14.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 14. MAJ 2008

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

14. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 14. maj 2008

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
14. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Laserprint grafika, Ljubljana

Obseg: 24 strani

Naklada: 80 izvodov

Ljubljana, 2008

14. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2008

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 14. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Rado Flajs,
Igor Planinc,
Stane Srpčič,
Goran Turk,
Dejan Zupan,
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Duška Tomšič (Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola, Ljubljana) in
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 46 dijakinj in dijakov tretjega in 49 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 21.–23. aprila 2008. Štiriintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 14. maja 2008 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

ime in priimek	letnik	šola	mentor
Jure Berkopec	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Matic Čoh	3	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Janez Fabjan	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Nina Gorenc	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Rok Grah	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Leon Mačak	3	SGGEŠ Ljubljana	Duška Tomšič
Sandra Mavsar	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Miha Povše	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Biljana Rakanović	3	SŠG Celje	Lidija Jurički
Martin Rakovnik	3	SGŠ Maribor	Maja Lorger
Uroš Strojin	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Jurij Žagar	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Špela Žnidaršič	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Andrej Žolnir	3	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Matej Avbelj	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl
Aleš Cvelbar	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Nina Fekonja	4	SGŠ Maribor	Maja Lorger
Mitja Gregorčič	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Matija Jurše	4	SGŠ Maribor	Maja Lorger
Arnel Lihić	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Sebastian Mavsar	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Irnesa Melkić	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl
David Merlin	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Janez Mikec	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Urban Napotnik	4	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Marko Pirc	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Nejc Prašnikar	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Nejc Roškar	4	SGŠ Maribor	Maja Lorger
Špela Štih	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Blaž Štupar	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Jure Švegelj	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Klemen Turk	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Matevž Zupančič	4	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Grega Žitko	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGEŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠ Maribor	Srednja gradbena šola Maribor
SŠG Celje	Srednja šola za gradbeništvo Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 14. maja 2008 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom doc. dr. Violete Bokan-Bosiljkov, ogledali konstrukcijsko prometni laboratorij.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Tomaž Hozjan, Aleš Kroflič, Igor Planinc, Urban Rodman, Goran Turk in Eva Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan FGG prof. dr. Bojan Majes. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Miha Povše	SEŠTG Novo mesto	1. nagrada	84%
Rok Grah	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	49%
Nina Gorenc	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	44%

4. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Marko Pirc	SEŠTG Novo mesto	1. nagrada	80%
Jure Švegelj	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	75%
Sebastian Mavsar	SGLŠ Novo mesto	2. nagrada	70%
Matevž Zupančič	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	65%
Matija Jurše	SGŠ Maribor	3. nagrada	60%
Klemen Turk	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	50%

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	8.48	5.93	3.48	5.20	23.09
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	20	25	25	85

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	7.55	16.43	11.53	8.67	44.18
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	100

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.14	7.50	4.29	4.64	31.57
najnižja ocena	6	0	0	0	13
najvišja ocena	25	25	25	25	84

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	18.55	9.00	5.75	9.00	42.30
najnižja ocena	0	0	0	0	2
najvišja ocena	25	25	15	25	80

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom najtežje 3. naloga pri tretjih letnikih ter 1. naloga pri četrtih. Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene primerljive ali celo boljše kot na predtekmovanju. Najtežje so bile 3. in 4. naloga za tretje letnike in 3. naloga za 4. letnike.

Zanimivo je tudi, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju je skoraj vsako nalogo pravilno rešil vsaj en dijak. Izjema je bila le 2. naloga pri tretjih letnikih, ki je bila najtežja za dijake. Pri tej nalogi je en dijak zbral 20, dva pa 15 točk. Na predtekmovanju so se bolje odrezali četrti letniki. Na sklepnem tekmovanju je bila prav tako opazna razlika v uspešnosti med tretjim in četrtim letnikom, saj je v četrtih letnikih prvi dve nalogi rešilo precej več dijakov. Le 3. naloge v četrtih letnikih ni uspelo rešiti nobenemu dijaku – najvišja ocena je bila 15%.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
3	0	2	5
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
11	19	14	11

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
1	2	1	1
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
9	5	0	1

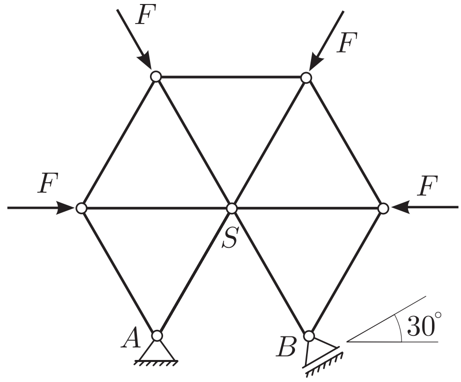
Letošnje tekmovanje sta finančno podprla:
Ministrstvo za šolstvo in šport,
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://www.km.fgg.uni-lj.si/tekma/tekma.htm`.

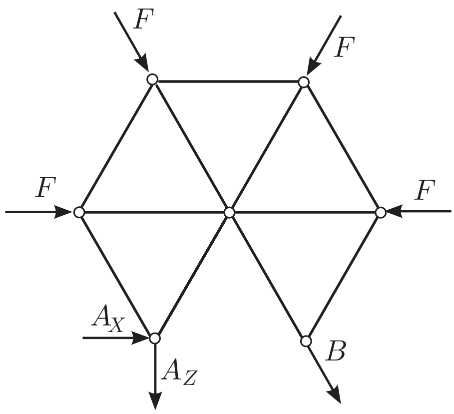
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

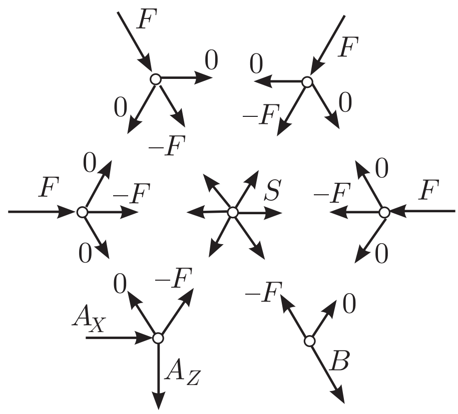
1. naloga

Določi osne sile v prikazanem paličju! Velikosti točkovnih sil so $F = 10\,\mathrm{kN}$, enake so tudi dolžine palic $a = 2\,\mathrm{m}$.



Rešitev: Podpori odstranimo in ju nadomestimo z reakcijami. Vozlišča izrežemo, vplive palic pa nadomestimo s silami v palicah. Shema izrezovanja je predstavljena na spodnjih slikah.

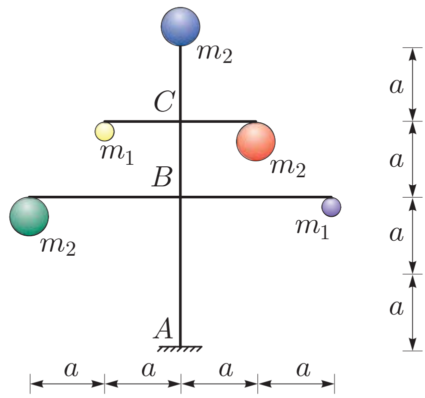




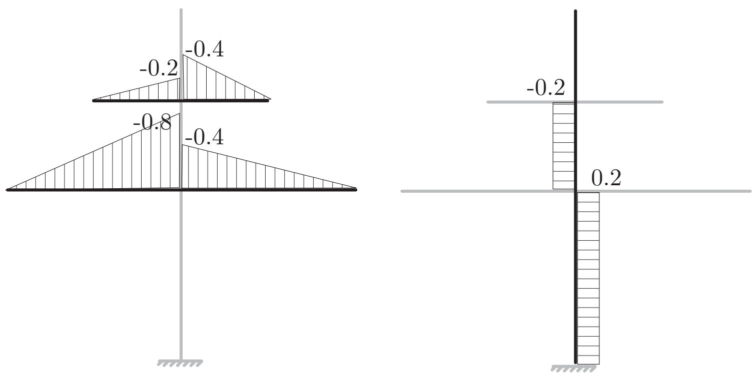
Osne sile v palicah določamo postopoma z ravnotežnimi enačbami vozlišč. Najprej analiziramo vozlišče B. Reakcija podpore je vzporedna eni palici, zato je sila v drugi palici enaka nič. Postopek nadaljujemo po vozliščih na obodu v nasprotni smeri urinega kazalca. Tako ugotovimo, da so vse osne sile v palicah na obodu enake nič, osne sile v palicah, ki povezujejo srednje vozlišče S z obodom pa $-F$.

2. naloga

Novoletno jelko smo okrasili s kroglami z masami $m_1 = 100$ g in $m_2 = 200$ g. Računski model novoletne jelke je prikazan na sliki. Dolžina a znaša 20 cm. Določi in nariši diagrame upogibnih momentov v jelki! Rezultate preveri v točkah B in C!



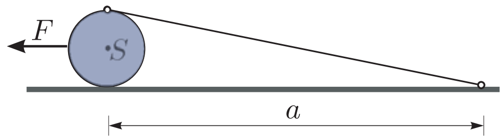
Rešitev: Na vejah so poteki momentov linearni. Na prostih koncih so enaki nič, ob deblu pa so enaki produktu sile teže krogle in dolžine veje. Momenti so zaradi nesimetrije neničelni vzdolž stebla. Momenti so po deblu odsekoma konstantni in predstavljajo razliko med momenti v vejah tik ob steblu. Diagrami momentov so prikazani na spodnji sliki, vrednosti so podane v Nm. Zaradi preprostosti je privzeto, da je težnosti pospešek enak $g = 10$ m/s^2, diagrami pa so zaradi preglednosti prikazani posebej za veje in posebej za deblo.



Za preverjanje momentov izrežemo točki B in C in ustrezno upoštevamo vse štiri momente v vsaki točki, kot kaže spodnja slika. Pri tem pazimo na pravilne predznake v skladu z izbranimi koordinatnimi sistemi. Vsota momentov v obeh točkah je enaka nič.

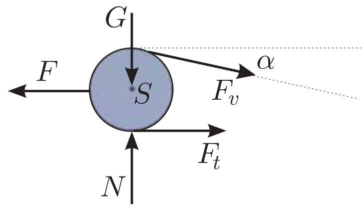
3. naloga

Valj premera 20 cm je pripet na podlago z idealno neraztegljivo vrvjo, kot kaže slika. Koeficient trenja (lepljenja) med valjem in podlago znaša $k_t = 0.4$. Valj je izdolben tako, da se vrv ni valj ne ovirata.



V vodoravni smeri povlečemo valj s silo F. Kolikšna sila je potrebna, da premaknemo valj? Masa valja je 10 kg. Vodoravna razdalja med težiščem valja S, na katerega deluje sila F, in pritrdiščem vrvi je $a = 1\,\mathrm{m}$.

Rešitev: Vpliv vrvi in podlage na valj nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Zapišimo ravnotežje sil v navpični smeri in ravnotežje momentov na težišče valja

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad N = G + F_v \sin\alpha = mg + F_v \sin\alpha$$

$$\sum M^S = 0 \quad \rightarrow \quad F_t \frac{d}{2} - F_v \cos\alpha \frac{d}{2} = 0.$$

Kot α določimo iz pogoja

$$\tan\alpha = \frac{0.2}{1} \quad \rightarrow \quad \alpha = 11.31^\circ.$$

Če upoštevamo še zvezo med silo podlage in silo trenja

$$F_t = k_t N,$$

kjer smo s k_t označili koeficient trenja, sledi

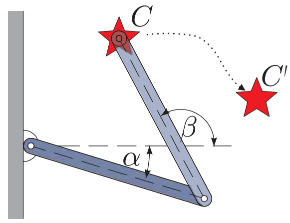
$$F_v = \frac{k_t mg}{\cos\alpha - k_t \sin\alpha} = 43.5\,\mathrm{N}.$$

Ko poznamo silo v vrvi, je izračun vlečne sile F preprost. Določa jo neenačba:

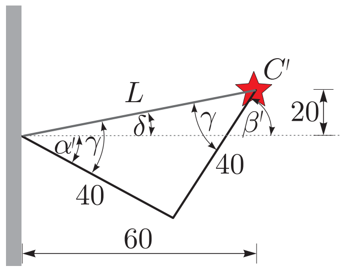
$$F \geq F_t + F_v \cos\alpha = 2F_v \cos\alpha$$
$$F \geq 85.3\,\mathrm{N}.$$

4. naloga

Robotsko roko sestavljata dva členkasto povezana toga elementa z dolžinama 40 cm. Z njo ˇželimo tovor iz toˇčke C prestaviti v točko C'. Lego roke v točki C določata kota α in β (glej sliko). Podobno določata lego v točki C' kota α' in β'. Določi ta kota! Točka C' je od stene oddaljena 60 cm in leži 20 cm nad označeno vodoravnico.



Rešitev: Oba elementa določata v poljubni legi enakokraki trikotnik s stranicama 40 cm.



Dolžino tretje stranice L določimo iz znanih koordinat točke C'

$$L = \sqrt{60^2 + 20^2} = 63.25\,\mathrm{cm}.$$

Z upoštevanjem kotov v pravokotnem trikotniku lahko določimo kota δ in γ (glej sliko)

$$\tan\delta = \frac{20}{60} \quad\rightarrow\quad \delta = 18.44^\circ$$
$$\cos\gamma = \frac{L}{2\cdot 40} \quad\rightarrow\quad \gamma = 37.76^\circ.$$

Iskana kota pa predstavljata ravno vsoto in razliko kotov δ in γ:

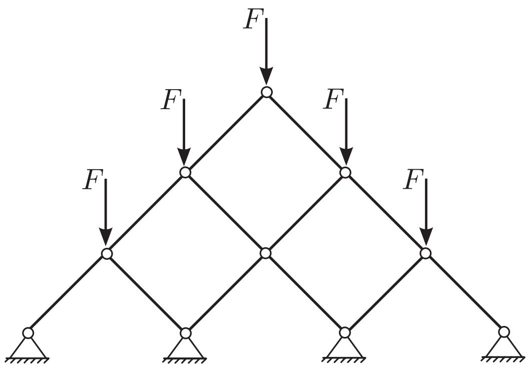
$$\alpha' = \gamma - \delta = 19.33^\circ$$
$$\beta' = \gamma + \delta = 56.20^\circ.$$

Zanimivo je, da obstaja še ena rešitev naloge, ki jo dobimo z zrcaljenjem enakokrakega trikotnika preko stranice z dolžino L.

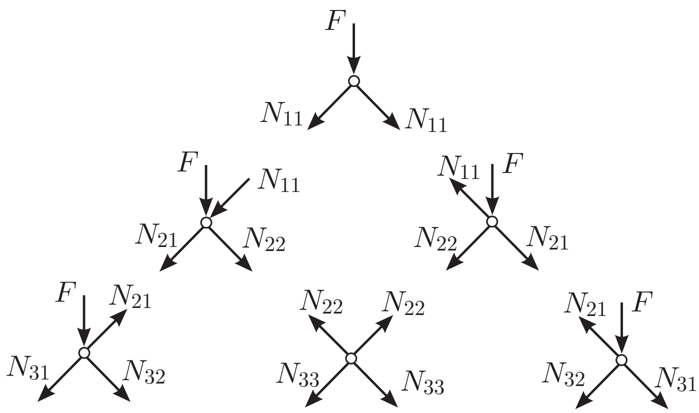
Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Poišči palico, v kateri nastopi največja osna sila in izračunaj osno silo v tej palici! Je teh palic morda več? Velikosti sil so $F = 10\,\mathrm{kN}$, dolžine vseh palic so $1.5\,\mathrm{m}$. Naklon palic je $45°$.



Rešitev: Izrežemo vozlišča paličja in rešujemo ravnotežne enačbe v vozliščih od vrha paličja navzdol proti podporam. Posamezne palice označimo z N_{ij}, pri čemer prvi indeks pomeni nivo palic, drugi indeks pa horizontalno zaporedje palic. Pri označevanju upoštevamo še simetrijo. Izrezana vozlišča z vsemi silami so predstavljena na spodnji sliki.



Osni sili v palicah prvega nivoja sta enako veliki. Ker ležita pod kotom $45°$, velja

$$N_{11} = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -7.07\,\mathrm{kN}.$$

Za obe vozlišči drugega nivoja lahko zapišemo ravnotežni enačbi v vodoravni in navpični smeri:

$$\sum X = 0 \rightarrow \quad N_{11}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{22}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ \rightarrow N_{21} - N_{22} = -F\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow \quad N_{11}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{22}\frac{\sqrt{2}}{2} = F \ \rightarrow N_{21} + N_{22} = -F\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Rešitvi teh dveh enačb sta;

$$N_{21} = -F\sqrt{2} = -14.14\,\mathrm{kN}, \qquad N_{22} = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -7.07\,\mathrm{kN}.$$

Postopek ponovimo še za najnižji nivo vozlič

$$\sum X = 0 \to \quad N_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{31}\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{32}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \to \quad N_{21} - N_{22} = -F\sqrt{2}$$

$$\sum Y = 0 \to \quad N_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{31}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{32}\frac{\sqrt{2}}{2} = F \to \quad N_{21} + N_{22} = -2F\sqrt{2}.$$

Od tu sledi

$$N_{31} = -\frac{3}{2}F\sqrt{2} = -21.21\,\mathrm{kN}, \qquad N_{32} = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -7.07\,\mathrm{kN}.$$

Ravnotežni enačbi za srednje vozlišče pa neposredno določata preostali osni sili

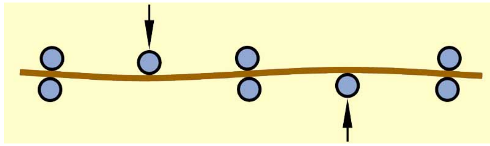
$$N_{33} = N_{22} = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -7.07\,\mathrm{kN}.$$

Največji osni sili sta torej v obeh palicah spodnjega nivoja, na sliki označeni z N_{31}, ki znašata $-21.21\,\mathrm{kN}$.

2. naloga

Naprava za razvrščanje konstrukcijskega lesa glede na trdnost je prikazana na sliki. Naprava deluje na osnovi upogibanja lesenih preizkušancev. Na spodnji shemi dvojna valja predstavljata podpore, z enojnima valjema pa preizkušanec obtežimo in merimo pomike. Razdalje med valji so 50 cm.

Če zanemarimo lastno težo in predpostavimo, da je preizkušanec homogen, je zaradi simetrije podpor in antisimetrije obtežbe reakcija v srednji podpori enaka nič.

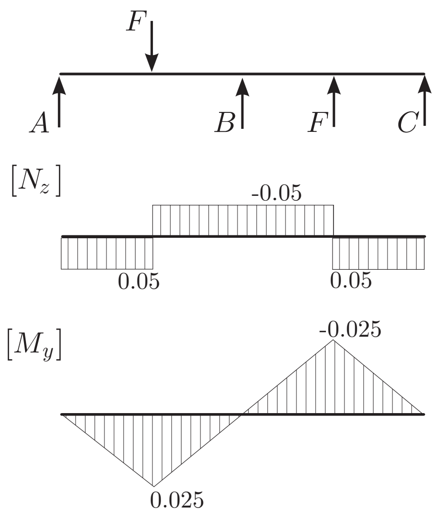


Določi reakciji v drugih dveh podporah ter določi in nariši diagrame notranjih sil v preizkušancu! Sili, s katerima premična valja obtežita preizkušanec, znašata $F = 0.1$ kN.

Rešitev: Iz ravnotežnih enačb za celotno konstrukcijo določimo reakcije podpor, saj vemo, da je $B = 0$:

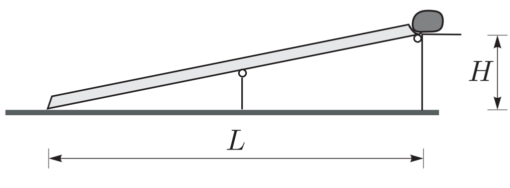
$$
\begin{aligned}
&\sum M_Y^A = 0 \quad \to \quad -F\,a + F\,3a + C\,4a = 0 \quad \to \quad C = -\frac{F}{2} = -0.5\,\mathrm{kN},\\
&\sum Z = 0 \quad \to \quad A + B + C = 0 \quad \to \quad A = -C = 0.5\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

Konstrukcijo razdelimo na tri polja in rešimo ravnotežne enačbe za vsako polje posebej. Osne sile so povsod enake nič. Prečne sile so konstantne, skok imajo v prijemališčih obeh sil. Upogibni momenti so na obeh koncih enaki nič, proti prijemališčema sil pa naraščajo oziroma padajo do ekstremne vrednosti 0.025 kNm. V prijemališčih obeh sil se diagram momentov lomi, v osrednem polju je linearen in na sredi preskušanca (točka B) enak nič. Diagrami notranjih sil so prikazani na spodnji sliki, enote so kN in kNm.



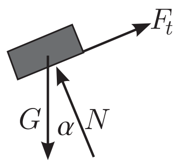
3. naloga

Koeficient trenja med vodnim toboganom in kopalci določimo tako, da po njem spustimo vrečo z maso 60 kg in merimo čas drsenja.



Določi koeficient trenja k_t pri ravnem vodnem toboganu z vodoravno dolžino $L =$ 10 m in višino $H = 4$ m! Začetna hitrost vreče je enaka nič, čas drsenja pa 4 sekunde. Pri določitvi koeficienta trenja predpostavimo, da je gibanje vreče enakomerno pospešeno. V tem primeru gibanje vreče določata enačbi $F = m\,a$ in $S = at^2/2$, kjer m označuje maso, a je pospešek, F je rezultanta sil v smeri gibanja, S je pot in t čas gibanja.

Rešitev: Na gibajoče se telo oziroma vrečo na poševni podlagi delujejo lastna teža G, sila podlage N in sila trenja F_t. Silo G razstavimo na komponenti v smeri podlage in pravokotno na podlago.



Iz ravnotežja sil pravokotno na podlago sledi

$$N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha,$$

sila trenja pa je enaka produktu koeficienta trenja k_t in sile podlage:

$$F_t = k_t N = k_t mg\cos\alpha.$$

Kot α določimo z enačbo

$$\tan\alpha = \frac{4}{10} \quad \rightarrow \quad \alpha = 21.8^\circ.$$

Rezultanta sil v smeri gibanja vreče je enaka produktu mase in pospeška, zato je

$$G\sin\alpha - F_t = ma$$
$$mg\sin\alpha - k_t mg\cos\alpha = ma.$$

Iz poti, ki jo opravi vreča z začetno hitrostjo nič, izračunamo pospešek

$$S = a\frac{t^2}{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{2S}{t^2} = \frac{2\sqrt{L^2+H^2}}{t^2} = 1.35\,\mathrm{m/s^2}.$$

Pospešek pa je enak tudi vsoti sil, deljeni z maso, od koder izrazimo koeficient trenja:

$$a = g\left(\sin\alpha - k_t\cos\alpha\right) \quad \rightarrow \quad k_t = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\sin\alpha - \frac{a}{g}\right) = 0.25.$$

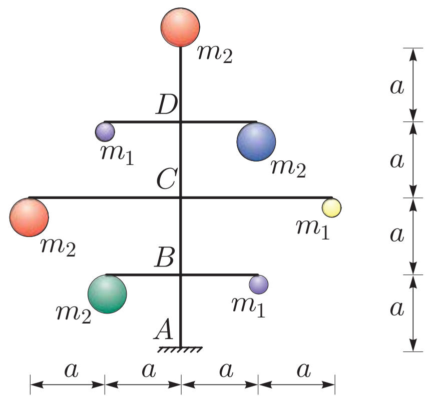
4. naloga

Glej četrto nalogo za 3. letnike!

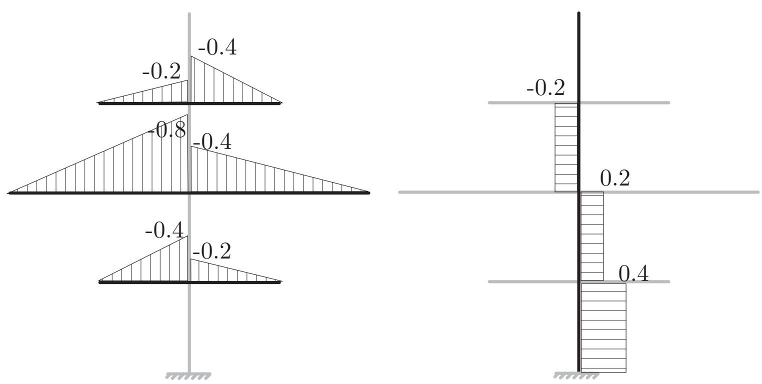
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

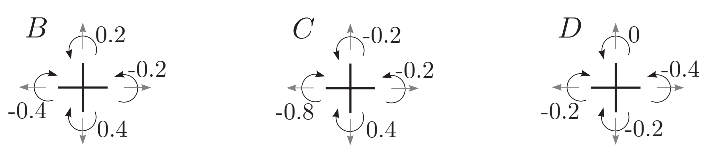
Novoletno jelko smo okrasili s kroglicami z masami 100 in 200 gramov, $m_1 = 100$ g in $m_2 = 200$ g. Računski model novoletne jelke je prikazan na sliki.
Dolžina a znaša 20 cm. Določi in nariši diagrame upogibnih momentov v jelki! Rezultate preveri v točkah B, C in D!



Rešitev: Na vejah so poteki momentov linearni. Na prostih koncih so enaki nič, ob deblu pa so enaki produktu sile teže krogle in dolžine veje. Momenti so zaradi nesimetrije neničelni vzdolž debla. Momenti so po deblu odsekoma konstantni in predstavljajo razliko med momenti v vejah tik ob deblu. Diagrami momentov so prikazani na spodnji sliki, vrednosti so podane v Nm. Zaradi preprostosti je privzeto, da je težnosti pospešek enak $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, zaradi preglednosti pa ločeno prikazujemo diagrame za veje in deblo.

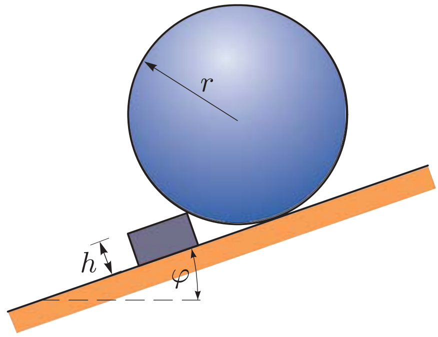


Za preverjanje momentov izrežemo točke B, C in D in ustrezno upoštevamo vse štiri momente v vsaki točki, kot je prikazano na spodnji sliki.

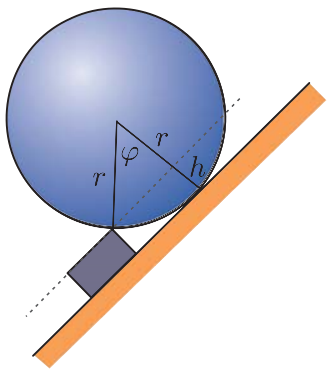


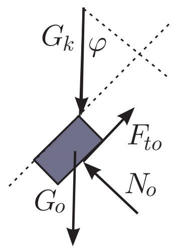
2. naloga

Določi naklon klanca φ, da se krogla prekotali preko ovire v obliki kvadra višine h. Koliko mora biti minimalno koeficient lepenja med oviro in podlago, da ovira ne zdrsne? Predpostavimo lahko, da med kroglo in oviro ni trenja. Masi krogle in ovire sta enaki.
$h = 5\,\text{cm}$, $r = 50\,\text{cm}$,
$m_k = 50\,\text{kg}$, $m_o = 50\,\text{kg}$.



Rešitev: Krogla se prekotali preko ovire, ko ima težišče nad dotikališčem z oviro. Iščemo torej tak kot φ, da težišče krogle in dotikališče ležita na skupni navpični premici.





Na osnovi zgornje slike izrazimo

$$\cos\varphi = \frac{r-h}{r} \quad \rightarrow \quad \varphi = \text{acos}\left(\frac{r-h}{r}\right) = 25.84^\circ.$$

Iz ravnotežnja sil pravokotno na klanec sledi

$$N_o = (G_o + G_k)\cos\varphi.$$

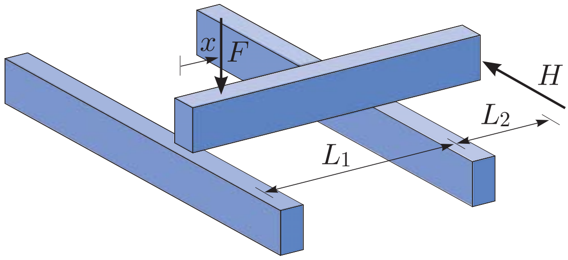
Da ovira ne zdrsne, mora v smeri klanca veljati neenačba:

$$(G_o + G_k)\sin\varphi \leq F_{to}$$

$$(G_o + G_k)\sin\varphi \leq k_t N_o \quad \rightarrow \quad \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \leq k_t.$$

Torej mora biti koeficient trenja $k_t \geq 0.483$.

3. naloga



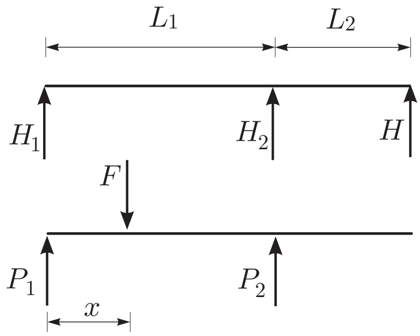
Pravokotno na dveh jeklenih nosilcih leži tretji, kot kaže slika. Nosilec je obtežen z navpično silo $F = 10\,\mathrm{kN}$ in vodoravno silo H. Določi lego x navpične sile F tako, da bo vodoravna sila največja in ne bo prišlo do prečnega zdrsa nosilca!

$L_1 = 6\,\mathrm{m}$, $L_2 = 3\,\mathrm{m}$,$F = 10\,\mathrm{kN}$, $k_l = 0.3$.

Rešitev: Vodoravni sili H_1 in H_2 izrazimo s silo H iz ravnotežnih enačb

$$\sum M_Z^1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_2 L_1 + H\,(L_1 + L_2) = 0 \quad \rightarrow \quad H_2 = -\frac{3}{2}H$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad H_1 + H_2 = -H \quad \rightarrow \quad H_1 = \frac{1}{2}H.$$



Podobno izrazimo tudi sili podlage P_1 in P_2 z obtežbo F iz ravnotežnih enačb v pravokotni ravnini

$$\sum M_Y^1 = 0 \quad \rightarrow \quad P_2 L_1 - Fx = 0 \quad \rightarrow \quad P_2 = -\frac{x}{L_1}F = -\frac{x}{6}F$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad P_1 + P_2 = F \quad \rightarrow \quad P_1 = \frac{6-x}{6}F.$$

Da ne pride do zdrsa zgornjega jeklenega nosilca, morata biti velikosti obeh vodoravnih sil manjši od sile trenja:

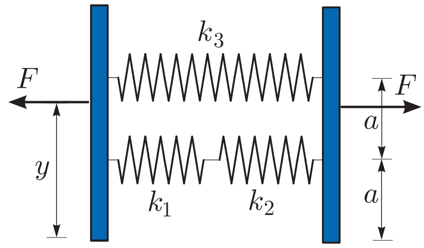
$$\begin{aligned} |H_1| &\leq |k_t P_1| \qquad & |H_2| &\leq |k_t P_2| \\ \frac{1}{2}H &\leq \frac{6-x}{2} \qquad & \frac{3}{2}H &\leq \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Iščemo torej prijemališče sile x_0, ki zadošča obema zahtevama

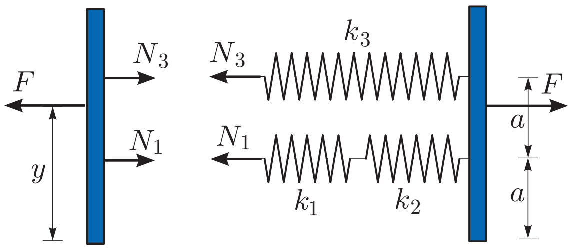
$$6 - x_0 = \frac{x_0}{3} \quad \rightarrow \quad x_0 = 4.5\,\mathrm{m}.$$

4. naloga

Dve togi plošči na sliki sta povezani z vzmetmi togosti k_1, k_2 in k_3, kot prikazuje slika. Določi lego y sile F tako, da se plošči ne zavrtita! Določi tudi sile v vzmeteh in raztezke vseh vzmeti!
$a = 10\,\mathrm{cm}$, $F = 1\,\mathrm{kN}$,
$k_1 = 10\,\mathrm{kN/cm}$, $k_2 = 30\,\mathrm{kN/cm}$,
$k_3 = 20\,\mathrm{kN/cm}$.



Rešitev: Prerežimo vzmeti ob levi plošči in odrezane vzmeti nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Pomik sestavljene vzmeti (1+2) je enak vsoti pomikov

$$u_{1+2} = u_1 + u_2.$$

Ker se plošči ne zavrtita, je pomik sestavljene vzmeti enak pomiku tretje vzmeti:

$$u_{1+2} = u_1 + u_2 = u_{3.}$$

Sila in pomik linearne vzmeti sta povezana s koeficientom vzmeti ($F = ku$). Če sile v vzmeteh označimo z N_1, N_2 in N_3, lahko gornjo enačbo zapišemo kot

$$\frac{N_1}{k_1} + \frac{N_2}{k_2} = \frac{N_3}{k_3}.$$

Zaradi ravnotežja sil sta sili N_1in N_2 v sestavljeni vzmeti enaki. Ravnotežni enačbi za levo ploščo pa določata enačbi

$$\sum M_Y^T = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_3 2a + N_1 a = Fy$$
$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_1 + N_3 = F.$$

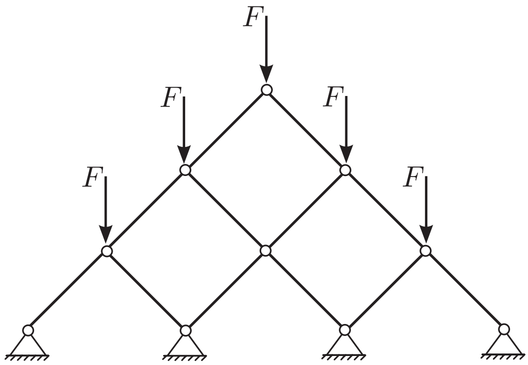
Dobili smo sistem štirih enačb za štiri neznanke N_1, N_2, N_3 in y. Rešitve za dane podatke so

$$N_1 = N_2 = 0.273\,\mathrm{kN}, \quad N_3 = 0.727\,\mathrm{kN}, \quad y = 17.3\,\mathrm{cm}.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

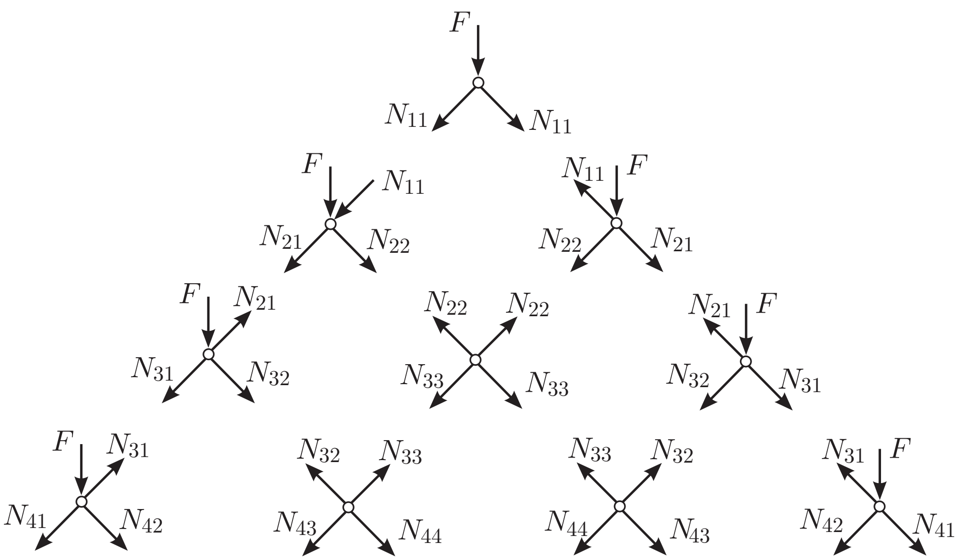
1. naloga

V nalogi s predtekmovanja ste morali poiskati palico, v kateri nastopi največja osna sila in izračunati osno silo v tej palici! Velikosti sil so $F = 10\,\mathrm{kN}$, dolžine vseh palic so $1.5\,\mathrm{m}$. Naklon palic je $45°$.



Vzemimo, da ima paličje n etaž (namesto treh v prikazanem paličju). Poišči najbolj obremenjeno palico v tako povečanem paličju in določi osno silo v njej!

Rešitev: Izrežemo vozlišča paličja in rešujemo zaporedoma ravnotežne enačbe v vozliščih od vrha paličja navzdol proti podporam. Posamezne palice označimo z N_{ij}, pri čemer prvi indeks pomeni nivo palic, drugi indeks pa horizontalno zaporedje palice, pri čemer upoštevamo še simetrijo paličja. Število nivojev palic je enako n. Izrezana vozlišča z vsemi silami do četrtega nivoja so predstavljena na sliki.



Osni sili v palicah prvega nivoja sta enako veliki

$$N_{11} = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -7.07\,\mathrm{kN}.$$

Za obe vozlišči drugega nivoja lahko zapišemo ravnotežni enačbi v vodoravni in navpični smeri:

$$\sum X = 0 \rightarrow \quad N_{11}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{22}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow N_{21} - N_{22} = -F\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sum Y = 0 \rightarrow \quad N_{11}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{21}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{22}\frac{\sqrt{2}}{2} = F \rightarrow N_{21} + N_{22} = -F\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Rešitvi teh dveh enačb sta

$$N_{21} = -F\sqrt{2} \qquad N_{22} = -F\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Iz prikazanega sklepamo, da ostajajo sile palic v notranjosti enake $-F\sqrt{2}/2$ in da se z nivoji večajo le sile palic na obodu. Za podrobnosti si oglej 1. nalogo s predtekmovanja. Predpostavimo, da je osna sila v obodni palici nivoja $n$enaka

$$N_{n1} = -F\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Trditev dokažemo z matematično indukcijo. Zapišimo ravnotežne pogoje za vozliče na obodu nivoja $n+1$

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \quad N_{n1}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{(n+1)1}\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{(n+1)2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\sum Y = 0 \qquad \rightarrow \quad N_{n1}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{(n+1)1}\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{(n+1)2}\frac{\sqrt{2}}{2} = F.$$

Enačbi lahko zapišemo v obliki

$$N_{(n+1)1} - N_{(n+1)2} = -F\frac{n\sqrt{2}}{2}$$
$$N_{(n+1)1} + N_{(n+1)2} = -F\frac{(n+2)\sqrt{2}}{2}.$$

Z vsoto in razliko zgornjih enačb dobimo iskani sili:

$$N_{(n+1)1} = -\frac{(n+1)\sqrt{2}}{2}F \qquad N_{(n+1)2} = -F\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

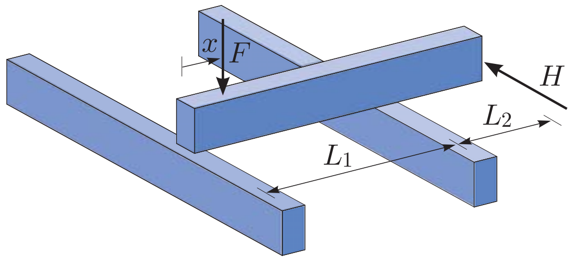
Izraz za silo nivoja $n+1$ se ujema z indukcijsko predpostavko. Iz veljavnosti za $n = 1$ (glej tudi 1. nalogo s predtekmovanja) in iz izpolnjenosti indukcijske predpostavke iz n v $n+1$ sledi veljavnost trditve za poljubno število nivojev.

2. naloga

Glej drugo nalogo za 3. letnike!

3. naloga

Pravokotno na dveh jeklenih nosilcih leži tretji nosilec z lastno težo $G = 5\,\mathrm{kN}$, kot kaže slika. Nosilec je obtežen z navpično silo $F = 10\,\mathrm{kN}$ in vodoravno silo H. Določi lego x navpične sile F tako, da bo vodoravna sila največja in ne bo prišlo do prečnega zdrsa nosilca!

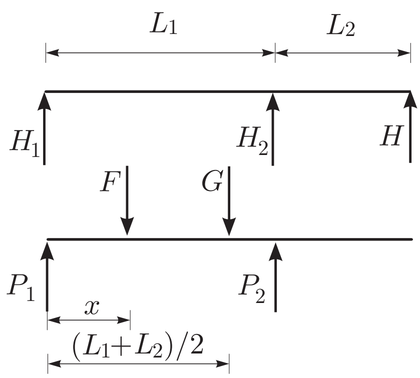


$L_1 = 6\,\mathrm{m}$, $L_2 = 3\,\mathrm{m}$, $F = 10\,\mathrm{kN}$, $k_l = 0.3$.

Rešitev: Vodoravni sili H_1 in H_2 izrazimo s silo H iz ravnotežnih enačb (glej spodnjo sliko)

$$\sum M_Z^1 = 0 \quad \rightarrow \quad H_2 L_1 + H\left(L_1 + L_2\right) = 0 \quad \rightarrow \quad H_2 = -\frac{3}{2}H$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad H_1 + H_2 = -H \quad \rightarrow \quad H_1 = \frac{1}{2}H.$$



Podobno izrazimo sili podlage P_1 in P_2 z obtežbama F in G iz ravnotežnih enačb v pravokotni ravnini

$$\sum M_Y^1 = 0 \rightarrow P_2 L_1 - Fx - G\frac{L_1 + L_2}{2} = 0 \rightarrow P_2 = \frac{x}{L_1}F + \frac{L_1 + L_2}{2L_1}G$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow P_1 + P_2 = F + G \quad \rightarrow P_1 = \frac{L_1 - x}{L_1}F + \frac{L_1 - L_2}{2L_1}G.$$

Do prečnega zdrsa ne pride, če sta velikosti obeh vodoravnih sil manjši od sile trenja:

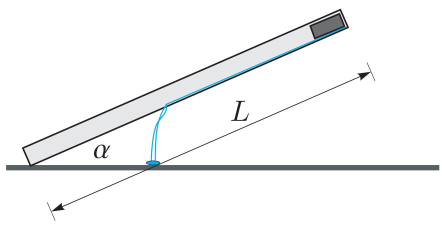
$$\begin{aligned} |H_1| &\leq |k_t P_1| \qquad & |H_2| \leq |k_t P_2| \\ \frac{1}{2}H &\leq \frac{6-x}{2} + \frac{3}{8} \qquad & \frac{3}{2}H \leq \frac{x}{2} + \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Iščemo prijemališče sile x_0, ki zadošča obema zahtevama

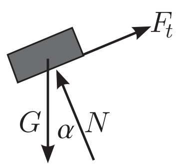
$$6 - x_0 + \frac{3}{4} = \frac{x_0}{3} + \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x_0 = 4.5\,\text{m}.$$

4. naloga

Valj z maso $m = 10\,\text{kg}$ spustimo po ravni 15 m dolgi cevi, $L = 15\,\text{m}$. Cev je nagnjena glede na podlago za kot $\alpha = 30°$. Po cevi teče voda, vendar nekje cev pušča. Koeficient trenja v cevi nad razpoko znaša 0.2, pod razpoko pa 0.5. Celoten čas drsenja znaša 5 sekund. Določi čas drsenja valja do razpoke in lego razpoke!



Rešitev: Na gibajoče se telo na poševni podlagi delujejo lastna teža G, sila podlage N in sila trenja F_t. Silo G razstavimo na komponenti v smeri podlage in pravokotno na podlago.



Iz ravnotežja sil pravokotno na podlago dobimo silo podlage

$$N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Sila trenja je enaka produktu koeficienta trenja in sile podlage:

$$F_t = k_t N = k_t mg\cos\alpha.$$

Rezultatnta sil v smeri gibanja mora biti enaka produktu mase in pospeška, zato je

$$\begin{aligned} &G\sin\alpha - F_t = ma \\ &mg\sin\alpha - k_t mg\cos\alpha = ma \end{aligned}$$

in sledi

$$a = g\left(\sin\alpha - k_t\cos\alpha\right).$$

Pot, ki jo opravi telo, lahko izrazimo tudi z enačbo

$$S = vt + a\frac{t^2}{2}.$$

Zaradi razpoke je gibanje valja v cevi sestavljeno iz dveh faz. V fazi nad razpoko opravi valj v času t_1 pot S_1, pri tem je začetna hitrost enaka nič, pospešek pa je konstanten in enak

$$a_1 = g\left(\sin\alpha - 0.2\cos\alpha\right).$$

Pot valja po prvi fazi je torej enaka

$$S_1 = a_1\frac{t_1^2}{2}.$$

Končna hitrost po prvi fazi je enaka produktu pospeška in časa $v_1 = a_1 t_1$. V fazi pod razpoko opravi valj v času t_2 pot S_2. Tedaj je začetna hitrost enaka končni hitrosti prejšnje faze v_1, pospešek pa je zopet konstanten in enak

$$a_2 = g\left(\sin\alpha - 0.5\cos\alpha\right).$$

Pot valja po drugi fazi je enaka

$$S_2 = v_1 t_2 + a_2\frac{t_2^2}{2}.$$

Ker mora biti vsota obeh poti enaka 15 metrov, dobimo zvezo

$$S_1 + S_2 = a_1\frac{t_1^2}{2} + v_1 t_2 + a_2\frac{t_2^2}{2} = 15.$$

Ker velja še

$$t_2 = 5 - t_1,$$

dobimo eno kvadratno enačbo za določitev neznanega časa t_1. Izmed dveh rešitev je le ena fizikalno smiselna (druga je negativna) in ta je

$$t_1 = 0.539\,\mathrm{s}.$$

Pripadajoča pot valja v prvi fazi je $S_1 = 0.475\,\mathrm{m}$. Tako majhna razdalja do razpoke ni presenetljiva, saj že na tako kratki poti dobi valj zelo veliko hitrost.