



22.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO
V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 18. MAJ 2016

Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*



22. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Tomaž Hozjan, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 18. maj 2016

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; HOZJAN, Tomaž; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
22. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk:XXX, Ljubljana

Obseg: 26 strani

Naklada: 100 izvodov

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2018

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

22. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2016

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 22. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Tomaž Hozjan,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Maja Lorgar (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Karlo Petrovčič (Šolski center Nova Gorica),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo
in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 49 dijakinj in dijakov tretjega in 44 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 13. aprila 2016. Osemintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 18. maja 2016 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime in priimek	Letnik	Šola	Mentor
Filip Bezovnik	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Nik Blatnik	3	GK Krško	Erika Broz Žižek
Klemen Brudar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Jurij Govednik	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Pavel Hočevnar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Muamer Jusić	3	SEŠTG Novo mesto	Nevenka Cesar
Florjan Križnik	3	GK Krško	Erika Broz Žižek
Nikolaj Lončarevič	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tilen Omerzo	3	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregel
Kristjan Perko	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Žan Ploj	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Aleksej Rikić	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Anja Sever	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Jaka Štokar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Kevin Švara	3	ŠCNG Nova Gorica	Karlo Petrovčič
Jan Tisu	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Matej Umek	3	GK Krško	Erika Broz Žižek
Denis Zelič	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Martina Eftimova	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Jakob Fabjan	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Matej Gorenjc	4	SEŠTG Novo mesto	Nevenka Cesar
Urban Gramc	4	GK Krško	Erika Broz Žižek
Primož Ivanuša	4	SGŠG Maribor	Andrej Šavara
Matic Jerič	4	SEŠTG Novo mesto	Nevenka Cesar
Marko Klavžer	4	GK Krško	Erika Broz Žižek
Matjaž Kuri	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Gasper Majer	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
David Mavri	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Nejc Novak	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Jure Oblak	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Anja Pacek	4	SEŠTG Novo mesto	Nevenka Cesar
Matic Peric	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
David Rožman	4	GK Krško	Erika Broz Žižek
Katjuša Skledar	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Nika Štradjot	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Tina Šušteršič	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Samo Umek	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Gregor Vidmar	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Martin Zupet	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec

KRATICE ŠOL:

GK Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško
SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje
ŠCNG Nova Gorica	Šolski center Nova Gorica

Sklepno tekmovanje se je začelo 18. maja 2016 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom asist. dr. Davida Antolinca ogledali Konstruktivno prometni laboratorij.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Urška Bajc, Igor Planinc, Anita Treven, Eva Zupan in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Priznanja in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Srebrna priznanja so prejeli vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

ime in priimek	šola	nagrada	točke
3. letnik			
Jurij Govednik	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	80
Jaka Štokar	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	75
Matej Umek	GK Krško	2. mesto	75
Filip Bezovnik	SŠGVO Celje	3. mesto	65
Klemen Brudar	SEŠTG Novo mesto	3. mesto	65
Tilen Omerzo	SGGOŠ Ljubljana	zlato priznanje	
4. letnik			
Matic Peric	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	85
Marko Klavžer	GK Krško	2. mesto	80
Nejc Novak	SGŠG Maribor	3. mesto	75
Martin Zupet	SEŠTG Novo mesto	3. mesto	70
Matej Gorenjc	SGLŠ Novo Mesto	zlato priznanje	
David Mavri	SŠGVO Celje	zlato priznanje	

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	13.57	10.67	7.57	14.18	46.00
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	92

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	7.05	12.39	13.46	14.20	47.10
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	93

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	10.28	16.39	8.33	11.94	46.94
najnižja ocena	0	5	0	0	10
najvišja ocena	25	25	20	25	80

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	9.52	11.19	9.52	14.29	44.52
najnižja ocena	5	0	0	0	5
najvišja ocena	20	25	25	25	85

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da je bila za dijakinje in dijake tretjih letnikov najtežja 3. naloga, za dijakinje in dijake četrth letnikov pa 1. naloga.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene podobne kot na predtekmovanju. Dijaki 3. letnikov so najboljše reševali 2. nalogo, dijaki 4. letnikov pa 4. nalogo.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je četrto nalogo pravilno rešilo kar 17 udeležencev, dobro so reševali tudi prvo in drugo nalogo. Četrth letniki so zelo uspešno reševali drugo predtekmovalno nalogo. Uspešno so reševali tudi tretjo in četrto nalogo. Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Tako pri tretjih kot pri četrth letnikih je največ tekmovalcev povsem pravilno rešilo drugo in četrto nalogo.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
12	8	2	17
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	13	8	6
sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
3	5	0	6
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	5	3	7

Letošnje tekmovanje je v celoti finančno podprla:

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:

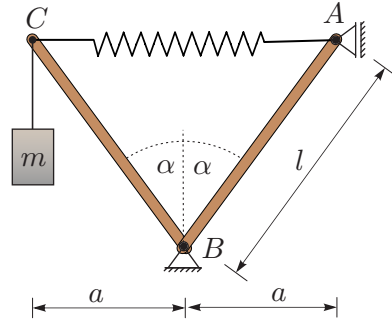
<http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/>.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Na sliki je preprost sistem vzmetenja, sestavljen iz dveh palic dolžine l , povezanih z vzmetjo. Določi koeficient vzmeti tako, da se vzmet pod dano obtežbo ne bo raztegnila več kot 2 cm!

Podatki: $L = 1$ m, $m = 45$ kg, $\alpha = 30^\circ$, $g = 10$ m/s².

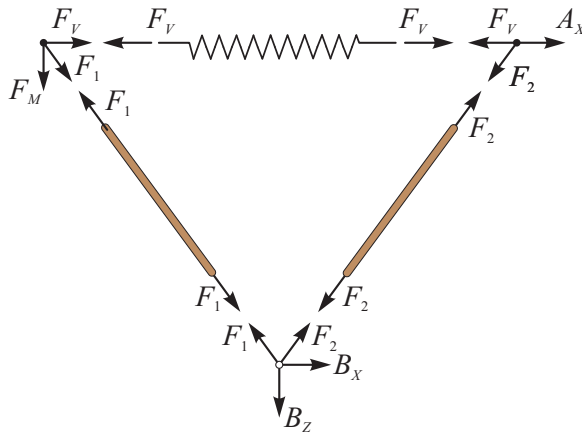


Rešitev: Najprej določimo reakcije podpor:

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z + F_M = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -F_M = -450 \text{ N},$$

$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}F_M - \frac{\sqrt{3}}{2}A_X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = \frac{F_M}{\sqrt{3}} \approx 260 \text{ N},$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + B_X = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = -\frac{F_M}{\sqrt{3}} \approx -260 \text{ N}.$$



Sedaj sistem vzmetenja razstavimo, kot kaže slika. Za vez v podpori B zapišemo ravnotežni enačbi:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad B_X - \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2 = 0,$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_2 = 0.$$

Iz sistema enačb izračunamo

$$F_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F_M \approx -520 \text{ N}, \quad F_2 = 0 \text{ N}.$$

Iz ravnotežne enačbe za vez v podpori A določimo silo v vzmeti

$$\sum X = 0 \rightarrow A_X - F_V - F_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \rightarrow F_V = A_X = \frac{F_M}{\sqrt{3}} \approx 260 \text{ N}.$$

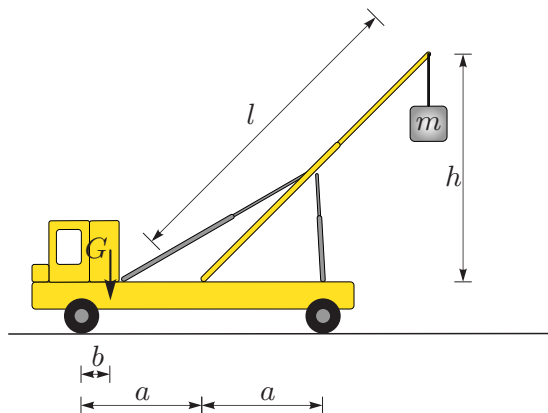
Sila v vzmeti je enaka produktu koeficienta vzmeti in pomika, zato je

$$F_V = k\Delta x \rightarrow k = \frac{F_V}{\Delta x} \approx \frac{260}{2} \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 130 \text{ N/cm}.$$

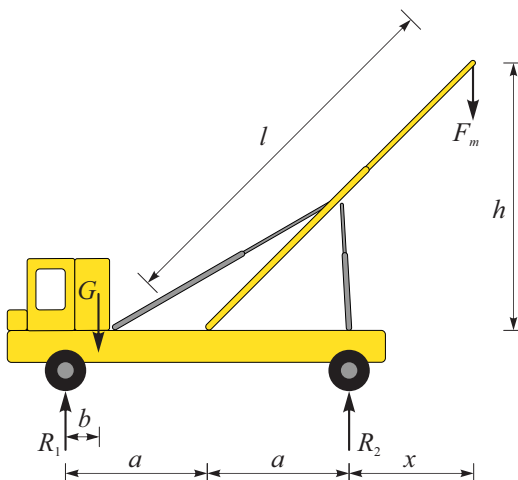
2. naloga

Manjše avtodvigalo s težo $G = 100 \text{ kN}$ dviguje breme z maso $m = 7.5 \text{ t}$, kot je prikazano na sliki. Izrazi največjo dolžino teleskopske roke l v odvisnosti od višine bremena h , pri kateri bo dvigalo še v ravnotežju.

Podatki: $a = 5 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$,
 $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Rešitev: Spodnja slika prikazuje del sistema zunanjih sil, ki deluje na avtodvigalo.



S pomočjo ravnotežnih pogojev in zahteve, da je tik pred prevrnitvijo velikost reakcije v levem kolesu avtodvigala enaka nič ($R_1 = 0$), dobimo:

$$\sum_{\text{desno kolo}} M = 0 \rightarrow G(2a - b) - R_1 2a - F_m x = 0 \rightarrow x = \frac{G(2a - b)}{mg}.$$

Nato iz geometrijske zveze določimo dolžino l v odvisnosti od višine h :

$$l^2 = (a + x)^2 + h^2 \rightarrow l^2 = \left(a + \frac{G}{mg}(2a - b)\right)^2 + h^2,$$

$$l^2 = 17^2 + h^2 \rightarrow l = \sqrt{17^2 + h^2}.$$

3. naloga

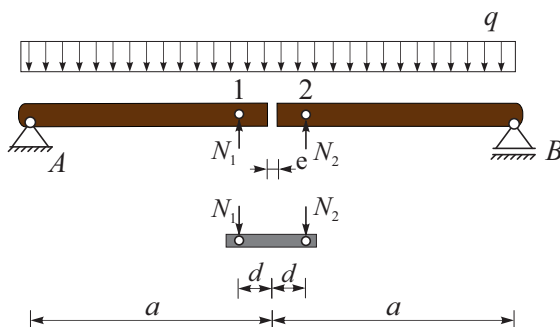
Leseni nosilec dolžine $2a$ in višine $h = 20$ cm na sredini razpona prerežemo. Oba dela med seboj povežemo z jeklenima pločevinama, ki ju pritrdimo z jeklenima vijakoma, kot prikazuje slika. Zaradi sušenja lesa in vodoravnega premika desne podpore se oba dela nosilca med seboj razmakneta za e . Leseni nosilec obtežimo z enakomerno obtežbo q . Opiši obnašanje nosilca, določi reakcije in sile v vijakih za dva primera: (a) $e = 2$ cm in (b) $e \approx 0$ cm.

Podatki: $a = 2.5$ m, $d = 30$ cm, $q = 0.75$ kN/m.

Ko nosilec modeliramo z linisjki elementi ugotovimo, da je konstrukcija labilna, saj le s pomočjo ravnotežnih pogojev ne moremo enolično izračunati reakcij podpor in sil v vezeh. Vendar zaradi geometrijskih in materialnih lastnosti stika za primer $e = 0$ cm, enolično izračunamo reakcije podpor in sile v vezeh. Pokažimo, da je to res.

Rešitev (a): $e > 0$

Na spodnji sliki so prikazane sile, ki delujejo na dela nosilca in na vezno sredstvo.



Napišemo potrebne ravnotežne enačbe za lesena dela nosilca in za vezno srestvo

$$\sum_{\text{levi del}} M^A = 0 \rightarrow \frac{q \left(a - \frac{e}{2}\right)^2}{2} - N_1 (a - d) = 0 \rightarrow$$

$$N_1 = \frac{q \left(a - \frac{e}{2}\right)^2}{2(a - d)},$$

$$\sum_{\text{desni del}} M^B = 0 \rightarrow \frac{q \left(a - \frac{e}{2}\right)^2}{2} - N_2 (a - d) = 0 \rightarrow$$

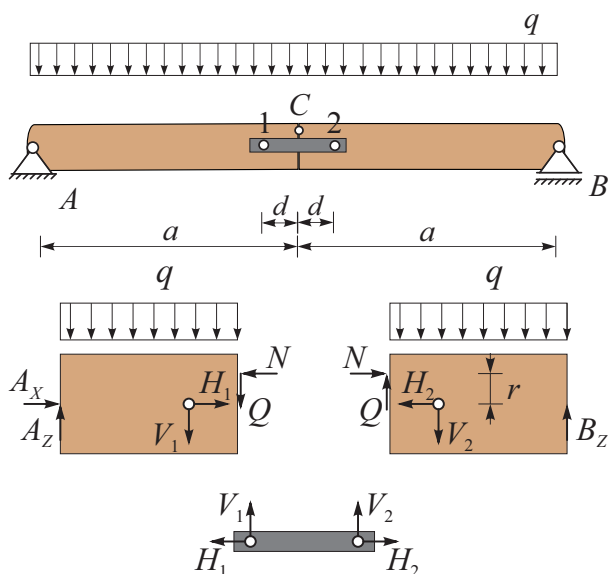
$$N_2 = \frac{q \left(a - \frac{e}{2}\right)^2}{2(a - d)},$$

$$\sum_{\text{vezno srestvo}} Z = 0 \rightarrow N_1 + N_2 + qe = \frac{q \left(a - \frac{e}{2}\right)^2}{a - d} + qe \neq 0 \rightarrow \text{protislovje,}$$

$$\sum_{\text{vezno srestvo}} M^{\text{sredina}} = 0 \rightarrow N_1 d - N_2 d = 0.$$

Iz tretje enačbe sledi, da ravnotežne enačbe niso izpolnjene. Konstrukcija ne miruje!

Rešitev (b): $e \approx 0$



Privzamemo, da se nosilec zaradi dane obtežbe deformira. Zaradi tega nastopijo na zgornjem delu tako povezanega nosilca tlačne normalne napetosti, katerih rezultanta (sila N) prijemlje v točki C . Zaradi trenja se v tem prečnem prerezu pojavi tudi prečna sila Q . Konstrukcijo razrežemo na lesena nosilca in vezno sredstvo, vplive odstranjenih delov nadomestimo s silami v vezeh in pri tem upoštevamo zakon akcije in reakcije. Ravnotežne enačbe zapišemo ločeno za oba nosilca in vezno sredstvo. Najprej jih zapišemo za vezno sredstvo:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 & \rightarrow & H_2 - H_1 = 0, \\ \sum Z &= 0 & \rightarrow & V_1 + V_2 = 0, \\ \sum M^1 &= 0 & \rightarrow & V_2 2d = 0.\end{aligned}$$

Od tu dobimo $V_1 = V_2 = 0$ in $H_1 = H_2 = H$. Nato napišemo ravnotežne enačbe levega lesenega nosilca:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 & \rightarrow & A_X + H - N = 0, \\ \sum Z &= 0 & \rightarrow & A_Z - q a - Q = 0, \\ \sum M^A &= 0 & \rightarrow & N r - \frac{q a^2}{2} - Q a = 0,\end{aligned}$$

kjer smo z r označili navpično razdaljo od osi nosilca do prijemališča sile N . Nazadnje napišemo še ravnotežne enačbe desnega lesenega nosilca:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 & \rightarrow & N - H = 0, \\ \sum Z &= 0 & \rightarrow & B_Z - q a + Q = 0, \\ \sum M^B &= 0 & \rightarrow & -N r + \frac{q a^2}{2} - Q a = 0.\end{aligned}$$

Seštejemo enačbi $\sum M^A = 0$ in $\sum M^B = 0$, dobimo $Q = 0$. Zapišemo še rešitve preostalih enačb

$$\begin{aligned}N &= \frac{q a^2}{2 r}, \\ A_Z &= B_Z = q a.\end{aligned}$$

Oceno velikosti ročice r ugotovimo z naslednjim razmislekom. Predpostavimo linearen potek deformacij po prečnem prerezu na sredini nosilca. Posledično je potek napetosti na tlačnem delu prečnega prereza nosilca tudi linearen in prijemališče rezultante tlačnega dela napetosti je na dveh tretjinah polovice višine prečnega prereza nosilca. Od tu dobimo

$$r \approx \frac{h}{3}$$

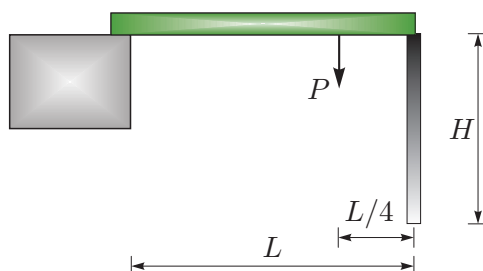
in posledično ocenimo

$$N \approx \frac{3 q a^2}{2 h}.$$

Ker v praksi odmik e lahko zavzame vrednosti večje od nič, obravnavan nosilec vseeno obravnavamo kot konstrukcijo, ki se lahko premika in zato takih konstrukcij ne načrtujemo.

4. naloga

Most, ki si ga je Urban naredil, da lahko po krajši poti pride do šole, je na eni stran podprt na togi brežini na drugi strani pa z jeklenim stebrom, temeljenim na nepodajni kamnini. Zaradi globalnega segrevanja se je jekleni stebel podaljšal za 0.4 cm. Kolikšna mora biti obtežba P na razdalji $L/4$ od jeklenega stebra, da bo most spet vodoraven? Deformacije mostu lahko zanemariš!

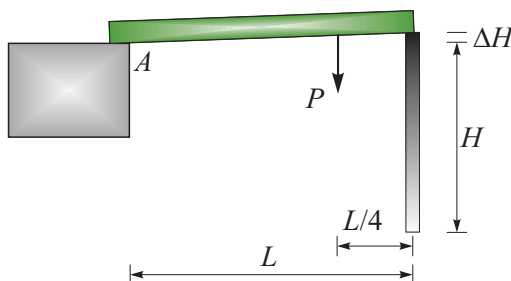


Podatki: $H = 4 \text{ m}$, $L = 6 \text{ m}$, $A_{st} = 5 \text{ cm}^2$, $E_{st} = 21000 \text{ kN/cm}^2$.

Rešitev: Velikost sile P določimo iz ravnotežnega pogoja in pogoja raztezka stebra:

$$F_H = E_{st} A_{st} \frac{\Delta H}{H} \quad \rightarrow \quad F_H = 105 \text{ kN}$$

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad F_H L = P(L - L/4) \quad \rightarrow \quad P = 140 \text{ kN}$$



Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

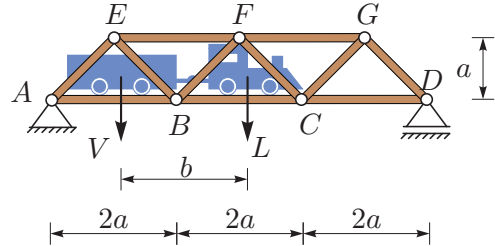
1. naloga

Čez železniški most na sliki pelje lokomotiva z enim vagonom. Ugotovi, katera izmed naslednjih leg vlaka je najmanj ugodna za palico AB: ko je težišče lokomotive nad vozliščem B, C ali D. Za najmanj ugodno lego določi še največjo težo vagona V_{max} tako, da nosilnost N_{max} palice AB ne bo presežena.

Podatki: $a = 5$ m, $b = 10$ m,

$V = 4.5$ MN, $L = 15$ MN,

$N_{max} = 6.5$ MN.

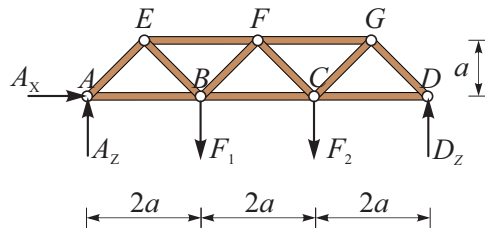


Rešitev: Pri konstrukciji podpore nadomestimo z reakcijami in obravnavamo tri primere:

(a) lokomotiva nad vozliščem B: $F_1 = L$, $F_2 = 0$

(b) lokomotiva nad vozliščem C: $F_1 = V$, $F_2 = L$

(c) lokomotiva nad vozliščem D: $F_1 = 0$, $F_2 = V$



Najprej določimo reakcije podpor v odvisnosti od F_1 in F_2 :

$$\sum X = 0 \rightarrow A_X = 0,$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow 2aF_1 + 4aF_2 - 6aD_Z = 0 \rightarrow D_Z = (F_1 + 2F_2)/3,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + D_Z = F_1 + F_2 \rightarrow A_Z = (2F_1 + F_2)/3.$$

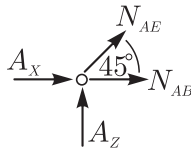
Sedaj določimo osno silo v palici AB (N_{AB}) v odvisnosti od F_1 in F_2 . To določimo s pomočjo ravnotežnega pogoja za vozlišče A:

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + N_{AE} \sin(45^\circ) = 0 \rightarrow$$

$$N_{AE} = -A_Z / \sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{3}(2F_1 + F_2)$$

$$\sum X = 0 \rightarrow A_X + N_{AB} + N_{AE} \cos(45^\circ) = 0 \rightarrow$$

$$N_{AB} = -A_X - N_{AE} \cos(45^\circ) = \frac{1}{3}(2F_1 + F_2)$$



Oсна sila v palici AB je torej v primeru (a) 10 MN, v primeru (b) 35 MN in v primeru (c) 15 MN. Najbolj neugoden je primer (b).

Največjo dovoljeno težo vagona določimo s pomočjo enačbe:

$$V_{max} = \frac{1}{2}(3N_{max} - L) = 90 \text{ MN}.$$

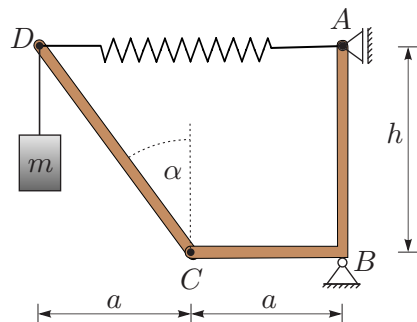
2. naloga

Na sliki je preprost sistem vzmetenja. Določi velikost koeficienta vzmeti, da se vzmet zaradi dane obtežbe raztegne za 1 cm! Določi tudi osno silo v palici CD!

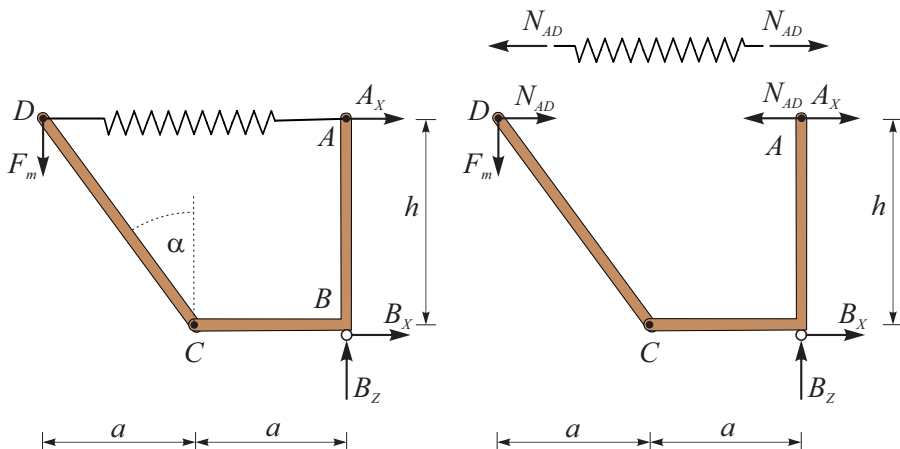
Podatki:

$$a = 30 \text{ cm}, h = 40 \text{ cm},$$

$$m = 35 \text{ kg}, g = 10 \text{ m/s}^2.$$



Rešitev: Medsebojni vpliv med vzmetjo in preostalim delom konstrukcije opišemo z enako velikimi in nasprotno usmerjenimi silami. To prikazujemo na naslednji sliki:



Najprej iz ravnotežnih pogojev za celo konstrukcijo (slika levo) izračunamo reakcije:

$$\begin{aligned}\sum M^A = 0 &\rightarrow 2aF_m + hB_X = 0 \rightarrow B_X = -\frac{2a}{h}F_m = -525 \text{ N}, \\ \sum X = 0 &\rightarrow A_X + B_X = 0 \rightarrow A_X = -B_X = 525 \text{ N}, \\ \sum Z = 0 &\rightarrow B_Z - F_m = 0 \rightarrow B_Z = F_m = 350 \text{ N}.\end{aligned}$$

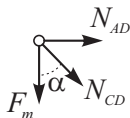
Nato iz ravnotežja podkonstrukcije (slika desno) določimo silo v vzmeti:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{desni del}} M^C = 0 &\rightarrow -hA_X + hN_{AD} + aB_Z = 0 \rightarrow \\ N_{AD} &= \frac{1}{h}(hA_X - aB_Z) = 262.5 \text{ N}.\end{aligned}$$

Togost vzmeti določimo s Hookovim zakonom:

$$N_{AD} = k_{vzmeti}\Delta u \rightarrow k_{vzmeti} = \frac{262.5 \text{ kN}}{1 \text{ cm}} = 262.5 \text{ kN/cm}.$$

Silo v palici CD pa določimo iz ravnotežja v vozlišču D :



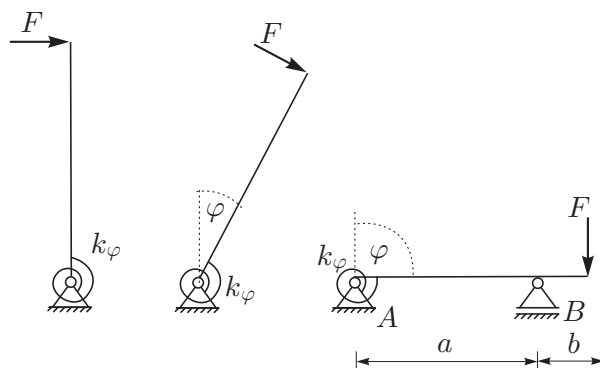
$$\sum Z = 0 \rightarrow F_m + N_{CD} \cos(\alpha) = 0 \rightarrow N_{CD} = -\frac{F_m}{\cos(\alpha)} = -420 \text{ kN}.$$

3. naloga

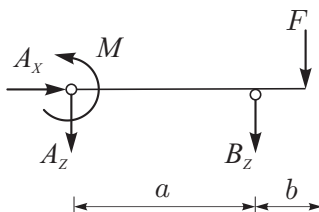
Zložljivi sedež na mestnem avtobusu je členkasto vpet, poleg tega pa ima na mestu vpetja še torzijsko vzmet. Sedež je pospravljen v navpični legi, potem pa se zaradi sile F , ki deluje pravokotno na os sedeža, zavrti v končno lego in pri tem nasloni na podporo B. Izračunaj reakcije in določi

notranje sile v sedežu v vodoravni legi. Notranje sile prikaži z diagrami!

Podatki: $a = 0.5 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ m}$, $F = 500 \text{ N}$, $k_\varphi = 5 \text{ kNcm/rad}$.



Rešitev: V vodoravni legi na nosilec deluje sila F v navpični smeri, kot kaže slika.



Moment M , ki deluje na sedež v vozlišču A izračunamo iz naslednje zveze:

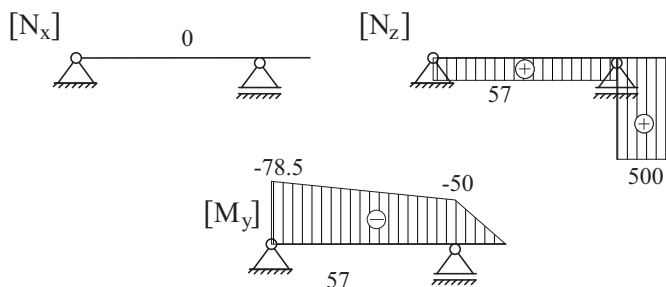
$$M = k_\varphi \frac{\pi}{2} = 5 \frac{\pi}{2} = 7.8 \text{ kNcm} = 78.5 \text{ Nm}.$$

Iz ravnotežja sil izračunamo reakciji A_Z in B_Z

$$\sum M^A = 0 \rightarrow B_Z a + F(a + b) - M = 0 \rightarrow B_Z = -443 \text{ N},$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + B_Z + F = 0 \rightarrow A_Z = -57 \text{ N}.$$

Ko poznamo reakcije, lahko izračunamo notranje sile. Diagrami notranjih sil so prikazani na spodnji sliki.



4. naloga

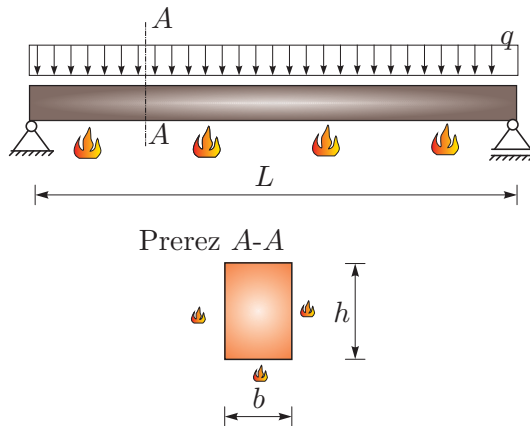
Lesen nosilec iz smrekovega lesa kvalitete C27 je izpostavljen požaru s treh strani. Privzamemo lahko, da les izpostavljen požaru, ogleni s hitrostjo 0.8 mm/min. Določi potrebne dimenzije nosilca, da bo le ta kljuboval požaru vsaj 60 minut! Predpostavi, da je razmerje med višino in širino prereza po 60 minutah požara enako $h/b = 1.8$.

Podatki: $L = 4$ m,

$q = 10$ kN/m,

upogibna trdnost lesa:

$f_m = 2.7$ kN/cm².



Rešitev: Najprej določimo upogibno obremenitev nosilca in debelino zoglenele plasti po 60 minutah požara:

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = 20 \text{ kNm} = 2000 \text{ kNcm},$$

$$d_{char} = 0.08 t = 48 \text{ mm} = 4.8 \text{ cm}.$$

Na osnovi obremenitve določimo potrebne dimenzije lesenega nosilca, pri tem upoštevamo razmerje med višino in širino:

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W} \leq f_m \rightarrow M_{max} = W f_m = \frac{bh^2}{6} f_m = 0.54 b^3 f_m$$

Iz zgornje enačbe dobimo dimenzijo b in iz razmerja še dimenzijo h , kateri moramo prišteti debelino oglja (d_{char}), da dobimo končne dimenzije nosilca.

$$b = 11.1 \text{ cm} \rightarrow h = 20 \text{ cm},$$

$$b_{kon} = b + 2 d_{char} \rightarrow b_{kon} = 20.7 \text{ cm},$$

$$h_{kon} = h + d_{char} \rightarrow h_{kon} = 24.8 \text{ cm}.$$

Glede na rezultat izberemo končne dimenzije nosilca $b/h = 22/26$ cm.

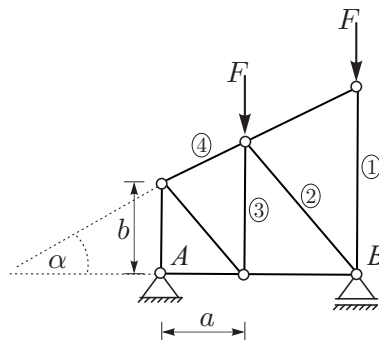
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

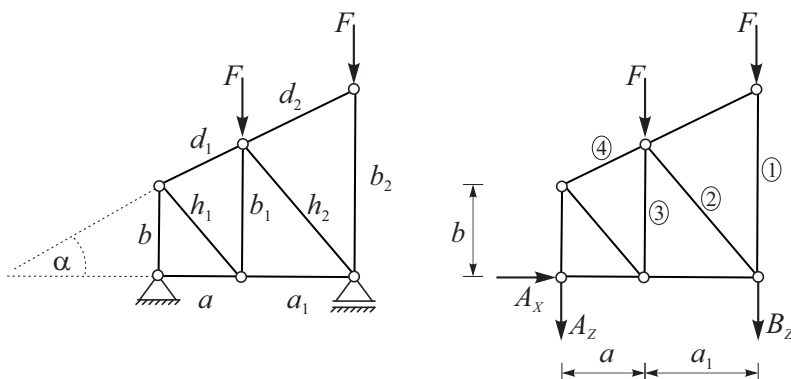
Paličje na sliki je narejeno tako, da sta tudi poševni palici vzporedni. Določi dolžini poševnih palic in osne sile v označenih palicah!

Podatki:

$$F = 10 \text{ kN}, a = 2 \text{ m}, b = 3 \text{ m}, \alpha = 30^\circ.$$



Rešitev: S preprostimi geometrijskimi zvezami določimo dolžini poševnih palic in dolžine preostalih palic, ki jih potrebujemo pri računu. Za določitev velikosti osnih sil v označenih palic moramo najprej določiti reakcije v podporah. Na spodnji sliki so prikazane oznake dolžin palic in sistem sil, ki deluje na paličje.



Račun dolžin palic:

$$b_1 = b + a \tan(\alpha) = 4.155 \text{ m},$$

$$a_1 = a \frac{b_1}{b} = 2.770 \text{ m},$$

$$b_2 = b_1 + a_1 \tan(\alpha) = 5.754 \text{ m},$$

$$h_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 3.606 \text{ m},$$

$$h_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 4.993 \text{ m},$$

$$d_1 = \frac{a}{\cos(\alpha)} = 2.309 \text{ m},$$

$$d_2 = \frac{a_1}{\cos(\alpha)} = 3.198 \text{ m}.$$

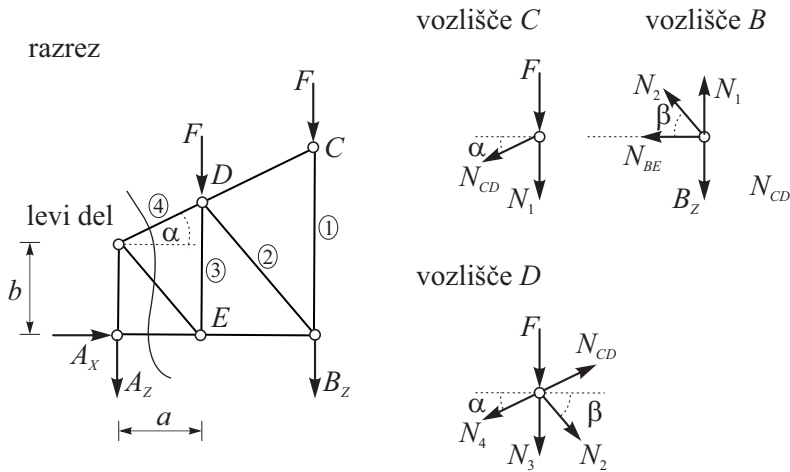
Ravnotežne enačbe za paličje so:

$$\sum X = 0 \rightarrow A_X = 0 \text{ kN},$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow (B_Z + F)(a + a_1) + Fa = 0 \rightarrow B_Z = -14.19 \text{ kN},$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + B_Z + 2F = 0 \rightarrow A_Z = -5.81 \text{ kN}.$$

Osne sile v označenih palicah izračunamo z metodo izrezovanja vozlišč in metodo razreza paličja na dva dela. Na spodnji sliki so prikazane oznake vozlišč, sile v vozliščih in razrez paličja na dva dela.



Najprej iz ravnotežja v vozlišču C in B izračunamo sili v palici 1 in 2. Silo v palici 4 dobimo iz momentnega ravnotežja na točko E za levi del prerezanega paličja. Ko poznamo osni sili v palici 2 in 4, lahko iz ravnotežja v vozlišču D izračunamo še osno silo v palici 3. Vozlišče C :

$$\sum X = 0 \rightarrow N_{CD} = 0 \text{ kN},$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow N_1 = -F = -10 \text{ kN}.$$

Vozlišče B :

$$\tan \beta = \frac{b_1}{a_1} \rightarrow \beta = 56.31^\circ,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow B_Z - N_1 - N_2 \sin \beta = 0 \rightarrow N_2 = -5.04 \text{ kN}.$$

Ravnotežna enačba za levi del prerezanega paličja:

$$\sum_{\text{levi del}} M^E = 0 \rightarrow N_4 \cos \alpha b + N_4 \sin \alpha a - A_Z a = 0 \rightarrow N_4 = -3.23 \text{ kN}.$$

Vozlišče D :

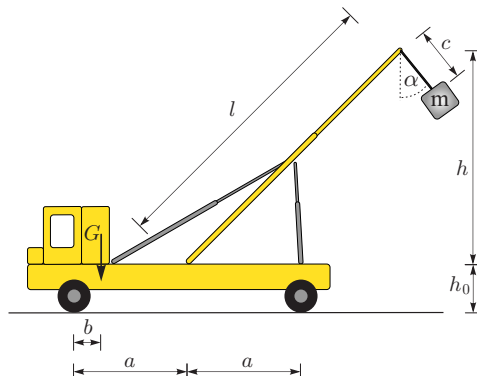
$$\sum Z = 0 \rightarrow N_3 + N_4 \sin \alpha + N_2 \sin \beta + F - N_{CD} \sin \alpha = 0 \rightarrow$$

$$N_3 = -4.19 \text{ kN}.$$

2. naloga

Manjše avtodvigalo s skupno maso m_a dviguje breme z maso m , kot je prikazano na sliki. Zaradi prehitrega dvigovanja breme zaniha z največjim odklonom $\alpha = 45^\circ$. Ali je dvigalo še v ravnotežju? Kolikšen mora biti najmanjši koeficient trenja med gumami in podlago, da dvigalo miruje?

Podatki: $a = 5 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $d = 3.5 \text{ m}$, $m_a = 10 \text{ t}$, $m = 7.5 \text{ t}$, $l = 10 \text{ m}$, $h = 5 \text{ m}$, $h_0 = 1 \text{ m}$.



Rešitev: Vrv, na katero je pripeto breme, prevzame samo radialni del težnostnega pospeška. Sila v vrvi N je zato enaka

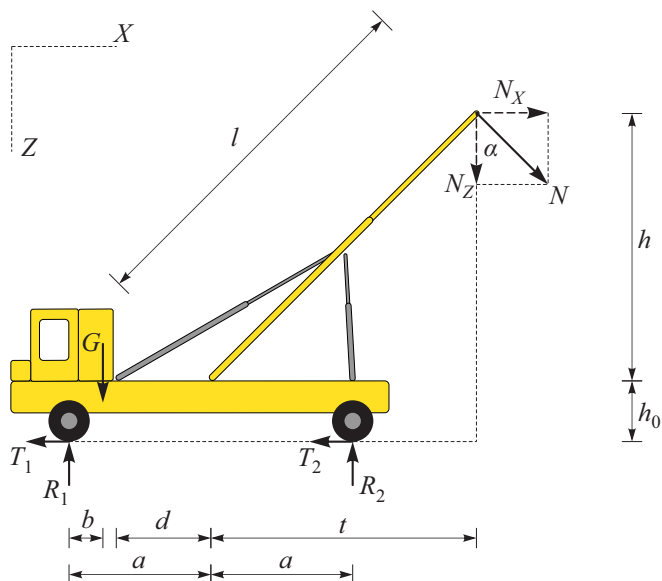
$$N = mg \cos \alpha = 53 \text{ kN}.$$

Razstavimo jo v horizontalni in vertikalni smeri

$$N_X = N \sin \alpha = 37.5 \text{ kN},$$

$$N_Z = N \cos \alpha = 37.5 \text{ kN}.$$

Na sliki na naslednji strani je prikazan sistem sil, ki delujejo na avtodvigalo.



Zapišimo ravnotežne enačbe

$$\sum X = 0 \rightarrow N_X - T_1 - T_2 = 0,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow G + N_Z - R_1 - R_2 = 0,$$

$$\sum M^1 = 0 \rightarrow R_2 2a - Gb - N_Z(a + t) - N_X(h + h_0) = 0.$$

Razdaljo t v ravnotežni enačbi izračunamo z enačbo

$$t = \sqrt{l^2 - h^2} = 8.66 \text{ m}.$$

Iz momentne ravnotežne enačbe izračunamo navpično reakcijo na desno (zadnjo) os avtodvigala,

$$R_2 = \frac{1}{2a} (Gb + N_Z(a + t) - N_X(h + h_0)) = 83.77 \text{ kN},$$

in nato iz enačbe $\sum Z = 0$ še navpično reakcijo na levo (sprednjo) os

$$R_1 = G + N_Z - R_2 = 53.77 \text{ kN}.$$

Ker ta deluje v predpostavljeni smeri se avtodvigalo ne prevrne. Določimo sedaj še potreben koeficient trenja med gumama in podlago. Tega izračunamo s pomočjo enačbe:

$$T_1 + T_2 = k_T(R_1 + R_2).$$

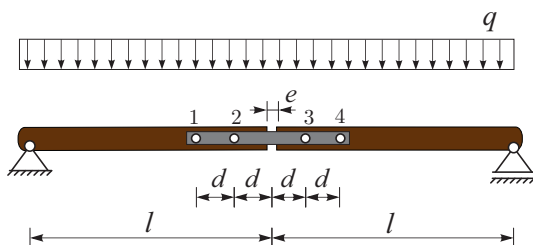
Ker je $T_1 + T_2 = N_X$ (enačba $\sum X = 0$), je koeficient trenja vsaj

$$k_T = \frac{N_X}{R_1 + R_2} = 0.273.$$

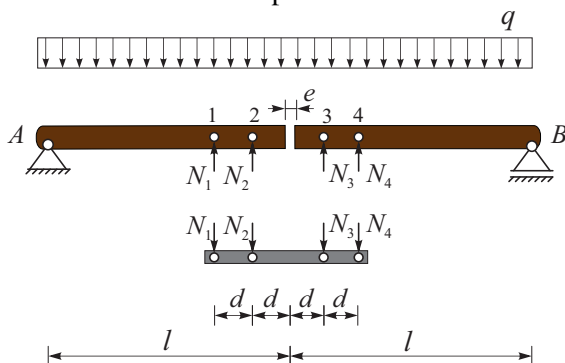
3. naloga

Janez je prerezani tram saniral z dvema jeklenima pločevinama, ki ju je pritrdil s štirimi jeklenimi vijaki, kot kaže slika. Dela tramu sta se med seboj razmaknila za $e = 2$ cm. Tako saniran tram obremenimo z enakomerno linijsko obtežbo q . Izračunaj navpične sile v vijakih 1, 2, 3 in 4. Miha je predlagal, da bi vijaka 1 in 4 odstranili, saj sta po njegovem mnenju vijaka 2 in 3 zadostna za prevzem obtežbe. Ali se z njim strinjaš? Utemelji odgovor!

Podatki: $l = 2.5$ m, $d = 30$ cm, $q = 0.75$ kN/m.



Rešitev: Napišemo potrebne ravnotežne enačbe za lesena dela nosilca in za vezno sredstvo, ki so potrebne za določitev navpičnih sil v veznem sredstvu:



$$\sum_{\text{levi del}} M^A = 0 \rightarrow \frac{q \left(l - \frac{e}{2} \right)^2}{2} - N_2 (l - d) - N_1 (l - 2d) = 0,$$

$$\sum_{\text{desni del}} M^B = 0 \rightarrow \frac{q \left(l - \frac{e}{2} \right)^2}{2} - N_3 (l - d) - N_4 (l - 2d) = 0,$$

$$\sum_{\text{vezno sredstvo}} Z = 0 \rightarrow N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + q e = 0,$$

$$\sum_{\text{vezno sredstvo}} M^{\text{sredina}} = 0 \rightarrow N_2 d + N_1 2d - N_3 d - N_4 2d = 0.$$

Rešitev zgornjih enačb je

$$N_1 = N_4 = -\frac{(4l^2 + e(-4d + e))q}{8d} = -7.805 \text{ kN},$$

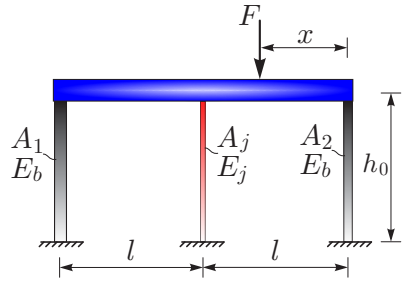
$$N_2 = N_3 = \frac{(4l^2 + e(-8d + e))q}{8d} = 7.798 \text{ kN}.$$

Opomba: Vodoravnih sil v vezeh pri računu nismo upoštevali. Izkaže se, da so le te dejansko enake nič. Z Mihovim predlogom se ne strinjamo. Če odstranimo vijaka 1 in 4, se konstrukcija močno premakne, oziroma, kot rečemo, postane labilna.

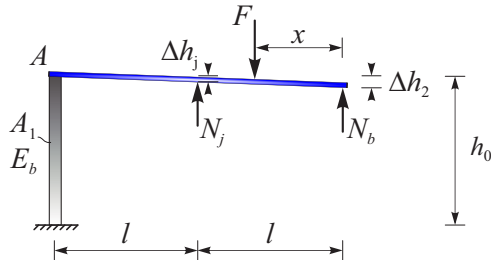
4. naloga

Vodoraven upogibno tog nosilec je na obeh koncih podprt z betonskima, na sredini razpona pa z jeklenim stebrom. Zaradi prehoda vozila se desni stebel skrči za 2 cm, skrčki levega stebra pa so zanemarljivi. Določi težo F in lego vozila x , pri kateri se to zgodi!

Podatki: $A_1 = 2600 \text{ cm}^2$, $A_2 = 1600 \text{ cm}^2$,
 $E_b = 3300 \text{ kN/cm}^2$, $A_j = 113 \text{ cm}^2$,
 $E_j = 21000 \text{ kN/cm}^2$, $h_0 = 6 \text{ m}$, $l = 6 \text{ m}$.



Rešitev: Velikost sile F in lego vozila x določimo iz ravnotežnega pogoja in pogoja skrčkov desnega betonskega in vmesnega jeklenega stebra.



Sili v betonskem in jeklenem stebri določimo iz pogoja skrčkov, ob pogoju, da iz $\Delta h_1 = 0 \rightarrow N_{b1} = 0 \text{ kN}$.

$$\Delta h_2 = 2 \text{ cm in } \Delta h_1 = 0 \text{ cm} \rightarrow \Delta h_j = 1 \text{ cm},$$

$$N_{b2} = E_b A_b \varepsilon_2 = E_b A_b \frac{\Delta h_2}{h_0} = 1760 \text{ kN},$$

$$N_j = E_j A_j \varepsilon_j = E_j A_j \frac{\Delta h_j}{h_0} = 3955 \text{ kN}.$$

Silo F in lego vozila x določimo iz ravnotežja in momentnega pogoja na točko A .

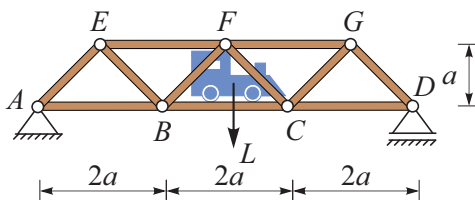
$$\begin{aligned}\sum Z = 0 &\rightarrow F = N_j + N_b = 5715 \text{ kN}, \\ \sum M^A = 0 &\rightarrow N_j l + N_b 2l - F(2l - x) = 0 \rightarrow x = 4.15 \text{ m}.\end{aligned}$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

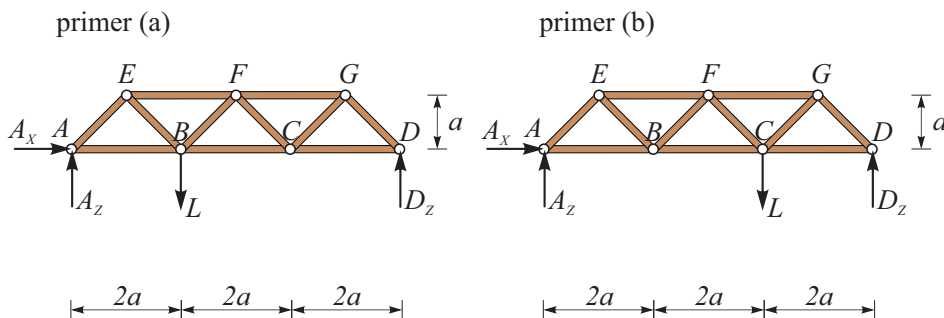
1. naloga

Čez železniški most na sliki pelje lokomotiva. Ugotovi, katera lega lokomotive je najmanj ugodna za palico AE ! Težo lokomotive L upoštevaj kot točkovno obremenitev v njenem težišču. Za najmanj ugodno lego določi tudi notranje sile v nosilcu AB .

Podatki: $a = 5 \text{ m}$, $L = 1.5 \text{ MN}$.



Rešitev: Najmanj ugodne lege lokomotive za določitev velikost osne sile v palici AE so tiste pri kateri je lega težišča lokomotive v vozliščih paličja. Če se lokomotiva nahaja med sosednjima vozliščema, se teža lokomotive razdeli na sosednja vozlišča in je posledično manjša. Obravnavmo naslednja dva sistema sil (potencialno kritična), ki sta prikazana na naslednji sliki.



Najprej določimo reakcije podpor za oba obtežna primera:

– primer (a):

$$\sum X = 0 \rightarrow A_X = 0,$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow L 2a - D_Z 6a = 0 \rightarrow D_Z = \frac{1}{3} L = 33.3 \text{ MN},$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + D_Z - L = 0 \rightarrow A_Z = \frac{2}{3} L = 66.6 \text{ MN}.$$

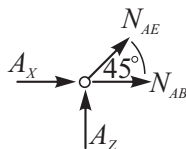
– primer (b):

$$\sum X = 0 \rightarrow A_X = 0,$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow L 4a - D_Z 6a = 0 \rightarrow D_Z = \frac{2}{3} L = 66.6 \text{ MN},$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + D_Z - L = 0 \rightarrow A_Z = \frac{1}{3} L = 33.3 \text{ MN}.$$

Sedaj določimo osni sili v palicah AE in AB . S pomočjo ravnotežnih enačb v vozlišču A dobimo:



$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + N_{AE} \sin(45)^\circ = 0 \rightarrow$$

$$N_{AE} = -A_Z / \sin(45^\circ)$$

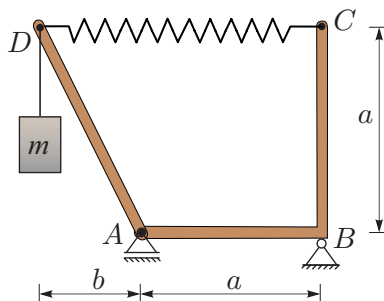
$$\sum X = 0 \rightarrow A_X + N_{AB} + N_{AE} \cos(45)^\circ = 0 \rightarrow$$

$$N_{AB} = -A_X - N_{AE} \cos(45^\circ)$$

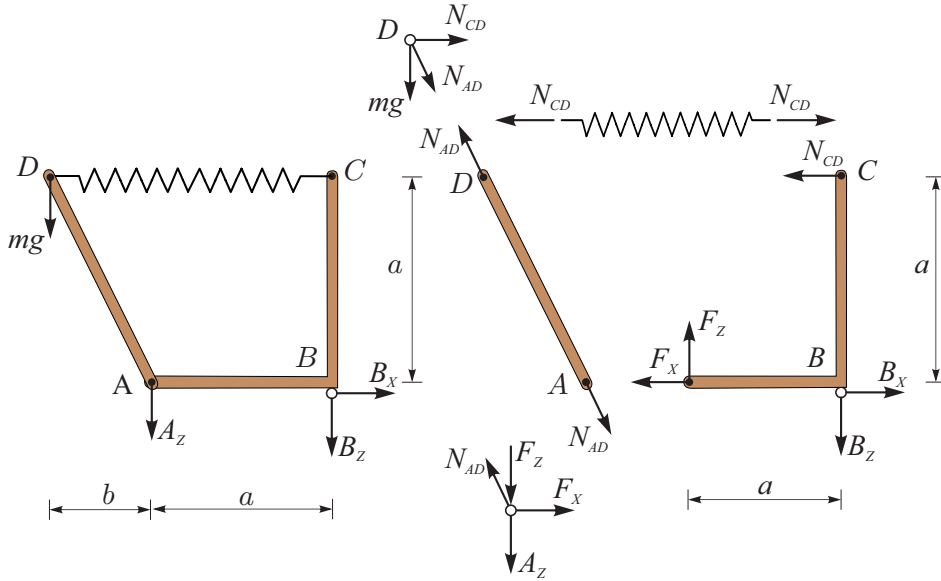
Oсна sila v palici AE je torej v primeru (a) enaka -1.141 MN in v primeru b) pa 0.707 MN. Najbolj neugoden je, kot smo pričakovali, primer (a). Ker sila lokomotive deluje v vozlišču se v nosilcu AB pojavi le osna sila, ki v tem primeru znaša $N_{AB} = 1.141$ MN.

2. naloga

Na sliki je preprost sistem vzmetenja, ki ima vgrajeno nelinearno vzmet. Koeficient vzmeti je kvadratično odvisen od relativnega raztezka vzmeti ε , $k(\varepsilon) = 60(3 - 2 \cdot \varepsilon^2)$ [N/cm]. Kolikšno maso m smemo obesiti v vezi D , da se bo nelinearna vzmet raztegnila za največ $u_{max} = 5$ cm? Relativni raztezek vzmeti ε določimo z enačbo $\varepsilon = \frac{u}{a+b}$, kjer je u raztezek vzmeti DC . Podatki: $a = 0.8$ m, $b = 0.6$ m, $g = 9.81$ m/s².



Rešitev: Medsebojni vpliv med vzmetjo in med preostalim delom konstrukcije opišemo z enako velikimi in nasprotno usmerjenimi silami, kot prikazujemo na naslednji sliki.



Reakcije izračunamo s pomočjo ravnotežnih pogojev za celotno konstrukcijo (slika levo).

$$\sum X = 0 \rightarrow B_X = 0 \text{ N},$$

$$\sum M^A = 0 \rightarrow mg b - B_Z a = 0 \rightarrow B_Z = mg \frac{b}{a} = 0.75 mg,$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow A_Z + B_Z + mg = 0 \rightarrow A_Z = -1.75 mg.$$

Nato iz ravnotežja za desni del podkonstrukcije (slika desno) določimo silo v vzmeti:

$$\sum_{\text{desni del}} M^A = 0 \rightarrow N_{CD} a - B_Z a = 0 \rightarrow N_{CD} = B_Z = 0.75 mg,$$

največjo silo v vzmeti določa nelinearni zakon vzmeti in z maksimalni predpisani pomik vzmeti u_{max} . Velja

$$N_{CD} = k(\varepsilon) u = 60 \left(3 - 2 \frac{0.05^2}{1.4^2} \right) = 899.23 \text{ N}$$

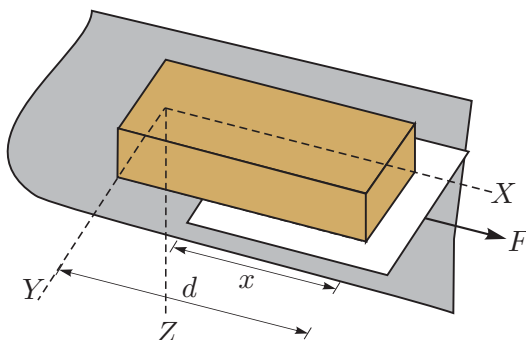
in največja dovoljena masa bremena je

$$0.75 mg = N_{CD} \rightarrow m = \frac{N_{CD}}{0.75 g} = 122.22 \text{ kg}.$$

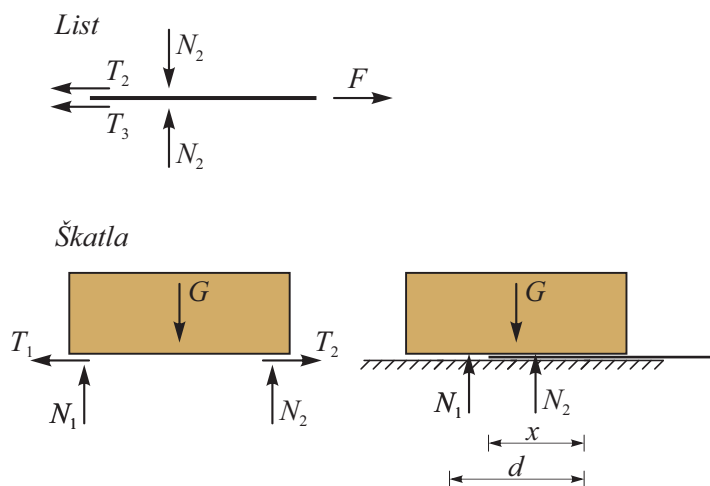
3. naloga

Med škatlo s težo 50 N in podlago postavimo list papirja. List povlečemo v vodoravni smeri. Koeficient trenja med škatlo in podlago ter listom in podlago je enak $k_1 = 0.3$; koeficient trenja med listom in škatlo je enak $k_2 = 0.4$. Določi največjo dolžino lista pod škatlo x , da skupaj z listom ne povlečemo tudi škatle! Določi tudi silo, ko pričneš vleči, ter silo v trenutku, ko list izvlečemo!

Podatki: $d = 35$ cm.



Rešitev: Sistem teles razstavimo na posamezna telesa, medsebojne vplive pa nadomestimo z ustreznimi silami.



Da skupaj z listom ne vlečemo tudi škatle, mora biti sila trenja T_1 med škatlo in podlago večja od sile trenja T_2 med škatlo in papirjem. V računu upoštevamo tudi, da je masa enakomerno razporejena po škatli in tako sta normalni komponenti reakcij podlage enaki $N_1 = \frac{d-x}{d}G$ in $N_2 = \frac{x}{d}G$. Tako dobimo največjo dolžino

lista pod škatlo:

$$T_2 \geq T_1 \rightarrow k_1 N_1 \geq k_2 N_2 \rightarrow x \leq \frac{k_1 d}{k_1 + k_2} \rightarrow x \leq 15 \text{ cm.}$$

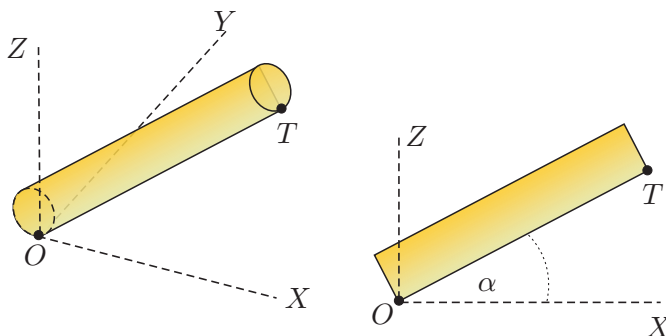
Velikost sile F , ko prično vleči list pri $x = 15 \text{ cm}$, izračunamo iz ravnotežnega pogoja za list:

$$\sum X = 0 \rightarrow F = T_2 + T_3 = k_2 N_2 + k_1 N_2 = 13 \text{ N.}$$

Ko list izvlečemo, je velikost sile enaka 0 N .

4. naloga

Pokončen valj polmera $r = 5 \text{ cm}$ in višine $h = 15 \text{ cm}$ je glede na ravnino XY nagnjen za kot $\alpha = 30^\circ$, kot kaže slika. Točka O je najnižja točka spodnje osnovnice, točka T pa najnižja točka zgornje osnovnice valja. Koordinatni sistem postavimo tako, da je O izhodišče, OT pa leži v ravnini XZ . Valj zavrtimo okoli lastne osi za kot $\beta = 60^\circ$. Določi začetne in končne koordinate točke T .

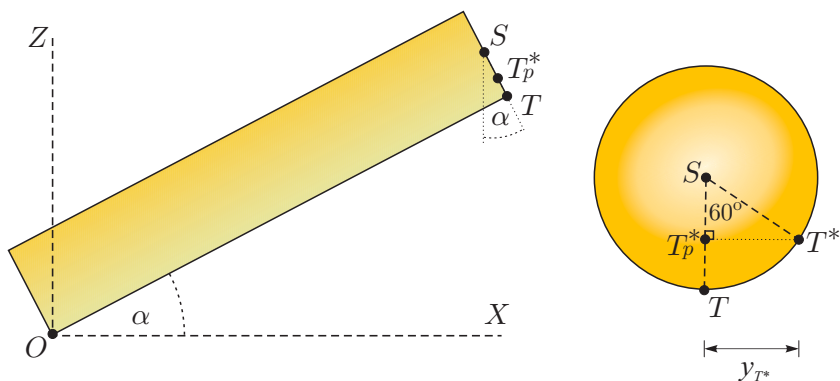


Rešitev: Ker smo koordinatni sistem postavili tako, da točka T leži v ravnini XZ , njenih koordinat v začetni legi ni težko določiti:

$$x_T = h \cos \alpha = 12.99 \text{ cm}, \quad y_T = 0, \quad z_T = h \sin \alpha = 7.5 \text{ cm.}$$

Zavrteno lego točke označimo s T^* . Za določitev koordinat točke T^* si najprej oglejmo točki S in T_p^* na zgornji ploskvi valja. Točka S leži v središču kroga, točka T_p^* pa predstavlja pravokotno projekcijo točke T^* na zveznico med S in T . Koordinati točk T_p^* in T^* v smereh X in Z se torej ujemata. Koordinata točke T_p^* glede na os Y je enaka 0 , za T^* pa velja (glej desno sliko)

$$y_T^* = \pm r \sin \beta = \pm 4.33 \text{ cm.}$$



Točke S , T_p^* in T ležijo na isti premici v ravnini XZ . Ta premica oklepa z osjo Z kot α , kot kaže leva slika. Zato zlahka določimo vodoravno in navpično razdaljo med T_p^* in T :

$$\Delta x = |T_p^*T| \sin \alpha = (r - \cos \beta) \sin \alpha = 1.25 \text{ cm},$$

$$\Delta z = |T_p^*T| \cos \alpha = (r - \cos \beta) \cos \alpha = 2.17 \text{ cm}.$$

Koordinati točk T_p^* in T^* glede na ravnino XZ sta torej

$$x_{T^*} = x_{T_p^*} = x_T - x = 11.74 \text{ cm},$$

$$z_{T^*} = z_{T_p^*} = z_T + z = 9.67 \text{ cm}.$$