19. SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 15. MAJ 2013

9 789616 884198

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

19. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 15. maj 2013

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
19. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Ljubljana

Obseg: 26 strani

Naklada: 100 izvodov

Ljubljana, 2013

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (19 ; 2013 ; Ljubljana)
[Devetnajsto]
19. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana, 15. maj 2013 / [pripravili] Dejan Zupan ... [et al.]. - Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2013

ISBN 978-961-6884-19-8
1. Zupan, Dejan, 1973-
273004544

19. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2013

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 19. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Stane Srpčič,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana)
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 79 dijakinj in dijakov tretjega in 75 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 10. aprila 2013. Šestintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 15. maja 2013 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime priimek	**Letnik**	**Šola**	**Mentor**
Blaž Ajdič	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Mitja Avguštinčič	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Dejan Brečko	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Maja Cvelbar	3	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Luka Gradišar	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Niko Hlebec	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Nino Hlebec	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Tejo Jehart	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Anže Jerman	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Primož Kočevar	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Jan Kopač	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Žiga Letonja	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Sandra Lovrec	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Matija Majhen	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Katja Marinčič	3	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Jernej Martun	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Luka Mehle	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Gašper Murn	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Gašper Nemec	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Rok Novak	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Alen Pavlič	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Klemen Penca	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Dušan Rajlič	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Davor Repatec	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Luka Starčevič	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Gregor Šavorn	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Aleš Šegula	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Špela Šuštarič	3	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Matej Tili	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Anton Vrecl	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Simon Vrhovec	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Jure Zupančič	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Jurij Žagar	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Domen Žalec	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Blaž Žnidaršič	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Toni Žura	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 15. maja 2013 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci ogledali laboratorij Hidroinštituta na Hajdrihovi 28 v Ljubljani.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Peter Češarek, Tomaž Hozjan, Dušan Ružić, Goran Turk, Eva Zupan in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Tejo Jehart	SGŠG Maribor	1. nagrada	71%
Alen Pavlič	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	65%
Matej Tili	SGŠG Maribor	3. nagrada	64%
Anton Vrecl	SGŠG Maribor	3. nagrada	63%
4. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Mitja Avguštinčič	SEŠTG Novo mesto	1. nagrada	75%
Blaž Žnidaršič	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	56%
Luka Starčevič	SGŠG Maribor	3. nagrada	53%
Gašper Murn	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	53%
Jan Kopač	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	53%

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.43	5.70	4.67	8.37	18.94
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	100

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	12.43	11.71	3.43	5.09	16.20
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	20	25	70

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	17.40	10.67	12.40	4.67	45.13
najnižja ocena	0	0	6	0	19
najvišja ocena	25	25	21	25	71

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	13.79	7.11	7.32	9.37	34.00
najnižja ocena	3	0	0	0	0
najvišja ocena	20	25	25	25	75

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom najtežji 2. in 3. naloga pri tretjih letnikih ter 3. naloga pri četrtih.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene celo malo višje kot na predtekmovanju. Naloge za četrte letnike so bile precej uravnotežene, pri tretjih letnikih pa izstopa 4. naloga.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je prvo nalogo pravilno rešilo kar 13 udeležencev, ostale naloge pa so povsem pravilno rešili po trije dijaki oziroma dijakinje. Pri četrtih letnikih je prvo nalogo pravilno rešilo devet udeležencev tekmovanja, drugo in četrto po dva tekmovalca, tretje izmed predtekmovalnih nalog pa ni povsem pravilno rešil nihče. Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Tretje naloge pri tretjih letnikih in prve naloge pri četrtih letnikih ni povsem pravilno rešil nihče.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
10	3	3	3
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
9	2	0	2

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
4	2	0	2
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	2	1	2

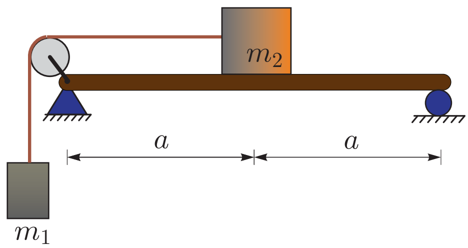
Letošnje tekmovanje je finančno podprla:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Kladi na sliki sta povezani z vrvjo prek škripca. Masa klade m_1 je ravno tolikšna, da kladi še mirujeta. Določi diagrame notranih sil in upogibnih momentov v nosilcu! Težnostni pospešek je 10 m/s^2. Trenje v ležaju škripca zanemari!
Podatki: $m_2 = 10$ kg, $k_t = 0.2$, $a = 60$ cm.



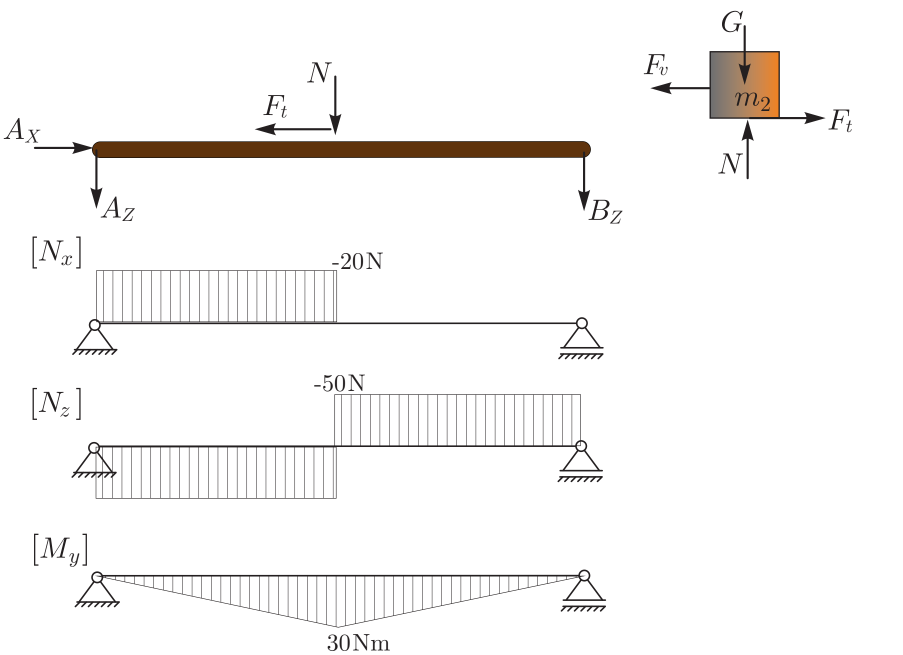
Rešitev: Sistem teles razstavimo in medsebojne vplive nadomestimo s silami. Iz ravnotežne enačbe za sistem navpičnih sil, ki deluje na klado, sledi:

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad G - N = 0 \rightarrow \quad N = m_2\, g = 100 \text{ N}.$$

Mejna sila trenja med nosilcem in klado je odvisna od normalne sile podlage in koeficienta trenja:

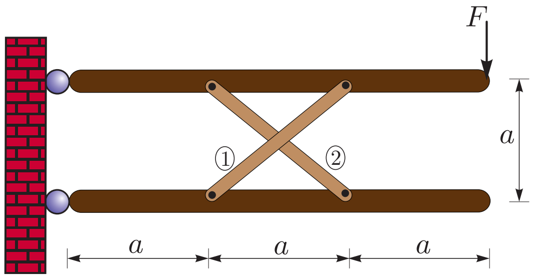
$$F_t = k_t N = 20 \text{ N}.$$

Sili F_t in N predstavljata točkovno obtežbo na sredi razpona prostoležečega nosilca. Diagrame notranjih sil in momentov za tako obtežen nosilec prikazujemo na spodnji sliki.

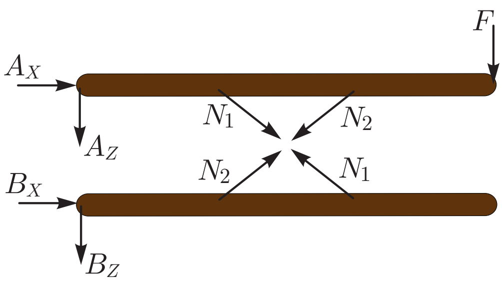


2. naloga

Za konstrukcijo na sliki določi osni sili v palicah 1 in 2 ter diagrame notranjih momentov v nosilcih. Palici sta izvedeni tako, da se med seboj ne ovirata!
Podatki: $a = 2$ m, $F = 10$ kN.



Rešitev: Palici in podpori odstranimo, njihov vpliv nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



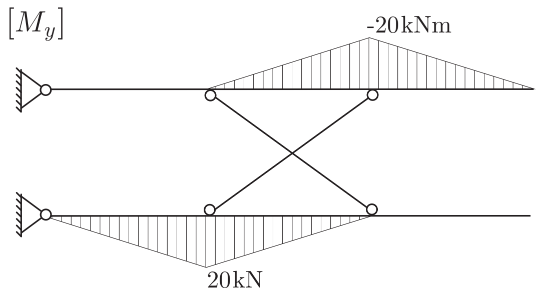
Za celoten sistem sil zapišemo momentna ravnotežna pogoja glede na točki A in B:

$$\sum M^A = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_X\, a - F\, 3a = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_X = 3F$$
$$\sum M^B = 0 \qquad \rightarrow \qquad -A_X\, a - F\, 3a = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X = -3F.$$

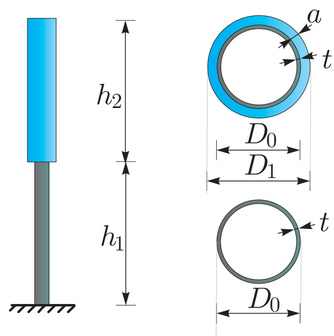
Zapišimo še ravnotežna pogoja v vodoravni smeri, ločeno za zgornji in spodnji nosilec:

$$\sum_{\text{zgornji del}} X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\sum_{\text{spodnji del}} X = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_X - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Dobili smo sistem dveh linearnih enačb za dve neznanki. Rešitvi sta $N_1 = 2F/\sqrt{2} = 14.14$ kN in $N_2 = -4F/\sqrt{2} = -28.8$ kN. Diagrame upogibnih momentov, kot so prikazani na sliki, dobimo z reševanjem ravnotežnih enačb po posameznih poljih.



3. naloga



Na delu antenskega stolpa na sliki je zaradi zmrzali nastala ledena obloga. Določi največjo hitrost vetra v_{max}, da upogibni moment v stolpu ne bo presegel M_{max} = 7010 Nm.
Namig: nadomestna statična porazdeljena obtežba zaradi vetra s hitrostjo v je $q_w = 0.5\rho_z v^2 D$, kjer je D premer nosilca.
Podatki: $a = 50$ mm, $t = 3.6$ mm,
$D_0 = 108$ mm, $\rho_z = 1.25$ kg/m^3,
$h_1 = 5$ m, $h_2 = 5$ m.

Rešitev: Nadomestna statična porazdeljena obtežba na antenskem stolpu zaradi vetra je odsekoma konstantna. S q_1 označimo obtežbo na spodnjem delu stolpa, s q_2 pa obtežbo na zgornjem delu. Obe obtežbi izrazimo z neznano hitrostjo vetra:

$$q_1 = 0.5 \cdot 1.25 \cdot 0.108\, v^2 = 0.0675\, v^2$$
$$q_2 = 0.5 \cdot 1.25 \cdot 0.208\, v^2 = 0.13\, v^2.$$

Največji upogibni moment stebra je tik ob vpetišču, izrazimo ga z obtežbo

$$M = q_1 h_1 \frac{h_1}{2} + q_2 h_2 \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right).$$

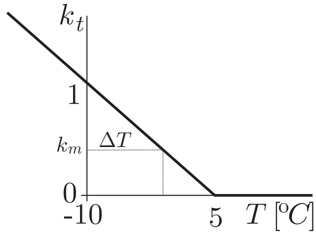
Največji upogibni moment predstavlja zgornjo mejo za hitrost vetra

$$7010 \geq v^2(0.0675 \cdot 12.5 + 0.13 \cdot 37.5) \quad \rightarrow \quad v_{max} \leq 35.01\,\mathrm{m/s}^2.$$

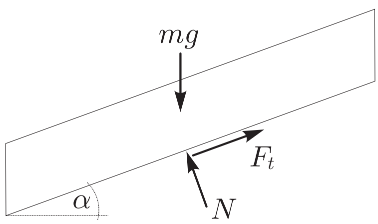
4. naloga

Na poševno streho z naklonom $\alpha = 20°$, širine a in dolžine b, je zapadel sneg višine h. Sneg je na strehi do porušitve stika med snegom in streho. Koeficient trenja oziroma lepenja med streho in snegom je linearna funkcija zunanje temperature, kot kaže slika. Določi najvišjo temperaturo, pri kateri sneg še ne zdrsne s strehe!

Podatki: $a = 10$ m, $b = 8$ m, $h = 0.5$ m, $\rho_s = 200$ kg/m^3.



Rešitev: Sneg pred zdrsom obravnavamo kot togo telo, vpliv podlage pa nadomestimo z normalno silo N in silo trenja oziroma lepenja F_t.



V smereh vzdolž strehe in pravokotno na streho zapišemo ravnotežna pogoja

$$mg\cos\alpha - N = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\alpha$$
$$mg\sin\alpha - F_t = 0 \quad \rightarrow \quad mg\sin\alpha - k_t N \le 0.$$

Enačbi določata mejni koeficient trenja

$$mg\left(\sin\alpha - k_t\cos\alpha\right) \le 0 \quad \rightarrow \quad k_t \ge \mathrm{tg}\alpha = 0.364.$$

Spremembo temperature, ki ustreza zmanjšanju koeficienta trenja z 1 na 0.364, določimo z razmerjem

$$\frac{15}{\Delta T} = \frac{1}{1 - 0.364} \quad \rightarrow \quad \Delta T = 9.54\,°C.$$

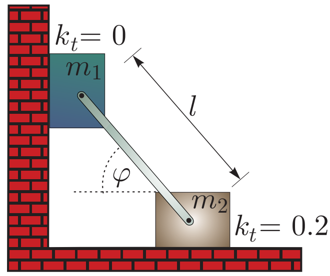
Temperatura, pri kateri sneg zdrsne s strehe, je

$$T_{\text{zdrsa}} = -10 + \Delta T = -0.46\,°C.$$

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

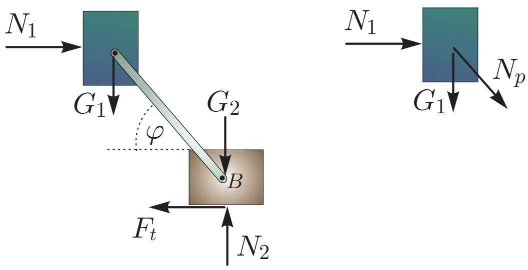
1. naloga

Kladi na sliki z masama m_1 in m_2 sta povezani s togo palico. Za katere kote φ je sistem v ravnotežju? Določi tudi osno silo v palici, ko je φ najmanjši! Težnostni pospešek je 10 m/s^2. Maso palice in velikost klad lahko zanemariš.
Podatki: $m_1 = m_2 = 2$ kg, $l = 40$ cm.



Rešitev: Zunanje vplive na sistem povezanih klad nadomestimo z ustreznimi silami. Za obravnavani ravninski sistem sil zapišemo tri ravnotežne enačbe:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 - F_t = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \leq k_t N_2 = 8\,\text{N}$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad G_1 + G_2 - N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = G_1 + G_2 = 40\,\text{N}$$
$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad G_1 l \cos\varphi - N_1 l \sin\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \text{tg}\varphi = \frac{G_1}{N_1} \geq 2.5.$$

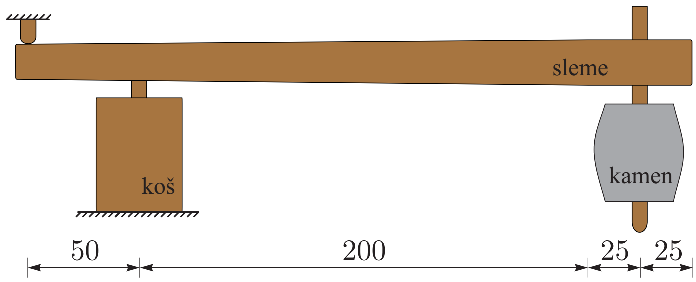


Kot, pod katerim postavimo sistem klad, mora biti vsaj $68.2°$. Iz ravnotežja sil za zgornjo klado določimo še osno silo v palici

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 + N_p \cos\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad N_p = -21.54\,\text{N}.$$

2. naloga

Sleme stiskalnice za sadje z gostoto $750\ \mathrm{kg/m^3}$ ima spremenljiv prečni prerez kvadratne oblike. Dolžina stranice prečnega prereza na levem koncu je 30 cm, na desnem koncu pa 40 cm. Vmes se prečni prerezi linearno spreminjajo. Masa kamna je 350 kg, težnostni pospešek pa $10\ \mathrm{m/s^2}$. Določi ploskovno obtežbo, s katero deluje stiskalnica na koš, če je tlorisna površina koša krog s ploščino $0.3\ \mathrm{m^2}$. Dolžine na sliki so podane v centimetrih.



Rešitev: Sleme stiskalnice modeliramo z ravnim linijskim nosilcem, vpliv kamna in koša s točkovnima silama G in X, lastno težo nosilca pa opišemo s porazdeljeno linijsko obtežbo. Ker se prerez spreminja linearno, je porazdeljena obtežba $q(x)$ kvadratna funkcija koordinate x. Prerez se le malo spreminja, zato lahko pri reševanju uspešno uporabimo tudi linearni in konstantni približek obtežbe q, vendar najprej nalogo rešimo brez poenostavitev. Porazdeljeno linijsko obtežbo $q(x)$ zapišemo kot

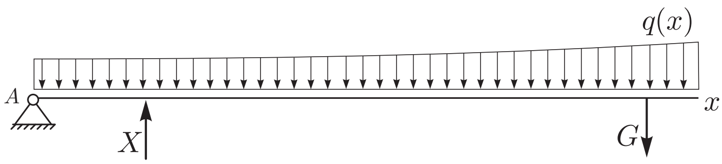
$$q(x) = \rho A\,(x) = \rho a(x) a(x),$$

kjer je $A(x)$ ploščina spremenljivega prereza in $a(x)$ dolžina stranice tega prereza. $a(x)$ se spreminja linearno, zato jo preprosto določimo iz podatkov o dimenzijah prečnega prereza slemena:

$$a(x) = 0.3 + 0.1\frac{x}{L},$$

kjer smo za osnovno dolžinsko enoto uporabili meter. Ko $a(x)$ vstavimo v izraz za $q(x)$, dobimo

$$q(x) = 0.675 + 0.15x + 0.0083x^2 \quad [\mathrm{kN/m}]\,.$$



Neznano silo X, s katero sleme deluje na koš, določimo iz momentne enačbe glede na točko A:

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad X \cdot 0.5 - G \cdot 2.75 - \int\limits_0^3 xq(x)dx.$$

Zaradi kvadratnega poteka obtežbe smo moment, ki ga povzroča porazdeljena obtežba, zapisali z integralom. Iskana sila X je

$$X = 2 \cdot 3.5 \cdot 2.75 + 2 \int\limits_0^3 \left(0.675x + 0.15x^2 + 0.0083x^3\right) dx$$

$$= 19.25 + 2 \left[0.675\frac{x^2}{2} + 0.15\frac{x^3}{3} + 0.0083\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = 28.34\,\mathrm{kN}.$$

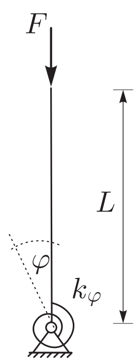
Sedaj lahko določimo še porazdeljeno ploskovno obtežbo p, ki deluje na koš

$$p = \frac{X}{0.3} = 94.5\,\mathrm{kN/m^2}.$$

Ker sta kvadratni in linearni člen v izrazu za $q(x)$ majhna v primerjavi s konstantnim členom, se lahko računu integrala izognemo tako, da zanemarimo enega ali oba. Če vzamemo približek $q(x) \approx 0.675 + 0.15x$, je pripadajoča sila X enaka 28.05 kN, kar le minimalno odstopa od točnega rezultata. Če zanemarimo še linearni člen, pa je $X = 25.325$ kN. Še boljši približek dobimo, če pri predpostavki o enakomerni porazdelitvi lastne teže upoštevamo ploščino prečnega prereza na sredini slemena. V tem primeru je sila $X = 27.519$ kN.

3. naloga

Togi steber na sliki je s podlago povezan z linearno torzijsko vzmetjo s koeficientom k_φ, nepomično členkasto podporo in obtežen s tlačno silo F. Določi diagram sila – zasuk!
Namig: zapiši ravnotežne enačbe za začetno in poljubno premaknjeno lego!
Podatki $k_\varphi = 90$ kNm/rad, $L = 3$ m.



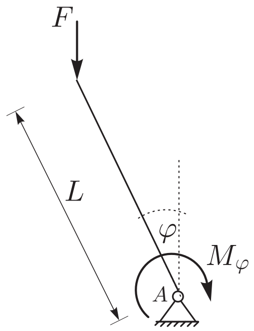
Rešitev: Vzmet izrežemo, njen vpliv pa nadomestimo z momentom M_φ, ki je linearna funkcija zasuka $M_\varphi = k_\varphi \varphi$. Zapišimo momentno ravnotežno enačbo glede na točko A za steber, ki je zavrten za kot φ v pozitivni smeri:

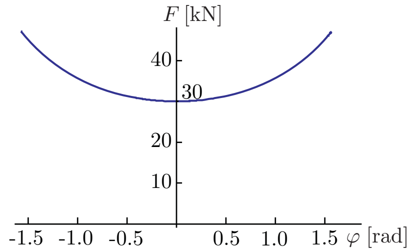
$$FL\sin\varphi - k_\varphi\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad F = \frac{k_\varphi\varphi}{L\sin\varphi}.$$

Kritično silo, pri kateri je pripadajoči zasuk enak nič, lahko določimo na dva načina. Pri prvem načinu jo izračunamo z limito

$$F_{\mathrm{cr}} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{k_\varphi \varphi}{L \sin \varphi} = \frac{k_\varphi}{L},$$

pri drugem načinu pa se računu limite izognemo tako, da že v ravnotežni enačbi predpostavimo, da je zasuk majhen in zato $\sin \varphi \approx \varphi$. Kritična sila je seveda tudi po drugem postopku enaka. Zvezo med silo in zasukom za dane podatke prikazujemo na sliki.

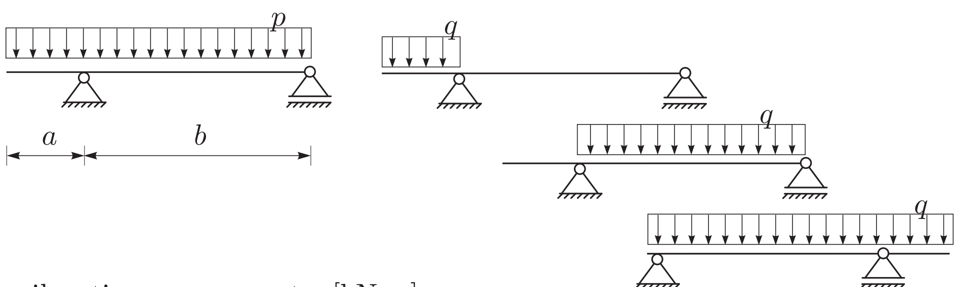




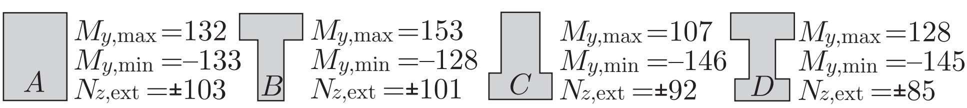
4. naloga

Prostoležeči nosilec s previsom je obtežen s stalno obtežbo p in koristno obtežbo q. Stalna obtežba je porazdeljena po celotnem nosilcu, možne razporeditve koristne obtežbe pa so prikazane na sliki. Nosilec je lahko hkrati obtežen s stalno obtežbo in le eno izmed možnih leg koristne obtežbe. Kateri izmed štirih prečnih prerezov s podanimi nosilnostmi na sliki lahko prevzame vse obtežne kombinacije. Odgovor računsko utemelji!

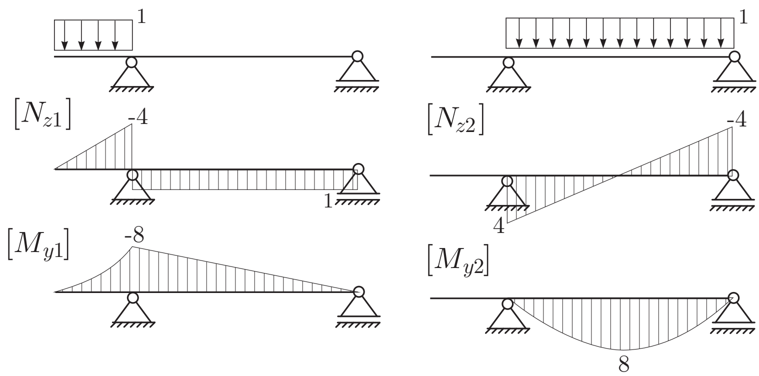
Podatki: $a = 4$ m, $b = 8$ m, $p = 10$ kN/m, $q = 8$ kN/m.



nosilnosti prerezov, enote: [kN,m]



Rešitev: Nalogo zlahka rešimo, če določimo diagrame prečnih sil in upogibnih momentov za vse tri obtežne kombinacije. Ekstremne vrednosti potem primerjamo s podanimi nosilnostmi prečnih prerezov. Vsako obtežno kombinacijo lahko obravnavamo ločeno in določimo pripadajoče diagrame. V predstavljeni rešitvi pa bomo postopali drugače in si reševanje poenostavili z uporabo superpozicije. Po metodi superpozicije lahko diagrame notranjih sil, ki pripadajo posamezni obtežbi, seštevamo in tako dobimo diagrame, ki pripadajo obtežni kombinaciji. Poleg tega lahko diagrame preprosto pomnožimo z obtežnim faktorjem, da dobimo diagrame, ki pripadajo drugačnemu nivoju obtežbe. Tako si za reševanje te naloge pripravimo diagrame notranjih sil le za dva obtežna primera, ki sta prikazana skupaj s pripadajočimi diagrami na spodnji sliki. Za lažje reševanje smo privzeli, da je velikost obtežbe enaka ena.



Določiti moramo diagrame za tri obtežne kombinacije, ki jih označimo z I, II in III :

$$N_z^I = (p+q)N_{z1} + pN_{z2} \qquad M_y^I = (p+q)M_{y1} + pM_{y2}$$
$$N_z^{II} = pN_{z1} + (p+q)N_{z2} \qquad M_y^{II} = pM_{y1} + (p+q)M_{y2}$$
$$N_z^{III} = (p+q)N_{z1} + (p+q)N_{z2} \qquad M_y^{III} = (p+q)M_{y1} + (p+q)M_{y2}.$$

Poljubno kombinacijo torej opišemo kot

$$N_z^c = c_1 N_{z1} + c_2 N_{z2} \quad M_y^c = c_1 M_{y1} + c_2 M_{y2},$$

vrednosti koeficientov pa so:

kombinacija	c_1 [kN]	c_2 [kN]
I	18	10
II	10	18
III	18	18

Za rešitev naloge ne potrebujemo celotnih diagramov, temveč le ekstremne vrednosti. Iz diagramov notranjih sil za oba osnovna obtežna primera in zgornjih enačb je razvidno, da bodo ekstremne prečne sile nad obema podporama, ekstremni negativni upogibni momenti bodo nad levo podporo, lego ekstremnih pozitivnih momentov pa moramo še določiti.
V prvem osnovnem obtežnem primeru so upogibni momenti med podporama opisani z linearno funkcijo $M_{y1}(x) = -8 + x$, v drugem pa s kvadratno funkcijo $M_{y2}(x) = 4x - 0.5x^2$. Pri tem koordinata x preteče območje od 0 do 8 metrov. Obtežna kombinacija je potem $M_y^c(x) = -8c_1 + (c_1 + 4c_2)x - 0.5c_2x^2$. Ničla odvoda $M_y^c(x)$ po parametru x določa lego ekstrema te funkcije:

$$\frac{d}{dx}M_y^c(x) = (c_1 + 4c_2) - c_2 x = 0 \quad \rightarrow \quad x_E = \frac{c_1 + 4c_2}{c_2}.$$

Tako smo dobili izraz za račun točke ekstrema, $M_y^c(x_E)$ pa je pripadajoči ekstremni moment. Rezultate za notranje sile točkah, v katerih so lahko ekstremne vrednosti, prikazujemo v spodnji tabeli.

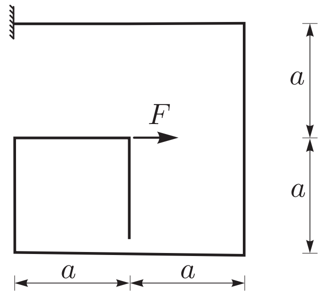
komb.	leva podpora	desna podpora	x_E
I	$N_z^- = -72\,\mathrm{kN}$ $N_z^+ = 58\,\mathrm{kN}$ $M_y = -144\,\mathrm{kNm}$	$N_z = -22\,\mathrm{kN}$ $M_y = 0\,\mathrm{kNm}$	$N_z = 0\,\mathrm{kN}$ $M_y = 24.2\,\mathrm{kNm}$
II	$N_z^- = -40\,\mathrm{kN}$ $N_z^+ = 82\,\mathrm{kN}$ $M_y = -80\,\mathrm{kNm}$	$N_z = -62\,\mathrm{kN}$ $M_y = 0\,\mathrm{kNm}$	$N_z = 0\,\mathrm{kN}$ $M_y = 106.78\,\mathrm{kNm}$
III	$N_z^- = -72\,\mathrm{kN}$ $N_z^+ = 90\,\mathrm{kN}$ $M_y = -144\,\mathrm{kNm}$	$N_z = -54\,\mathrm{kN}$ $M_y = 0\,\mathrm{kNm}$	$N_z = 0\,\mathrm{kN}$ $M_y = 81\,\mathrm{kNm}$

Iz preglednice ekstremnih prečnih sil in upogibnih momentov je razvidno, da le prerez z oznako C lahko prevzame vse obtežne kombinacije.

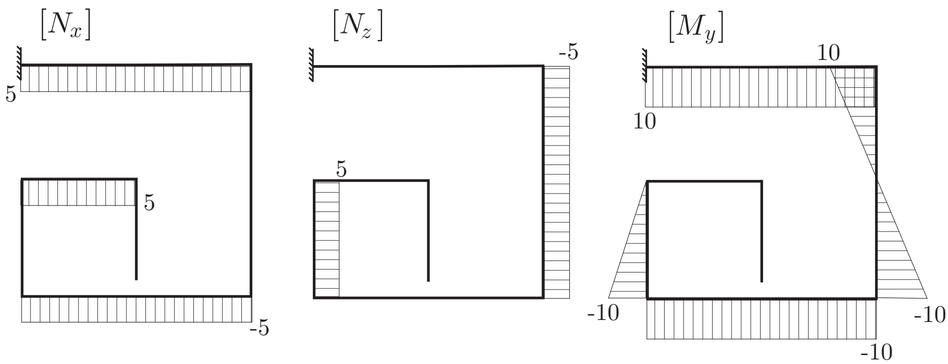
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Za lomljeni previsni nosilec na sliki določi diagrame osnih sil, prečnih sil in upogibnih momentov!
Podatki: $F = 5$ kN, $a = 2$ m.

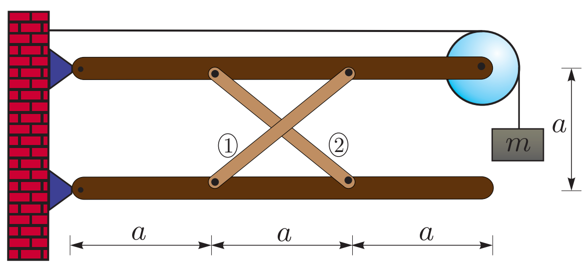


Rešitev: Konstrukcijo razdelimo na posamezna polje in rešimo ravnotežne enažbe za vsako polje posebej. Rezultate prikazujemo v obliki diagramov. Enote, uporabljene pri diagramih, so kilonewtoni in metri.

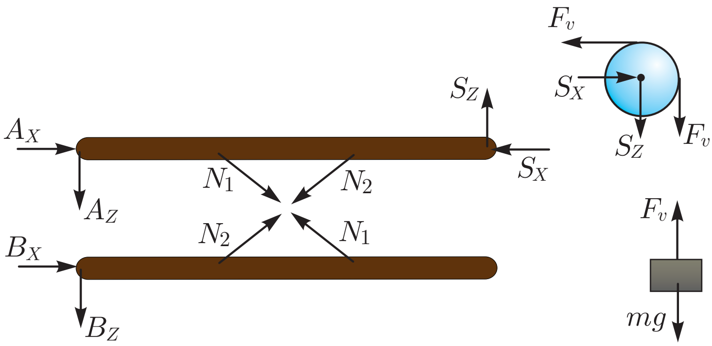


2. naloga

Na konstrukciji na sliki je prek škripca brez trenja obešeno breme z maso m. Določi osni sili v palicah 1 in 2 ter diagrame upogibnih momentov v nosilcih. Palici sta izvedeni tako, da se med seboj ne ovirata! Težnostni pospešek je 10 m/s^2.
Podatki: $a = 2$ m,
$m = 100$ kg.



Rešitev: Sistem teles razstavimo, medsebojne vplive pa nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika.



Najprej rešimo ravnotežne enačbe za sile, ki delujejo na kladi, in sile, ki delujejo na škripcu:

$$\sum_{\text{klada}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad -F_v + mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_v = 1\,\mathrm{kN}$$

$$\sum_{\text{škripec}} X = 0 \quad \rightarrow \quad S_X - F_v = 0 \quad \rightarrow \quad S_X = 1\,\mathrm{kN}$$

$$\sum_{\text{škripec}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad S_Z + F_v = 0 \quad \rightarrow \quad S_Z = -1\,\mathrm{kN}$$

Iz momentnih ravnotežnih enačb glede na točki A in B določimo vodoravni reakciji obravnavane konstrukcije:

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_X\, a + S_Z\, 3a = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = 3\,\mathrm{kN}$$

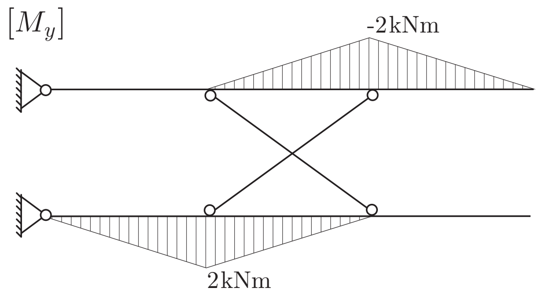
$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad -A_X\, a - S_Z\, 3a + S_X a = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -2\,\mathrm{kN},$$

iz ravnotežnih enačb za vodoravne komponente sil na zgornjem oziroma spodnjem nosilcu pa še osni sili v palicah:

$$\sum_{\text{zgoraj}} X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X - S_X + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{kN}$$

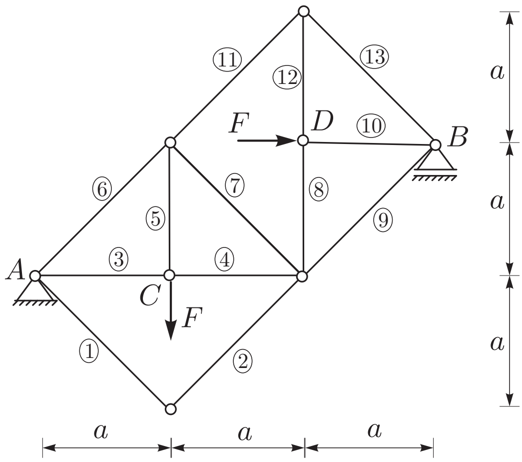
$$\sum_{\text{spodaj}} X = 0 \quad \rightarrow \quad B_X - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = -2\sqrt{2}\,\mathrm{kN}.$$

Za tako razstavljeno konstrukcijo ni več težko določiti diagramov upogibnih momentov. Prikazujemo jih na spodnji sliki.



3. naloga

Za paličje na sliki določi osne sile v vseh palicah!
Podatki: $a = 4$ m,
$F = 10$ kN.



Rešitev: Nalogo rešimo z metodo izrezovanj vozlišč. Število neznank zmanjšamo, če pred tem opazimo, da sta osni sili v prvi in drugi palici enaki nič. Poleg tega predstavljata sistema sil v vozliščih C in D štiri paroma vzporedne in paroma pravokotne sile. Zato velja

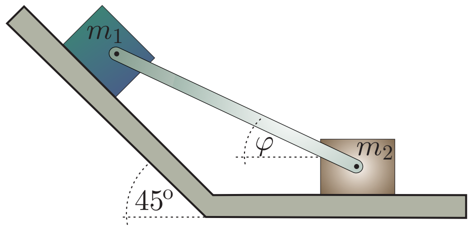
$$N_4 = N_3 \quad N_5 = F$$
$$N_{10} = -F \quad N_{12} = N_8.$$

Preostale osne sile pa so:

$$N_3 = 13.3\,\text{kN} \quad N_6 = -4.71\,\text{kN} \quad N_7 = -7.07\,\text{kN}$$
$$N_8 = -3.33\,\text{kN} \quad N_9 = 11.8\,\text{kN} \quad N_{11} = 2.36\,\text{kN} \quad N_{13} = 2.36\,\text{kN}.$$

4. naloga

Kladi na sliki z masama m_1 in m_2 sta povezani s togo palico. Določi najmanjšo maso klade m_1, pri kateri bo ta sistem zdrsnil! Težnostni pospešek je 10 m/s^2. Maso palice in velikost klad lahko zanemariš.
Podatki: $m_2 = 2$ kg, $k_T = 0.1$,
$\varphi = 20°$.

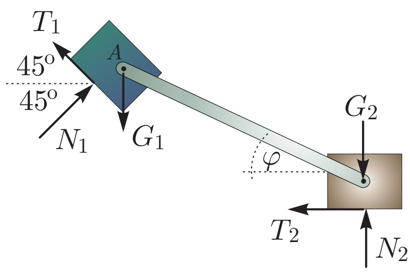


Rešitev: Zunanje vplive na sistem povezanih klad nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika. Zapišimo tri ravnotežne enačbe:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \quad N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - T_2 = 0$$

$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \quad -N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_2 + G_1 + G_2 = 0$$

$$\sum M_Y^A = 0 \qquad \rightarrow \quad -G_2 l \cos\varphi + N_2 l \cos\varphi - T_2 l \sin\varphi = 0.$$



Ob upoštevanju zvez $T_1 = k_T N_1$ in $T_2 = k_T N_2$ za mejne sile trenja dobimo sistem treh linearnih enačb za tri neznanke. Rešitve tega sistema so

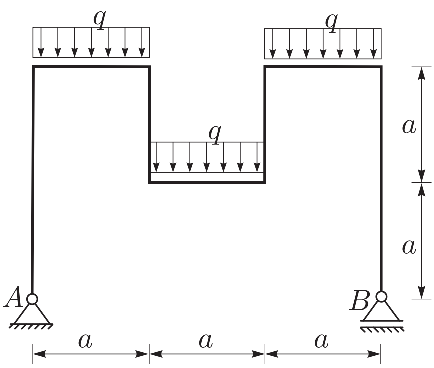
$$N_1 = 3.26\,\text{N} \quad N_2 = 20.76\,\text{N} \quad G_1 = 3.29\,\text{N}.$$

Sila G_1 predstavlja mejno silo teže, pri kateri kladi zdrsneta. Mejna masa prve klade je zato 0.33 kg.

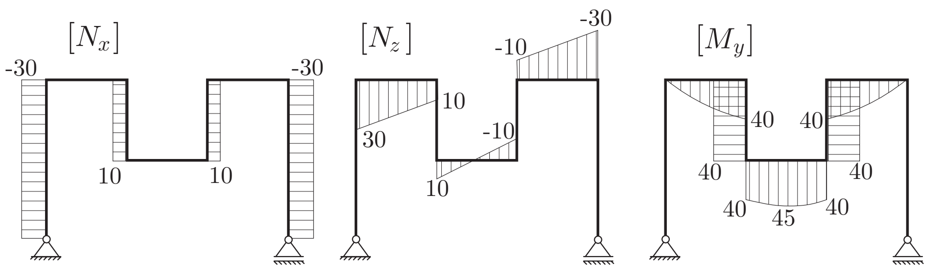
Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Za lomljeni prostoležeči nosilec na sliki določi diagrame osnih sil, prečnih sil in upogibnih momentov!
Podatki: $q = 10\,\mathrm{kN/m}$, $a = 2\,\mathrm{m}$.

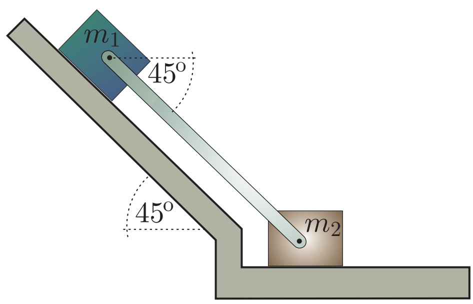


Rešitev: Konstrukcijo pred računom notranjih sil razdelimo na sedem polj. Ker je vodoravna reakcija enaka nič, so osne sile različne od nič le v navpičnih poljih, prečne sile pa so neničelne le v vodoravnih poljih. Zaradi oblike obtežbe so osne sile konstantne, prečne pa linearne. Upogibni momenti so v poljih, ki ležijo v vodoravni smeri, kvadratni, v navpičnih poljih pa so konstantni. Enote, uporabljene pri spodnjih diagramih, so kilonewtoni in metri.



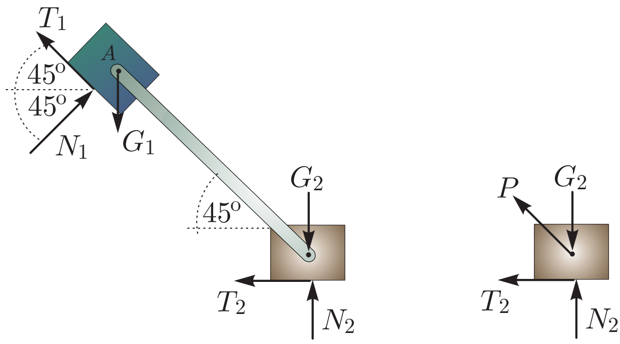
2. naloga

Kladi na sliki z masama m_1 in m_2 sta povezani s togo palico. Določi najmanjši koeficient trenja med kladama in podlago, da bo sistem miroval! Določi tudi osno silo v palici! Težnostni pospešek je $10\ \mathrm{m/s^2}$. Maso palice in velikost klad lahko zanemariš.
Podatki: $m_1 = m_2 = 2$ kg.



Rešitev: Zunanje vplive, ki delujejo na sistem povezanih klad, nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika. Pripadajočie ravnotežne enačbe za ta sistem so:

$$
\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\rightarrow \quad -T_1\frac{\sqrt{2}}{2} - T_2 + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\
\sum Z = 0 \quad &\rightarrow \quad -T_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_2 + G_1 + G_2 = 0 \\
\sum M_Y^A = 0 \quad &\rightarrow \quad -G_2 l\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 l\frac{\sqrt{2}}{2} - T_2 l\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.
\end{aligned}
$$



V enačbah upoštevamo zvezi $T_1 = k_T N_1$ in $T_2 = k_T N_2$, izrazimo N_2 iz tretje enačbe in ga vstavimo v prvi dve. Dobimo sistem dveh linearnih enačb za dve neznanki

$$
\begin{aligned}
&N_1(1 - k_T) - \frac{k_T}{1 - k_T} 20\sqrt{2} = 0 \\
&N_1(1 + k_T) + \frac{1}{1 - k_T} 20\sqrt{2} = 40\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Ko prvo enačbo pomnožimo s $(1 + k_T)$, drugo pa s $-(1 - k_T)$, in ju seštejemo, ostane ena sama kvadratna enačba za mejni koeficient trenja:

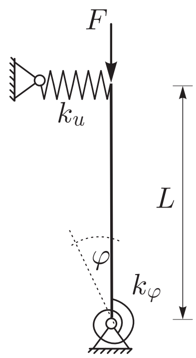
$$k_T^2 - 4k_T + 1 = 0.$$

Rešitvi te enačbe sta dve $k_T = 2 + \sqrt{3}$ in $k_T = 2 - \sqrt{3}$, rešitev naloge pa je manjša izmed obeh vrednosti. Za izračunani minimalni koeficientu trenja določimo še preostale neznane sile:

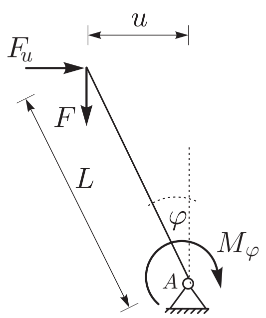
$$N_1 = 14.14\,\mathrm{N} \quad N_2 = 27.32\,\mathrm{N} \quad P = -10.35\,\mathrm{N}.$$

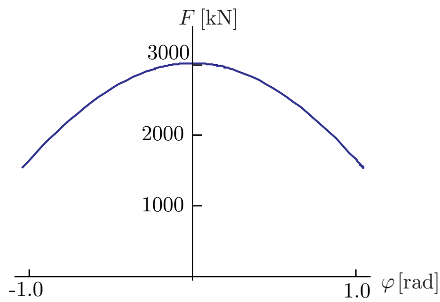
3. naloga

Togi steber na sliki je podprt z linearno vzmetjo s koeficientom k_u na zgornjem robu, linearno torzijsko vzmetjo s koeficientom k_φ in nepomično členkasto podporo na spodnjem robu. V navpični smeri je steber obtežen s tlačno silo F. Določi diagram sila – zasuk!
Namig: zapiši ravnotežne enačbe za začetno in poljubno premaknjeno lego!
Podatki: $k_u = 10$ kN/cm, $k_\varphi = 80$ kNm/rad, $L = 3$ m.



Rešitev: Obe vzmeti izrežemo, vpliv linearne vzmeti nadomestimo s silo F_u, vpliv torzijske vzmeti pa z momentom M_φ. Ker je obnašanje obeh vzmeti linearno, velja $F_u = k_u u$ in $M_\varphi = k_\varphi \varphi$.





Zapišimo momentno ravnotežno enačbo glede na točko A za steber, ki je zavrten za kot φ v pozitivni smeri:

$$F L \sin\varphi - k_\varphi \varphi - k_u u L \cos\varphi = 0.$$

Upoštevati moramo še, da pomik prve vzmeti u in zasuk druge vzmeti φ nista neodvisna. Ker je steber tog, velja $u = L \sin\varphi$ in lahko izrazimo

$$F = \frac{k_\varphi \varphi}{L \sin\varphi} + k_u L \cos\varphi.$$

V posebnem primeru, ko je kot φ enak nič, je velikost sile F enaka kritični vrednosti

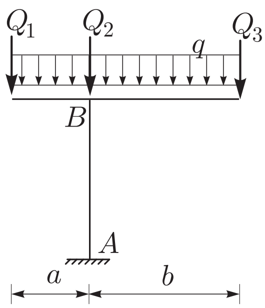
$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{k_\varphi}{L} + k_u L.$$

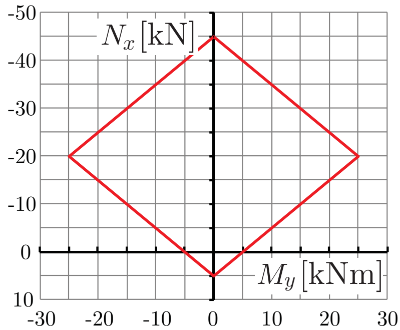
Zvezo med silo in zasukom za dane podatke prikazujemo na zgornji sliki.

4. naloga

Konstrukcija na sliki je obtežena s stalno obtežbo q in poljubno kombinacijo sil Q_1, Q_2 in Q_3 (ena, dve ali vse tri sile hkrati). Ali katera izmed obtežnih kombinacij presega mejno nosilnost prečnega prereza v polju AB? Nosilnost prečnega prereza je podana z interakcijskim diagramom, ki je prikazan na sliki. Odgovor računsko utemelji!

Podatki: $a = 2$ m, $b = 3$ m, $q = 2.5$ kN/m, $Q_1 = 6$ kN, $Q_2 = 10$ kN, $Q_3 = 5$ kN.

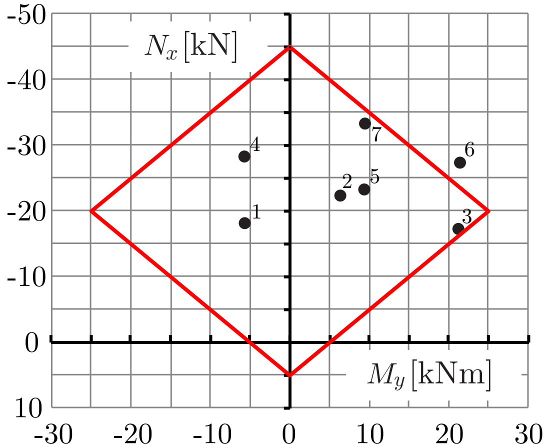




Rešitev: Pri vseh obtežnih kombinacijah so notranje sile v polju AB konstantne. Za rešitev naloge torej zadošča, da določimo osno silo in upogibni moment za vse predpisane obtežne kombinacije v poljubni točki polja AB. Rezultate prikazujemo v preglednici

indeks	obtežna kombinacija	N_x [kN]	M_y [kNm]
1	$\{q, Q_1\}$	-18.5	-5.75
2	$\{q, Q_2\}$	-22.5	6.25
3	$\{q, Q_3\}$	-17.5	21.25
4	$\{q, Q_1, Q_2\}$	-28.5	-5.75
5	$\{q, Q_1, Q_3\}$	-23.5	9.25
6	$\{q, Q_2, Q_3\}$	-27.5	21.25
7	$\{q, Q_1, Q_2, Q_3\}$	-33.5	9.25

Pare vrednosti (N_x, M_y) narišemo na podani interakcijski diagram. Grafični prikaz vrednosti prikazujemo na spodnji sliki.



Točke, ki ležijo zunaj rdeče sklenjene krivulje presegajo nosilnost prečnega prereza. Izmed predpisanih obtežnih kombinacij je le kombinacija z indeksom 6 takšna, da je nosilnost prečnega prereza presežena.

ISBN 9789616884198

9 789616 884198