebujemo dodatnega pogoja kot v primerih strižnih funkcij.

Porazdelitev izbočitvene funkcije prikazjemo na sliki 5.



Slika 5 Izbočitvena funkcija Φ

Ko določimo strižne funkcije oziroma izbočitveno funkcijo, lahko z integracijo po enačbah (3), (6), (9) oziroma (12) izračunamo koordinate strižnega središča. Zaradi simetrije prereza strižno središče leži na osi y , to pomeni, da je $z_s = 0$. V preglednici 1 prikazujemo vrednosti koordinate y_s strižnega središča po različnih definicijah.

Preglednica 1

Definicija	Goodier (3)	Sokolnikoff (6)	Vončina (9)	Trefftz (12)
y_s	0.771	0.771	0.771	0.003

Vidimo lahko, da prve tri definicije vodijo do povsem enakih vrednosti strižnega središča, medtem ko četrta definicija, ki sicer ni odvisna od ν , da drugačen rezultat. Na naslednji preglednici podajamo vrednosti strižnega središča y_s v odvisnosti od Poissonovega koeficienta ν , določene po enačbi (6).

Preglednica 2

ν	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_s	0.7685	0.7694	0.7701	0.7707	0.7713	0.7717

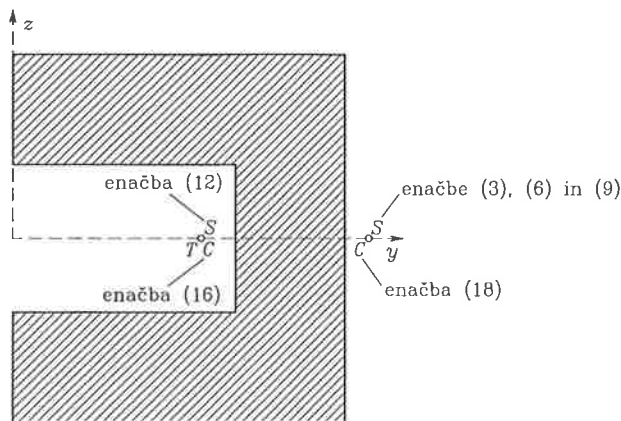
Razlike v koordinatah strižnega središča zaradi različnih vrednosti ν so torej izredno majhne.

Pri določitvi torzijskega središča imamo dve možnosti. Lahko uporabimo enačbo (16) ali pa enačbo (18), ki je enaka enačbi za strižno središče (12).

Preglednica 3

Definicija	enačba (16)	enačba (18)
y_s	0.767	0.003

Prva definicija torzijskega središča (16) da vrednost, ki je podobna vrednosti koordinate strižnega središča po prvih treh definicijah ((3),(6),(9)), medtem ko druga definicija torzijskega središča (18) da isto vrednost kot četrta definicija strižnega središča (12). Na sliki 6 prikazujemo lego strižnega in torzijskega središča po različnih definicijah.



Slika 6 Lega strižnega in torzijskega središča

4 Zaključki

V članku povzemamo različne definicije strižnega in torzijskega središča po klasičnih učbenikih o teoriji nosilcev. Že na prvi pogled se definicije zelo razlikujejo.

Da bi ugotovili, kako pomembne so različne definicije, smo za preprosti nesimetrični prečni prerez določili koordinate strižnega in torzijskega središča po različnih definicijah. Zanimivo je, da večina definicij vodi do približno enakega rezultata (približno 0.77), medtem ko ena definicija strižnega središča pripelje do povsem drugačnega rezultata (približno 0). Vzroka za te razlike ne poznamo.

Literatura

- [1] A. Carpinteri, Structural Mechanics—A Unified Approach, E & FN SPON, London, 1997.
- [2] Y.C. Fung, An Introduction to the Theory of Aeroelasticity, John Wiley & Sons, New York, 1955.
- [3] J.N. Goodier, A Theorem on the Shearing Stress in Beams with Applications to Multicellular Sections, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 11, No. 3, 272-280, July, 1944.
- [4] A.E.H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York, fourth edition, 1944.
- [5] I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- [6] E. Trefftz, Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 15, No. 4, 220-225, 1935.
- [7] A. Weinstein, The Center of Shear and the Center of Twist, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. V, No. 1, 97-99, 1947.
- [8] F. de Veubeke, A Course in Elasticity, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [9] P. Vončina, Napetosti in pomiki upogibnega nosilca po Saint-Venantu, diplomska naloga, FAGG, Ljubljana, 1983.

Paralelno reševanje fizikalnih problemov

Primož Rus, Boris Štok in Nikolaj Mole¹

Parallel Computing of Physical Problems

POVZETEK

V okviru reševanja fizikalnih problemov z metodo končnih elementov je v delu predstavljena strategija paralelnega reševanja sistema linearnih enačb z metodo podstrukturiranja. Osnovna ideja metode je v razdelitvi obravnavanega območja na končno število podobmočij, ki jih je mogoče računsko obravnavati paralelno, sama izbira takšne strategije pa temelji na dejstvu, da v našem okolju prevladujejo osebni računalniki in delovne postaje. S povezavo teh v lokalna računalniška omrežja pridobimo možnost računanja obsežnejših problemov. Ker so posamezni deli takšnega heterogenega distribuiranega računalniškega sistema različno zmogljivi tako po računski moči kot po delovnem spominu, je potrebno za učinkovito numerično reševanje paraleliziranih problemov ustrezno porazdeliti delo med posamezne računalnike. Z namenom doseganja optimalne učinkovitosti smo razvili algoritem, ki med inkrementalnim izvajanjem osnovne neustaljene ali nelinearne analize problema iterativno prilagaja količino dela, ki ga mora izvesti posamezen procesor.

ABSTRACT

In the present work, the parallelization of the solution of a system of linear equations, in the framework of finite element computational analyses, is dealt with. As the substructuring method is used the basic idea refers to a way of decomposing the considered spatial domain into a set of finite disconnected subdomains, each assigned to an individual processor and computationally analysed in parallel. Considering the fact that in our environment the most frequently used computers are Personal Computers and Work Stations, which can be connected into a computer network, the choice of the method is based on its suitability to be implemented on such a heterogeneous distributed system, taking the need of proper load balance into account. An algorithm for efficient load balance for structural meshes has been developed.

1 Uvod

Z razvojem računalniške tehnologije postajajo tehniški problemi, ki jih je mogoče na osnovi ustreznega numeričnega modela računalniško simulirati, vse obsežnejši, tako v smislu fizikalne kompleksnosti kot velikosti. Ob uporabi metod diskretne analize to pomeni, da je potrebno reševati vse večje sisteme linearnih enačb. Razvoj računalnikov v smislu paralelnih sistemov in povezovanje posameznih računalnikov v računalniška omrežja nudi možnost reševanja za en sam računalnik preobsežnih problemov. Paralelno reševanje na več računalnikih pa mora biti, še posebej v primeru obravnave nelinearnih in neustaljenih problemov s številnimi ponovitvami izračuna, ne samo mogoče, ampak tudi učinkovito. Razvoj računsko učinkovitih

¹mag. Primož Rus, prof.dr. Boris Štok in dr. Nikolaj Mole,
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, Ljubljana

algoritmov reševanja v paralelnem načinu ter optimalna delitev računskega dela med posameznimi enotami paralelnega računalniškega sistema, še posebej tedaj, ko gre za heterogeno sestavo le-tega, sta tako ključna za časovno optimalno reševanje.

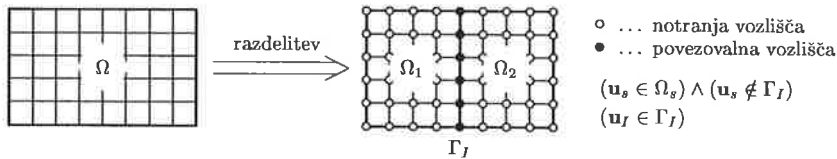
Razdelitev obravnavanega območja na podobmočja je ena od najbolj razširjenih tehnik razvoja paralelnih programov, ki dani problem rešujejo z metodo končnih elementov. V delu je predstavljena *metoda podstrukturiranja (FES)*, pri kateri vodilno enačbo $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ preuredimo na podstrukture.

Če želimo, da bo celotni v paralelnem načinu obravnavani problem rešen učinkovito, moramo obravnavano območje razdeliti tako, da dosežemo čimboljše *uravnoveženost obremenjenosti procesorjev* in *minimalno medprocesorsko komunikacijo*. Ker zaradi narave problema ni mogoče vnaprej natančno določiti razmerja hitrosti računalnikov, ki so v danem heterogenem distribuiranem sistemu, smo razvili strategijo, ki med inkrementalnimi izračuni osnovne analize samodejno iteracijsko prilagaja obremenjenost procesorjev.

Izmenjava podatkov med posameznimi enotami našega distribuiranega sistema poteka preko protokola "Parallel Virtual Machine (PVM)" [3], katerega prednost je v tem, da deluje na večini računalniških sistemov, da je omogočeno enostavno vključevanje novih zmogljivosti in da je v prosti distribuciji.

2 Metoda podstrukturiranja

Osnovna ideja metode podstrukturiranja [1, 2] je v razdelitvi obravnavanega območja Ω , ki je popisano z množico končnih elementov, na N_s podobmočij Ω_s (slika 1).



Slika 1: Razdelitev obravnavanega območja na dve podobmočji

V smislu razdelitve območja na podobmočja preuredimo splošno enačbo problema $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ tako, da najprej zapišemo enačbe za primarne spremenljivke, ki so vezane na *notranja vozlišča* posameznega podobmočja, na koncu pa za t.i. *povezovalna vozlišča*, ki so skupna dvema ali več podobmočjem in definirajo ograjo Γ_I ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{1I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{2I} \\ \mathbf{K}_{I1} & \mathbf{K}_{I2} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_I \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Matrika \mathbf{K} ima značilno obliko puščice. Vsaka podmatrika \mathbf{K}_{ss} predstavlja *lokalno togostno matriko* podobmočja Ω_s . Podmatrke \mathbf{K}_{sI} povezujejo podobmočja Ω_s z ograjo Γ_I in jih zato imenujemo *povezovalne togostne matrike*. Podmatrika \mathbf{K}_{II} je *togostna matrika povezovalnih vozlišč* Γ_I . Skladno s to delitvijo razdelimo vektor primarnih spremenljivk \mathbf{u} na podvektorje \mathbf{u}_s , ki so povezani s podobmočji Ω_s , in podvektor \mathbf{u}_I , ki popisuje primarne spremenljivke v povezovalnih vozliščih. Podobno je razdeljen obremenitveni vektor \mathbf{f} na podvektorje \mathbf{f}_s , ki se navezujejo na podobmočja Ω_s , in podvektor \mathbf{f}_I , ki predstavlja obremenitev na ograji Γ_I .

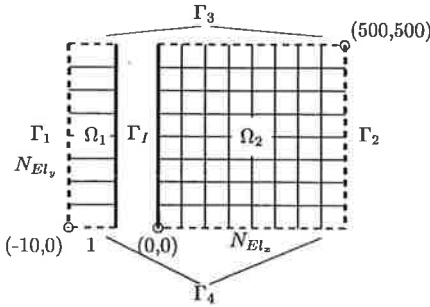
Algoritem za paralelno reševanje splošne enačbe problema (1) ob upoštevanju robnih pogojev za primarne ($\mathbf{u} = \mathbf{u}^r$ na Γ_u) in sekundarne spremenljivke ($\mathbf{f} = \mathbf{f}^n$ na Γ_f) je ponazorjen v tabeli 1.

Tabela 1: Algoritem metode podstrukturiranja (FES)

	PROGRAM VODJA		PROGRAM DELAVEC	
t_p	Beri podatke iz vhodne datoteke			
	Pošlji podatke DELAVCEM Sestavi <ul style="list-style-type: none"> • togostne matrice $\mathbf{K}_{II}^{mm}, \mathbf{K}_{II}^{mr}, \mathbf{K}_{II}^{rr}$ • obremenitveni vektor \mathbf{f}_I^m 	⇒	Sprejmi podatke od VODJE Sestavi <ul style="list-style-type: none"> • togostne matrice $\mathbf{K}_{ss}^{mm}, \mathbf{K}_{ss}^{mr}, \mathbf{K}_{ss}^{rr}, \mathbf{K}_{sI}^{mm}, \mathbf{K}_{sI}^{mr}, \mathbf{K}_{sI}^{rm}, \mathbf{K}_{sI}^{rr}$ • obremenitveni vektor \mathbf{f}_s^m Izračunaj <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{K}_s^* = (\mathbf{K}_{sI}^{mm})^T (\mathbf{K}_{ss}^{mm})^{-1} \mathbf{K}_{sI}^{mm}$ • $\mathbf{f}_s^* = (\mathbf{K}_{sI}^{mr})^T - (\mathbf{K}_{sI}^{mm})^T (\mathbf{K}_{ss}^{mm})^{-1} \times (\mathbf{f}_s^m - \mathbf{K}_{ss}^{mr} \mathbf{u}_s^r - \mathbf{K}_{sI}^{rr} \mathbf{u}_I^r)$ 	⇐
t_{SLS}	Sprejmi podatke od DELAVCEV <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{K}_s^*, \mathbf{f}_s^*$ 	⇐		⇐
	Izračunaj <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{K}_{II}^* = \mathbf{K}_{II}^{mm} - \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{K}_s^*$ • $\mathbf{f}_I^* = \mathbf{f}_I^m - \mathbf{K}_{II}^{mr} \mathbf{u}_I^r - \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{f}_s^*$ 			
	Izračunaj <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{u}_I^m = (\mathbf{K}_{II}^*)^{-1} \mathbf{f}_I^*$ 			
	Pošlji podatke DELAVCEM <ul style="list-style-type: none"> • \mathbf{u}_I^m 	⇒	Sprejmi podatke od VODJE <ul style="list-style-type: none"> • \mathbf{u}_I^m 	
	Izračunaj <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{f}_I^* = \mathbf{K}_{II}^{rr} \mathbf{u}_I^r + (\mathbf{K}_{II}^{mr})^T \mathbf{u}_I^m$ 		Izračunaj <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{u}_s^m = (\mathbf{K}_{ss}^{mm})^{-1} (\mathbf{f}_s^m - \mathbf{K}_{ss}^{mr} \mathbf{u}_s^r - \mathbf{K}_{sI}^{mr} \mathbf{u}_I^r - \mathbf{K}_{sI}^{mm} \mathbf{u}_I^m)$ • $\mathbf{f}_s^r = \mathbf{K}_{ss}^{rr} \mathbf{u}_s^r + \mathbf{K}_{sI}^{rr} \mathbf{u}_I^r + (\mathbf{K}_{ss}^{mr})^T \mathbf{u}_s^m + \mathbf{K}_{sI}^{rm} \mathbf{u}_I^m$ • $\mathbf{f}_s^* = (\mathbf{K}_{sI}^{rr})^T \mathbf{u}_s^r + (\mathbf{K}_{sI}^{rm})^T \mathbf{u}_s^m$ 	
	Sprejmi podatke od DELAVCEV <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{u}_s^m, \mathbf{f}_s^r, \mathbf{f}_s^*$ 	⇐	Pošlji podatke VODJI <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{u}_s^m, \mathbf{f}_s^r, \mathbf{f}_s^*$ 	
Sestavi <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}_I^m \cup \left(\bigcup_{s=1}^{N_s} \mathbf{u}_s^m \right)$ • $\mathbf{f}^r = \left(\mathbf{f}_I^* + \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{f}_s^r \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{N_s} \mathbf{f}_s^* \right)$ 				

3 Uravnoteženje obremenjenosti procesorjev

V primeru uporabe heterogenih distribuiranih sistemov želimo z uravnoteženo obremenjenostjo procesorjev doseči, da bodo vsi v približno enakem času opravili dodeljeno jim delo. Prvi pogoj za doseg tega cilja je poznavanje hitrosti posameznih členov v heterogenem paralelnem računalniškem sistemu. Da bi ugotovili, kako hitri so posamezni računalniki, smo izvedli teste za različne primere gostote mreže končnih elementov in različno število povezovalnih vozlišč. Testi so bili izvedeni na primeru ustaljenega prevoda toplote. Obravnavano območje je bilo razdeljeno na dva dela, kot je prikazano na sliki 2.



$$\begin{aligned}
 T &= 0 \text{ K}; & (x, y) \in \Gamma_1 \\
 T &= 373 \text{ K}; & (x, y) \in \Gamma_2 \\
 k &= 50 \text{ W/(mK)} \\
 q_n &= -k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ W/m}^2; \\
 & & (x, y) \in (\Gamma_3 \cup \Gamma_4)
 \end{aligned}$$

Slika 2: Razdelitev testnega območja Ω na podobmočji Ω_1 in Ω_2 ter robni pogoji

Obraunavan heterogen distribuirani sistem je sestavljen iz računalnika vodje in štirih delavcev, ki so bili med seboj povezani z dostopovnim vozlom. Njihove lastnosti so prikazane v tabeli 2.

Tabela 2: Lastnosti posameznih členov distribuiranega sistema

oznaka	vrsta	procesor	RAM [Mb]	OS	tip programa
M	WS, HP B2000	PA-8000 400 MHz	1024	HP-UX 10.0	vodja
S1	PC	P III 800 MHz	256	WIN 2000 SP2	delavec
S2	PC	P III 800 MHz	256	WIN 2000 SP2	delavec
S3	PC	P III 800 MHz	256	WIN 2000 SP2	delavec
S4	PC	P III 600 MHz	128	WIN 2000 SP2	delavec

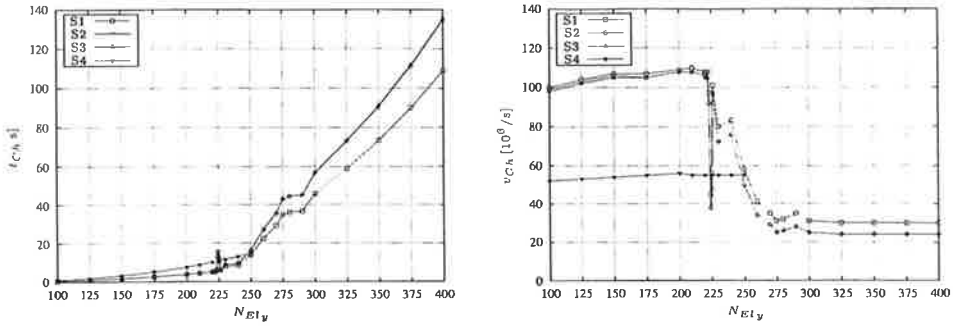
računalniki povezani preko: Intel InBusiness 8-Port 10/100 Fast Hub

Ker se glavnina časa v programu *delavec* porabi za razcep Choleskega matrike $\mathbf{K}_{ss}^{mm} = \mathbf{V}_s^T \mathbf{V}_s$, ki je simetrična pasovna matrika, shranjena v "sky-line" obliki, smo z analizo le-tega določili hitrosti posameznega računalnika. Število operacij s plavajočo vejico v tem primeru lahko približno ocenimo z enačbo

$$NO_{Ch} = \frac{N_e (\overline{N_{BW}} + 1)^2}{2}, \quad (2)$$

kjer je N_e število enačb oziroma prostostnih stopenj problema in $\overline{N_{BW}}$ povprečna širina pasu matrike \mathbf{K}_{ss}^{mm} . V diagramih na sliki 3 je za primer konstantnega števila elementov v smeri x ($N_{El_x} = 100$) prikazan čas razcepa Choleskega t_{Ch} in hitrost izračuna v_{Ch} , ki je definirana kot razmerje med številom operacij NO_{Ch} in časom razcepa t_{Ch} . Iz diagramov razberemo, da hitrost računalnikov S1, S2 in S3 pri določenem številu povezovalnih vozlišč N_I pade. Z analizo programa razcepa Choleskega smo ugotovili, da je upočasnitev izračuna posledica zgradbe računalnika oziroma v različni hitrosti komunikacije med procesorjem, predpomnilniki in delovnim pomnilnikom (RAM), saj hitrost toka podatkov pada z oddaljenostjo nivoja spomina od procesorja. Torej, ko količina podatkov, ki jih procesor potrebuje za obdelavo, preseže količino razpoložljivega pomnilnika na določenem nivoju, mora le-te dobiti iz počasnejšega, kar se odraža v hitrosti izračuna.

Želja po heterogenem paralelnem računalniškem sistemu, ki bi ga bilo možno nadgrajevati, in dejstvo, da je praktično nemogoče izvesti paleto različnih testov z različnimi kombinacijami možnih primerov in na tej osnovi napovedati točen čas za izvajanje določenega problema na posameznem računalniku, sta nas vodila do iterativne strategije za uravnoteženo obremenjevanje procesorjev in s tem učinkovito reševanje zadanega problema. V skladu s



Slika 3: Čas t_{Ch} in hitrost v_{Ch} pri konstantnem številu elementov v smeri x ($N_{Elx} = 100$)

tem bo za primere, pri katerih numerična analiza poteka inkrementalno (ali iterativno), ob upoštevanju realiziranih časov izračuna v predhodnem računskem koraku, po potrebi izvedena nova, v smislu uravnotežene obremenjenosti procesorjev ustreznejša razdelitev območja. Osnovna predpostavka tako zasnovanega iteracijskega algoritma je, da se hitrost izračuna, t.j. število operacij na časovno enoto, med dvema iteracijama ne spremeni. Glede na predhodne ugotovitve (slika 3) pa ta predpostavka drži le, če se število povezovalnih vozlišč med iteracijami ohranja.

Ob predpostavljeni isti hitrosti izračuna $NO_s^{(i-1)}/t_s^{(i-1)} = NO_s^{(i)}/t_s^{(i)}$ je na osnovi realiziranih časov izračuna $t_s^{(i-1)}$ na posameznih računalnikih v predhodni iteraciji možno opredeliti nove deleže s ciljem istočasnosti izračuna ($t_1^{(i)} = t_2^{(i)} = \dots = t_{N_s}^{(i)}$) v novi iteraciji

$$NO_s^{(i-1)}, t_s^{(i-1)} \implies d_s^{(i)} = \frac{NO_s^{(i)}}{N_s} = \frac{NO_s^{(i-1)}}{t_s^{(i-1)}} \left(\sum_{k=1}^{N_s} \frac{NO_k^{(i-1)}}{t_k^{(i-1)}} \right)^{-1}, \quad (3)$$

$(s = 1, 2, \dots, N_s)$

pri čemer število operacij $NO_s^{(i)}$ izračunamo z enačbo (2) ob upoštevanju, da je $N_e = N_{e_s}^{(i)}$, $\overline{N_{BW}} = \overline{N_{BW}_s}^{(i)}$ in N_s število podobmočij. Ob tem mora biti izpolnjena tudi omejitvena enačba

$$\sum_{s=1}^{N_s} N_{e_s}^{(i)} = \sum_{s=1}^{N_s} N_{e_s}^{(i-1)} = N_e = \text{konst.} \quad (4)$$

V primeru strukturiranega deljenja kolobarja (slika 4) na krožne izseke, pri katerem se število povezovalnih vozlišč med iteracijskim uravnoteževanjem ne spreminja, dejansko velja

$$N_{I_s}^{(i)} = N_{I_s}^{(i-1)} = \text{konst.} \quad (5)$$

Ker ob tem velja še $\overline{N_{BW}_s} = N_{I_s}$, lahko zapišemo

$$\overline{N_{BW}_s}^{(i)} = \overline{N_{BW}_s}^{(i-1)} = \text{konst.}, \quad (6)$$

tako da je

$$NO_s^{(i)} = c_s^{(i)} N_{e_s}^{(i)}, \quad c_s^{(i)} = \frac{(\overline{N_{BW}_s}^{(i)} + 1)^2}{2} = c_s^{(i-1)} = \text{konst.} \quad (7)$$

Upoštevanje odvisnosti (3) in (7) ter omejitveno enačbo (4) zapišemo sistem $(N_s - 1)$ enačb

$$c_s^{(i)} N_{e_s}^{(i)} = d_s^{(i)} \left[\sum_{k=1}^{N_s-1} c_k^{(i)} N_{e_k}^{(i)} + c_{N_s}^{(i)} \left(N_e - \sum_{k=1}^{N_s-1} N_{e_k}^{(i)} \right) \right], \quad s = 1, 2, \dots, N_s - 1, \quad (8)$$

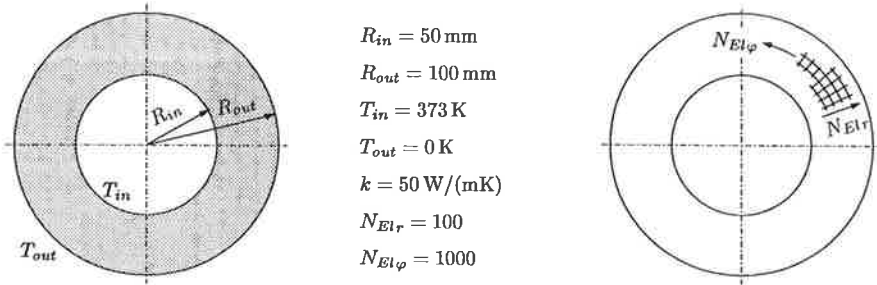
katerega rešitev je vektor $N_{e_s}^{(i)}$. V primeru strukturiranega mreženja kolobarja je območje opredeljeno s številom elementov v smeri r (N_{Elr}) in v smeri φ ($N_{El\varphi}$), tako da je ob upoštevanju robnih pogojev v obravnavanem primeru število enačb za posamezno podobmočje

$$N_{e_s}^{(i)} = (N_{Elr} + 1)(N_{El\varphi_s}^{(i)} - 1) - 2(N_{El\varphi_s}^{(i)} - 1). \quad (9)$$

Število elementov v smeri φ v posameznem podobmočju je tako enako

$$N_{El\varphi_s}^{(i)} = \frac{N_{e_s}^{(i)}}{(N_{Elr} - 1)} + 1. \quad (10)$$

V primeru, da leži število $N_{El\varphi_s}^{(i)}$, izračunano po (10), v \mathcal{R} , je potrebno vrednosti $N_{El\varphi_s}^{(i)}$ preslikati v \mathcal{N} z upoštevanjem omejitvene enačbe $N_{El\varphi} = \sum_{s=1}^{N_s} N_{El\varphi_s}^{(i)}$.



Slika 4: Geometrija kolobarja, robni pogoji in diskretizacija območja

V tabeli 3 so prikazani rezultati strukturiranega deljenja območja na štiri podobmočja v primeru analize neustaljenega prevoda toplote v kolobarju, prikazanem na sliki 4. Čas t_{SI} vključuje čas sestavljanja lokalnih togostnih matrik in lokalnega vektorja obremenitev ter čas izračuna matrike \mathbf{K}_s^* in vektorja \mathbf{f}_s^* za posamezno podobmočje v programu *delavec*. Iz

Tabela 3: Strukturirano deljenje območja kolobarja na štiri podobmočja

#	i = 0		i = 1		i = 2		i = 3		i = 4	
	$N_{El\varphi}$	t_{SI}	$N_{El\varphi}$	t_{SI}	$N_{El\varphi}$	t_{SI}	$N_{El\varphi}$	t_{SI}	$N_{El\varphi}$	t_{SI}
$\Omega_1, S2$	250	4,11	275	4,52	275	4,51	276	4,53	276	4,53
$\Omega_2, S4$	250	7,02	161	4,55	160	4,52	160	4,53	160	4,53
$\Omega_3, S1$	250	3,91	289	4,52	289	4,52	289	4,52	289	4,52
$\Omega_4, S3$	250	4,12	275	4,53	276	4,54	275	4,52	275	4,52
$t_{SI,max}$		7,02		4,55		4,54		4,53		4,53

tabele je razvidno, da je bila začetna delitev območja izvedena na štiri enaka podobmočja, kar pa zaradi heterogenosti distribuiranega sistema ni zagotavljalo časovno uravnoteženega izračuna. Razdelitev območja v smislu uravnoteženja obremenitve je dosežena ob uporabi opisanega iteracijskega algoritma po treh prerezporeditvah.

4 Učinkovitost paralelnega algoritma

Učinkovitost paralelnega algoritma, zasnovanega na metodi podstrukturiranja, smo preverili za primer ustaljenega prevoda toplote v kolobarju, prikazanem na sliki 4. Strukturirano deljenje območja na 2, 3 in 4 krožne izseke smo izvedli v smislu uravnotežene obremenjenosti procesorjev. Računsko analizo smo izvedli na heterogenem distribuiranem računalniškem sistemu, katerega lastnosti so prikazane v tabeli 2.

Analizo računске učinkovitosti je mogoče podati na osnovi rezultatov, ki so za obravnavane primere podani v tabeli 4. Število podobmočij N_s je enako številu procesorjev N_p , kateri računalnik pripada kateremu podobmočju je podano v stolpcu Ω_s . V tabeli je še N_e število enačb, N_{PF} število elementov v togostni matriki, N_I število povezovalnih vozlišč in $\overline{N_{BW}}$ povprečni pas togostne matrike v danem podobmočju. Čas t_{SI} je skupni čas sestavljanja lokalnih togostnih matrik in lokalnega vektorja obremenitve ter čas izračuna matrike \mathbf{K}_s^* in vektorja \mathbf{f}_s^* za posamezno podobmočje v programu *delavec*. Čas t_p je merjen v programu *vodja* in predstavlja čas, ki je potreben za pripravo podatkov za prenos in za sam prenos podatkov od *vodje* k *delavcem*, ter čas, ki ga porabi posamezni *delavec* za sprejem podatkov, izvajanje zadane mu naloge, čas za pripravo rezultatov za prenos in za sam prenos rezultatov nazaj v program *vodja*. Čas t_{SLS} je celotni čas, potreben za tvorjenje sistema linearnih enačb in njegovo rešitev, ter je merjen v programu *vodja* (glej tudi tabelo 1).

Tabela 4: Pohitritev v odvisnosti od N_p za primer kolobarja

N_p	Ω_s	N_e	N_{PF}	N_I	$\overline{N_{BW}}$	t_{SI} [s]	\tilde{S}_{SI}	t_p [s]	\tilde{S}_p	t_{SLS} [s]	\tilde{S}
1	referenčni					16,02		30,59		43,35	
2	$\Omega_1, S2$	48.312	9.660.688	202	200	8,00	2,00	15,01	2,00	28,06	1,55
	$\Omega_2, S1$	50.490	10.096.266	202	200	8,01		15,57			
3	$\Omega_1, S2$	32.472	6.492.848	202	200	5,36	2,98	9,60	3,08	24,40	1,78
	$\Omega_2, S1$	34.056	6.809.632	202	200	5,37		10,13			
	$\Omega_3, S3$	32.175	6.433.451	202	200	5,36		10,03			
4	$\Omega_1, S2$	27.225	5.443.501	202	200	4,53	3,54	9,37	3,36	24,20	1,79
	$\Omega_2, S4$	15.741	3.144.648	202	200	4,53		7,11			
	$\Omega_3, S1$	28.512	5.700.888	202	200	4,52		8,76			
	$\Omega_4, S3$	27.126	5.423.702	202	200	4,52		8,22			

Za pohitritev $S = t(n, 1)/t(n, N_p)$ [4] je potrebno poznati referenčni čas izračuna paralelnega programa na enem procesorju $t(n, 1)$. V primeru paralelizacije z metodo FES na ta način ne moremo določiti referenčnega časa izračuna, zato definiramo novo mero pohitritve na heterogenih distribuiranih sistemih

$$\tilde{S} = \frac{t_{ref}(n)}{t(n, N_p)} = \frac{t^{sek}(n, N_p = 2) + 2t^{par}(n, N_p = 2)}{t(n, N_p)}, \quad (11)$$

kjer opredeljuje n velikost problema in t_{ref} referenčni čas, ki je sestavljen iz časa t^{sek} , porabljenega za izračun sekvenčne kode, ter časa t^{par} , porabljenega za izračun paralelne kode paralelnega programa. Referenčni čas t_{ref} izračunamo na osnovi poznanih časovnih karakteristik $t^{sek}(n, N_p = 2)$ in $t^{par}(n, N_p = 2)$, dobljenih z uporabo paralelnega programa na dveh procesorjih, ter ustrezni preslikavi na en procesor. Čas $t(n, N_p)$ v enačbi (11) je čas izračuna na N_p procesorjih, pri čemer za naš primer velja

$$\tilde{S} = \frac{(t_{SLS}(N_p = 2) - t_p(N_p = 2)) + 2t_p(N_p = 2)}{t_{SLS}(N_p)}. \quad (12)$$

Pohitritev \tilde{S}_{SI} predstavlja oceno kvalitete paralelnega dela programa, s pohitritvijo \tilde{S}_p pa ocenimo vpliv priprave podatkov za prenos in vpliv prenosa med *programom vodjo* in *programi delavci*. Pohitritvi \tilde{S}_{SI} in \tilde{S}_p sledita enačbi (11) ob predpostavki, da je čas izračuna sekvenčne kode na dveh računalnikih $t^{sek}(n, N_p = 2)$ zanemarljiv in sicer

$$\tilde{S}_{SI} = \frac{2 t_{SI}(N_p = 2)}{t_{SI}(N_p)} \quad \text{ter} \quad \tilde{S}_p = \frac{2 t_p(N_p = 2)}{t_p(N_p)}. \quad (13)$$

Iz tabele 4 razberemo, da je celotna pohitritev \tilde{S} manjša kot sta pohitritvi \tilde{S}_{SI} in \tilde{S}_p , kar pomeni, da lahko s povečanjem stopnje paralelizacije programa pričakujemo tudi ugodnejše pohitritve.

Iz prikazanih rezultatov lahko sklepamo, da je v primeru reševanja fizikalnih problemov z metodami numeričnega modeliranja, ki rezultirajo v velikih sistemih linearnih enačb, smotrno uporabiti strategijo paralelnega reševanja, saj se čas izračuna skrajša, kar še posebej velja za velike primere, ki so preobsežni za izvajanje v hitrem spominu posameznega računalnika. Seveda bo uspešnost paralelizacije predvsem odvisna od umne razdelitve obravnavanega območja na ustrezna podobmočja.

5 Zaključki

V delu predstavljamo strategijo paralelnega reševanja na heterogenih distribuiranih računalniških sistemih, s katero je omogočena numerična analiza obsežnejših fizikalnih problemov z metodo končnih elementov. Uporabljena je metoda podstrukturiranja, ki temelji na razdelitvi obravnavanega območja na podobmočja. V primeru heterogenih distribuiranih sistemov se pojavijo problemi, ki pomembno vplivajo na učinkovitost izračuna, zato smo razvili algoritem, ki med iterativnim izračunom prilagaja količino dela, ki ga mora izvesti posamezni računalnik. Z analizo učinkovitosti paralelne strategije smo pokazali, da v primeru obravnave kompleksnih problemov z MKE na heterogenem distribuiranem sistemu ne moremo govoriti o klasični pohitritvi kot v primeru večprocesorskih računalnikov, ampak je smotrno vpeljati modificirano mero učinkovitosti paralelnih programov. Razlog tiči v dejstvu, da na heterogenem distribuiranem sistemu ne moremo zagotoviti enakomerne porazdeljenosti števila operacij, enakega tipa operacij in zanemarljivih komunikacijskih časov, nenazadnje pa tudi ne moremo določiti referenčnega časa izračuna paralelnega programa na enem procesorju. Dopolnjena mera pohitritve paralelnega programa temelji na referenčnem času, ki bi bil na enem računalniku potreben za izračun paralelne kode, paralelizirane na dveh računalnikih.

Literatura

- [1] I. S. Doltsinis in S. Nolting, *Generation and Decomposition of Finite Element Models for Parallel Computations*, Computing System in Engineering, **2**(5/6), str. 427–449, 1991.
- [2] C. Farhat, E. Wilson in G. Powell, *Solution of Finite Element Systems on Concurrent Processing Computers*, Engineering with Computers, **2**(3), str. 157–165, 1987.
- [3] A. Geist, A. Beguelin, J. Dongarra, W. Jiang, R. Manchek in V. Sunderam, *PVM: Parallel Virtual Machine, A Users' Guide and Tutorial for Networked Parallel Computing*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1994.
- [4] E. Minty, R. Davey, A. Simpson in H. D., *Decomposing the Potentially Parallel*, Edinburgh Parallel Computing Centre, The University of Edinburgh, 2000.
URL: <http://www.epcc.ed.ac.uk/epcc-tec/documents/coursemat.html>

**DOLOČITEV ROBNIH POGOJEV ZA REŠEVANJE PROBLEMA
GLOBALNEGA OPTIMALNEGA VODENJA
REDUNDANTNE ODPRTE KINEMATIČNE VERIGE**

Karl Gotlih

**DETERMINATION OF BOUNDARY CONDITIONS
FOR SOLVING GLOBAL OPTIMAL CONTROL PROBLEM
OF A REDUNDANT OPEN CHAIN MECHANISM**

POVZETEK:

Redundantni mehanizmi s strukturo odprte kinematične verige, ki se uporabljajo kot mehanizmi robotov, imajo velike prednosti. Te so oblika delovnega prostora in izogibanje singularnostim. Izogibanje singularnostim je največja težava pri neredundantnih robotskih mehanizmih in močno omejuje uporaben delovni prostor. Največja težava pri redundantnih mehanizmih je vodenje vseh prostostnih stopenj simultano, da bi dosegli želeno gibanje prijemala.

V delu je uporabljen znan algoritem globalnega optimalnega vodenja za različne robne pogoje. Sam globalni optimalni algoritem temelji na minimizaciji funkcionala. Funkcional je dan kot integral kvadratne forme. Rešitev dobimo z uporabo variacijskega računa z uporabo Lagrangejevih multiplikatorjev. Rešitev je nelinearna diferencialna vektorska enačba drugega reda z dvema naravnima robnima pogojema. Ta dva pogoja natančno opisujeta transformacijo hitrosti iz delovnega prostora v prostor notranjih koordinat. Položaj mehanizma za začetno in končno točko naloge v delovnem prostoru je nepoznan in ga je potrebno določiti na poseben način.

Doc.dr. Karl Gotlih

Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, SI-2000 Maribor, E-mail:
gotlih@uni-mb.si, Tel: 02-220-7961, Fax: 02-220-7990;

SUMMARY:

Redundant open chain mechanisms used as robot manipulators have some great benefits. These benefits are the shape of the task space (working area) and singularity avoidance. Singularity avoidance is the biggest problem in the non-redundant case of robot mechanisms and it strongly restricts the useful task space. The greatest disadvantage of redundant robot mechanisms, the redundant open chain mechanism, is the control of all DOF (degrees of freedom) simultaneously to get the required movement of the end-effector.

In this work a known global optimal control algorithm is tested on different boundary conditions. The global optimal control algorithm is based on minimisation of a functional. The functional has an integral quadratic form. The solution is obtained with the use of calculus of variations and Lagrange's multipliers. The solution is a second order non-linear differential vector equation with two natural boundary conditions included. These two conditions exactly determine the velocity transformation from task space to configuration space. The position of the mechanism at the starting and the ending point of the task in the task space are unknown and must be determined in a special way.

1. PROBLEM GLOBALNEGA OPTIMALNEGA VODENJA

Izbira funkcionala je najpomembnejša naloga pri razvoju algoritma globalnega optimalnega vodenja. Želja je najti algoritem vodenja, za katerega bo imel funkcional relativni ekstrem. V pričujočem delu je funkcional določen glede na posebne zahteve. Omogočal naj bi za gibanje mehanizma najmanjše možno spremembo indeksa gibljivosti po Yoshikavi [1]. Integralska oblika funkcionala je:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} (\det(\underline{J} \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{J}^T)) \right)^2 dt \quad (1)$$

Integral (1) je možno transformirati v obliko, ki je znatno enostavnejša in lažja za obravnavo [2]:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (\vec{\varphi}^T \cdot \underline{U} \cdot \vec{\varphi}) dt \quad (2)$$

V (1) in (2) so: \underline{J} Jacobijeva matrika mehanizma, $\vec{\varphi}$ vektor prvih časovnih odvodov posplošenih koordinat mehanizma, \underline{H} je masna matrika mehanizma in \underline{U} simetrična pozitivno definitna matrika. Standardna oblika postopka minimizacije se zapiše:

Minimiziraj funkcional:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (\vec{\varphi}^T \underline{U} \vec{\varphi}) dt \quad (3)$$

pod pogoji:

$$\underline{G}_k(\vec{\varphi}, \dot{\vec{\varphi}}, t) = 0 \quad (4)$$

Pogoji (4) vsebujejo matematični model mehanizma in kinematične enačbe, ki jim mehanizem – redundantna kinematična veriga – mora slediti. Pogoje (4) v primeru geometrijske zveze med delovnim prostorom \vec{x} in prostorom notranjih koordinat $\vec{\varphi}$ lahko pišemo:

$$\underline{G}_k(\vec{\varphi}, t) = \vec{x} - f(\vec{\varphi}) = \vec{0} \quad (5)$$

Da bi dobili globalno optimalno vodenje, je bila rešitev izračunana s pomočjo variacijskega računa. Rešitev omenjenega problema je robnovrednostna naloga z začetnimi in končnimi robnimi pogoji v obliki:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \vec{\varphi}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{\vec{\varphi}}} \right) = \vec{0} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{\vec{\varphi}}(t_f)} = \vec{0} \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{\vec{\varphi}}(t_0)} = \vec{0} \quad (6c)$$

V (6a,b,c) je spremenljivka g dana z uporabo Lagrangejevih multiplikatorjev $\vec{\mu}$ v obliki:

$$\underline{g} = \bar{\varphi}^T \cdot \underline{U} \cdot \bar{\varphi} + \underline{G}_k^T \bar{\mu} \quad (7)$$

Izraz (6a) napelje na nelinearno diferencialno vektorsko enačbo v obliki:

$$\bar{\ddot{\varphi}} = \underline{J}_u^+ (\bar{\ddot{x}} - \underline{J} \bar{\ddot{\varphi}}) + (\underline{I} - \underline{J}_u^+ \underline{J}) \underline{U}^{-1} [-\underline{U} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\bar{\varphi}^T \underline{U})}{\partial \bar{\varphi}}] \bar{\varphi} \quad (8)$$

Izrazi (6b) in (6c) so naravni robni pogoji robnovrednostne naloge [3].

2. NARAVNI ROBNI POGOJI

Izraza (6b) in (6c) kažeta, da imamo na voljo minimalno število robnih pogojev. Doseči je treba, da v začetku gibanja (t_0) in na koncu gibanja (t_f) položaj prijema ustreza kinematičnim pogojem (5). Ker pa vrednosti notranjih koordinat v teh dveh položajih niso podane, morajo pogoji (6b) in (6c) zadovoljiti pogoj (5). Pogoj (5) predstavlja hiper-ravnino v n-dimenzionalnem prostoru notranjih koordinat. S postopkom, ki je razložen v [2] in [4], se pogoji (6b) in (6c) transformirajo v obliko:

$$\bar{\varphi}(t_b) = \underline{J}_u^+ \cdot \bar{x}(t_b) \quad z \quad t_b = t_0 \text{ ali } t_f \quad (9)$$

Izraz \underline{J}_u^+ v (8) in (9) je določen z:

$$\underline{J}_u^+ = \underline{U}^{-1} \cdot \underline{J}^T \cdot (\underline{J} \cdot \underline{U}^{-1} \cdot \underline{J}^T)^{-1} \quad (10)$$

Enačba (9) opisuje naravne robne pogoje za čas t_0 in t_f . V tem izrazu je določena samo transformacija med hitrostjo v delovnem prostoru \bar{x} in hitrostjo v prostoru notranjih koordinat $\bar{\varphi}$. Informacij o položaju robota v teh dveh posebnih točkah ne poznamo. Izbira začetnega in končnega položaja mehanizma je zato poljubna in mora zadostiti le pogoju (5). V primeru redundantnih odprtih kinematičnih verig je možno izrabiti gibanje mehanizma v ničnem prostoru. Za neskončno število položajev mehanizma, ki vsi zadovoljujejo pogoj (5), je treba z ustreznim kriterijem izbrati najugodnejši položaj za začetno točko naloge in končno točko naloge. Primerna izbira teh dveh položajev bistveno vpliva na numerično izpeljavo algoritma vodenja, reševanje robnovrednostnega problema. Izbira začetnega in končnega položaja mehanizma mora biti torej izvedena zelo previdno.

V delu primerjamo dva kriterija za določanje začetnega in končnega položaja mehanizma. Prvi kriterij uporablja največjo vrednost uteženega indeksa gibljivosti po Yoshikavi:

$$w = \det(\underline{J} \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \underline{J}^T) \quad (11)$$

Drug kriterij je izbran po Chiu [5]. Avtor ga je poimenoval kompatibilnostni indeks c in je definiran:

$$\begin{aligned} c_1 &= w_1 [\bar{u}_1^T (\underline{J} \cdot \underline{J}^T) \bar{u}_1] \\ c_2 &= w_2 [\bar{u}_2^T (\underline{J} \cdot \underline{J}^T)^{-1} \bar{u}_2] \\ c &= c_1 + c_2 \end{aligned} \quad (12)$$

kjer sta vrednosti w_1 in w_2 utežna faktorja. \bar{u}_1 in \bar{u}_2 sta smeri, ki nas v delovnem prostoru zanimata. Prvi izraz c_1 v enačbi (12) je odgovoren za transformacijo sil, drug izraz v (12) c_2 je odgovoren za transformacijo hitrosti. Problem določanja najboljšega položaja se v tem primeru lahko prevede na iskanje položaja mehanizma z največjo vrednostjo indeksa c .

3. PRIMER

Da bi prikazali algoritem globalnega optimalnega vodenja z obema omenjenima kriterijema za določanje začetne in končne lege mehanizma (11-12), uporabimo kot primer pogosto uporabljen 2D mehanizem. Mehanizem je prikazan na sliki 1. Njegovi podatki so dani v [2]. Izbrana naloga v delovnem prostoru je dana parametrično z vektorsko enačbo po komponentah:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} -R \cos(2 \cdot \pi \cdot s) + C \\ -R \sin(2 \cdot \pi \cdot s) \end{bmatrix} \quad s \in [0,1] \quad (13)$$

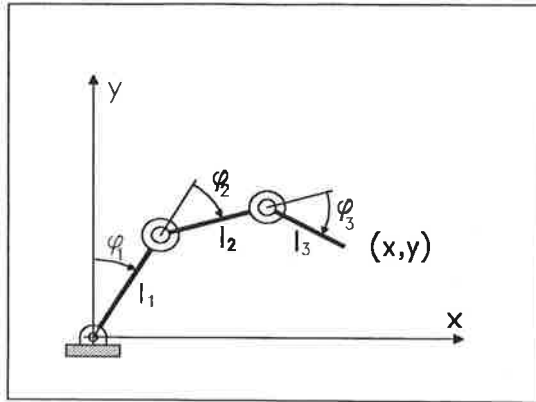
V enačbi (13) je $R = 1$, $C = 6$. Dolžine ročic mehanizma so:

$$l_1 = 3,0$$

$$l_2 = 2,5$$

$$l_3 = 2,0$$

dolžinskih enot.



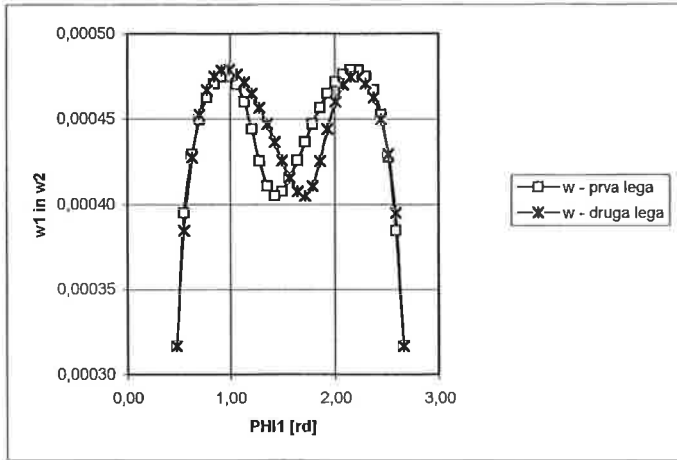
Slika 1: 2D redundantni mehanizem

Da bi dobili začetni in končni položaj mehanizma, je bil razvit postopek iskanja ekstrema. Tabela 1 in sliki 2 in 3 kažejo rezultat postopka iskanja ekstrema za začetno točko in končno točko v prostoru naloge.

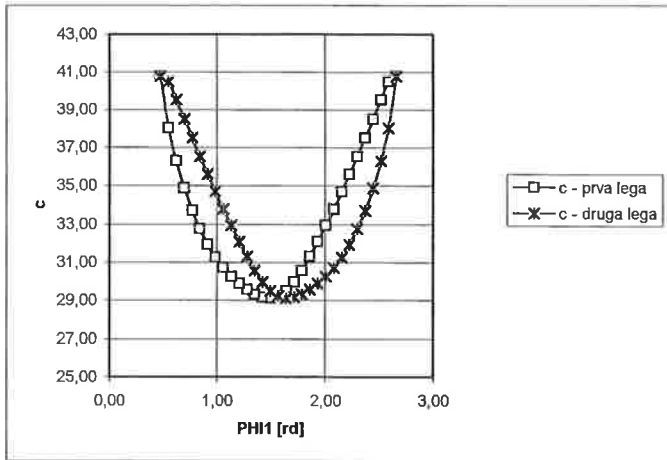
Tabela 1: Najboljši položaj mehanizma za točko $T_0(5,0)$ in vrednosti w in c

φ_1 [rd]	φ_2 [rd]	φ_3 [rd]	w	c
$0,2155 \cdot 10^1$	$-0,1893 \cdot 10^1$	$0,1699 \cdot 10^1$	$0,4789 \cdot 10^{-3}$	-
$0,9870 \cdot 10^0$	$0,1893 \cdot 10^1$	$0,4584 \cdot 10^1$	$0,4789 \cdot 10^{-3}$	-
$0,2665 \cdot 10^1$	$-0,1729 \cdot 10^1$	$0,0000 \cdot 10^0$	-	$0,4078 \cdot 10^2$
$0,2665 \cdot 10^1$	$-0,1729 \cdot 10^1$	$0,6280 \cdot 10^1$	-	$0,4078 \cdot 10^2$

Najugodnejši položaj za ti dve točki in največje vrednosti kriterijev po enačbah (11) in (12) so:



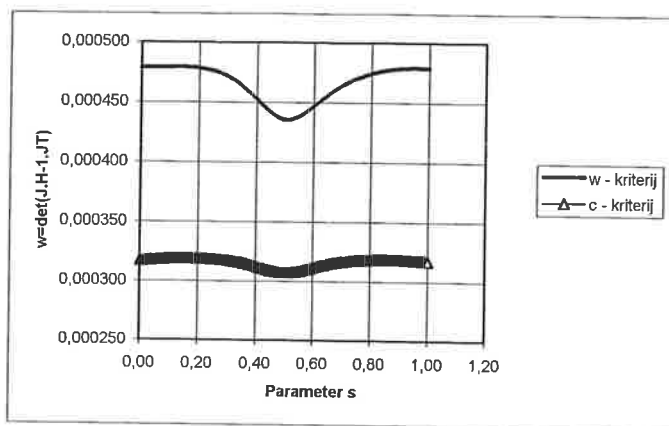
Slika 2: Postopek iskanja ekstrema za spremenljivko w v točki $T_0(5,0)$



Slika 3: Iskanje ekstrema po spremenljivki c v točki $T_0(5,0)$, $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = (0,-1)^T$

4. REZULTATI

Primerjava »najboljših« položajev redundantnega mehanizma iz tabele 1, slike 2 in slike 3 je izvedena s pomočjo numerične simulacije. Robnovrednostni problem (8) z robnimi pogoji (9) je bil rešen s pomočjo numerične programske knjižnice NAG v Fortranu s podprogramom D02HAF [6]. Primerjava krmilnih algoritmov na osnovi uteženega indeksa gibljivosti po Yoshikavi za celotno nalogo in izbrano začetno in končno lego mehanizma je prikazana na sliki 4.



Slika 4: Uteženi indeks gibljivosti po Yoshikavi v odvisnosti od izbire začetne in končne lege mehanizma v točki (5,0) glede na kriterija w in c s slike 2 in 3.

Primerjava krivulj na sliki 4 kaže, da vodenje, ki se je začelo v položaju, izračunanem iz (11), daje večje vrednosti uteženega indeksa gibljivosti. To je za vodenje mehanizma ugodno, kajti veliki indeksi gibljivosti zagotavljajo gibanje mehanizma v stran od singularnih leg, torej v stran od točk v delovnem prostoru, ki bi lahko povzročile padec algoritma.

UPORABLJENA LITERATURA:

- [1] Yoshikava, T., Manipulability of Robotic Mechanisms, The International Journal of Robotic Research, Vol. 4, No. 2, 1985, pp 3-9.
- [2] Gotlih, K., Troch, I., Jezernik, K., Global optimal control of redundant robot, Robotica, Vol. 14, 1996, pp 31-140.
- [3] Kirk, D., E., Optimal Control Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs New Jersey, 1970.
- [4] Kazerounian, K., Wang, Z., Global versus Local Optimization in Redundancy Resolution of Robotic Manipulators, The International Journal of Robotics Research, Vol. 7, No. 5, 1988, pp 3-12.
- [5] Chiu, S., L., Task Compatibility of Manipulator Postures, The International Journal of Robotic Research, Vol. 7, No. 5, 1988, pp 13-21.
- [6] NAG, Nag FORTRAN Library Reference Manual - Mark 17, Numerical Algorithms Group Limited, Oxford, 1998.

OPTIMIRANJE POGONSKEGA MEHANIZMA STISKALNICE ZA GLOBOKI VLEK

Bojan VOHAR¹, Karl GOTLIH², Jože FLAŠKER³

OPTIMIZATION OF LINK-DRIVE MECHANISM FOR DEEP DRAWING MECHANICAL PRESS

POVZETEK

V prispevku se ukvarjamo z optimiranjem večz gibnega pogona paha stiskalnice za globoki vlek pločevine. Sedanja konstrukcija ne zadovoljuje vsem postavljenim zahtevam, zato jo želimo čimbolj prilagoditi idealnim zahtevam tehnološkega postopka. Osnovni namen je prilagoditi sedanjo hitrostno karakteristiko paha zahtevam delovanja v določenem območju. Zato je potrebno izdelati analizo pogona in njegov matematični model ter izvesti optimizacijo. Uporabljena metoda za nelinearno optimizacijo je sekvenčno kvadratno programiranje. Ker je proces časovno odvisen, optimizacijskega modela ni moč uporabiti direktno, ampak je potrebno primer prevesti v časovno neodvisno obliko, ki je primerna za reševanje s standardnim optimizacijskim postopkom. Cilj optimiranja je določiti takšne dimenzije pogonskega mehanizma, ki bi čimbolj zadostile zahtevam. V zaključku je prikazana primerjava doseženih rezultatov optimirane konstrukcije večz gibnega pogona z začetnim stanjem pred optimizacijo.

ABSTRACT

This paper deals with an example of a link-drive for a deep drawing mechanical press. The existing design has proved unsatisfactory and does not meet all the demands and constraints, which are ideal for this metal-forming process. Optimization of the drive is therefore necessary. The intention of this optimization is to achieve the required velocity characteristics in a defined area of movement. Firstly, the drive is analysed and a mathematical model is made. The whole process is time-dependent, so it cannot be used directly in the optimization algorithm. This mathematical model has to be first transformed into a form suitable for the standard non-linear optimization procedure and then optimization is carried out. We use the method of sequential quadratic programming. The final objective of the optimization process is to find such dimensions of link-drive members that the given requirements are satisfied in the best possible manner. In conclusion, results are described and compared with the initial design.

¹ Bojan VOHAR, univ. dipl. inž. str., Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, (bojan.vohar@uni-mb.si)

² dr. Karl GOTLIH, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, (gotlih@uni-mb.si)

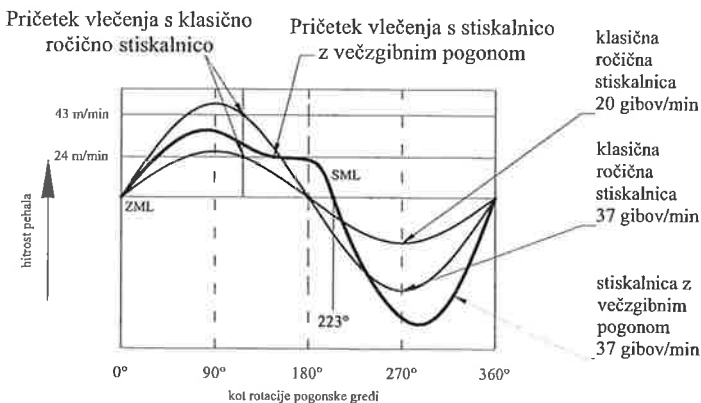
³ dr. Jože FLAŠKER, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, (joze.flasker@uni-mb.si)

1. UVOD

Globoko vlečenje je kompleksen preoblikovalni proces. Največji vpliv na potek vlečenja ima oblika končnega izdelka in posledično oblika orodja ter vrsta materiala, ki ga obdelujemo. Poleg teh in drugih tehnoloških dejavnikov na kvaliteto in pravilen potek vlečenja zelo vpliva hitrost vlečenja pločevine. Odvisna je od stiskalnice, na kateri se vlečenje izvaja. Vsak material ima neko optimalno vlečno hitrost. Maksimalna hitrost vlečenja pločevine je tako ena izmed pomembnejših omejitev pri izbiri stiskalnice.

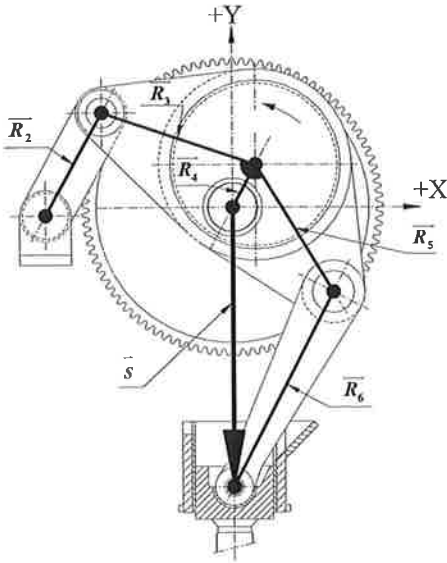
Želje po večji produktivnosti preoblikovalnih strojev narekujejo iskanje novih konstrukcijskih rešitev in izboljšav. Najlažji način povečanja produktivnosti stiskalnic za globoki vlek je povečanje njihove obratovalne hitrosti, torej vrtilne hitrosti pogonskega motorja. Vendar hitrosti ni moč poljubno povečevati, ker prevelike vlečne hitrosti povzročajo trganje materiala in druge težave [3], saj material nima na voljo dovolj časa za zadostno tečenje. Hidravlične stiskalnice te probleme zaradi učinkovite regulacije zlahka odpravijo, njihova slabost pa je višja cena v primerjavi z mehanskimi stiskalnicami ter drago in zahtevno vzdrževanje. Pri mehanskih stiskalnicah je to težje, ker je pot paha omejena z vnaprej določenim gibom, ki ga določa kinematika in dimenzije pogonskega mehanizma.

Ena takšnih izboljšav v mehanskih stiskalnicah je večzgbni pogon paha [3]. Takšen pogon je zaradi svojih karakteristik primernejši od klasičnega ročičnega pogona, saj je njegovo delovanje mogoče veliko bolje prilagajati zahtevam posameznih preoblikovalnih procesov. Imenujemo ga tudi mehanizem s pospešenim povratnim gibom (angl.: link drives, quick return drives). Njegova glavna lastnost je, da je hitrost paha med delovnim gibom tudi za polovico nižja od običajnih ročičnih stiskalnic pri enaki obratovalni hitrosti ter zelo pospešena pri vračanju v izhodni položaj. Takšna hitrostna karakteristika je zelo podobna hidravličnim stiskalnicam, le da celoten cikel poteka pri mehanskih stiskalnicah občutno hitreje. Ker je maksimalna hitrost vlečenja pločevine hkrati omejitev obratovalne hitrosti stroja, lahko stiskalnice s takšnim pogonom obratujejo veliko hitreje kot običajne, saj te hitrosti ne bodo prekoračile. Tak primer nam prikazuje slika 1 [3], kjer je prikazana razlika v obratovalni hitrosti med klasično ročično stiskalnico ter stiskalnico z večzgbnim pogonom. Razvidno je, da lahko v konkretnem primeru na sliki stiskalnica z večzgbnim pogonom obratuje s 37 gibi na minuto, medtem ko običajna ročična stiskalnica obratuje z največ 20 gibi na minuto (da ne pride do prekoračitve vlečne hitrosti); torej dosežemo z večzgbnim pogonom za 85 % večjo produktivnost (na minuto 17 kosov več).



Slika 1: Primerjava enega cikla klasične stiskalnice in stiskalnice z večzgbnim pogonom; [3]

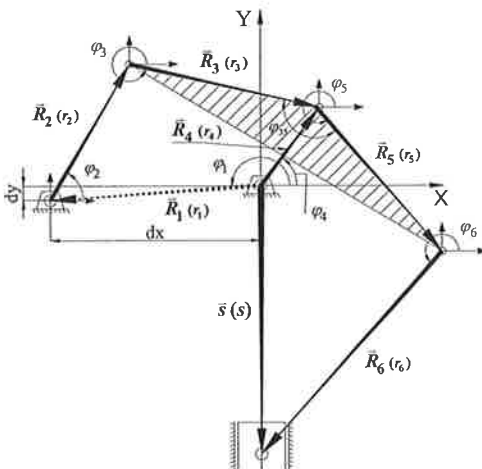
Iz slike 1 [3] je razvidna še ena prednost večzgbnega pogona, namreč skoraj konstantna vlečna hitrost v delovnem področju, kar omogoča občutno boljše pogoje za tečenje materiala, izboljša kvaliteto izdelka ter podaljša življenjsko dobo orodja. Takšen večzgbni pogon obravnavamo v



Slika 2: Shema večzglobnega pogona

- Mehanizem naj doseže spodnjo mrtvo lego v območju zasuka ekscentra od 190 do 230 stopinj (klasični ročični mehanizem pri 180 stopinjah) – s tem je zagotovljen daljši čas aktivnega dela delovnega giba (kvalitetno tečenje materiala).
- Hitrost v delovnem ciklu naj bo čim manjša (manjša kontaktna hitrost in manjša preoblikovalna hitrost).
- Če je le možno, naj bodo dimenzijske spremembe čim manjše; dimenzije ročic naj varirajo v območju cca. $\pm 20\%$, prav tako naj se čim manj spreminja gib paha.

Za sam proces optimiranja je potrebno izdelati matematični model mehanizma ter izbrati namensko funkcijo, ki jo bomo optimirali. Zato moramo najprej izvršiti kinematično analizo mehanizma, kjer bodo prikazane funkcijske odvisnosti med vsemi spremenljivkami, ki bodo udeležene v optimizacijskem postopku.



Slika 3: Kinematična shema mehanizma

prispevku, prikazan je na sliki 2. Pogon je izveden preko pogonskega zobnika z ekscentrom, na katerega je vezana ojnica, ki je na eni strani preko veznega droga povezana z ohišjem stiskalnice, na drugi strani pa se gibanje prenaša na drsnik. Na tega je nato preko drogov pritrjen pah. Mehanizem je 6-zglobni ročični s končnim drsnim členom in je v bistvu modifikacija klasičnega 4-zglobnega ročičnega mehanizma z drsnikom. Želena hitrostno karakteristiko dobimo zaradi podaljšane ojnice in vezave le-te na vezni drog in ohišje, kar spremeni sinusoidni potek hitrosti v že prej omenjeni in prikazani cikel, značilen za večzglobne pogone.

Želja je optimirati dani pogon glede na določene kriterije, torej poiskati optimalne dimenzije ročic in položaje vrtišč, da bo ustrezal naslednjim zahtevam:

- Hitrost v delovnem območju naj bo čim bolj konstantna, predvsem v predpisanem območju od cca. 75 do 150 mm pred spodnjo mrtvo lego.

2. KINEMATIČNA ANALIZA POGONA

Na podlagi kinematične sheme (slika 3) izvršimo kinematično analizo mehanizma. Z \bar{R}_2 do \bar{R}_6 smo označili vse ročice (\bar{R}_3 in \bar{R}_5 predstavljata skupaj eno ročico – ojnico \bar{R}_{3-5}), \bar{R}_1 predstavlja podlago, \bar{s} pa vektor položaja paha (dolžina \bar{s} se spreminja s časom). V oklepajih so označene dolžine posameznih vektorjev. Mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo – torej je njegovo gibanje moč opisati z funkcijo ene same spremenljivke; v našem primeru bo to kot pogonske ročice $\bar{R}_4 - \varphi_4$. Zanima nas potek gibanja paha ter njegove hitrosti in pospeškov, zato moramo poiskati zvezo med

vhodno in izhodno veličino, torej funkcijsko odvisnost $\bar{s} = \bar{s}(\varphi_4)$. Analizo gibanja mehanizma smo izvedli s kompleksnimi števili. Mehanizem obravnavamo v dveh stopnjah: prva stopnja je 4-zgibni ročični mehanizem ($\bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 - \bar{R}_4$), druga pa 4-zgibni ročični mehanizem z drsnikom ($\bar{R}_4 - \bar{R}_5 - \bar{R}_6 - \bar{s}$), pri čemer je kot ročice \bar{R}_5 odvisen od kota ročice \bar{R}_3 . Najprej analiziramo prvo stopnjo, ker je rešitev tega mehanizma vhodni podatek za drugo stopnjo.

Za zaključeno zanko prve stopnje lahko zapišemo (slika 3):

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 - \bar{R}_4 = 0, \quad (1)$$

oz. v kompleksnem zapisu:

$$r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2} + r_3 e^{i\varphi_3} - r_4 e^{i\varphi_4} = 0, \quad (2)$$

Po ločitvi na realni in imaginarni del dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama (kota φ_2 in φ_3), znane so vse dolžine ročic r_2 do r_4 , φ_4 je kot pogonske ročice r_4 in je odvisen od časa t in vrtilne hitrosti ω ($\varphi_4 = \omega t$). Rešitev tega sistema je:

$$\varphi_{2,3} = 2 \arctan \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right), \quad \varphi_{3,2} = 2 \arctan \left(\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right), \quad (3)$$

kjer so uporabljene konstante:

$$A = K_1 - K_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) - K_4 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_4$$

$$B = 2(K_4 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_4)$$

$$C = K_1 - K_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + K_4 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_4$$

$$D = K_5 + K_4 \cos \varphi_1 + K_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) - \cos \varphi_4$$

$$E = 2(K_4 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_4)$$

$$C = K_5 - K_4 \cos \varphi_1 + K_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + \cos \varphi_4$$

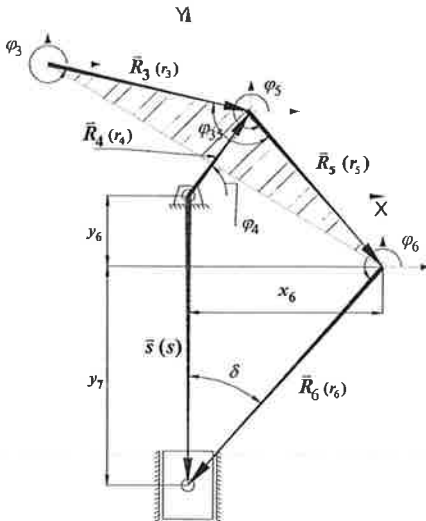
$$K_1 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2 r_4}$$

$$K_2 = \frac{r_1}{r_2}$$

$$K_3 = \frac{r_1}{r_3} \quad (4)$$

$$K_4 = \frac{r_1}{r_4}$$

$$K_5 = \frac{-r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2}{2r_3 r_4}$$



Slika 4: Kinematična shema 2. stopnje mehanizma

Za vsak kot (φ_2 , φ_3) sta možni dve rešitvi (obe realni in enaki, kompleksni konjugirani ali realni in različni), ustrezno določimo s pomočjo kinematične sheme. Prva stopnja je v celoti določena, za poljubni čas t lahko izračunamo vse potrebne parametre in sledi analiza druge stopnje.

Iz kinematične sheme 2. stopnje (slika 4) je razvidno, da je kot φ_5 vezan na kot φ_3 , saj ročici \bar{R}_3 in \bar{R}_5 tvorita eno ročico – ojnico \bar{R}_{3-5} . Zato ga zapišemo kot:

$$\varphi_5 = \varphi_3 + \varphi_{35} - \pi, \quad (5)$$

kjer je φ_{35} kot trikotne ojnice, torej kot med ročicama \bar{R}_3 in \bar{R}_5 . Izhodna veličina, katere funkcijsko odvisnost potrebujemo, je gib oz. pozicija paha (drsnika) – dolžina vektorja \bar{s} .

Zapišemo lahko naslednje zveze:

$$s = y_6 + y_7, \quad y_6 = r_4 \sin \varphi_4 + r_5 \sin \varphi_5, \quad y_7 = \frac{x_6}{\tan \delta}, \quad x_6 = r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5, \quad (6)$$

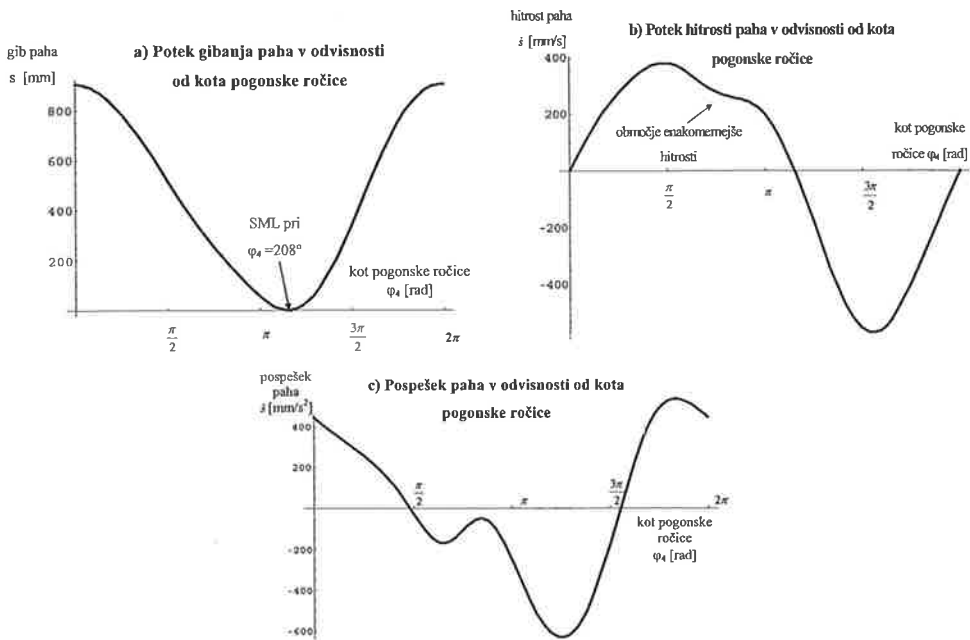
$$\delta = \arcsin\left(\frac{x_6}{r_6}\right), \quad y_7 = \frac{x_6}{\tan \delta} = \frac{r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{x_6}{r_6}\right)\right)},$$

od koder sledi:

$$s = r_4 \sin \varphi_4 + r_5 \sin \varphi_5 + \frac{r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{x_6}{r_6}\right)\right)}. \quad (7)$$

Vse odvisne veličine na desni strani enačbe (7) so funkcije kota φ_4 in smo tako dobili željeno zvezo med vhodno ter izhodno veličino: $\bar{s} = f(\varphi_4)$.

Hitrosti in pospeške paha je sedaj moč enostavno dobiti z odvajanjem (7). Iz rezultatov analize je razvidno, da je zveza (7) nelinearna, kar pogojuje način optimiranja. Rezultate kinematične analize prikazujejo naslednji grafi: gib, hitrost in pospešek pehala v odvisnosti od vhodnega kota φ_4 (in s tem posredno časa t).



Slika 5: Rezultati kinematične analize večz gibnega pogona

(a - pot, b - hitrost, c - pospešek)

Iz grafov je vidna tipična karakteristika večz gibnega pogona: SML nastopi kasneje kot pri klasičnem ročičnem pogonu, v območju delovnega giba je hitrost manjša in ima enakomernejši potek, čemur sledi skokovito povečanje hitrosti pri vračanju paha navzgor. Za obravnavani pogon smo izdelali računalniški program v programskem jeziku FORTRAN, ki za dane vhodne podatke izračunava kinematične veličine (položaj, hitrost, pospešek in gib paha, položaj SML, maksimalni

absolutni pospešek in njegov položaj). Izračunani podatki za obravnavani mehanizem so naslednji:

- SML pri $\varphi_4 = 208^\circ$
- gib mehanizma = 903,48 mm
- predpisano območje (cca. 75 do 150 mm pred SML): $\varphi_4 = 155^\circ \div 176^\circ$
- maksimalni absolutni pospešek na predpisanem območju = $198,8 \text{ mm/s}^2$ ($\varphi_4 = 176^\circ$)

Kinematična analiza pogona je končana, znani so vsi potrebni parametri, ki jih potrebujemo za optimizacijo.

3. OPTIMIRANJE POGONA

A) Splošni optimizacijski model

Osnovni cilj vsakega optimizacijskega postopka, ki temelji na metodah matematičnega programiranja, je poiskati odgovor na vprašanje "Kaj je najboljše?" pri problemih, kjer lahko kvaliteto odgovora izrazimo kot numerično vrednost. Ali drugače: poiskati takšno kombinacijo parametrov (projektlnih spremenljivk), ki bodo optimirali izbrano veličino (namensko funkcijo). Problem, ki ga želimo optimirati, je najprej potrebno pretvoriti v matematično obliko.

Splošni model optimizacijskega problema zapišemo v obliki:

poišči tak vektor projektlnih spremenljivk $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$, ki bo

minimiziral namensko funkcijo $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{R}$,

ob upoštevanju pogojev:

$$x_i^{sp} \leq x_i \leq x_i^{zg} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (\text{omejitve projektlnih spremenljivk}), \quad (8)$$

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{omejitvene funkcije}),$$

$$h_l(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m' \quad (\text{odzivne enačbe sistema}),$$

kjer \mathbf{z} predstavlja vektor odzivnih oz. sistemskih spremenljivk (hitrosti, pospeški, reakcije,...), \mathbf{x} pa vektor projektlnih spremenljivk (parametri, katerih optimalne vrednosti iščemo, da zadostimo zahtevanim kriterijem). Namenska funkcija je tista, ki jo izberemo kot merilo za uspešnost optimiranja in katere minimum iščemo. Če je katerakoli od definiranih funkcij (namenska, omejitvene,...) nelinearna, imamo opravka z nelinearnim optimiranjem. Optimizacijski problem rešujemo iterativno, za njegov zagon pa potrebujemo začetno točko \mathbf{x}^0 (ocena ali sedanja varianta projekta, ki ga želimo izboljšati).

Optimizacijski problem v obliki (8) pa ni neposredno uporaben, kadar imamo opravka z dinamičnimi sistemi, kot je npr. večzgibni pogon, ki ga obravnavamo. Pri takšnih sistemih se pojavlja nova neodvisna spremenljivka – čas, zaradi česar postane vektor odzivnih spremenljivk \mathbf{z} odvisen od časa t . Obstaja več metod, kako časovno odvisen problem predelati v splošno obliko, ki bo primerna za reševanje. Ena od možnosti [1,2] je npr., da tak problem prevedemo v zaporedje časovno neodvisnih problemov. V našem primeru smo izbrali metodo z uvedbo nove spremenljivke [1]. Ker nas pri analizi dinamičnih sistemov v nekem časovnem intervalu običajno zanima maksimalna vrednost odziva sistema, ki jo želimo zmanjšati oz. optimirati (največji pospeški, hitrosti,...), lahko namensko funkcijo za tak problem zapišemo kot:

$$\psi_0 = \max_{0 \leq t \leq \tau} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), t) \quad (9)$$

Da bi takšno namensko funkcijo lahko uporabili v splošnem optimizacijskem modelu (8), se moramo znebiti funkcije \max iz namenske funkcije ter časovne odvisnosti iz omejitev. To dosežemo z uvedbo nove umetne spremenljivke x_{k+1} , ki nam predstavlja zgornjo mejo f_0 , za katero velja:

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), t) - x_{k+1} \leq 0 \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (10)$$

S tem postane vektor konstrukcijskih spremenljivk oblike:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}]^T, \quad (11)$$

ponovno pa tudi definiramo namensko funkcijo:

$$\bar{\psi}_0 = x_{k+1}. \quad (12)$$

Omejitvene funkcije, odzivne enačbe sistema ter omejitve namenske funkcije (11) zamenjamo z ekvivalentnimi integralnimi omejitvami. Za poljubno zvezno funkcijo $f(t)$ lahko neenakost v obliki $f(t) \leq 0$ za $0 \leq t \leq \tau$ zamenjamo z ekvivalentno integralno omejitvijo [1]:

$$\int_0^\tau \langle f(t) \rangle dt = 0, \text{ kjer je: } \langle f(t) \rangle = \begin{cases} f(t) & ; f(t) \geq 0 \\ 0 & ; f(t) < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Preoblikovani problem dobi s tem naslednjo obliko:

poišči tak vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$, ki bo minimiziral $x_{k+1} \in \mathcal{R}$,

ob upoštevanju pogojev:

$$x_i^{sp} \leq x_i \leq x_i^{zg} \quad i = 1, 2, \dots, k, k+1$$

$$\psi = \int_0^\tau \langle f_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) - x_{k+1} \rangle dt = 0 \quad (14)$$

$$\psi_j = \int_0^\tau \langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \rangle dt = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$h_l(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), t) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m'$$

Tako smo dobili obliko, ki jo predpisuje splošni optimizacijski model (8) in jo lahko uporabimo v postopku optimiranja.

B) Optimizacijski model večgibnega pogona

Najprej je potrebno izbrati namensko funkcijo. Osnovni cilj našega optimiranja je določiti parametre mehanizma tako, da bo hitrost paha v predpisanem območju čim bolj konstantna. Zato bi morali biti pospeški na tem območju enaki nič ali pa se temu čim bolj približati. Kot namensko funkcijo zato definiramo maksimalni absolutni pospešek na predpisanem območju, naš cilj pa je ta pospešek zmanjšati v največji možni meri. Namenska funkcija za obravnavani problem se torej glasi:

$$f = \max |\dot{s}(\mathbf{x}, \varphi_4)| \quad \varphi_{4\min} \leq \varphi_4 \leq \varphi_{4\max} \quad \varphi_4 = \varphi_4(t) \quad (15)$$

Kot omejitve smo postavili omejitve dolžin ročic r_2 do r_6 , pozicijo vrtilišča ročice \bar{R}_2 (dimenzije dx, dy) ter omejitve giba pehala. Pri tem je pomembno poudariti, da je zadnja omejitve giba nelinearna, saj izvira iz nelinearne zveze $\bar{s} = \bar{s}(\varphi_4)$.

Vektor projektnih spremenljivk dobi s tem obliko:

$$\mathbf{x} = [r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, dx, dy]^T \quad (16)$$

Ker pa problem v takšni obliki ni direktno uporaben za optimizacijski postopek (namenska funkcija posredno odvisna od časa), uvedemo novo realno spremenljivko x_8 in spremenimo namensko funkcijo v:

$$\bar{\psi} = x_8 \quad (17)$$

Transformirani problem se tako glasi:

poišči tak vektor $\mathbf{x} = [r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, dx, dy, x_8]^T$, ki minimizira $x_8 \in \mathcal{R}$,
ob upoštevanju pogojev:

$$\begin{aligned}
 r_{i,\min} \leq r_i \leq r_{i,\max} & \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \\
 dx_{\min} \leq dx \leq dx_{\max} & \quad dy_{\min} \leq dy \leq dy_{\max} & \quad gib_{\min} \leq gib \leq gib_{\max} & \quad (18) \\
 \int_{t,\min}^{t,\max} \langle |\dot{s}(\varphi_4(t))| - x_8 \rangle dt = 0
 \end{aligned}$$

Zaradi oblike namenske funkcije ter obeh nelinearnih omejitev (omejitev giba ter namenske funkcije), smo se odločili za uporabo optimizacijskega postopka, ki temelji na metodi sekvenčnega kvadratnega programiranja (SQP). Ta metoda spada med modificirane Newton-ove metode, je torej gradientna. Uporabili smo algoritem iz knjižnice numeričnih rutin in programov NAG (The Numerical Algorithms Group). Velika prednost uporabljenega algoritma je, da uporabniku ni treba podati vseh odvodov funkcije, torej celotnega gradienta ali Hessejeve matrike, če so ti preveč komplicirani. Program si jih sam aproksimira z metodo končnih razlik. Uporabnik mora zagotoviti vse potrebne podprograme, v katerih so definirane namenska in omejitvene funkcije, ostale omejitve ter kolikor je možno prvih odvodov funkcije. Vse potrebne podprograme smo napisali v programskem jeziku FORTRAN, v enakem jeziku kot je napisana tudi knjižnica NAG.

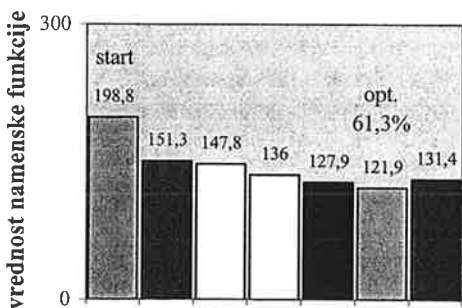
Kot začetno točko optimiranja smo vzeli obstoječe stanje pogona. Za konstrukcijske spremenljivke smo določili njihove začetne omejitve z mejami $\pm 20\%$ glede na njihovo trenutno vrednost; gib optimiranega pogona naj bo čim bližje sedanjemu, zato smo ga omejili z mejama $\pm 3\%$ začetne vrednosti. Najvažnejša je zagotovo prva nelinearna omejitev, ki v praksi predstavlja razliko med izbrano namensko funkcijo (maksimalnim absolutnim pospeškom) ter uvedeno umetno spremenljivko. Da bi funkcijo minimirali, mora biti ta razlika čim manjša, v idealnem primeru enaka nič. Zato smo jo omejili na vrednost nič, kateri se bo algoritem poskušal čim bolj približati. S tem so bili določeni vsi začetni pogoji in izvedeno je bilo optimiranje.

4. REZULTATI IN RAZPRAVA

Začetni vektor projektnih spremenljivk za obstoječi pogon ima naslednje komponente:

$$\mathbf{x} = [774.6466, 1067, 320, 987, 1453, 1233, 51, 198.8]^T$$

Prvih 7 komponent predstavlja dolžine ročic v mm, zadnja pa vrednost umetne spremenljivke x_8 v mm/s^2 . Torej je $x_{8,\text{zač}} = 198,8$ naša začetna vrednost, ki jo moramo čim bolj zmanjšati in katere



Slika 6: Potek optimizacije: optimalna rešitev je v 5. poskusu, vrednost namenske funkcije je dosegla 61,3% prvotne vrednosti

končna vrednost nam bo merilo za uspešnost optimiranja. Optimiranje smo izvedli v več poskusih, z različnimi nastavitvami algoritma (toleranca konvergence) in uporabo prejšnjih rešitev v novem poskusu. Potek optimiranja prikazuje slika 6.

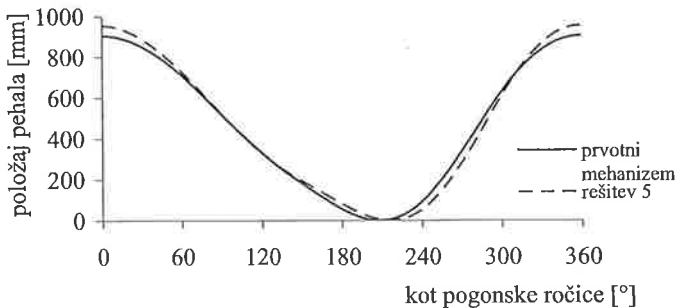
Optimiranje v okviru zastavljenih ciljev je bilo uspešno, saj nam je v 5. poskusu uspelo znižati vrednost namenske funkcije na približno 61% prvotne vrednosti. Vsaka od teh 6 rešitev nam da eno kombinacijo parametrov, ki določajo obravnavani večzgbni pogon.

Optimalno rešitev (s stališča kinematike) nam predstavlja rešitev 5:

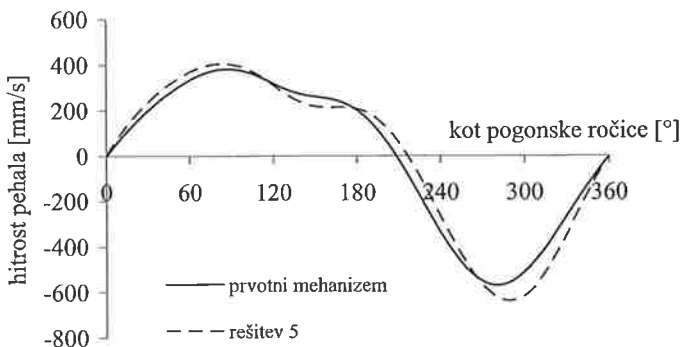
$r_2 = 730 \text{ mm}$ (-44.6466 mm)	$r_3 = 985 \text{ mm}$ (-82 mm)	$r_4 = 280 \text{ mm}$ (-40 mm)
$r_5 = 1250 \text{ mm}$ (+263 mm)	$r_6 = 1198 \text{ mm}$ (+255 mm)	
$dx = 1150 \text{ mm}$ (-83 mm)	$dy = 43.5 \text{ mm}$ (-7.5 mm)	

V oklepajih je naveden sprememba napram začetnim vrednostim.

Dejanski pomen dobljene rešitve se pokaže, če jo prikažemo v obliki grafov poti in hitrosti pehala za en zaključen cikel ter primerjamo z začetnim stanjem pogona (slika 7).



Slika 7: Gib pehala v odvisnosti od kota pogonske ročice (primerjava rešitev)



Slika 8: Hitrost pehala v odvisnosti od kota pogonske ročice (primerjava rešitev)

Iz grafov vidimo, da je optimirana rešitve zelo blizu začetnemu stanju, iz česar lahko sklepamo, da je obstoječi pogon že dokaj blizu lokalnemu optimumu. SML je pri vseh rešitvah pomaknjena proti večjim zasokom pogonske gredi 215 do 220°. Vseh 6 rešitev ima v aktivnem delu cikla veliko bolj konstantno in nižjo hitrost – v povprečju za okoli 15%. Torej je bila izbira namenske funkcije in načina optimiranja ustrezna. Ne smemo pa pozabiti, da smo se v delu omejili samo na kinematični vidik večz gibnega pogona, nič pa ni bilo govora o preoblikovalnih silah, ki se prenašajo čezenj, o njihovih karakteristikah, kje morajo doseči svoj maksimum, na kakšnem območju morajo delovati in podobno. Zato ni nujno, da bo optimalna rešitev s

kinematičnega vidika hkrati tudi optimalna v končni fazi, kjer bo treba upoštevati tudi dinamiko procesa. Dobljene optimirane rešitve so le podlaga za nadaljnje analize, kjer bo upoštevana celotna dinamika procesa.

5. REFERENCE

- [1] E.J. Haug, J.S.Aurora, **Applied optimal design: Mechanical and structural systems**, 1.izd., John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [2] M. Kegl, **Optimiranje mehanskih sistemov z metodo kriterija optimalnosti**, Tehniška fakulteta, Maribor, 1990.
- [3] B. Vohar, **Optimiranje in sinteza pogona stiskalnice za globoki vlek**, diplomsko delo, Fakulteta za strojništvo, Maribor, 2001.
- [4] Baze podatkov na internetu: www.aida-america.com, www.metalforming-online.com

UPORABA VALČNE TRANSFORMACIJE PRI IDENTIFIKACIJI DUŠENJA NIHAJOČIH SISTEMOV Z VEČ PROSTOSTNIMI STOPNJAMI

Janko Slavič*

Igor Simonovski†

Miha Boltežar‡

USE OF THE CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM FOR THE IDENTIFICATION OF DAMPING

POVZETEK:

Pri identifikaciji parametrov dinamičnih sistemov z več prostostnimi stopnjami se izkaže, da je identifikacija dušilnih parametrov težja kakor identifikacija masnih in togostnih parametrov. V tem delu se osredotočimo na identifikacijo dušenja z uporabo hitro razvijajoče zvezne valčne transformacije (ZVT). Gaborjeva ZVT je temelj za tri postopke identifikacije: metodo prečnega preseka, metodo amplitude in metodo faze. Posebna pozornost je posvečena obravnavi sistemov z več prostostnimi stopnjami, šumu, slabo ločenim frekvenčnim vrhom in strukturnemu dušenju. Predstavljeni postopki dajejo dobre rezultate na sintetičnih in realnih signalih.

SUMMARY:

A continuous wavelet transform (CWT) based on the Gabor wavelet function is used to identify the damping of a multi-degree-of-freedom system. The common procedures are already known, especially the identification with a Morlet CWT. This study gives special attention to the following: a description of the instantaneous noise, the edge-effect of the CWT, the frequency-shift of the CWT, the bandwidth of the wavelet function and the selection of the parameter σ of the Gabor wavelet function of the CWT. The procedures are demonstrated on signals acquired from the lateral vibration of a uniform beam. The study demonstrates the advantages of using the amplitude and phase methods, both of which provide information about the instantaneous noise. The presented procedures are appropriate for automating the identification process.

1 Uvod

Raztros vibracijske energije imenujemo dušenje. Pretežni del vibracijske energije se porazgubi znotraj sistema, predvsem v obliki toplote; preostali del energije se porazgubi v obliki akustičnega sevanja, prenosa energije na druge sisteme, ...

Delo, ki ga naredi oscilirajoča sila dušenja pri enem ciklu, imenujemo disipacija energije enega cikla. Poizkusi so pokazali, da je disipacija energije cikla za večino konstrukcijskih materialov – kot sta jeklo in aluminij – v širokem frekvenčnem spektru neodvisna od frekvence nihanja in da je disipacija proporcionalna kvadratu

*Janko Slavič, univ.dipl.inž.

†dr. Igor Simonovski, univ.dipl.inž.

‡doc.dr. Miha Boltežar, univ.dipl.inž., vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij.

amplitude nihanja. Tako notranje dušenje imenujemo *strukturno dušenje* [1]. V dinamiki nihanj najpogosteje uporabljen model (zaradi enostavnosti) *viskoznega dušenja* pa ne ustreza tem kriterijem, saj je sila dušenja proporcionalna hitrosti nihanja in posledično je disipacija energije dušenja odvisna od frekvenca nihanja. Da se torej zadovolji kriterijem strukturnega dušenja, se vpelje *ekvivalentno viskozno dušenje*. Ekvivalentno viskozno dušenje se dobi tako, da se (ob predpostavki harmoničnega nihanja) teoretično disipacijo energije cikla viskozne dušenja izenači z dejansko disipacijo energije enega cikla neviskozne nihanja.

Kakorkoli, dušenja ne moremo izmeriti neposredno, ampak ga dobimo z dedukcijo odziva dinamičnega signala. To lahko naredimo v časovni ali v frekvenčni domeni. *Logaritmični dekrement* je najenostavnejši postopek in se izvaja v časovni domeni; uporaben je predvsem za sisteme z eno prostostno stopnjo (EPS). Bolj zapleteni metodi v časovni domeni, ki sta uporabni tudi za sisteme z več prostostnimi stopnjami (VPS), sta metodi *Smith least squares* in metoda *least squares complex exponential* – obe podrobneje opisani v [2]. Pogosto uporabljena časovna metoda je tudi *Hilbertova transformacija* [3], ki pretvori realno funkcijo v kompleksno.

Med metodami v frekvenčni domeni je znana t.i. metoda 3dB [4], ki temelji na pasovni širini resonančnega vrha. Za izboljšanje rezultatov te metode so razvite tudi bolj sofisticirane metode in so navedene v [5].

Sicer pa Staszewski [5] navaja, da lahko dušenje ocenimo tudi z uporabo časovno-frekvenčne *Wigner-Ville* porazdelitve.

Drugačen pristop predstavlja uporaba valčne transformacije; primer takega pristopa je predstavil Straszewski [5]. Gre za uporabo časovni in frekvenčno omejenih funkcij, ki jih premikamo po časovni osi in skaliramo po frekvenčni osi. S superpozicijo takih funkcij lahko popišemo celoten signal. V tem primeru ne govorimo o časovno-frekvenčni domeni, temveč o domeni čas-skala. Tako pridemo do *valčne transformacije*, ki jo je leta 1980 predstavil Morlet [6] in jo uporabil za seizmološke raziskave. Matematični formalizem za zvezno valčno transformacijo pa sta razvila skupaj Grossman in Morlet [7]. Od takrat naprej se je zvezna valčna transformacija (ZVT) hitro razvijala in se danes uporablja na zelo širokem področju: od opazovanja nestacionarnih in nelinearnih procesov, preko identifikacije napak in uporabe v kombinaciji z nevronskimi mrežami, do reševanja diferencialnih enačb z uporabo valčne transformacije. Podrobnejši pregled uporabe je predstavljen v [8].

Prednost uporabe valčne transformacije je ravno v njeni časovni in frekvenčni omejenosti, ki nam omogoča enostavno analiziranje sistemov z VPS; lokalna omejenost valčne transformacije nam namreč omogoča, da analiziramo posamezne lastne frekvence neodvisno od drugih. Prednost valčne transformacije je tudi njena odpornost na šum v signalu.

V 2. poglavju bodo predstavljene osnove valčne transformacije in uporabe valčne transformacije za identifikacijo dušenja. V 3., 4. in 5. poglavju bo na kratko predstavljen vpliv roba, frekvenčni premik amplitude ZVT in način vrednotenja trenutnega SNR (signal-to-noise-ratio). V 6. poglavju bodo predstavljeni rezultati ekperimenta.

2 Identifikacija disipacije energije z valčno transformacijo

2.1 Osnove valčne transformacije

Tukaj navajamo zgolj nekatere osnovne definicije, za podrobnejšo predstavitev se naj bralec obrne na drugo literaturo; npr.: [8, 9, 10].

ZVT funkcije $x(t) \in L^2(\mathbf{R})$ je definirana kot:

$$Wx(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi_{u,s}^*(t) dt, \quad (1)$$

kjer sta u in s parametra translacije in skalacije [11]. $\psi^*(t)$ je kompleksno konjugirana osnovna valčna funkcija (VF) $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$.

Valčna funkcija je normalizirana (njena norma je enaka 1). Povprečna vrednost VF je 0:

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt = 1 \quad (2) \quad \bar{\psi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3)$$

Tabela 1 prikazuje normo in povprečno vrednost Morletove in Gaborjeve VF [12]. Medtem, ko je v obeh primerih povprečna vrednost ob primerni izbiri parametrov σ in η zelo blizu nič, je norma Gaborjeve VF enaka 1, norma Morletove VF pa π . Morletovo VF lahko normaliziramo z množenjem z $1/\sqrt{\pi}$. V tem primeru dobimo Gaborjevo VF s parametrom $\sigma = 1$. Parameter σ nam omogoča, da prilagodimo časovni in frekvenčni raztros, to lastnost bomo pozneje podrobneje predstavili. Translirana in skalirana VF je

Tabela 1: Norma in povprečna vrednost Morletove in Gaborjeve VF

Lastnost	Gabor	Morlet
$\ \psi(t)\ ^2$	1	$\frac{\pi}{\sigma}$
$\overline{\psi}(t)$	$\sqrt[4]{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{\eta^2\sigma^2}{2}}$	$e^{-\frac{\eta^2}{2}} \sqrt{2\pi}$

definirana kot:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right). \quad (4)$$

Gaborjeva VF:

$$\psi_{Gabor}(t) = \underbrace{\frac{1}{(\sigma^2\pi)^{1/4}}}_{\text{Gaussovo okno}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i\eta t}, \quad (5)$$

kjer parameter σ in začetna skala definiranta časovni in frekvenčni raztros Gaborjeve VF [13]; η je parameter frekvenčne modulacije.

Zaradi lažje primerjave bomo v nadaljevanju uporabljali tudi termin "normaliziran parameter σ " ($\sigma_{1\text{Hz}}$), ki nam pove kakšen parameter σ bi uporabili, če bi analizirali signal s frekvenco 1 Hz. Dejansko uporabljen parameter σ dobimo z množenjem: $\sigma_{1\text{Hz}} \cdot \Delta t$, kjer je Δt časovna diskretizacija.

Povezava med skalo Gaborjeve VF s in krožno frekvenco ω definira izraz:

$$\omega(s) = \frac{\eta}{s}. \quad (6)$$

Tukaj lahko navedemo še zelo uporabno lastnost ZVT, namreč linearnost:

$$\left(W \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i\right)(u, s) = \alpha_i \sum_{i=1}^N (W x_i)(u, s). \quad (7)$$

Linearnost nam omogoči, da analiziramo i -to komponento x_i ; več-komponentne funkcije $\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$ posebej, ločeno od drugih. α_i je konstanta.

2.2 Identifikacija disipacije energije z uporabo Gaborjeve zvezne valčne transformacije

Identifikacija temelji na predpostavki, da sistem niha s harmonsko funkcijo $x(t)$ (8) in da je taka funkcija asimptotična, to je, da se amplituda glede na fazo spreminja počasi [14].

$$x(t) = A(t) \cos \varphi(t) \quad (8)$$

ZVT tako definirane harmonske funkcije lahko aproksimiramo; Staszewski [5] in Ruzzene *et al.* [15] sta uporabila Morletovo VF in sta ZVT aproksimirala z izrazom, ki ga je predstavil Delprat *et al.* [16]. Aproksimacijo ZVT za Gaborjevo VF smo že predstavili [17], tako bo tukaj izpisan samo izpeljan izraz:

$$Wx(u, s) = \frac{1}{2} A(u) \hat{\psi}_{Gabor_{u,s}}(\varphi'(u), \sigma, \eta) e^{i\varphi(u)} + Er(A'(t), \varphi''(u)), \quad (9)$$

kjer je Fourierova transformacija translirane in skalirane Gaborjeve VF definirana kot:

$$\hat{\psi}_{Gabor_{u,s}}(\omega, \sigma, \eta) = (4\pi\sigma^2s^2)^{1/4} e^{-\frac{(\omega-\frac{\eta}{s})^2\sigma^2s^2}{2}} e^{-i\omega u}. \quad (10)$$

Napako aproksimacije $Er(A'(t), \varphi''(u))$ lahko zanemarimo, če je prvi odvod faze (kotna hitrost) večji kakor pa je pasovna širina VF $\Delta\omega$ [9, 17]:

$$\varphi'(u) \geq \Delta\omega. \quad (11)$$

Pasovna širina Gaborjeve VF $\Delta\omega$ je definirana [9, 17]:

$$\Delta\omega(s) = \sqrt{\frac{-2z_1}{\sigma^2s^2}}. \quad (12)$$

Izraz je izpeljan relativno, glede na velikost Gaussovega okna na sredini (maksimalna vrednost) in na robu. Parameter z_1 predstavlja mero, kako daleč od sredine okna gledamo. V tem delu je bila uporabljena vrednost $z_1 = -8$ (takrat je vrednost na robu okna $34 \cdot 10^{-3}\%$ vrednosti na sredini).

Da se dve sosednji harmonski funkciji i and j v ZVT ne motita, mora biti večja pasovna širina od obeh ($\Delta\omega(s_i)$ in $\Delta\omega(s_j)$) manjša, kakor je frekvenčna razlika obeh funkcij [9]:

$$(\varphi'_i(u) - \varphi'_j(u)) \geq \max\{\Delta\omega(s_i), \Delta\omega(s_j)\}. \quad (13)$$

ZVT neke harmonske funkcije v časovno-frekvenčnem prikazu (skalogram) se kaže kot koncentracija energije pri frekvenci te harmonske funkcije. To koncentracijo energije imenujemo *greben* (angl. ridge) [8] in jo opišemo s krivuljami $s = s(u)$. Greben je funkcija translacije (časa). Vrednosti ZVT, ki so vezane na greben, imenujemo *ogrodje* (angl. skeleton) $ZVT - Wx(u, s(u))$.

V nadaljevanju se bomo osredotočili na odziv dušenega nihanja [1]:

$$x(t) = A_0 e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) \quad (14)$$

Z uporabo ZVT smo zmožni določiti samo dušeno lastno krožno frekvenco $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$, ki pa se ponavadi od lastne krožne frekvence ω_0 (ki jo potrebujemo za izračun razmernika dušenja) razlikuje zelo malo. V nadaljevanju bomo tako uporabili ω_d namesto ω_0 , saj je razmernik dušenja ζ ponavadi zelo majhen ($\zeta \ll 1$) in napaka, ki jo s tem naredimo, zanemarljiva. Taka poenostavitev je v dinamiki pogosta.

Od sedaj naprej je postopek do razmernika dušenja enak kakor v primeru Morletove VF [5]. Najprej izraz (10) vstavimo v izraz (9) in zanemarimo člen $Er(A'(t), \varphi''(u))$. Ker nas zanima ZVT na mestu grebena ($s = s(u)$), je krožna frekvenca Gabor VF ($\omega = \frac{\eta}{s}$) enaka krožni frekvenci dušenega nihanja (ω_d); posledično je člen $e^{-\frac{(\omega_d - \frac{\eta}{s})^2 \sigma^2 s_0^2}{2}}$ enak 1. Tako izpeljemo naslednji izraz:

$$\ln \left(\frac{2|Wx(u, s(u))|}{(4\pi \sigma^2 s(u)^2)^{1/4}} \right) \approx -\zeta\omega_d u + \ln A_0 \quad (15)$$

Ko imamo enkrat izračunano ZVT, so vsi členi enačbe (15) razen razmernika dušenja ζ in konstante A_0 znani. Ker gre za linearno funkcijo, lahko iz nagiba te funkcije ocenimo razmernik dušenja.

Nihanje lahko rekonstruiramo z uporabo naslednjih izrazov:

$$\varphi(u) = \arctan \frac{\text{Im}(Wx(u, s(u)))}{\text{Re}(Wx(u, s(u)))} \quad (16)$$

$$A(u) \approx \frac{2|Wx(u, s(u))|}{(4\pi \sigma^2 s(u)^2)^{1/4}} \quad (17)$$

Edina naloga pri zgornjem postopku je določitev grebena $s(u)$.

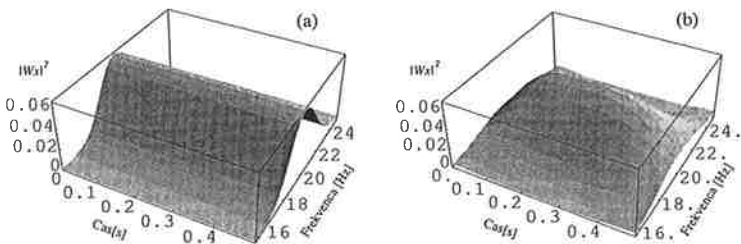
2.3 Določevanje grebena

Podrobnejše informacije o različnih metodah določevanja grebena so zbrane v literaturi [5, 14, 15, 16, 18]. Zaradi celovitosti bodo tukaj navedene osnove treh najenostavnejših metod. Prva metoda se imenuje *Metoda prečne preseka* in temelji na v naprej znani dušeni lastni frekvenci ω_d . Greben je tako definiran z:

$$s(u) = \frac{\eta}{\omega_d} \quad (18)$$

Amplitudna metoda temelji na lokalnem maksimumu ZVT, *Fazna metoda* pa na ujemanju krožne frekvence ZVT in krožne frekvence VF.

Ker vemo, da je po teoriji dušena lastna frekvenca nihanja linearnih sistemov konstantna, se zdi iskanje trenutne frekvence nihanja nepotrebno. Vendar pa ni namen amplitudne in fazne metode v iskanju trenutne frekvence ampak v povratni informaciji, ki nam jo tako iskanje da. Tako iskanje namreč v sebi skriva podatek o trenutnem šumu signala; ko je namreč šuma preveč, trenutne frekvence ne moremo več zanesljivo napovedati. Z definiranjem največjega frekvenčnega odklona trenutne frekvence tako prekinemo identifikacijo dušenja.



Slika 1: Zvezna valčna transformacija neskončne (a) in končne (b) harmonske funkcije.

3 Vpliv roba

Slika 1 prikazuje razliko med ZVT neskončne harmonske funkcije in ZVT končne harmonske funkcije $x(t) \neq 0$, če $\{0.0 \leq t \leq 0.5\}$, amplituda je v obeh primerih konstantna. Razlika nastane zaradi izračuna ZVT. Zmnožek valčne funkcije, ki jo transliramo po časovni osi in končne funkcije na začetku in koncu ni proporcionalen zmnožku v "notranjosti". Podrobneje smo to opisali v [17], kjer smo tudi izpeljali izraz, ki za Gaborjevo VF popiše časovno dolžino vpliva roba:

$$u_{wd} = \pm s \sigma \sqrt{-\frac{2}{3}z_2}, \quad (19)$$

kjer parameter z_2 izberemo. Parameter je odvisen od razmernika dušenja: če je dušenja malo, potem se vpliv roba bolj pozna in moramo z_2 previdneje izbrati. Z uporabo v praksi smo na primer ugotovili, da je $z_2 = -20$ primeren za razmernik dušenja $\zeta \approx 100 \cdot 10^{-6}$ in da je $z_2 = -10$ dovolj rigorozen za razmernik dušenja $\zeta \approx 100 \cdot 10^{-3}$.

Kakor kaže enačba (19) lahko vpliv roba zmanjšamo s spreminjanjem parametra Gaborjeve VF σ . Če namreč izberemo manjšo vrednost σ , potem je vpliv roba manj opazen, vendar pa ima to za posledico večji frekvenčni raztros valčne funkcije (torej tudi večjo pasovno širino VF). Pri večji pasovni širini pa imamo lahko težave z zaznavanjem slabo ločenih lastnih frekvenc.

Kakorkoli, pri zelo majhnem parametru σ se lahko pokaže še ena težava, namreč frekvenčni premik amplitudnega ekstrema ZVT.

4 Frekvenčni premik amplitudnega ekstrema ZVT

Pri majhnem parametru σ se pojavi frekvenčni premik amplitudnega ekstrema ZVT, ki pa smo ga analitično popisali [17]:

$$\omega - \omega_0 = \left(\frac{\eta - \sqrt{2/\sigma^2 + \eta^2}}{2s} \right), \quad (20)$$

kjer je ω frekvenca, ki jo odraža ZVT.

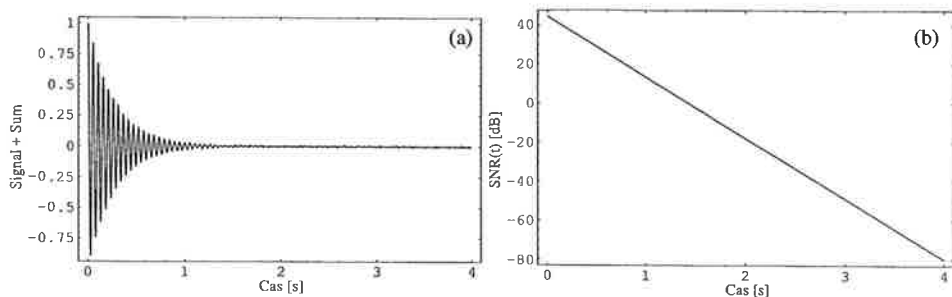
5 Trenutni SNR

Pri opisu šuma tranzientnega odziva se je izkazalo, da klasičen SNR opis šuma (21) ni primeren, zato smo posebej za dušen odziv (14) izpeljali t.i. trenutni SNR [17], enačba 22.

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{var}(\text{brez šumen signal})}{\text{var}(\text{šum})} \right) \quad (21)$$

$$\text{SNR}(t) = 10 \log_{10} \left(\frac{A_0^2 e^{-2\zeta\omega_d t}}{2 \text{var}(\text{šum})} \right). \quad (22)$$

Slika 2-a prikazuje signal s povprečnim SNR=30dB, slika 2-b pa prikazuje trenutni SNR, kakor ga izračunamo z izrazom (22). Razlika med pristopoma je očitna; trenutni SNR ima razpon od 44dB do -80dB.



Slika 2: Del (a): signal s $SNR=30dB$ šuma, del (b): trenutni SNR signala (a).

6 Eksperiment

Zaradi prostorske omejitve tukaj predstavljamo predvsem rezultate identifikacije, podrobnejše informacije lahko bralec najde v [17, 19, 20], kjer smo tudi predstavili numerične simulacije, vpliv roba in analize slabo ločenih lastnih frekvenc.

Cilj eksperimenta je bil določiti dušenje prosto-prosto vpetega nosilca, slika 3 ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$). Za tak nosilec smo uporabili model histereznega dušenja. Z uporabo modela ekvivalentnega viskozne dušenja lahko zgornje izpeljave uporabimo brez sprememb. Povezava med razmernikom dušenja in faktorjem histereznega dušenja je [21]: $\zeta = \frac{\eta}{2}$, kjer smo z η označili faktor histereznega dušenja.

Slika 4 prikazuje skalogram eksperimentalnih podatkov. Prikazane so frekvence (skale) od 200 Hz do 2000 Hz. Prve tri lastne frekvence so jasno vidne.

Postopek za oceno dušenja je:

- določitev *dušene lastne frekvence* (npr. z klasično Fourierovo transformacijo),
- določitev *grebena ZVT* (metoda prečnega preseka, amplitudna metoda, fazna metoda),
- določitev *ogrodja ZVT*,
- izračun ovojnice odziva (17),
- določitev razmernika dušenja (15).

ZVT je bila izračunana v okolici dušene lastne frekvence, največji dovoljen frekvenčni odklon je bil definiran kot $\pm 0.5\%$ dušene lastne frekvence. Frekvenčna resolucija ZVT (Δf) pa je bila približno $1/10$ največjega odklona. Parametri ZVT in rezultati identifikacije dušenja so podani zraven slike 4.

Pri identifikaciji dušenja prvih treh lastnih oblik nosilca večjih težav ni bilo, saj so lastne frekvence relativno dobro ločene, nihanje pa je v času relativno dolgo.

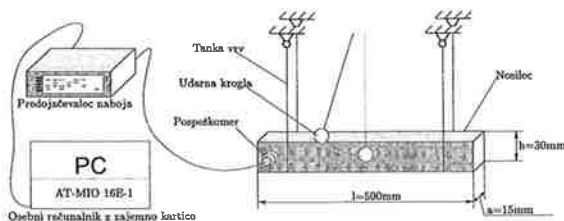
Tretja lastna oblika ima glede na drugi dve lastni obliki relativno visoko dušenje, zraven tega pa še visoko frekvenco nihanja, kar oboje vodi v hitro iznihanje sistema. Ta fenomen se je pokazal pri različnih metodah določevanja grebena. Slika 5-a prikazuje greben 3. lastne frekvence, kot ga zazna fazna metoda. Vidimo, da se pri 1, 15 s identifikacija prekine, saj je zaradi šuma presežen največji dovoljen frekvenčni odmik. Podobno se obnaša amplitudna metoda.

Metoda prečnega preseka ni odvisna od šuma, z njo identifikacijo izračunamo čez celo območje signala. Posledica tega je, da hitro pride v območje velikega šuma in napaka pri identifikaciji je neizogibna. Ogradje ZVT po metodi prečnega preseka prikazuje slika 5-b, vidimo, da po $\approx 1, 2$ s šum zelo popači rekonstrukcijo izvirnega signala in identifikacijo dušenja.

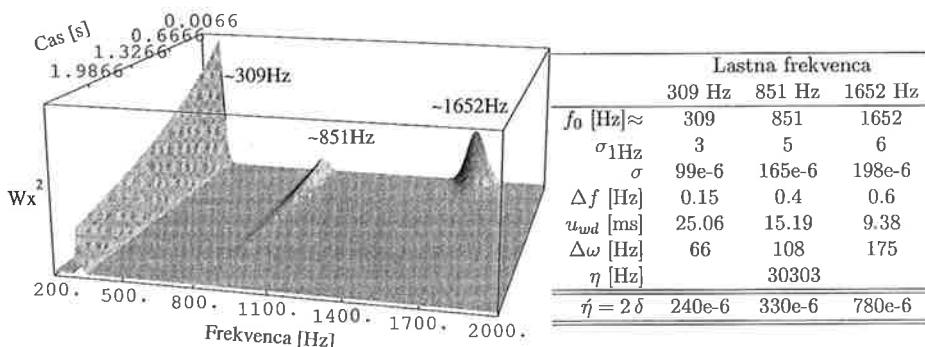
Razmerniki dušenja se ujemajo z razmerniki navedenimi v literaturi. Cremer s sodelavci [22] navaja za faktor histereznega dušenja upogibnega nihanja jekla vrednosti od 200×10^{-6} do 600×10^{-6} . Kljub temu, da se vrednosti relativno dobro ujemajo, pa jih ne moremo neposredno primerjati z našimi, saj so naše pridobljene za točno določen nosilec, Cremerjeve vrednosti pa so podane bolj splošno.

7 Zaključki

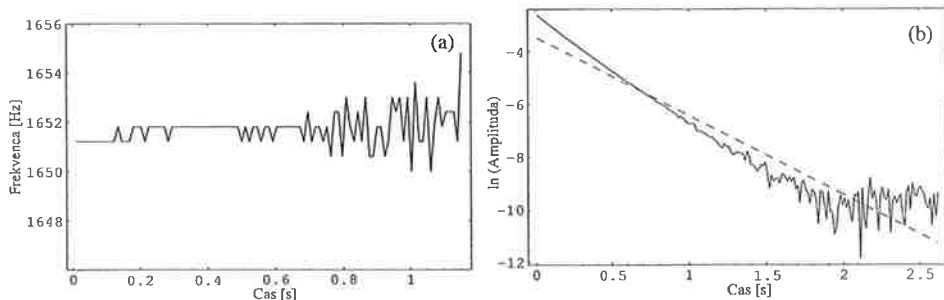
Delo predstavlja tri različne načine določevanja grebena za identifikacijo dušenja s pomočjo zvezne valčne transformacije: metodo prečnega preseka, amplitudno metodo in fazno metodo. Predvsem zadnji dve me-



Slika 3: Shema eksperimenta.



Slika 4: Skalogram zajetih podatkov eksperimenta.



Slika 5: Del (a): greben tretje lastne frekvence nosilca (fazna metoda), del (b): logaritem rekonstruirane amplitude tretje lastne frekvence (metoda prečnega preseka), — signal, - - - linearna regresija.

to sta se izkazali kot zelo uporabni, saj ponujata povratno informacijo o vsebnosti šuma v signalu. To informacijo uporabimo za prekinitvev postopka identifikacije, ko zaidemo v področje velikega šuma. Vpliv šuma smo raziskali v prejšnjem delu [17] in ugotovili, da predstavljeni postopki delujejo zanesljivo do 5 dB, lahko tudi do 0 dB in več, vendar zanesljivost rezultata hitro pade. Da smo lahko opisali trenutno vsebnost šuma, smo predstavili algoritem za izračun trenutnega SNR za dušene harmonske signale.

Pri preizkušanju algoritmov se je potrdilo že znano dognanje [16], da je za določevanje grebena fazna metoda bolj primerna od amplitudne metode.

Medtem, ko so drugi avtorji uporabili Morletovo valčno funkcijo, smo sami uporabili Gaborjevo valčno funkcijo. Posledično smo uporabili (v prejšnjem delu izpeljano) aproksimacijo Gaborjeve zvezne valčne transformacije za asimptotične funkcije [17]. Prednost, ki jo prinaša uporaba Gaborjeve valčne transformacije je v tem, da lahko prilagajamo časovni in frekvenčni raztros valčne funkcije.

S časovnim raztrosom valčne funkcije pa je povezan tudi vpliv roba, ki smo ga analitično določili. Izkaže se, da lahko vpliv roba zmanjšamo, vendar na račun identifikacije slabo ločenih lastnih frekvenc. Parameter

σ Gaborjeve valčne funkcije nam tako omogoča, da zvezno valčno transformacijo prilagodimo glede na pričakovane rezultate.

Z večanjem parametra σ tako zmanjšamo frekvenčni raztros valčne funkcije, s tem povečamo vpliv roba in odpornost na šum ter omogočimo analizo slabo ločenih lastnih frekvenc; slabost povečanja parametra σ pa je slabša rekonstrukcija signala, ki pa bistveno ne vpliva na identifikacijo dušenja (zanima nas samo nagib rekonstruiranega signala).

Z manjšanjem parametra σ so seveda učinki nasprotni, s tem, da se lahko pojavi še frekvenčni pomik amplitudnega ekstrema, ki ne predstavlja večjih težav, saj ga lahko analitično določimo, vendar se ga moramo zavedati.

Predstavljeni postopki so bili tudi testirani na eksperimentu; rezultati, ki smo jih dobili se relativno dobro ujemajo s podatki iz literature [22].

Literatura

- [1] W.T. Thomson. *Theory of Vibration with Applications*. London: Chapman and Hall, 4th edition, 1993.
- [2] J.E. Cooper. Parameter estimation methods for flutter testing. In *SMP Meeting*. AGARD, May 1995.
- [3] R.B. Randall. Vibration measurement equipment and signal analyzers. In C.M. Harris, editor, *Shock and Vibration Handbook*, poglavje 13, McGraw-Hill, 1987.
- [4] A.D. Nashif, Jones D.I.G, and Henderson J.P. *Vibration Damping*, John Wiley & Sons, 2nd edition, 1985.
- [5] W.J. Staszewski. Identification of damping in mdof systems using time-scale decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 203(2):283–305, 1997.
- [6] J. Morlet. Sampling theory and wave propagation. In *Proceedings of the 51st Annual Meeting*. Soc. Explor. Geophys., 1980.
- [7] A Grossman and J. Morlet. Lecture on recent results. In L. Streit, editor, *Mathematics and Physics*. World Scientific, 1985.
- [8] I. Simonovski. *Valčna analiza nelinearnih nestacionarnih nihanj elektromotorja. Wavelet analysis of nonlinear and non-stationary electro-motor vibrations*. Doktorsko delo, Fakulteta za strojništvo, 5 2002.
- [9] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 2nd edition, 1999.
- [10] C. Torrence and G.P. Compo. A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the Americal Meteorological Society*, 79(1):61–78, January 1998.
- [11] A. Grossman and J. Morlet. Decomposition of hardy function into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 15(4):723–736, 1984.
- [12] M. Boltežar, I. Simonovski, and M. Furlan. Fault detection in dc electro motors using the continuous wavelet transform (v tisku). *Meccanica*, 2002.
- [13] I. Simonovski and M. Boltežar. Monitoring the instantaneous frequency content of a washing machine during startup. *Strojniški vestnik-Journal Of Mechanical Engineering*, 47(1):28–44, 2001.
- [14] P. Tchamitchian and B. Torresani. Ridge and skeleton extraction from the wavelet transform. In *Wavelets and Their Applications*, strani 123–151. Jones and Bartlett Publishers International, 1992.
- [15] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi, and B. Piombo. Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: Application to real data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2):207–218, 1997.
- [16] N. Delprat, B. Escudie, P. Guillemain, R.K. Martinet, Ph Tchamitchian, and B. Torresani. Asymptotic wavelet and gabor analysis: extraction of instantaneous frequencies. *IEEE Trans. Inf. Th.* 38, special issue on *Wavelet and Multiresolution Analysis*, strani 644–664, 1992.
- [17] J. Slavič, I. Simonovski, and M. Boltežar. Damping identification using a continuous wavelet transform: Application to real data (v tisku). *Journal of Sound and Vibration*, 2002.
- [18] R. A. Carmona, W. L. Hwang, and B. Torresani. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transform. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 45(10):2586–2590, October 1997.
- [19] J. Slavič. Identifikacija dušenja nihajočih sistemov z več prostostnimi stopnjami z uporabo valčne transformacije, 2001. Diplomaska naloga.
- [20] M. Boltežar and J. Slavič. Use of the continuous wavelet transform for the identification of damping. In N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, and A.M.R. Ribeiro, editors, *International Conference on Structural Dynamics Modelling*, strani 53–62. Vibrations Group - DEM, 3–5 June 2002. Funchal, Madeira, Portugal.
- [21] C.F. Beards. *Structural Vibration: Analysis and Damping*. Arnold, 1996.
- [22] L. Cremer and M. Heckl. *Structure-Borne Sound*, poglavje 3. Springer, 1973.

VOGALNA SINGULARNOST TORZIJE KOMPOZITNE PALICE

George Mejak¹

CORNER SINGULARITY IN THE TORSION OF COMPOSITE BARS

Povzetek

V prispevku je obravnavana vogalna singularnost torzije kompozitne prizmatične palice. Podan je model torzije s popolno in nepopolno vezjo med materialnimi komponentami. Za model popolne vezi je dokazan obstoj koncentracije napetosti v vogalu za vsak kot vogala in poljubne vrednosti strižnih modulov materialnih komponent palice. Explicitno je izračunan red vogalne singularnosti v odvisnosti od vogalnega kota in materialnih lastnosti kompozitov. V primeru nepopolne vezi je dokazan obstoj koncentracije napetosti v vogalu za dovolj ohlapno vez.

Summary

In a paper a corner singularity of composite prismatic bars in torsion is considered. A model of torsion with perfect and imperfect bonding is given. In a case of perfect bonding existence of the stress concentration in a neighborhood of the interface corner is proved. Dependence of the order of the singularity upon the material constants and the corner angle is explicitly computed. In a case of imperfect bonding stress concentration is proved provided adhesion between materials is not too strong.

1. Uvod

V tehniški praksi so konstrukcijski elementi zaradi različnih razlogov pogosto sestavljeni iz dveh ali več različnih materialov. Takim sestavljenim elementom pravimo kompoziti. Pomemben razlog uporabe kompozitov je doseči zaželjene efektivne materialne lastnosti kompozita s primerno izbiro materialov posameznih komponent. Materialna matrika kompozita je konstantna na vsaki materialni komponenti posebej in je tako stopničasta funkcija.

¹ Univerza v Ljubljani, FMF, Oddelek za matematiko, Jadranska 19, Ljubljana

Komponente materialne matrike nastopajo kot koeficienti elastične energije oziroma kot koeficienti v ravnovesnih parcialnih diferencialnih enačbah. Znano je, da je regularnost rešitve parcialnih diferencialnih enačb odvisna tudi od regularnosti koeficientov. Specialno to pomeni, da moremo pri kompozitih pričakovati pri prehodu iz ene materialne komponente v drugo določeno singularnost, ki se pri določenem redu singularnosti manifestira kot koncentracija napetosti. Po drugi strani pa je znotraj komponent materialna matrika konstantna in je potemtakem rešitev na posamezni komponenti notranje regularna. Poleg nezveznosti materialne matrike pri prehodu iz ene materialne komponente v drugo pa na regularnost vpliva še geometrijska oblika kontaktne ploskve sosednjih materialnih komponent. Vsaka geometrična singularnost, rob ali vogal, je vir nove singularnosti, ki se praviloma kaže kot koncentracija napetosti. Tej singularnosti pravimo vogalna singularnost kompozita.

Poleg določitve koncentracije napetosti pa je poznavanje singularnosti pomembno tudi pri numeričnem modeliranju. Znano je, da je optimalni red konvergence diskretizacije robne naloge odvisen od regularnosti rešitve. Vpliv singularnosti na konvergenco aproksimacije praviloma ni lokalno omejen na okolico singularnosti rešitev ampak je globalen. Najbolj direktna metoda omejitve vpliva singularnosti na red konvergence je metoda lokalne zgostitve diskretizacije v okolici vira singularnosti. Pomanjkljivost lokalne zgostitve je nevarnost slabe numerične pogojenosti in povečanje števila prostostnih stopenj diskretizacije. Zahtevnejša z vidika implementacije, zato pa bolj učinkovita s teoretičnega stališča, je dekompozicija rešitve na singularni in regularni del in lepljenje singularnega dela z diskretizacijo regularnega dela. Pomanjkljivost te metode je, da moramo precej natanko poznati singularni del rešitve. Enostavnejša, zato pa še vedno dovolj učinkovita je metoda dekompozicije prostora aproksimacije na singularni in regularni del. V metodi končnih elementov to specialno pomeni uporabo singularnih elementov v okolici singularnosti rešitve. Za uporabo te metode je dovolj poznati red singularnosti rešitve. V primeru, če reda singularnosti ne poznamo, metoda ni uporabna. V tem primeru nam prostane samo prvo omenjena metoda lokalne zgostitve.

V prispevku se bomo omejili na najenostavnejši primer elastomehanske naloge kompozita, na torzijo prizmatične kompozitne palice. Zaradi enostavnosti pa bomo zato lahko natanko določili red vogalne singularnosti rešitve. Prispevek je razdeljen v štiri razdelke. Po tem uvodnem sledi formulacija problema torzije kompozitne palice v variacijski obliki in v obliki robne naloge. Formulirali bomo nalogo torzije s popolno vezjo med posameznimi materialnimi komponentami palice in nepopolno vezjo, ki dopušča na medmaterialnem prehodu dislokacijo v smeri osi palice. V tretjem razdelku je obravnavana vogalna singularnost s pomočjo asimptotičnega razvoja v okolici vogala. Tu se bomo omejili na torzijo palice s popolno vezjo. Izpeljali bomo karakteristično enačbo za lastne vrednosti in dokazali, da pride pri torziji bikompozitne palice s popolno vezjo v vogalu do koncentracije napetosti. V četrtem razdelku bomo obravnavali torzijo palice z nepopolnimi vezmi med materialnimi komponentami. Pokazali bomo, da dislokacija ne relaksira napetosti in da ima tudi v tem primeru rešitev singularnost v vogalu.

2. Torzija kompozitne palice

Napetost pri torziji homogene prizmatične palice $\Omega \times [0, l]$, kjer je Ω presek palice in l dolžina palice, je dana s Prandtlovo napetostno funkcijo $\hat{\chi}$. V kartezičnem koordinatnem

sistemu z osjo z v smeri osi palice sta tako edini neničelni komponenti napetosti $t_{13} = t_{31} = \mu\theta \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial y}$ in $t_{23} = t_{32} = -\mu\theta \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial x}$, kjer je μ strižni modul palice, θ pa je torzijski zasuk palice na dolžino palice. Potencialna energija torzije palice je vsota elastične energije in potenciala površinskih sil. Elastična energija homogene palice je

$$\hat{U}_e = l \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{t}} d\Omega = l\mu\theta^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \hat{\chi}|^2 d\Omega,$$

potencial površinskih sil pa je

$$\hat{U}_t = - \int_{\Omega} (\vec{t} \cdot \vec{u})|_{z=l} d\Omega - \int_{\Sigma} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Omega,$$

kjer je \vec{u} vektor pomika, ki ima na osnovni ploskvi $z = 0$ pomik samo v smeri osi palice, Σ pa je plašč palice. Potencial površinskih sil moremo preoblikovati v

$$\hat{U}_t = -2l\mu\theta^2 \int_{\Omega} \hat{\chi} d\Omega + l\mu\theta^2 \int_{\partial\Omega} \hat{\chi} \vec{r} \cdot \vec{n} d\Gamma - l\mu\theta^2 \int_{\partial\Omega} \phi \frac{d\hat{\chi}}{ds} d\Gamma.$$

Potencialna energija palice je tako $\hat{U}_p = \hat{U}_e + \hat{U}_t$. Brezdimenzijski zapis potencialne energije je $\hat{U} = \hat{U}_p / (l\mu_0\theta^2)$, kjer je μ_0 referenčni strižni modul. V nadaljevanju bomo uporabljali izključno brezdimenzijski zapis. Da bo pisava enostavnejša, brezdimenzijskih in dimenzijskih strižnih modulov μ_i s pisavo ne bomo ločili.

Potencialna energija \hat{U} kompozitne palice s presekom $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$, kjer so Ω_i disjunktni preseki posameznih materialnih komponent, je vsota potencialnih energij materialnih komponent palice. Potem je potencialna energija torzije enaka

$$\hat{U} = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega + \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\partial\Omega_i} \hat{\chi}_i \vec{r} \cdot \vec{n} d\Gamma - \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\partial\Omega_i} \phi_i \frac{d\hat{\chi}_i}{ds} d\Gamma, \quad (1)$$

kjer sta μ_i ter $\hat{\chi}_i$ strižni modul in napetostna funkcija i -te komponente, ϕ_i pa je pomik i -te komponente v smeri osi palice. Rob $\partial\Omega_i$ materialne komponente je vsota robov do sosednjih materialnih komponent in zunanjega roba. Tu smo privzeli, da je presek kompozitne palice enostavno povezano območje. V primeru, če ima presek luknjo, moremo luknjo obravnavati kot materialno komponento s strižnim modulom, ki limitira proti nič, glej [1]. Zunanji rob preseka je prost, zato imajo napetostne funkcije tistih komponent, ki tvorijo ovoj na zunanjem robu, konstantno vrednost. Napetostna funkcija je določena do konstante natančno, zato moremo te konstante izbrati tako, da imajo napetostne funkcije na zunanjem robu vrednost nič. Na robu med dvema materialnima komponentama velja ravnovesni pogoj recipročne Cauchyjeve relacije. To v zapisu z napetostno funkcijo na skupnem robu i -te in j -te materialne komponente pomeni enakost $\mu_i \frac{d\hat{\chi}_i}{ds} = \mu_j \frac{d\hat{\chi}_j}{ds}$. Funkciji $\hat{\chi}_i$ in $\hat{\chi}_j$ se torej na skupnem robu razlikujeta le za konstanto. Pri predpostavki enostavno povezanega preseka Ω in izbire vrednosti napetostnih funkcij na zunanjem robu potem sledi enakost izrazov $\mu_i \hat{\chi}_i$ in $\mu_j \hat{\chi}_j$ na skupnem robu. To pomeni, da napetostna funkcija $\hat{\chi}$, katere zožitev na Ω_i je enaka $\hat{\chi}_i$, ni zvezna na Ω .

Pri ravnovesnem pogoju na meji med različnima materialoma je druga vsota v (1) enaka nič. Potem

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{\chi}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega - \sum_{i < j} \mu_i \int_{\Gamma_{ij}} [|\phi|] \frac{d\hat{\chi}_i}{ds} d\Gamma, \quad (2)$$

kjer je Γ_{ij} skupni rob komponent Ω_i in Ω_j in

$$[[\phi]]|_{\Gamma_{ij}} = (\phi_i - \phi_j)|_{\Gamma_{ij}}$$

skok osnega pomika na meji med dvema materialoma. V primeru popolne vezi med materialnimi komponentami je ta skok enak nič. Točneje, velja $[[\phi]] = 0$. Potemtakem je potencialna energija za popolno kompozitno palico enaka

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{\chi}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega. \quad (3)$$

Če ima pomik ϕ skok na meji med dvema materialoma, je vez med materialoma nepopolna. Pri nepopolni vezi se materialne komponente dislocirajo v osni smeri. Najenostavnejši model, glej [2] nepopolne vezi temelji na predpostavki, da je dislokacija v osni smeri sorazmerna napetosti. Z enačbo $[[\phi]] = -\alpha \frac{d\hat{\chi}}{ds}$, kjer je α pozitivna konstanta. Pripadajoča potencialna energija je

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{\chi}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega + \alpha \sum_{i < j} \mu_i \int_{\Gamma_{ij}} \left| \frac{d\hat{\chi}_i}{ds} \right|^2 d\Gamma. \quad (4)$$

Očitno se (4) za $\alpha = 0$ reducira v potencial popolne vezi (3). Potencial v (4) je definiran na množici

$$\hat{\mathcal{V}} = \left\{ \hat{\chi} : \hat{\chi}|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i) \text{ in } \frac{d\hat{\chi}}{ds}|_{\Gamma_{ij}} \in L^2(\Gamma_{ij}) \right\},$$

kjer je $H^1(\Omega_i)$ prostor Soboljeva prvega reda. Tu smo privzeli, da so robovi Γ_{ij} odsekoma regularni.

Napetostna funkcija χ ima skok na prehodu iz enega v drugi material. Ta skok moremo z enostavno transformacijo $\chi_i = \mu_i \hat{\chi}_i$ regularizirati. Pripadajoči regulariziran potencial je

$$U = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2\mu_i} |\nabla \chi|^2 - 2\chi \right) d\Omega + \alpha \sum_{i < j} \frac{1}{\mu_i} \int_{\Gamma_{ij}} \left| \frac{d\chi}{ds} \right|^2 d\Gamma, \quad (5)$$

prostor pa

$$\mathcal{V} = \left\{ \chi : \chi \in H^1(\Omega) \text{ in } \frac{d\chi}{ds}|_{\Gamma_{ij}} \in L^2(\Gamma_{ij}) \right\}.$$

Prostor \mathcal{V} je s skalarnim produktom

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \sum_{i < j} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} d\Gamma$$

Hilbertov prostor. Omenimo, da moremo pri privzetku regularnosti robov potencial definirati namesto na \mathcal{V} na množici $H^1(\Omega) \cap \{\chi : \chi_i|_{\Gamma_{ij}} \in H^{3/2}(\Omega_i)\}$. V nadaljevanju se bomo omejili na regulariziran potencial definiran na \mathcal{V} .

Rešitev torzijske naloge kompozitne palice je minimum potenciala torzije na dopustni množici. Rešitev je torej dana z minimizacijsko nalogo

$$\min_{\chi \in \mathcal{V}} U(\chi).$$

Eksistenca in enoličnost rešitve sledi iz šibke napol zveznosti in koerkivnosti potenciala na Hilbertovem prostoru \mathcal{V} , glej [3]. Minimizacijski nalogi pripada variacijska naloga: poišči $\chi \in \mathcal{V}$, tako da je

$$a(\chi, w) = b(w), \quad \text{za vsak } w \in \mathcal{V}, \quad (6)$$

kjer je

$$a(\chi, w) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_i} \int_{\Omega_i} \nabla \chi \cdot \nabla w \, d\Omega + \alpha \sum_{i < j} \frac{1}{\mu_i} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{d\chi}{ds} \frac{dw}{ds} \, d\Gamma$$

in

$$b(w) = 2 \int_{\Omega} w \, d\Omega.$$

Variacijski nalogi je v distribucijskem smislu enakovredna robna naloga: najdi $\chi \in \mathcal{V}(\Delta) = \mathcal{V} \cap \{\chi : \Delta \chi|_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_i)\}$ tako, da velja

$$-\frac{1}{\mu_i} \Delta \chi = 2 \quad \text{v } \Omega_i \quad \text{za vsak } i = 1, \dots, N \quad \text{in}$$

$$\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \right] - \alpha \frac{d^2 \chi}{ds^2} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{ij} \quad \text{za vsaka } 1 \leq i < j \leq N.$$

Regularnost rešitev robne naloge je na vsaki materialni komponenti enaka regularnosti roba komponente. Če je rob $\partial\Omega_i$ razreda C^s , leži zožitev rešitve na Ω_i v prostoru $H^s(\Omega_i)$. Vsak vogal na robu $\partial\Omega_i$ ima vpliv na regularnost rešitve. Znano je, da leži rešitev Poissonove naloge z regularno desno stranjo na konveksni ravninski množici v prostoru H^2 in da za nekonveksno poligonsko množico ta regularnost ni dosežena, glej [4]. V primeru kompozitne palice situacija ni tako preprosta. Če je komponenta Ω_i konveksna, vsaj ena komponenta, ki ima z Ω_i skupen rob, ni konveksna, zato podobnega rezultata ne moremo pričakovati. Kako je dejansko z regularnostjo v okolici medmaterialnega vogala, bomo raziskali v naslednjem razdelku.

3. Asimptotični razvoj v okolici medmaterialnega vogala

Prvo si bomo pogledali primer popolne vezi $\alpha = 0$. Pri tem se bomo zaradi enostavnosti omejili na vogal na meji med dvema materialoma. Na enak način moremo obravnavati tudi vogal na meji med večimi materiali, s to razliko, da je računaska pot težja. Naj bosta Ω_1 in Ω_2 dve materialni komponenti s skupnim robom Γ , ki ima v točki O vogal z odprtjem $\kappa\pi$, $\kappa \in (0, 2)$. Privzeli bomo, da je v okolici O vogala rob odsekoma raven. V okolici O uvedemo polarne koordinate r , φ s središčem v O tako, da se rob Γ sovpada s poltrakoma $\varphi = 0$ in $\varphi = \kappa\pi$. Na O iščemo rešitev nepopolne robne naloge

$$-\Delta \chi_i = 2\mu_i \quad \text{v } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (7a)$$

$$\chi_1|_{\varphi=0} = \chi_2|_{\varphi=2\pi} \quad \text{in} \quad \chi_1|_{\varphi=\kappa\pi} = \chi_2|_{\varphi=\kappa\pi}, \quad (7b)$$

$$\mu_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial \vec{n}}|_{\varphi=0} = \mu_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial \vec{n}}|_{\varphi=2\pi} \quad \text{in} \quad \mu_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial \vec{n}}|_{\varphi=\kappa\pi} = \mu_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial \vec{n}}|_{\varphi=\kappa\pi}. \quad (7c)$$

Rešitev iščemo v obliki $\chi_i = \chi_i^p + \chi_i^0$, kjer je χ_i^0 harmonična funkcija, ki zadošča pogojem (7b) in (7c) in χ_i^p partikularna rešitev (7a), ki prav tako zadošča pogojem (7b) in (7c). Znano je, da moremo pri obravnavi vokalne singularnosti Poissonove naloge ločiti primera $\kappa \neq \frac{1}{2}$ in $\kappa = \frac{1}{2}$. Podobno velja tudi sedaj. Za $\kappa \neq \frac{1}{2}$ je partikularna rešitev

$$\chi_i^p = \frac{1}{2} \mu_i r^2 (-1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta \tan \kappa \pi).$$

Za $\kappa = \frac{1}{2}$ rešitev ni tako enostavna in je

$$\chi_1^p = -\frac{1}{2} r^2 \mu_1 + \frac{r^2 (\mu_1 - \mu_2) ((-4\theta \mu_1 + \pi (\mu_1 - 5\mu_2)) \cos 2\theta - 4\mu_1 \log r \sin 2\theta)}{2\pi (\mu_1 + 3\mu_2)},$$

$$\chi_2^p = -\frac{1}{2} r^2 \mu_2 + \frac{2r^2 \mu_2 (-\mu_1 + \mu_2) (\theta \cos 2\theta + \log r \sin 2\theta)}{\pi (\mu_1 + 3\mu_2)}.$$

Rešitev vsebuje logaritemski člen, ki pa je pomnožen z r^2 tako, da je logaritemska singularnost prisotna šele v drugem odvodu χ_i^p po r in potemtakem ni vir napetostne koncentracije.

Harmonično rešitev zapišemo z razvojem

$$\chi_i^0 = \chi_i^0(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{\lambda_k} \Phi_{i|k}(\varphi),$$

kjer so λ_k pozitivne lastne vrednosti in $\Phi_{i|k}$ lastne funkcije lastnega problema

$$\frac{d^2 \Phi_{i|k}}{d\varphi^2} + \lambda_k^2 \Phi_{i|k} = 0 \quad \text{v } \Omega_i$$

z robnimi pogoji (7b) in (7c), kjer je normalni odvod zamenjan z odvodom po φ . Pri razvoju harmoničnega dela rešitve ni potrebno ločiti primera $\kappa \neq \frac{1}{2}$ in $\kappa = \frac{1}{2}$. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma

$$p = p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) =$$

$$= \lambda^2 \left(-4\mu_1 \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)^2 \cos 2\pi \lambda - (\mu_1 - \mu_2)^2 \cos 2\pi (1 - \kappa) \lambda \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \mu_1^2 (1 + \beta)^2 \lambda^2 \left[\left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 (1 - \cos 2\pi (1 - \kappa) \lambda) - (1 - \cos 2\pi \lambda) \right], \quad (8)$$

kjer je $\beta = \mu_2/\mu_1$. Očitno velja $p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) = p(\lambda; \kappa, \mu_2, \mu_1)$. Z besedami, za red singularnosti ni pomembno, kateri material je znotraj kota $\kappa\pi$. Poleg tega velja tudi $p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) = p(\lambda; 2 - \kappa, \mu_2, \mu_1)$. To pomeni, da se moremo v nadaljevanju omejiti na $\kappa \in (0, 1]$. Vidimo tudi, da so za $\kappa = 1$ ničle karakterističnega polinoma celoštevilčne in da potemtakem rešitev nima singularnosti. V nadaljevanju bomo zato privzeli $\kappa \in (0, 1)$. Singularnosti prav tako ni v primeru $\beta = 1$, zato v nadaljevanju $\beta \neq 1$. Poglejmo, kako je z ničlami izraza v oglatem oklepaju v (8) na intervalu $\lambda \in [k, k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$. Z zapisom $\lambda = k + x$, $x \in [0, 1)$ se moremo pri iskanju ničel omejiti na iskanje presečišč funkcij $\gamma(1 - \cos(2\pi(1 - \kappa)x - \delta))$ in $1 - \cos 2\pi x$ na intervalu $x \in [0, 1)$, kjer je $\gamma \in (0, 1)$ in

$\delta = \delta(k) \in [0, 2\pi)$. Funkciji imata za $\delta \neq 0$ na $(0, 2\pi)$ natanko dve presečišči. Za $\delta = 0$ imata funkciji eno presečišče $x \in (1 - \arccos(1 - 2\gamma), 1)$ in dotikališče v $x = 0$. Fazni pomik δ je enak nič za $k = 0$. V primeru $\kappa \in \mathbb{Q}$ je $\delta = 0$ tudi za $k \in [\frac{\mathbb{Z}^+}{(1-\kappa)}]$, kjer je oglati oklepaj celi del od argumenta. Najmanjša pozitivna lastna vrednost je torej manjša od 1 in je potemtakem vir koncentracije napetosti. Ta lastna vrednost je edini vir koncentracije napetosti, saj je naslednja lastna vrednost po velikosti že večja od 1. Tako smo dokazali:

Izrek Vodilni člen asimptotičnega razvoja napetostne funkcije bikompozitne palice v vogalu meje med dvema materialoma je r^λ , kjer je $\lambda \in (1 - \frac{1}{2\pi} \arccos(1 - 2\gamma), 1)$ in $\gamma = \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)^2$.

Izrek postavlja zgornjo mejo singularnosti rešitve v okolici vogala. Ta meja je neodvisna od kota vogala. Sam red singularnosti, ki je rešitev transcendentne enačbe, pa je seveda odvisen od kota. V primeru $\kappa = \frac{1}{2}$ moremo ničle brez težav izračunati. Ničle so

$$\cup_{k=0}^{\infty} \{2k, 2k + \lambda_1, 2(k + 1) - \lambda_1\}, \quad \text{kjer je } \lambda_1 = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 + 6\beta + \beta^2}{2(1 + \beta)^2}.$$

Lastne funkcije so

$$\Phi_{i|k}(\varphi) = a_{i|k} \cos \lambda_k \varphi + b_{i|k} \sin \lambda_k \varphi,$$

kjer so $a_{i|k}$ in $b_{i|k}$ konstante, določene z robnimi pogoji (7b) in (7c). V primeru enojne ničle λ_k je lastni podprostor enorazsežen, v primeru dvojne pa dvorazsežen. Lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostnim, so paroma ortogonalne v skalarnem produktu

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \mu_1 \int_0^{\kappa\pi} \Phi \Psi d\varphi + \mu_2 \int_{\kappa\pi}^{2\pi} \Phi \Psi d\varphi$$

in sestavljajo poln sistem funkcij prostora periodičnih funkcij $L^2([0, 2\pi])$.

Dokazali smo, da je rešitev torzije bikompozitne palice singularna v medmaterialnem vogalu in izračunali red singularnosti. V posebnem primeru krožnega preseka moremo rešitev torzije dobiti z razvojem po polnem sistemu funkcij $\Phi_{i|k}$. V splošnem primeru rešitev dobimo z metodo končnih elementov. Ker poznamo red singularnosti, moremo pri tem uporabiti v okolici vogala singularne elemente, recimo Sternove singularne elemente.

Metodo, uporabljeno za dvokompozitno palico, moremo uporabiti tudi za večkompozitno palico. Z razliko od dvokompozitne palice, pri večkompozitni palici najmanjše pozitivne lastne vrednosti ne moremo oceniti navzdol z oceno, ki je neodvisna od strižnih modulov materialnih komponent. Na primer, pri štirikompozitni palici s krožnim presekom z enakima materialnima komponentama v prvem in tretjem ter drugem in četrtem kvadrantu, najmanjša pozitivna vrednost z limito $\beta \rightarrow 0$ gre proti nič.

4. Vogalna singularnost torzije palice z nepopolno vezjo

Podobno kot v prejšnem razdelku definiramo okolico \mathcal{O} in vse ostalo s to razliko, da imamo sedaj namesto pogoja (7c) pogoja

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi} = \alpha \frac{d^2 \chi}{dr^2} \Big|_{\varphi=0} \quad (9a)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} = \alpha \frac{d^2 \chi}{dr^2} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} \quad (9b)$$

Robna pogoja (9a) in (9b) z razliko od pogoja (7c) ne ločita posameznih potenc r^λ , zato namesto sistema štirih enačb za vsako lastno vrednost dobimo neskončni sistem. Naloge se zato lotimo z asimptotičnim razvojem rešitve po $\epsilon = \frac{1}{\alpha}$ v okolici $\alpha = \infty$. Limitna vrednost $\alpha = \infty$ ustreza popolni nepovezanosti materialnih komponent, kjer vsaka komponenta predstavlja palico, ki je v torziji neodvisno od sosednjih komponent. To pomeni, da ima napetostna funkcija χ na vsakem robu $\partial\Omega_i$ konstantno vrednost nič. Velja omeniti, da je v nasprotju z regularnim razvojem v okolici neskončnosti razvoj v okolici $\alpha = 0$ singularen. Kot medmaterialnega vogala je za eno materialno komponento ostri, za drugo pa topi kot. Znano je, da ima rešitev Poissonove naloge s homogenim robnim pogojem v vogalu s topim kotom singularnost. Vodilni člen asimptotičnega razvoja je $r^{1/\kappa}$, kjer je $\kappa \in (1, 2)$. Torej je rešitev za $\epsilon = 0$ singularna. Nadaljnje člene asimptotičnega razvoja po ϵ dobimo iz robne naloge, kjer je na levi strani (9b) skok normalnega odvoda predhodnega člena v asimptotičnem razvoju. Na desni (9b) je drugi odvod po r , zato ima vodilni člen vsakega nadaljnjega člena v asimptotičnem razvoju vodilno potenco, ki je za dva večja od predhodnega člena. To pomeni, da so vsi nadaljnji členi nesingularni, in da je tako vsa singularnost v nultem členu razvoja po ϵ . Ostaja pa odprto vprašanje, kako je s konvergenčnim polmerom razvoja po ϵ . To vprašanje bo tema nadaljnjih raziskav.

Na zaključku je na mestu še naslednja opomba, da moramo pri modeliranju torzije upoštevati, da v okolici koncentracije napetosti pride do plastičnosti. Tako sledi iz povedanega, da so vogali območja plastičnosti. Za pravilno modeliranje elasto plastične torzije moremo uporabiti potencial (5), ki ga moramo zožiti na množico

$$\mathcal{V} \cap \{\chi : |\nabla \chi|_{|\Omega_i} \leq \sigma_i\},$$

kjer so σ_i konstante kritične napetosti.

Literatura

1. Hung Pham Huy, Enrique Sanchez-Palencia, Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. *J. math. Anal. Appl.* 284–309; **1974**: 47.
2. J. Aboudi, *Mechanics of composite materials: A unified micromechanical approach*; Elsevier: New York, 1991.
3. R. Lipton, Optimal fiber configurations for maximum torsional rigidity. *Arch. rational Mech. Anal.* 79–106; **1998**: 144.
4. P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*; Masson: Paris, 1992.

OSNOSIMETRIČNI UPOGIB KROŽNIH PLOŠČ

Matej Rozman¹, Boštjan Brank²

AXISYMMETRICAL BENDING OF CIRCULAR PLATES

Povzetek

Po Kirchhoffovi teoriji se linerno elastični upogib tankih izotropnih krožnih plošč opiše z diferencialno enačbo, ki ima analitično rešitev za osnosimetrične obtežne in robne pogoje. Pokažemo, da problemi tega tipa zmeraj vodijo k sodemu številu linearnih enačb (ne glede na geometrijo plošče, način podpiranja in obliko obtežbe), ki jih v našem primeru simbolično rešimo s programom *Mathematica*. S tem si zagotovimo enako obravnavo različnih primerov. Prikazujemo rezultate za nekaj polnih in kolobarjastih krožnih plošč.

Summary

Linear elastic bending of thin circular plates is, in the framework of the Kirchhoff theory, defined by a differential equation, which can be solved analytically for an axisymmetrical loading and boundary conditions. It is shown that a solution of such problems always consists of an even number of linear equations, which we solve symbolically by using *Mathematica* programme. This helps us to treat different cases in the same manner. Results for some circular and annular plates are presented.

1 Uvod

Krožne plošče najdemo na primer na jaških, ali pa kot dele silosov, rezervoarjev in tlačnih posod; če omenimo samo nekatere primere. Obnašanje takšnih plošč nas torej zanima iz praktičnih razlogov. Po drugi strani pa je linearno elastičen upogib krožnih plošč zanimiv tudi s teoretičnega stališča, saj v okviru Kirchhoffove teorije lahko pridemo do analitičnih rešitev.

V tem članku se omejimo na linearno statično analizo osnosimetričnih in izotropnih krožnih plošč. Pokažemo, da problem upogiba takšnih plošč vodi k sodemu številu linearnih enačb, ki jih v našem primeru rešimo simbolično s programom *Mathematica*. S tem reševanje posplošimo; obravnavamo ga na enak način ne glede na geometrijo plošče, način podpiranja in obliko obtežbe.

2 Enačbe upogiba krožnih plošč

Diferencialna enačba, ki po Kirchhoffovi teoriji opisuje linearno elastični upogib tankih izotropnih plošč na elastični podlagi v polarnem koordinatnem sistemu r, φ, z (slika 1), je (npr. Reddy [4], glej tudi Reflak [5])

$$K\Delta\Delta w(r, \varphi) + k w(r, \varphi) = p(r, \varphi) - \frac{1}{1-\nu} \Delta m^T(r, \varphi). \quad (1)$$

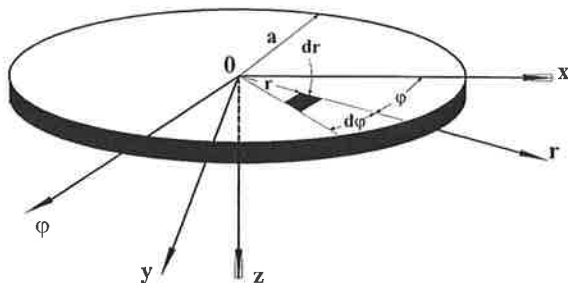
¹ UL, FGG, študent 3. letnika

² UL, FGG, docent, Jamova 2, Ljubljana, bbrank@ikpir.fgg.uni-lj.si

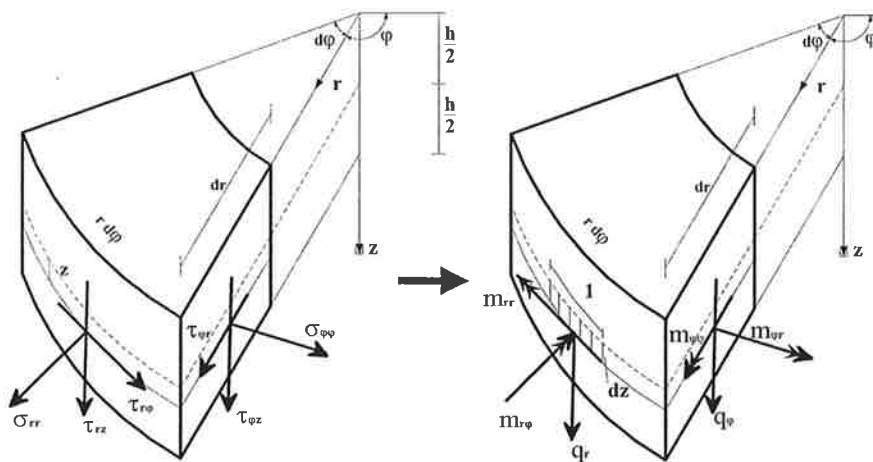
V (1) je $K = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$ upogibna togost izotropne plošče (pri čemer je E elastični modul, h debelina plošče, ν pa Poissonov količnik), w je pomik središčne ploskve plošče v smeri koordinate z , Δ je Laplaceov operator, p je površinska obtežba, k je modul elastične podlage (če plošča leži na takšni podlagi), m^T pa je obtežba zaradi temperaturne spremembe, ki je definirana kot

$$m^T(r, \varphi) = E\alpha \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(r, \varphi, z) z dz, \quad (2)$$

kjer je α koeficient toplotnega raztezka, $\Delta T = T - T_{\text{referenčna}}$ pa je sprememba temperature.



Slika 1. Koordinatni sistem pri analizi krožnih plošč.



Slika 2. Napetosti v tanki krožni plošči in pozitivne smeri prečnih sil in momentov.

Iz ravnotežnih pogojev (npr. Reflak [5]) lahko preko enačb snovi izrazimo upogibne momente kot funkcije odvodov pomika w (npr. Reddy [4], Timoshenko [7])

$$m_{rr}(r, \varphi) = -K \left(\frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) \right) - m_{rr}^T(r, \varphi), \quad (3)$$

$$m_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = -K \left(\nu \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) - m_{\varphi\varphi}^T(r, \varphi), \quad (4)$$

$$m_{r\varphi}(r, \varphi) = -(1-\nu)K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(r, \varphi)}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right), \quad (5)$$

kjer sta $m_{rr}^T = m_{\varphi\varphi}^T = m^T / (1-\nu)$ upogibna momenta zaradi temperaturne obtežbe, medtem ko se prečne sile in efektivne prečne sile izrazijo s pomikom w preko momentov (3) - (5) kot (odvisnost spremenljivk po koordinatah r in φ je izpuščena)

$$q_r = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r m_{rr}) + \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi} - m_{\varphi\varphi} \right], \quad q_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r m_{r\varphi}) + \frac{\partial m_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + m_{r\varphi} \right], \quad (6)$$

$$\bar{q}_r = q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi}, \quad \bar{q}_\varphi = q_\varphi + \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial r}. \quad (7)$$

Pozitivne smeri prečnih sil in upogibnih momentov so prikazane na sliki 2.

3 Enačbe osnosimetričnega upogiba krožnih plošč

Če so krožne plošče obremenjene osnosimetrično (t.j. simetrično glede na z os; glej sliko 1) in če so osnosimetrični tudi robni pogoji, postanejo vse spremenljivke problema, ki ga opisuje enačba (1), samo funkcija koordinate r . Laplacev operator iz (1) se tako poenostavi v

$$\Delta m^T(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial m^T(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 m^T(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \xrightarrow{\text{osna simetrija}} \Delta m^T(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dm^T(r)}{dr} \right), \quad (8)$$

medtem ko ima dvojni Laplacev operator iz (1) obliko

$$\Delta \Delta w(r) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r)}{\partial \varphi^2} \right] \xrightarrow{\text{osna simetrija}} \quad (9)$$

$$\Delta \Delta w(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right) \right] \right\}$$

Tudi izrazi (3) - (7) se pri osnosimetričnem problemu poenostavijo. Nenične količine so

$$m_{rr}(r) = -K \left(\frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right) - m_{rr}^T(r), \quad m_{\varphi\varphi}(r) = -K \left(\nu \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right) - m_{\varphi\varphi}^T(r), \quad (10)$$

$$q_r(r) = -K \frac{\partial}{\partial r} [dw(r)] = -K \left(\frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right), \quad \bar{q}_r(r) = q_r \quad (11)$$

Z vstavitvijo (8) in (9) v (1), ter ob predpostavki, da plošča ne leži na elastični podlagi (t.j. $k=0$), je diferencialno enačbo osnosimetričnega upogiba krožnih plošč moč rešiti analitično z zaporednimi integracijami. Dobimo

$$w(r) = \int_r^1 \int_r^1 \int_r^1 \int_r^1 \frac{p(r)r}{K} dr dr dr dr - \frac{1}{1-\nu} \int_r^1 \int_r^1 r m^T(r) dr dr + c_1 \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + c_2 \frac{r^2}{4} + c_3 \ln r + c_4, \quad (12)$$

kjer so c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) štiri integracijske konstante, ki so odvisne od robnih pogojev.

4. Določitev konstant pri osnosimetričnem upogibu

Štiri konstante iz (12) določimo iz robnih pogojev. Če je plošča polna, se število konstant zmanjša za dva, ker je potrebno zadovoljiti tudi dvema pogojema na sredini plošče. To sta

$$r = 0 : \frac{dw}{dr} = 0 \longrightarrow c_3 = 0, \quad r = 0 : 2\pi r q_r = -P \xrightarrow{\lim_{r \rightarrow 0}} c_1 = \frac{P}{2K\pi} \quad (13)$$

Prva enačba v (13) zahteva, da je zasuk na sredini plošče enak nič, druga enačba pa, da je prečna sila q_r , (11), na sredini plošče enaka koncentrirani zunanji sili P . Iz (12) in (13) sledi, da je pomik polnih plošč, ki niso obremenjene s koncentrirano silo P , enak

$$w(r) = \int_r^1 \int_r^1 \int_r^1 \frac{p(r)r}{K} dr dr dr - \frac{1}{1-\nu} \int_r^1 \int_r^1 r m^T(r) dr dr + c_2 \frac{r^2}{4} + c_4. \quad (14)$$

Pri kolobarjastih ploščah pogoja (13) ne veljata, zato se določi vse štiri konstante iz pogojev na zunanjem in notranjem robu plošče. Tipični robni pogoji so podani v Tabeli 1.

Tabela 1. Tipični robni pogoji za polne in kolobarjaste krožne plošče (zunanji rob plošč je pri $r=a$, notranji rob kolobarjaste plošče je pri $r=b$; m_a , q_a , m_b in q_b so predpisana obtežba (moment in prečna sila) na robovih $r=a$ in $r=b$).

Tip plošče / Rob	Prosti	Prostoležeči	Vpeti
Polna krožna plošča ($0 < r < a$) $r = a$	$q_r = q_a$ $m_{rr} = m_a$	$w = 0$ $m_{rr} = m_a$	$w = 0$ $\frac{dw}{dr} = 0$
Kolobarjasta krožna plošča ($b < r < a$) $r = b$	$q_r = q_b$ $m_{rr} = m_b$	$w = 0$ $m_{rr} = m_b$	$w = 0$ $\frac{dw}{dr} = 0$
$r = a$	$q_r = q_a$ $m_{rr} = m_a$	$w = 0$ $m_{rr} = m_a$	$w = 0$ $\frac{dw}{dr} = 0$

Linearno elastična analiza osnosimetričnih krožnih plošč se torej prevede na določevanje konstant iz enačbe (12) oziroma konstant iz enačbe (14). To vodi do dveh linearnih enačb pri polnih ploščah, oziroma do štirih linearnih enačb pri kolobarjastih ploščah. Pri polnih ali kolobarjastih ploščah, ki so bolj komplicirano obtežene ali podprte (npr. prvi dve plošči v tabeli 2), se kombinira rešitev za polno ploščo z rešitvijo za kolobarjasto ploščo. Takrat lahko dobimo linearen sistem šestih, osmih, desetih ali več enačb. V našem primeru smo z uporabo programa *Mathematica* sisteme enačb za posamezen osnosimetrični primer rešili simbolično ter si tako pripravili knjižnico rešitev, ki je podobna tistim, ki jih najdemo v literaturi (npr. Hahn [1], Marcus [2], [3]).

Tabela 2: Potek pomikov in notranjih sil pri polni krožni plošči.


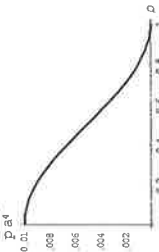
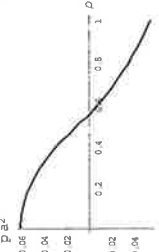
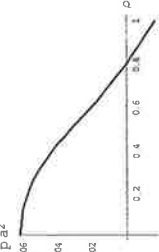
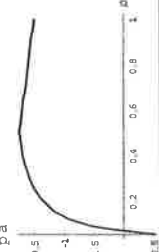

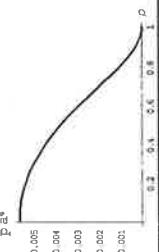
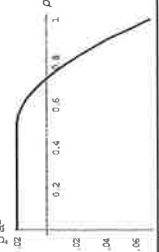
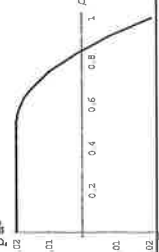
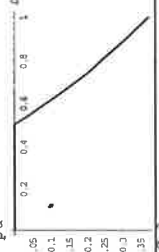


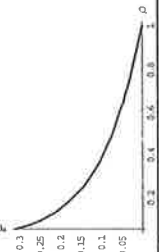
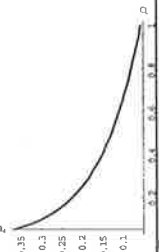
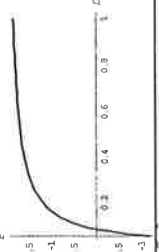
Plošča	w	m _{rr}	m _{φ0}	q _r
 <p>Robni pogoji: $r = a: w = 0; \quad dw/dr = 0$ $r = 0: w = w_0; \quad dw/dr = dw_0/dr$ $m_{rr} = m_{rr0}; \quad q_r = q_r0$</p>				
 <p>Robni pogoji: $r = a: w = 0; \quad dw/dr = 0$ $r = 0: w = w_0; \quad dw/dr = dw_0/dr$ $m_{rr} = m_{rr0}; \quad q_r = q_r0$</p>				
 <p>Robni pogoji: $1.) w(0) = 0$ $2.) m(\phi) = 0$ $3.) 2 \pi r q_r = -P \text{ pri } r = 0$</p>				

Tabela 3: Potek pomikov in notranjih sil po kolobarjasti krožni plošči.

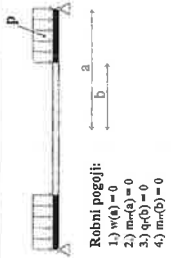

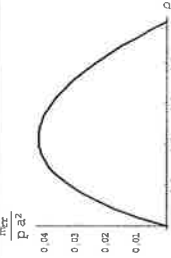
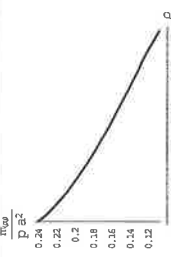
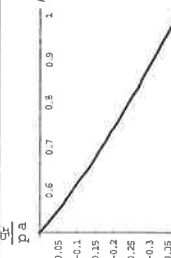
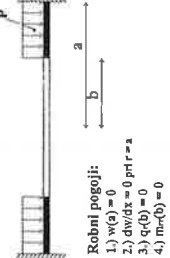
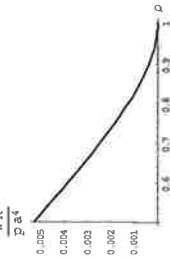
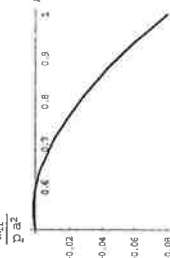
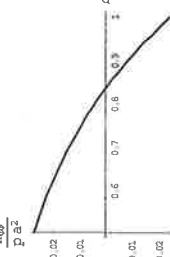
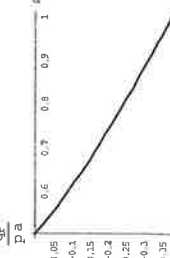
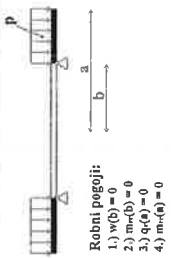
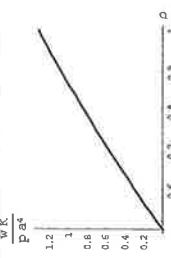
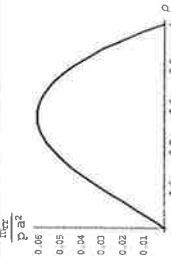
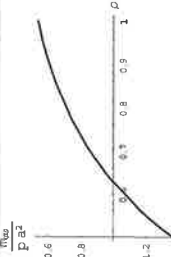
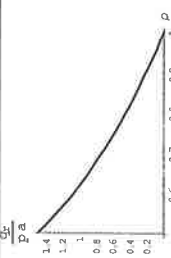
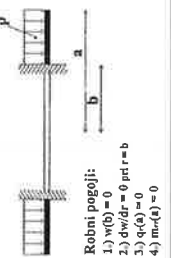
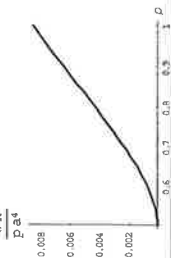
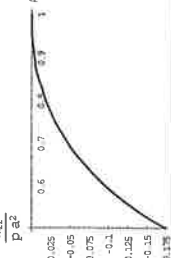
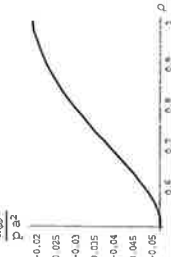
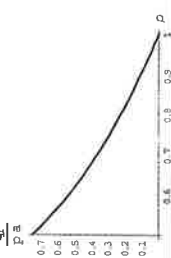
Plošča	w	m _{rr}	m _{φφ}	q _r
 <p>Robni pogoji:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.) $w(a) = 0$ 2.) $m_r(b) = 0$ 3.) $q_r(b) = 0$ 4.) $m_r(b) = 0$ 	 <p>$\frac{wK}{Pa^4}$</p>	 <p>$\frac{m_{rr}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{m_{\phi\phi}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{q_r}{Pa}$</p>
 <p>Robni pogoji:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.) $w(a) = 0$ 2.) $\frac{dw}{dx} = 0$ pri $r = a$ 3.) $q_r(b) = 0$ 4.) $m_r(b) = 0$ 	 <p>$\frac{wK}{Pa^4}$</p>	 <p>$\frac{m_{rr}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{m_{\phi\phi}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{q_r}{Pa}$</p>
 <p>Robni pogoji:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.) $w(b) = 0$ 2.) $m_r(b) = 0$ 3.) $q_r(a) = 0$ 4.) $m_r(b) = 0$ 	 <p>$\frac{wK}{Pa^4}$</p>	 <p>$\frac{m_{rr}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{m_{\phi\phi}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{q_r}{Pa}$</p>
 <p>Robni pogoji:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.) $w(b) = 0$ 2.) $\frac{dw}{dr} = 0$ pri $r = b$ 3.) $q_r(a) = 0$ 4.) $m_r(a) = 0$ 	 <p>$\frac{wK}{Pa^4}$</p>	 <p>$\frac{m_{rr}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{m_{\phi\phi}}{Pa^2}$</p>	 <p>$\frac{q_r}{Pa}$</p>

Tabela 4. Potek pomikov in notranjih sil po kolobarjasti krožni plošči pri zvezni obteži in različnih pogojih podpiranja.

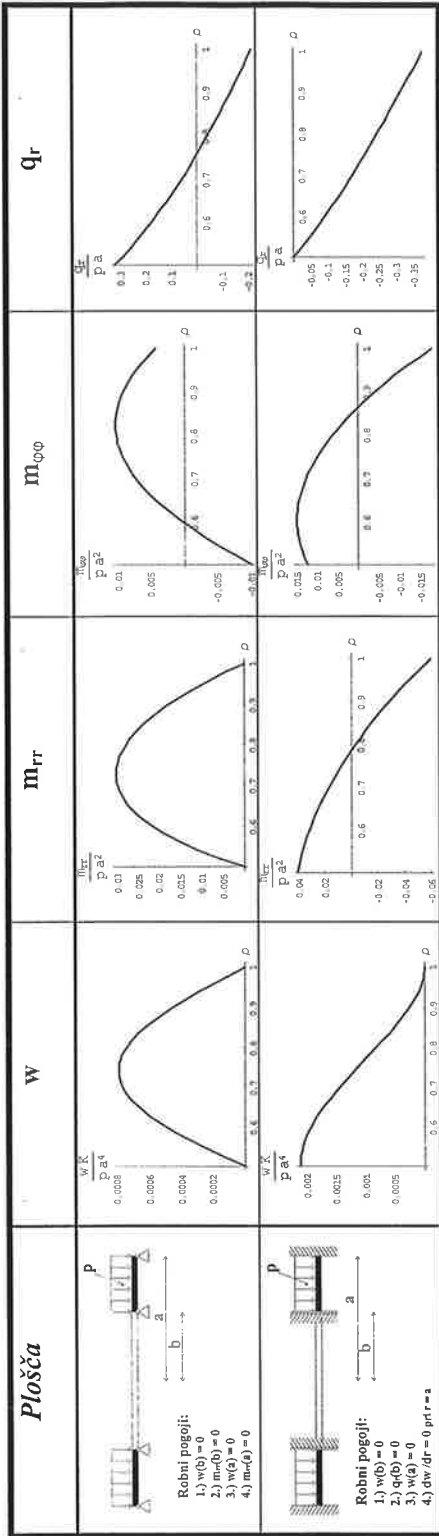
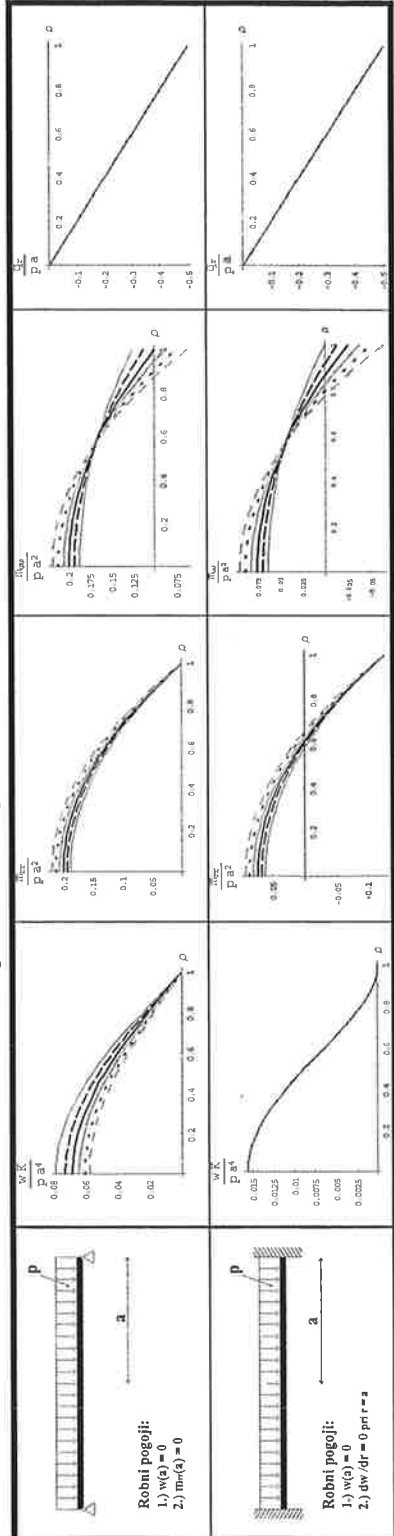


Tabela 5. Vpliv Poissonovega količnika na notranje sile in pomike.





 ——— ν = 0.0 - - - ν = 0.1 ν = 0.2 - · - · - ν = 0.3 ν = 0.4 ν = 0.5

5 Primeri

V tabelah 2 do 4 so prikazani rezultati analize desetih krožnih plošč z zunanjim polmerom a in z notranjim polmerom b , če je plošča kolobarjasta. Analiza je bila narejena v okviru [6]. Pri grafični predstavitvi rezultatov smo predpostavili, da je Poissonov količnik materiala plošč enak $\nu = 0.3$; plošče naj bi bile torej jeklene. Predpostavili smo tudi, da je razmerje notranjega in zunanega polmera pri kolobarjasti plošči enako $\beta = b/a = 0.5$.

Podani so poteki brezdimenzijskega pomika, brezdimenzijskih upogibnih momentov in brezdimenzijske prečne sile v odvisnosti od normirane koordinate $\rho = r/a$. Ob skici obtežnih primerov so podani tudi robni pogoji, s pomočjo katerih so bile iz vrednotene integracijske konstante.

V tabeli 2 imamo dve polni plošči, ki sta delno obteženi z enakomerno obtežbo, tako da kombiniramo rešitev za polno ploščo (14) z rešitvijo za kolobarjasto ploščo (12). Poleg tega imamo v tabeli 2 tudi polno ploščo obteženo s koncentrirano silo na sredi. V tabelah 3 in 4 imamo šest kolobarjastih plošč, obremenjenih z enakomerno obtežbo, pri katerih določimo po dve konstanti na vsakem robu. Podani so brezdimenzijski poteki pomika, upogibnih momentov in prečne sile. V tabeli 5 prikažemo vpliv Poissonovega količnika na dveh preprostih primerih; t.j. na prostoležeči in vpeti polni plošči obremenjeni z enakomerno obtežbo.

6 Zaključek

Postopek, s katerim pridemo do analitičnih rešitev za upogib osnosimetričnih krožnih plošč v okviru linearno elastične Kirchhoffove teorije izotropnih plošč, je predstavljen na enostaven in splošen način. S tem je študentu omogočeno boljše razumevanje problema v okviru predmeta Ploskovne konstrukcije I, kjer se ukvarjamo s teorijo in analizo plošč.

7 Literatura

- [1] Hahn J., *Durchlauftrager Ramen und Platten*, Werner-Verlag, 1958.
- [2] Marcus G., *Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke*, Werner-Verlag, 1967.
- [3] Marcus G., *Kreis - und Kreisringplatten unter periodischer Belastung*, Werner-Verlag, 1985.
- [4] Reedy, J.N., *Theory and Analysis of Elastic Plates*, Taylor & Francis, 1998.
- [5] Reflak, J., *Osnove plošč*, skripta, UL, FGG, 2000.
- [6] Rozman M., Seminarska naloga pri predmetu Ploskovne konstrukcije I, FGG, 2002.
- [7] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

531(063)(082)

KUHLJEVI dnevi (2002 ; Ribno pri Bledu)
Zbornik del / Kuhljevi dnevi '02, Ribno pri Bledu, 26.-27. september
2002;
uredila Leopold Škerget in Jure Marn - Ljubljana : Slovensko društvo
za mehaniko, 2002

Naslov v kolofonu: Kuhljevi dnevi 2002

ISBN 86-435-0496-3

1. Škerget, Leopold. - I. Kuhljevi dnevi '02 g. Kuhljevi dnevi
(2002 ; Ribno pri Bledu)
COBISS-ID 48002305